

Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 27. Number 2

Moscow
2021

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 27. Номер 2

Москва
2021

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations
Scientific-Theoretical Journal
2021. Volume 27. Number 2

Editorial Board

Editor-in-Chief: *V.I. Shalack* (Moscow), Executive Editor: *N.E. Tomova* (Moscow),
V.A. Bazhanov (Ulyanovsk), *L.Y. Devyatkin* (Moscow), *V.K. Finn* (Moscow),
I.A. Gerasimova (Moscow), *I.A. Gorbunov* (Tver), *Y.V. Ivlev* (Moscow),
V.I. Markin (Moscow), *I.B. Mikirtumov* (St.-Peterburg),
N.N. Nepeivoda (Pereslavl-Zalessky), *S.P. Odintsov* (Novosibirsk),
V.M. Popov (Moscow), *M.N. Rybakov* (Tver), *V.L. Vasyukov* (Moscow),
D.V. Zaitsev (Moscow)

International Editorial Board

Diderik Batens (Belgium), *Johan van Benthem* (Hollald, USA),
Otavio Bueno (USA), *Walter Carnielli* (Brazil), *Valentin Goranko* (Sweden),
Grzegorz Malinowski (Poland), *Graham Priest* (Australia, USA),
Gabriel Sandu (Finland), *Andrew Schumann* (Poland), *Heinrich Wansing* (Germany)

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Scopus*, *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost* (*Philosopher's Index with Full Text*)

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the United Catalogue *The Russian Press* is 42046

Subscription index in the catalogue of Russian Post is IИH145 (since 2022)

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation

Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com

Website: <https://logicalinvestigations.ru>

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2021. Том 27. Номер 2

Редакционная коллегия

Гл. редактор: *В.И. Шалак* (Москва), отв. секретарь: *Н.Е. Томова* (Москва),
В.А. Бажанов (Ульяновск), *В.Л. Васюков* (Москва), *И.А. Герасимова* (Москва),
И.А. Горбунов (Тверь), *Л.Ю. Девяткин* (Москва), *Д.В. Зайцев* (Москва),
Ю.В. Ивлев (Москва), *В.И. Маркин* (Москва),
И.Б. Микиртумов (Санкт-Петербург), *Н.Н. Непейвода* (Переславль-Залесский),
С.П. Одинцов (Новосибирск), *В.М. Попов* (Москва), *М.Н. Рыбаков* (Тверь),
В.К. Финн (Москва)

Международный редакционный совет

Дидерик Батенс (Бельгия), *Йохан ван Бентем* (Голландия, США),
Отавио Буено (США), *Вальтер Карниелли* (Бразилия),
Валентин Горанко (Швеция), *Гржегорж Малиновский* (Польша),
Грехам Прист (Австралия, США), *Габриель Санду* (Финляндия),
Эндрю Шуман (Польша), *Генрих Вансинг* (Германия)

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Scopus*, *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost* (*Philosopher's Index with Full Text*)

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «09.00.00 – философские науки»)

Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» — 42046

Подписной индекс каталога Почты России — ПН145 (с 2022 г.)

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 426

Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com

Сайт: <https://logicalinvestigations.ru>

TABLE OF CONTENTS

PHILOSOPHY AND LOGIC

MARIA M. LEGEYDO	
Intensional semantics for some positive syllogistic systems	9
VLADIMIR I. MARKIN	
Logic of existence judgements and syllogistic	31
VLADIMIR I. SHALACK	
Logic in the process ontology	48

NON-CLASSICAL LOGIC

LEONID YU. DEVYATKIN	
On the expressive power of maximally paraconsistent and maximally paracomplete expansions of FDE	66
MIKHAIL RYBAKOV, DMITRY SHKATOV	
Undecidability of QLTL and QCTL with two variables and one monadic predicate letter	93
NATALYA E. TOMOVA	
On a paranormal criterion for n -valued logical matrices	121

HISTORY OF LOGIC

IRVING H. ANELLIS, VALENTIN A. BAZHANOV	
Image of Soviet and Russian logic in the West. Latter half of the XXth century	133

ANALITYCAL OVERVIEWS

OLEG M. GRIGORIEV	
Systems of temporal logic: moments, histories, trees	153
INFORMATION FOR AUTHORS	186

В НОМЕРЕ

ФИЛОСОФИЯ И ЛОГИКА

М.М. ЛЕГЕЙДО	
Интенциональные семантики для некоторых систем позитивной силлогистики	9
В.И. МАРКИН	
Логика суждений существования и силлогистика	31
В.И. ШАЛАК	
Логика в онтологии процессов	48

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Л.Ю. ДЕВЯТКИН	
О выразительных возможностях максимально паранепротиворечи- вых и максимально парapolных четырехзначных расширений FDE .	66
МИХАИЛ РYBAKOV, DMITRY SHKATOV	
Undecidability of QLTL and QCTL with two variables and one monadic predicate letter	93
Н.Е. ТОМОВА	
О критерии паранормальности для n -значных логических матриц .	121

ИСТОРИЯ ЛОГИКИ

IRVING H. ANELLIS, VALENTIN A. BAZHANOV	
Image of Soviet and Russian logic in the West. Latter half of the XXth century	133

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

О.М. ГРИГОРЬЕВ	
Системы временной логики I: моменты, истории, деревья	153
ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ	185

Философия и логика
Philosophy and logic

М.М. ЛЕГЕЙДО

**Интенциональные семантики
для некоторых систем позитивной силлогистики***

Мария Михайловна Легейдо

МГУ им. М.В. Ломоносова.

Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.

E-mail: legeydo.mm@philos.msu.ru

Аннотация: Статья посвящена рассмотрению интенциональных семантик для некоторых систем позитивной силлогистики: фундаментальной силлогистики и ее подсистем, силлогистики **С2** и силлогистики Больцано.

Интенциональные семантики, представленные в статье, строятся на основе синтаксического подхода, предложенного В.И. Шалаком и далее развитого В.И. Маркиным, при котором общим терминам приписываются формулы пропозиционального языка, а значимость силлогистических констант определяется через отношение классического, а потом и релевантного следования.

В первом разделе статьи содержится описание уже имеющихся интенциональных семантик с релевантным следованием для фундаментальной силлогистики и ее подсистемы **ИФС**, а также предлагаются две новые системы (промежуточные между **ФС** и **ИФС**), для одной из которых доказана адекватность семантики исчислению.

Второй и третий разделы посвящены двум другим известным силлогистическим системам: силлогистике **С2** и силлогистике Больцано. Для обеих систем представлена интенциональная семантика с классическим и релевантным следованием, доказаны адекватность данных семантик соответствующим исчислениям.

Предложенные семантики расширяют выразительные возможности силлогистики, а также представляются интересными в свете развивающегося интенционального подхода к трактовке силлогистических семантик. Также в статье обозначены еще нерешенные проблемы в данной области: предложены возможные семантики для некоторых систем, поиск аксиоматизаций для которых представляет дальнейший интерес.

Ключевые слова: силлогистика, интенциональная семантика, формализация, аксиоматическое исчисление, логическое следование, релевантное следование

Для цитирования: Легейдо М.М. Интенциональные семантики для некоторых систем позитивной силлогистики // Логические исследования / Logical Investigations. 2021. Т. 27. № 2. С. 9–30. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-9-30

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-311-90043.

Введение

В современной силлогистике преобладает понимание категорических суждений как выражающих информацию об отношениях между множествами объектов, а общие термины (субъект и предикат) трактуются как знаки этих множеств. Например, суждение SaP предлагается понимать как «все элементы множества S являются элементами множества P ».

Существует и другой подход к пониманию силлогистических суждений, предложенный впервые Г.В. Лейбницем [Лейбниц, 1982, т. 3, с. 514–523] и названный впоследствии интенциональным, согласно которому отношения между общими терминами трактуются как отношения между содержаниями понятий, которые понимаются как множества общих признаков (свойств) элементов объемов этих понятий. Данный подход был развит с помощью средств современной символической логики, например, В.И. Маркиным [Маркин, 2001; Маркин, 2002].

Следующий шаг в развитии такого подхода был сделан В.И. Шалаком [Шалак, 2015], который предложил приписывать общим терминам формулы языка классической пропозициональной логики, а силлогистические константы интерпретировать через отношение классической выводимости с использованием константы ложности $\mathbf{f}$. Такую семантику можно развить, используя вместо отношения выводимости отношение классического логического следования, а затем и релевантного в системе **FDE** [Маркин, 2016а; Маркин, Легейдо, 2019].

1. Интенциональная фундаментальная силлогистика и ее подсистемы

Адекватные релевантизированные семантики для систем фундаментальной силлогистики (система **ФС**) и интенциональной фундаментальной силлогистики (система **ИФС**) были предложены В.И. Маркиным [Маркин, 2016а]. Приведем их здесь.

Напомним, что схемами аксиом системы **ФС** являются:

ФС0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

ФС1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **ФС5.** $SiP \supset SiS$;

ФС2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **ФС6.** $SoP \supset SiS$;

ФС3. $SeP \supset PeS$; **ФС7.** $SeP \equiv \neg SiP$.

ФС4. SaS ; **ФС8.** $SoP \equiv \neg SaP$.

Единственным правилом вывода в **ФС** является правило *modus ponens*.

Для оценки силлогистических формул при той или иной интерпретации общих терминов вводится функция δ , сопоставляющая каждому общему

термину формулу языка классической логики высказываний (который содержит в качестве исходных связи $\neg, \wedge, \vee$), и задается двухместный метепредикат (например, для системы **ФС** им будет Φ для семантики с классическим следованием и V — для семантики с релевантным). Запись $V(\mathbf{A}, \delta)$ означает: «силлогистическая формула $\mathbf{A}$ значима при интерпретации общих терминов δ ».

Условия значимости для атомарных формул в системе **ФС** с классическим следованием определяются следующим образом:

Определение 1.

$$\begin{aligned}\Phi(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P); \\ \Phi(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \neg\delta(P); \\ \Phi(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P); \\ \Phi(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P).\end{aligned}$$

Формула $\mathbf{A}$ называется Φ -общезначимой, если и только если $\dot{\forall}\delta\Phi(\mathbf{A}, \delta)$.

При замене следования с классического на релевантное меняются и условия значимости атомарных формул в семантике **ФС**:

Определение 2.

$$\begin{aligned}V(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S); \\ V(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P); \\ V(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\ V(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S).\end{aligned}$$

Формула $\mathbf{A}$ называется V -общезначимой, если и только если $\dot{\forall}\delta V(\mathbf{A}, \delta)$.

Система **ИФС** получается путем отбрасывания **ФС5** и **ФС6** и содержит следующие схемы аксиом:

- ИФС0.** Схемы аксиом классического исчисления высказываний;
ИФС1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **ИФС4.** SaS ;
ИФС2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **ИФС5.** $SeP \equiv \neg SiP$.
ИФС3. $SeP \supset PeS$; **ИФС6.** $SoP \equiv \neg SaP$.

Единственным правилом вывода в **ИФС** является правило *modus ponens*.

В.И. Маркиным [Маркин, 2016a] было доказано, что данная система адекватна следующей семантике, для построения которой введем новый предикат значимости V_i :

Определение 3.

$$\begin{aligned}
V_i(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P); \\
V_i(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P); \\
V_i(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\
V_i(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P).
\end{aligned}$$

Системы **ИФС** и **ФС** схожи, однако условия истинности для общих высказываний в системе **ФС** более слабые, чем в **ИФС**, а для частных — более сильные.

Если комбинировать различные условия значимости для атомарных формул, то можно получить еще две системы, которые будут промежуточными между **ФС** и **ИФС**.

Одна из них — **ИФС₂**, где константы e и i трактуются как в **ФС**, а константы a и o — как в **ИФС**. Класс общезначимых формул в такой семантике аксиоматизирует исчисление, полученное из **ФС** путем отбрасывания аксиомы **ФС6** ($SoP \supset SiS$):

ИФС₂0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

ИФС₂1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **ИФС₂5.** $SiP \supset SiS$;

ИФС₂2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **ИФС₂6.** $SeP \equiv \neg SiP$.

ИФС₂3. $SeP \supset PeS$;

ИФС₂7. $SoP \equiv \neg SaP$.

ИФС₂4. SaS ;

Единственным правилом вывода в **ИФС₂** является правило *modus ponens*.

Понятие значимости формул определим для данной системы следующим образом (будем использовать здесь символ W_2 для метапредиката значимости):

Определение 4.

$$\begin{aligned}
W_2(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P); \\
W_2(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P); \\
W_2(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\
W_2(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P).
\end{aligned}$$

Для сложных формул W_2 задается стандартно.

Зададим перевод η из силлогистики **ИФС**₂ в ее подсистему **ИФС**:

Определение 5.

$$\begin{aligned}\eta(SaP) &= SaP; & \eta(SeP) &= (SeP \vee SeS) \vee PeP; \\ \eta(SiP) &= (SiP \wedge SiS) \wedge PiP; & \eta(SoP) &= SoP; \\ \eta(\neg A) &= \neg \eta(A); & \eta(A \nabla B) &= \eta(A) \nabla \eta(B).\end{aligned}$$

Теорема 1. Перевод η погружает **ИФС**₂ в **ИФС**, т.е.

$$\dot{\forall} A (\mathbf{ИФС}_2 \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{ИФС} \vdash \eta(A)).$$

Доказательство. Данная теорема будет доказываться с использованием следующего критерия погружаемости одного исчисления в другое, в основе которого лежит известный критерий В.А. Смирнова [Смирнов, 2021, с. 121–122] (нам потребуется простой вариант этого критерия для случая, когда оба исчисления строятся в одном и том же языке):

«Исчисление **S**₁ погружается в исчисление **S**₂ посредством функции φ_1 , если и только если (1) для каждой формулы **A** имеет место: $\mathbf{S}_1 \vdash A \Rightarrow \mathbf{S}_2 \vdash \varphi_1(A)$, и существует такая функция φ_2 , что (2) для каждой формулы **A** имеет место: $\mathbf{S}_2 \vdash A \Rightarrow \mathbf{S}_1 \vdash \varphi_2(A)$, и (3) для каждой формулы **A** имеет место: $\mathbf{S}_1 \vdash A \equiv \varphi_2(\varphi_1(A))$ ».

Во-первых, покажем, что η -переводы (см. опр. 5) всех теорем системы **ИФС**₂ доказуемы в исчислении **ИФС**. Во-вторых, укажем функцию γ такую, что (а) γ -переводы всех теорем **ИФС** доказуемы в **ИФС**₂ и (б) для любой формулы **A** верно, что формула $A \equiv \gamma(\eta(A))$ доказуема в исчислении **ИФС**₂.

Предварительно нам потребуется продемонстрировать доказуемость в системе **ИФС** формул следующего типа:

T1. $(MeM \wedge SaM) \supset SeS$.

1. $(MeM \wedge SaM) \supset SeM$ **ИФС**₂

2. $SeM \supset MeS$ **ИФС**₃

3. $(MeS \wedge SaM) \supset SeS$ **ИФС**₂

4. $(MeM \wedge SaM) \supset SeS$ 1, 2, 3; ЛВ (логика высказываний)

Покажем справедливость первой части критерия погружаемости, а именно:

$$\dot{\forall} A (\mathbf{ИФС}_2 \vdash A \Rightarrow \mathbf{ИФС} \vdash \eta(A)).$$

Для обоснования этого утверждения достаточно доказать, что η -переводы всех аксиом **ИФС**₂ доказуемы в **ИФС** и что если η -переводы посылок правила *modus ponens* доказуемы в **ИФС**, то в этой системе доказуем и η -перевод его заключения.

ИФС₂0. Переводы аксиом классического исчисления высказываний также являются пропозициональными тавтологиями и поэтому доказуемы в **ИФС**.

ИФС₂1. $\eta((MaP \wedge SaM) \supset SaP) = (MaP \wedge SaM) \supset SaP$.

Аксиома **ИФС1** системы **ИФС**.

ИФС₂2. $\eta((MeP \wedge SaM) \supset SeP) = ((MeP \vee MeM) \vee PeP) \wedge SaM) \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$.

- | | |
|--|--------------------|
| 1. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$ | ИФС2 |
| 2. $(MeM \wedge SaM) \supset SeS$ | T1 |
| 3. $(PeP \wedge SaM) \supset PeP$ | ИФС0 |
| 4. $((MeP \vee MeM) \vee PeP) \wedge SaM) \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$ | 1, 2, 3; ЛВ |

ИФС₂3. $\eta(SeP \supset PeS) = (SeP \vee SeS \vee PeP) \supset (PeS \vee PeP \vee SeS)$.

Выводится непосредственно из **ИФС3**. $(SeP \supset PeS)$ с использованием законов **ЛВ**.

ИФС₂4. $\eta(SaS) = SaS$.

Аксиома **ИФС4** системы **ИФС**.

ИФС₂5. $\eta(SiP \supset SiS) = (SiP \wedge SiS \wedge PiP) \supset (SiS \wedge SiS \wedge SiS)$.

Пропозициональная тавтология (**ИФС0**).

ИФС₂6. $\eta(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \vee SeS \vee PeP) \equiv \neg(SiP \wedge SiS \vee PiP)$.

- | | |
|---|--------------------|
| 1. $SeP \equiv \neg SiP$ | ИФС5 |
| 2. $SeS \equiv \neg SiS$ | ИФС5 |
| 3. $PeP \equiv \neg PiP$ | ИФС5 |
| 4. $(SeP \vee SeS \vee PeP) \equiv \neg(SiP \wedge SiS \vee PiP)$ | 1, 2, 3; ЛВ |

ИФС₂7. $\eta(SoP \equiv \neg SaP) = (SoP \equiv \neg SaP)$.

Аксиома **ИФС7** системы **ИФС**.

Modus ponens

Допустим, что $\eta(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $\eta(\mathbf{A})$ доказуемы в **ИФС**. Поскольку $\eta(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) = \eta(\mathbf{A}) \supset \eta(\mathbf{B})$, формула $\eta(\mathbf{A}) \supset \eta(\mathbf{B})$ является теоремой **ИФС**. Но $\eta(\mathbf{A})$ тоже теорема этой системы. Следовательно, $\eta(\mathbf{B})$ доказуема в **ИФС**.

Итак, мы показали, что η -переводы всех теорем системы **ИФС₂** доказуемы в **ИФС**.

Перейдем к доказательству второй части критерия погружаемости. В качестве обратной функции (перевода из **ИФС** в **ИФС₂**) рассмотрим тождественное преобразование γ : $\gamma(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$.

Поскольку **ИФС** является подсистемой **ИФС**₂, γ -переводы всех теорем **ИФС**₂ доказуемы в **ИФС**:

$$\forall \mathbf{A}(\mathbf{ИФС} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{ИФС}_2 \vdash \gamma(\mathbf{A})).$$

Остается обосновать следующее утверждение:

$$\forall \mathbf{A}(\mathbf{ИФС}_2 \vdash (\mathbf{A} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{A}))))).$$

Его доказательство осуществляем индукцией по числу пропозициональных связок в силлогистической формуле $\mathbf{A}$.

Базис включает четыре случая.

I. $\mathbf{A} = SaP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SaP) = SaP$.

Формула $SaP \equiv SaP$ является тавтологией, а потому и аксиомой (**ИФС**₂0) системы **ИФС**₂.

II. $\mathbf{A} = SeP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SeP) = SeP \vee SeS \vee PeP$.

1. $SeP \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$ **ИФС**₂0
2. $SiP \supset SiS$ **ИФС**₂5
3. $SeP \equiv \neg SiP$ **ИФС**₂6
4. $SeS \equiv \neg SiS$ **ИФС**₂6
5. $SeS \supset SeP$ 2, 3, 4; ЛВ
6. $PiS \supset PiP$ **ИФС**₂5
7. $PeS \equiv \neg PiS$ **ИФС**₂6
8. $PeP \equiv \neg PiP$ **ИФС**₂6
9. $PeP \supset PeS$ 6, 7, 8; ЛВ
10. $PeS \supset SeP$ **ИФС**₂3
11. $PeP \supset SeP$ 9, 10; ЛВ
12. $SeP \equiv (SeP \vee SeS \vee PeP)$ 1, 5, 11; ЛВ

III. $\mathbf{A} = SiP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SiP) = SiP \wedge SiS \wedge PiP$.

IV. $\mathbf{A} = SoP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SoP) = SoP$.

Эти два случая сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу схем аксиом **ИФС**₂6 и **ИФС**₂7.

При обосновании индуктивного перехода принимаем допущение, что для любой формулы $\mathbf{B}$, содержащей меньше пропозициональных связок, чем $\mathbf{A}$, верно, что $\mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{B}))$ доказуема в системе **ИФС**₂.

V. $\mathbf{A} = \neg \mathbf{B}$.

Согласно индуктивному допущению, $\mathbf{ИФС}_2 \vdash \mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{B}))$. По законам логики высказываний отсюда вытекает: $\mathbf{ИФС}_2 \vdash (\neg \mathbf{B} \equiv \neg \gamma(\eta(\mathbf{B})))$. По определению переводов η и γ имеем: $\gamma(\eta(\neg \mathbf{B})) = \gamma(\neg \eta(\mathbf{B})) = \neg \gamma(\eta(\mathbf{B}))$. Следовательно, $\mathbf{ИФС}_2 \vdash (\neg \mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\neg \mathbf{B})))$.

VI. $\mathbf{A} = \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$.

Согласно индуктивному допущению, формулы $\mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{B}))$ и $\mathbf{C} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{C}))$

доказуемы в **ИФС₂**. Отсюда по законам логики высказываний вытекает, что и формула $(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}) \equiv (\gamma(\eta(\mathbf{B})) \supset \gamma(\eta(\mathbf{C})))$ доказуема в этой системе. Но по определению переводов η и γ $\gamma(\eta(\mathbf{B} \supset \mathbf{C})) = \gamma(\eta(\mathbf{B}) \supset \eta(\mathbf{C})) = \gamma(\eta(\mathbf{B})) \supset \gamma(\eta(\mathbf{C}))$. Следовательно, **ИФС₂** $\vdash (\mathbf{B} \supset \mathbf{C}) \equiv \gamma(\eta(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}))$.

Другие случаи, когда $\mathbf{A}$ есть сложная формула, рассматриваются сходным образом. ■

Теорема 2. *Произвольная силлогистическая формула $\mathbf{A}$ W_2 -общезначима, если и только если ее перевод $\eta(\mathbf{A})$ V_i -общезначим.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию δ , сопоставляющую общим терминам формулы пропозиционального языка в сигнатуре $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Покажем, что $W_2(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(\mathbf{A}), \delta)$ (см. опр. 3 и 4) для любой формулы $\mathbf{A}$ языка силлогистики.

Снова будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связей в составе $\mathbf{A}$.

I. $\mathbf{A} = SaP$. $W_2(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \Leftrightarrow V_i(SaP, \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(SaP), \delta)$.

II. $\mathbf{A} = SeP$.

$W_2(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P) \Leftrightarrow V_i(SeP, \delta) \dot{\vee} V_i(SeS, \delta) \dot{\vee} V_i(PeP, \delta) \Leftrightarrow V_i(SeP \vee SeS \vee PeP, \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(SeP), \delta)$.

III. $\mathbf{A} = SiP$.

IV. $\mathbf{A} = SoP$.

Эти два случая сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу того, что условия их W_2 -значимости и V_i -значимости противоречат соответствующим условиям значимости атомарных формул SeP и SaP .

Далее рассматриваем случаи, когда $\mathbf{A}$ — сложная формула. Используем индуктивное допущение: для любой формулы $\mathbf{B}$ с меньшим, чем у $\mathbf{A}$, числом пропозициональных связей верно, что $W_2(\mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(\mathbf{B}), \delta)$.

V. $\mathbf{A} = \neg B$.

$W_2(\neg B, \delta) \Leftrightarrow \neg V_i(\eta(\mathbf{B}), \delta) \Leftrightarrow V_i(\neg\eta(\mathbf{B}), \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(\neg B), \delta)$.

VI. $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \supset \mathbf{C})$.

$W_2(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}) \Leftrightarrow \neg W_2(\mathbf{B}, \delta) \dot{\vee} W_2(\mathbf{C}, \delta) \Leftrightarrow \neg V_i(\eta(\mathbf{B}), \delta) \dot{\vee} V_i(\eta(\mathbf{C}), \delta) \Leftrightarrow V_i((\eta(\mathbf{B}) \supset \eta(\mathbf{C})), \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}), \delta)$.

Остальные случаи индуктивного перехода рассматриваются аналогично.

Таким образом, мы обосновали следующее метаутверждение:

$$\dot{\vee} \mathbf{A} \dot{\vee} \delta(W_2(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(\mathbf{A}), \delta)).$$

Из него по законам первопорядковой логики следует:

$$\dot{\vee} \mathbf{A} (\dot{\vee} \delta W_2(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \dot{\vee} \delta V_i(\eta(\mathbf{A}), \delta)).$$

Последнее означает, что произвольная формула $\mathbf{A}$ W_2 -общезначима в том и только в том случае, когда V_i -общезначим ее перевод $\eta(\mathbf{A})$. ■

Теорема 3. *Для произвольной силлогистической формулы $\mathbf{A}$ верно, что $\eta(\mathbf{A})$ доказуема в ИФС, если и только если $\eta(\mathbf{A})$ — V_i -общезначимая формула.*

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота силлогистики ИФС доказаны в [Маркин, 2016a]: произвольная формула языка силлогистики доказуема в данной системе, если и только если она V_i -общезначима (см. опр. 3). Поскольку η -перевод (см. опр. 5) любой формулы силлогистического языка также принадлежит этому языку, то указанная равносильность (доказуемости и общезначимости) имеет место и для него. ■

Теорема 4. *Произвольная силлогистическая формула $\mathbf{A}$ доказуема в исчислении ИФС₂, если и только если $\mathbf{A}$ W_2 -общезначима.*

Доказательство. Согласно Теореме 1, доказуемость произвольной формулы $\mathbf{A}$ в системе ИФС₂ равносильна доказуемости ее перевода $\eta(\mathbf{A})$ (см. опр. 5) в системе ИФС. Согласно Теореме 3, доказуемость $\eta(\mathbf{A})$ в ИФС равносильна V_i -общезначимости $\eta(\mathbf{A})$ (см. опр. 3). Наконец, согласно Теореме 2, V_i -общезначимость $\eta(\mathbf{A})$ равносильна W_2 -общезначимости формулы $\mathbf{A}$ (см. опр. 4). ■

Таким образом, адекватная релевантизированная семантика для силлогистики ИФС₂ построена.

2. Интенциональная семантика силлогистики C2

Рассмотрим систему C2, предложенную В.А. Смирновым. Ее схемами аксиом являются:

- A0.** Схемы аксиом классического исчисления высказываний;
A1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **A5.** $SiP \supset SaS$;
A2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **A6.** $SeP \equiv \neg SiP$.
A3. $SeP \supset PeS$; **A7.** $SoP \equiv \neg SaP$.
A4. $SaP \supset SiP$;

Единственным правилом вывода в C2 является правило *modus ponens*.

Перевод χ , погружающий исчисление C2 в исчисление ФС, задается следующим образом [Бочаров, Маркин, 2010, с. 87–89]:

Определение 6.

$$\begin{aligned}
\chi(SaP) &= SaP \wedge SiS; & \chi(SeP) &= SeP; \\
\chi(SiP) &= SiP; & \chi(SoP) &= SoP \vee \neg SiS; \\
\chi(\neg \mathbf{A}) &= \neg \chi(\mathbf{A}); & \chi(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) &= \chi(\mathbf{A}) \nabla \chi(\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

Адекватную семантику в духе В.И. Шалака для системы **C2** предложил В.И. Маркин [Маркин, 2016b]. Условия значимости простых формул задаются следующим образом:

Определение 7.

$$\begin{aligned}
Q'(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \wedge \delta(S) \not\models \neg \delta(S); \\
Q'(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \neg \delta(P); \\
Q'(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg \delta(P); \\
Q'(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models \neg \delta(S).
\end{aligned}$$

Формула **A** называется Q' -общезначимой, если и только если $\dot{\vee} \delta Q'(\mathbf{A}, \delta)$.

Для доказательства адекватности данной семантики исчислению **C2** необходимо сначала доказать следующую метатеорему:

Теорема 5. Произвольная силлогистическая формула **A** Q' -общезначима, если и только если ее перевод $\chi(\mathbf{A})$ Φ -общезначим (см. опр. 1).

Доказательство. Для этого докажем предварительно следующее утверждение:

$$\dot{\vee} \mathbf{A} \dot{\vee} \delta(Q'(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\mathbf{A}), \delta)).$$

Будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в **A**.

I. $\mathbf{A} = SaP$.

$$Q'(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \wedge \delta(S) \not\models \neg \delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SaP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SaP), \delta).$$

II. $\mathbf{A} = SeP$.

$$Q'(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg \delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SeP, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SeP), \delta).$$

III. $\mathbf{A} = SiP$.

$$Q'(SiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg \delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SiP, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SiP), \delta).$$

IV. $\mathbf{A} = SoP$.

$$Q'(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models \neg \delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SoP \vee SeS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(SoP \vee \neg SiS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SoP), \delta).$$

V. $\mathbf{A} = \neg \mathbf{B}$.

$$Q'(\neg \mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow \neg Q'(\mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow \neg \Phi(\chi(\mathbf{B}), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\neg(\chi(\mathbf{B})), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\neg \mathbf{B}), \delta).$$

VI. $\mathbf{A} = \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$.

$$Q'(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}, \delta) \Leftrightarrow \neg Q'(\mathbf{B}, \delta) \dot{\vee} Q'(\mathbf{C}, \delta) \Leftrightarrow \neg \Phi(\chi(\mathbf{B}), \delta) \dot{\vee} \Phi(\chi(\mathbf{C}), \delta) \Leftrightarrow \\ \Phi(\chi(\mathbf{B}) \supset \chi(\mathbf{C}), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}), \delta).$$

Другие случаи, когда $\mathbf{A}$ есть сложная формула, обосновываются аналогично.

Эквивалентные преобразования в трех базисных пунктах осуществляются на основе определений предикатов Q' (см. опр. 7) и Φ (см. опр. 1) и операции χ (см. опр. 6), в индуктивном переходе используется также индуктивное допущение о том, что утверждение леммы верно для формул с меньшим, чем у $\mathbf{A}$, числом пропозициональных связок.

Из только что доказанного утверждения $\dot{\forall} \mathbf{A} \dot{\forall} \delta (Q'(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\mathbf{A}), \delta))$ по законам первопорядковой логики следует:

$$\dot{\forall} \mathbf{A} (\dot{\forall} \delta (Q'(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \dot{\forall} \delta \Phi(\chi(\mathbf{A}), \delta))).$$

Последнее означает, что произвольная формула $\mathbf{A}$ Q' -общезначима в том и только в том случае, когда Φ -общезначима формула $\chi(\mathbf{A})$. ■

Докажем теперь теорему об адекватности предложенной семантики исчислению **C2**.

Теорема 6. *Произвольная формула $\mathbf{A}$ доказуема в исчислении **C2**, если и только если формула $\mathbf{A}$ Q' -общезначима.*

Доказательство. Данная теорема является элементарным следствием трех утверждений:

- (1) произвольная формула $\mathbf{A}$ доказуема в исчислении **C2**, если и только если ее перевод $\chi(\mathbf{A})$ (см. опр. 6) доказуем в исчислении **ФС**;
- (2) произвольная формула $\mathbf{A}$ Q' -общезначима (см. опр. 7), если и только если ее перевод $\chi(\mathbf{A})$ является Φ -общезначимым (см. опр. 1);
- (3) для любой формулы $\mathbf{A}$ верно, что $\chi(\mathbf{A})$ доказуема в исчислении **ФС**, если и только если $\chi(\mathbf{A})$ Φ -общезначима.

Утверждение (1) справедливо в силу того, что перевод χ погружает **C2** в **ФС**. Утверждение (2) доказано выше (Теорема 5). Утверждение (3) следует из доказанной В.И. Шалаком [Шалак, 2015] адекватности синтаксической интерпретации формул стандартного силлогистического языка системе **ФС**. ■

Покажем далее, что адекватная релевантизированная семантика для системы **C2** определяется следующими условиями значимости для атомарных силлогистических формул (для сложных формул они обычные). В качестве метапредиката значимости будем использовать символ Q :

Определение 8.

$$\begin{aligned}
Q(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S); \\
Q(SeP, \delta) &\Leftrightarrow (\delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S)) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P); \\
Q(SiP, \delta) &\Leftrightarrow (\delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S)) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\
Q(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S).
\end{aligned}$$

Зададим перевод μ из силлогистики **C2** в систему **ИФС**:

Определение 9.

$$\begin{aligned}
\mu(SaP) &= SaP \wedge SiS; & \mu(SeP) &= SeP \vee SeS \vee PeP; \\
\mu(SiP) &= SiP \wedge SiS \wedge PiP; & \mu(SoP) &= SoP \vee \neg SiS; \\
\mu(\neg A) &= \neg\mu(A); & \mu(A \nabla B) &= \mu(A) \nabla \mu(B).
\end{aligned}$$

Покажем, что он погружает **C2** в **ИФС**.

Для этого сначала зададим перевод ψ , погружающий систему **ФС** в ее подсистему **ИФС** [Маркин, 2016b]:

Определение 10.

$$\begin{aligned}
\psi(SaP) &= SaP \vee SeS; & \psi(SeP) &= (SeP \vee SeS) \vee PeP; \\
\psi(SiP) &= (SiP \wedge SiS) \wedge PiP; & \psi(SoP) &= SoP \wedge SiS; \\
\psi(\neg A) &= \neg\psi(A); & \psi(A \nabla B) &= \psi(A) \nabla \psi(B).
\end{aligned}$$

Теорема 7. *Перевод μ погружает **C2** в **ИФС**, т.е.*

$$\dot{\forall} A (C2 \vdash A \Leftrightarrow ИФС \vdash \mu(A)).$$

Доказательство. Так как исчисление **C2** погружается в исчисление **ФС** с помощью функции χ (см. опр. 6), а исчисление **ФС** погружается в **ИФС** с помощью функции ψ , то **C2** погружается в **ИФС** посредством композиции переводов χ и ψ , т.е.

$$\dot{\forall} A (C2 \vdash A \Leftrightarrow ИФС \vdash \psi(\chi(A))).$$

Остается доказать, что композиция переводов χ и ψ для произвольной формулы равносильна ее μ -переводу в системе **ИФС**:

$$\dot{\forall} A (ИФС \vdash \mu(A) \equiv \psi(\chi(A))).$$

Доказательство ведется возвратной индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**.

Базис содержит четыре случая:

I. $A = SaP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \mu(SaP) \equiv \psi(\chi(SaP))$, то есть что формула $(SaP \wedge SiS) \equiv ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ доказуема в $\mathbf{ИФС}$.

1. $((SaP) \wedge SiS) \supset ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ **A0**
2. $((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset SiS$ **A0**
3. $SiS \equiv \neg SeS$ **A7**
4. $((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset SaP$ **3; ЛВ**
5. $((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset (SaP \wedge SiS)$ **2, 4; ЛВ**
6. $(SaP \wedge SiS) \equiv ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ **1, 5; ЛВ**

II. $A = SeP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \mu(SeP) \equiv \psi(\chi(SeP))$, то есть что формула $(SeP \vee SeS \vee PeP) \equiv (SeP \vee SeS \vee PeP)$ доказуема в $\mathbf{ИФС}$.

Она является законом логики высказываний, то есть одной из аксиом **A0**.

III. $A = SiP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \mu(SiP) \equiv \psi(\chi(SiP))$.

IV. $A = SoP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \mu(SoP) \equiv \psi(\chi(SoP))$.

Эти два случая сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу схем аксиом **ИФС5** и **ИФС6** системы **ИФС**.

Индуктивный переход обосновывается с помощью тех пунктов определений функций μ , χ и ψ (см. опр. 5, 6, 10), которые связаны с их применением к сложным формулам.

Итак, мы показали, что формулы $\mu(A)$ и $\psi(\chi(A))$ логически эквивалентны в $\mathbf{ИФС}$. Поскольку композиция переводов χ и ψ погружает **C2** в $\mathbf{ИФС}$, то перевод μ также является операцией, погружающей **C2** в $\mathbf{ИФС}$. ■

Теорема 8. Произвольная силлогистическая формула A Q -общезначима, если и только если ее перевод $\mu(A)$ V_i -общезначим, т.е.

$$\dot{V}A(Q(A, \delta) \Leftrightarrow V_i(\mu(A), \delta)).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию δ , сопоставляющую общим терминам формулы пропозиционального языка в сигнатуре $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Покажем, что $Q(A, \delta)$, если и только если $V_i(\mu(A), \delta)$ (см. опр. 3 и 5), для любой формулы A языка силлогистики.

Снова будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в составе A .

I. $A = SaP$.

$$Q(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \wedge \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow V_i(SaP, \delta) \wedge V_i(SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(SaP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(\mu(SaP), \delta).$$

II. $A = SeP$.

$$Q(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P) \Leftrightarrow \\ V_i(SeP, \delta) \dot{\vee} V_i(SeS, \delta) \dot{\vee} V_i(PeP, \delta) \Leftrightarrow V_i(SeP \vee SeS \vee PeP, \delta) \Leftrightarrow \\ V_i(\mu(SeP), \delta).$$

III. $A = SiP$.

IV. $A = SoP$.

Эти два случая сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу того, что условия их Q -значимости (см. опр. 8) и V_i -значимости противоречат соответствующим условиям значимости атомарных формул SeP и SaP .

Индуктивный переход доказывается аналогично Теореме 2. ■

Теорема 9. *Для произвольной силлогистической формулы A верно, что $\mu(A)$ доказуема в ИФС, если и только если $\mu(A)$ — V_i -общезначимая формула.*

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота силлогистики **ИФС** доказаны в [Маркин, 2016a]: произвольная формула языка силлогистики доказуема в данной системе, е.т.е. она V_i -общезначима (см. опр. 3). Поскольку μ -перевод (см. опр. 5) любой формулы силлогистического языка также принадлежит этому языку, то указанная равносильность (доказуемости и общезначимости) имеет место и для него. ■

Теорема 10. *Произвольная силлогистическая формула A доказуема в исчислении **C2**, е.т.е. A Q -общезначима.*

Доказательство. Согласно Теореме 7, доказуемость произвольной формулы A в системе **C2** равносильна доказуемости ее перевода $\mu(A)$ (см. опр. 5) в системе **ИФС**. Согласно Теореме 9, доказуемость $\mu(A)$ в **ИФС** равносильна V_i -общезначимости $\mu(A)$ (см. опр. 3). Наконец, согласно Теореме 8, V_i -общезначимость $\mu(A)$ равносильна Q -общезначимости формулы A (см. опр. 8). ■

3. Интенциональная семантика силлогистики Больцано

Другая интерпретация категорических высказываний была предложена чешским математиком Бернардо Больцано: при экстенциональном подходе она подразумевает непустоту субъекта в истинных высказываниях (как общих, так и частных). Данная силлогистическая теория не является аристотелевской, в ней не принимаются некоторые законы логического квадрата, обращения для e и два модуса **IV** фигуры силлогизма.

Схемами аксиом системы **СБ** — одной из возможных формализаций этой теории — являются:

СБ0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

СБ1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **СБ5.** $SiP \supset SaS$;

СБ2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **СБ6.** $SeP \equiv \neg SiP \wedge SiS$.

СБ3. $SiP \supset PiS$;

СБ7. $SoP \equiv \neg SaP \wedge SiS$.

СБ4. $SaP \supset SiP$;

Единственным правилом вывода в **СБ** является правило *modus ponens*.

Перевод ρ , погружающий исчисление **СБ** в исчисление **ФС**, задается следующим образом [Бочаров, Маркин, 2010, с. 78–82]:

Определение 11.

$$\begin{aligned} \rho(SaP) &= SaP \wedge SiS; & \rho(SeP) &= SeP \wedge SiS; \\ \rho(SiP) &= SiP; & \rho(SoP) &= SoP; \\ \rho(\neg A) &= \neg \rho(A); & \rho(A \nabla B) &= \rho(A) \nabla \rho(B). \end{aligned}$$

Построим адекватную семантику в духе В.И. Шалака для системы **СБ**. Условия значимости простых формул задаются следующим образом:

Определение 12.

$$\begin{aligned} R'(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg \delta(S); \\ R'(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \neg \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg \delta(S); \\ R'(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg \delta(P); \\ R'(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P). \end{aligned}$$

Формула **A** называется R' -общезначимой, если и только если $\dot{\forall} \delta R'(A, \delta)$.

Для доказательства адекватности данной семантики исчислению **СБ** необходимо сначала доказать следующую метатеорему:

Теорема 11. Произвольная силлогистическая формула **A** R' -общезначима, если и только если ее перевод $\rho(A)$ Φ -общезначим (см. опр. 1).

Доказательство. Для этого докажем предварительно следующее утверждение:

$$\dot{\forall} A \dot{\forall} \delta (R'(A, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(A), \delta)).$$

Будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в **A**.

I. $A = SaP$.

$$R'(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg \delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SaP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(SaP), \delta).$$

II. $A = SeP$.

$$R'(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg \delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SeP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(SeP), \delta).$$

III. $A \equiv SiP$.

$$R'(SiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SiP, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(SiP), \delta).$$

IV. $A \equiv SoP$.

$$R'(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SoP, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(SoP), \delta).$$

Случаи, когда A есть сложная формула, и дальнейшее доказательство рассматриваются аналогично Теореме 5. ■

Докажем теперь теорему об адекватности предложенной семантики исчислению **СБ**.

Теорема 12. *Произвольная формула A доказуема в исчислении **СБ**, если и только если формула A R' -общезначима.*

Доказательство. Данная теорема является элементарным следствием трех утверждений:

- (1) произвольная формула A доказуема в исчислении **СБ**, если и только если ее перевод $\rho(A)$ (см. опр. 11) доказуем в исчислении **ФС**;
- (2) произвольная формула A R' -общезначима (см. опр. 12), если и только если ее перевод $\rho(A)$ является Φ -общезначимым (см. опр. 1);
- (3) для любой формулы A верно, что $\rho(A)$ доказуема в исчислении **ФС**, если и только если $\rho(A)$ Φ -общезначима.

Утверждение (1) справедливо в силу того, что перевод ρ погружает **СБ** в **ФС**. Утверждение (2) доказано выше (Теорема 11). Утверждение (3) следует из доказанной В.И. Шалаком [Шалак, 2015] адекватности синтаксической интерпретации формул силлогистического языка системе **ФС**. ■

Покажем теперь, что адекватная релевантизированная семантика для системы **СБ** определяется следующими условиями значимости для атомарных силлогистических формул (для сложных формул они обычные). В качестве метапредиката значимости будем использовать символ R :

Определение 13.

$$\begin{aligned} R(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \wedge \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S); \\ R(SeP, \delta) &\Leftrightarrow (\delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \vee \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P)) \wedge \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S); \\ R(SiP, \delta) &\Leftrightarrow (\delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \wedge \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S)) \wedge \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\ R(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \vee \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S). \end{aligned}$$

Покажем, что множество теорем исчисления **СБ** совпадает с классом R -общезначимых формул. Будем использовать тот же метод, что и в предыдущем разделе.

Зададим перевод τ из силлогистики **СБ** в систему **ИФС**:

Определение 14.

$$\begin{aligned}
\tau(SaP) &= SaP \wedge SiS; & \tau(SeP) &= (SeP \vee PeP) \wedge SiS; \\
\tau(SiP) &= (SiP \wedge SiS) \wedge PiP; & \tau(SoP) &= SoP \wedge SiS; \\
\tau(\neg A) &= \neg \tau(A); & \tau(A \nabla B) &= \tau(A) \nabla \tau(B).
\end{aligned}$$

Покажем, что τ -перевод погружает **СБ** в **ИФС**.

Теорема 13. *Перевод τ погружает **СБ** в **ИФС**, т.е.*

$$\forall A (\mathbf{СБ} \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{ИФС} \vdash \tau(A)).$$

Доказательство. Так как исчисление **СБ** погружается в исчисление **ФС** посредством функции ρ (см. опр. 11), а исчисление **ФС** погружается в **ИФС** посредством функции ψ (см. опр. 10), то **СБ** погружается в **ИФС** посредством композиции переводов ρ и ψ .

Остается доказать, что композиция переводов ρ и ψ для произвольной формулы равносильна ее τ -переводу в системе **ИФС**:

$$\forall A (\mathbf{ИФС} \vdash \tau(A) \equiv \psi(\rho(A))).$$

Доказательство этого метаясждения ведется индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**.

Базис содержит четыре случая:

I. $A = SaP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \tau(SaP) \equiv \psi(\rho(SaP))$, то есть что формула $(SaP \wedge SiS) \equiv ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ доказуема в **ИФС**. Доказательство приведено в предыдущем разделе.

II. $A = SeP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \tau(SeP) \equiv \psi(\rho(SeP))$, то есть что формула $((SeP \vee PeP) \wedge SiS) \equiv (SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS$ доказуема в **ИФС**.

1. $((SeP \vee PeP) \wedge SiS) \supset ((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ **A0**
2. $((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset SiS$ **A0**
3. $SiS \equiv \neg SeS$ **A7**
4. $((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset (SeP \vee PeP)$ **3; ЛВ**
5. $((SeP \vee PeP) \wedge SiS) \equiv ((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge (SiS \wedge SiS \wedge SiS))$ **1, 4; ЛВ**

III. $A = SiP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \tau(SiP) \equiv \psi(\rho(SiP))$, то есть что формула $((SiP \wedge SiS) \wedge PiP) \equiv ((SiP \wedge SiS) \wedge PiP)$ доказуема в **ИФС**. Она

является законом логики высказываний и, следовательно, одной из аксиом **A0**.

IV. $\mathbf{A} = SoP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \tau(SoP) \equiv \psi(\rho(SoP))$, то есть что формула $(SoP \wedge SiS) \equiv (SoP \wedge SiS)$ доказуема в **ИФС**. Она является законом логики высказываний и, следовательно, одной из аксиом **A0**.

Обоснование индуктивного перехода ведется совершенно аналогично тому, как это делалось при доказательстве Теоремы 7 предыдущего раздела.

Мы показали, что формулы $\tau(\mathbf{A})$ и $\psi(\rho(\mathbf{A}))$ логически эквивалентны в **ИФС**. Поскольку композиция переводов ρ и ψ погружает **СБ** в **ИФС**, то перевод τ также является операцией, погружающей **СБ** в **ИФС**. ■

Теорема 14. *Произвольная силлогистическая формула $\mathbf{A}$ R -общезначима, если и только если ее перевод $\tau(\mathbf{A})$ V_i -общезначим, т.е.*

$$\forall \mathbf{A} (R(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow V_i(\tau(\mathbf{A}), \delta)).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию δ , сопоставляющую общим терминам формулы пропозиционального языка в сигнатуре $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Покажем, что $R(\mathbf{A}, \delta)$, если и только если $V_i(\tau(\mathbf{A}), \delta)$ (см. опр. 13 и 3), для любой формулы $\mathbf{A}$ языка силлогистики.

Снова будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в составе $\mathbf{A}$.

I. $\mathbf{A} = SaP$.

$$R(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow V_i(SaP, \delta) \dot{\wedge} V_i(SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(SaP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(\tau(SaP), \delta).$$

II. $\mathbf{A} = SeP$.

$$R(SeP, \delta) \Leftrightarrow (\delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P)) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow (V_i(SeP, \delta) \dot{\vee} V_i(PeP, \delta)) \dot{\wedge} V_i(SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i((SeP \vee PeP) \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(\tau(SeP), \delta).$$

III. $\mathbf{A} = SiP$.

$$R(SiP, \delta) \Leftrightarrow (\delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S)) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \Leftrightarrow (V_i(SiP, \delta) \dot{\wedge} V_i(SiS, \delta)) \dot{\wedge} V_i(PiP, \delta) \Leftrightarrow V_i((SiP \wedge SiS) \wedge PiP, \delta) \Leftrightarrow V_i(\tau(SiP), \delta).$$

IV. $\mathbf{A} = SoP$.

$$R(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow V_i(SoP, \delta) \dot{\wedge} V_i(SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(SoP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(\tau(SoP), \delta).$$

Случаи, когда $\mathbf{A}$ — сложная формула, и дальнейшее доказательство рассматриваются аналогично тому, как это делалось при доказательстве Теоремы 2 первого раздела. ■

Теорема 15. Для произвольной силлогистической формулы $\mathbf{A}$ верно, что $\tau(\mathbf{A})$ доказуема в **ИФС**, если и только если $\tau(\mathbf{A})$ — V_i -общезначимая формула.

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота силлогистики **ИФС** доказаны в [Маркин, 2016а]: произвольная формула языка силлогистики доказуема в данной системе, е.т.е. она V_i -общезначима (см. опр. 3). Поскольку τ -перевод (см. опр. 14) любой формулы силлогистического языка также принадлежит этому языку, то указанная равносильность (доказуемости и общезначимости) имеет место и для него. ■

Теорема 16. Произвольная силлогистическая формула $\mathbf{A}$ доказуема в исчислении **СБ**, е.т.е. $\mathbf{A}$ R -общезначима.

Доказательство. Согласно Теореме 13, доказуемость произвольной формулы $\mathbf{A}$ в системе **СБ** равносильна доказуемости ее перевода $\tau(\mathbf{A})$ (см. опр. 14) в системе **ИФС**. Согласно Теореме 15, доказуемость $\tau(\mathbf{A})$ в **ИФС** равносильна V_i -общезначимости $\tau(\mathbf{A})$ (см. опр. 3). Наконец, согласно Теореме 14, V_i -общезначимость $\tau(\mathbf{A})$ равносильна R -общезначимости формулы $\mathbf{A}$ (см. опр. 13). ■

Заключение

В свете построенных семантик остается несколько вопросов, решение которых является дальнейшей задачей.

Кроме **ИФС**₂, у **ФС** есть и другая подсистема — силлогистика **ИФС**₁, где константы a и o трактуются как в **ФС**, а константы e и i — как в **ИФС**.

Понятие значимости формул определим для данной системы следующим образом (будем использовать здесь символ W_1 для метапредиката значимости):

Определение 15.

$$\begin{aligned} W_1(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S); \\ W_1(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P); \\ W_1(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\ W_1(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S). \end{aligned}$$

Для сложных формул W_1 задается стандартно.

Можно предположить, что класс общезначимых формул в такой семантике аксиоматизирует исчисление, полученное из **ФС** путем отбрасывания

аксиомы **ФС5** $SiP \supset SiS$. Однако доказать это утверждение тем же методом, который использовался выше для системы **ИФС₂**, не удалось. Проблема остается открытой.

Еще один вопрос кажется интересным для дальнейшего развития данного подхода: изменятся ли множество теорем систем **С2** и **СБ**, если заменить в их интенциональных семантиках классическое следование на релевантное?

Как и для системы **ИФС₁**, можно лишь предположить, какие именно исчисления будут аксиоматизировать данные семантики. Например, в обоих случаях можно показать общезначимость переводов, но показать погружаемость используемым выше способом не удалось: для релевантных фрагментов **С2** и **СБ** не проходят аксиомы **А5** и **СБ5** соответственно: $SiP \supset SaS$. Проблема также остается открытой.

Литература

- Бочаров, Маркин, 2010 – *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М.: Прогресс–Традиция, 2010. 333 с.
- Лейбниц, 1982 – *Лейбниц Г.В.* Соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1982–1989.
- Маркин, 2001 – *Маркин В.И.* Интенциональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001. С. 82–91.
- Маркин, 2002 – *Маркин В.И.* Фундаментальная силлогистика с интенциональной точки зрения // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002. С. 119–130.
- Маркин, 2016a – *Маркин В.И.* Интерпретация категорических высказываний в терминах релевантного следования // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 1. С. 70–81.
- Маркин, 2016b – *Маркин В.И.* Семантика позитивных силлогистик и релевантное следование // Логико-философские штудии. 2016. Т. 13. № 2. С. 34–39.
- Маркин, Легейдо, 2019 – *Маркин В.И., Легейдо М.М.* Интенциональная семантика логики классов Дж. Венна // Логические исследования. 2019. Т. 25. № 2. С. 114–137.
- Смирнов, 2021 – *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: ЛЕНАНД, 2021. 264 с.
- Шалак, 2015 – *Шалак В.И.* Синтаксическая интерпретация категорических атрибутивных высказываний // Логические исследования. 2015. Т. 21. № 1. С. 60–78.

MARIA M. LEGEYDO

Intensional semantics for some positive syllogistic systems

Maria M. Legeydo

Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: legeydo.mm@philos.msu.ru

Abstract: The article is devoted to the consideration of intensional semantics for some systems of positive syllogistics: fundamental syllogistics and its subsystems, **C2** syllogistics and Bolzano syllogistics.

The intensional semantics presented in the article are based on the syntactic approach proposed by V. Shalak and further developed by V. Markin, in which the formulas of the propositional language are attributed to general terms, and the significance of syllogistic constants is determined through the relation of classical, and then relevant, entailment.

The first section of the article contains a description of the already existing intensional semantics with a relevant entailment for fundamental syllogistics and its **IFS** subsystem, and also offers two new systems (intermediate between **FS** and **IFS**), for one of which the adequacy of semantics to calculus is proved.

The second and third sections are devoted to two other well-known syllogistic systems: **C2** syllogistics and Bolzano syllogistics. For both systems, an intensional semantics with classical and relevant entailment is presented, and the adequacy of these semantics to the corresponding calculi is proved.

The proposed semantics expand the expressive power of syllogistics, and are also interesting in the light of the developing intensional approach to the interpretation of syllogistic semantics. The article also identifies problems that have not yet been solved in this area: possible semantics for some systems are proposed, the search for axiomatizations for which is of further interest.

Keywords: syllogistic, intensional semantics, formalization, axiomatic calculus, logical entailment, relevant entailment

For citation: Legeydo M.M. “Intensional’nye semantiki dlya nekotorykh sistem pozitivnoi sillogistiki” [Intensional semantics for some positive syllogistic systems], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 9–30. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-9-30 (In Russian)

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR, project number 20-311-90043.

References

- Bocharov, Markin, 2010 – Bocharov, V.A., Markin, V.I. “Sillogisticheskie teorii” [Syllogistic theories]. Moscow: Progress-tradition, 2010. 333 pp. (In Russian)
- Leibniz, 1982 – Leibniz, G. Sochineniya v 4-h tomah [Writings in 4 volumes]. Moscow: Mysl', 1982–1989. (In Russian)
- Markin, 2001 – Markin, V.I. “Intensional'naya semantika tradicionnoj sillogistiki” [Intensional semantics for traditional syllogistic], in: *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], Vol. 8. Moscow: Nauka, 2001, pp. 82–91. (In Russian)
- Markin, 2002 – Markin, V.I. “Fundamental'naya sillogistika s intensional'noj tochki zreniya” [Fundamental syllogistic from the intensional standpoint], in: *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], Vol. 9. Moscow: Nauka, 2002, pp. 119–130. (In Russian)
- Markin, 2016a – Markin, V.I. “Interpretaciya kategoricheskikh vyskazyvanij v terminah relevantnogo sledovaniya” [Interpretation of categorical propositions in terms of relevant entailment], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2016, Vol. 22, No. 1, pp. 70–81. (In Russian)
- Markin, 2016b – Markin, V.I. “Semantika pozitivnykh sillogistik i relevantnoe sledovanie” [Semantics of positive syllogistics and relevant entailment], *Logiko-filosofskie shtudii* [Logical and philosophical studies], 2016, Vol. 13, No. 2, pp. 34–39. (In Russian)
- Markin, Legeydo, 2019 – Markin, V.I., Legeydo, M.M. “Intensional'naya semantika logiki klassov Dzh. Venna” [Intensional Semantics for J. Venn's Logic of Classes], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 114–137. (In Russian)
- Shalack, 2015 – Shalack, V.I. “Sintaksicheskaya interpretaciya kategoricheskikh atributivnykh vyskazyvanij” [Syntactic interpretation of categorical attributive propositions], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2015, Vol. 21, No. 1, pp. 60–78. (In Russian)
- Smirnov, 2021 – Smirnov, V.A. “Logicheskie metody analiza nauchnogo znaniya” [Logical methods of the analyses of scientific knowledge]. Moscow: LENAND, 2021. 264 pp. (In Russian)

В.И. МАРКИН

Логика суждений существования и силлогистика*

Владимир Ильич Маркин

МГУ им. М.В. Ломоносова.

Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.

E-mail: markin@philos.msu.ru

Аннотация: В статье строится формальная система, предназначенная для логического анализа суждений существования. В ее языке содержится неопределенно-местная константа существования, а простые формулы образуются сочленением этой константы с произвольной конечной последовательностью общих терминов — положительных (простых) и отрицательных. Сложные формулы образуются с помощью пропозициональных связок. Для данного языка формулируется естественная семантика. Значением (объемом) простого общего термина в некоторой модели является подмножество предметной области данной модели, а объемом отрицательного термина — дополнение к объему соответствующего положительного термина. Простая формула значима в модели, если и только если пересечение объемов общих терминов, из которых она образована, непусто. Предлагается исчисление, аксиоматизирующее класс общезначимых формул. Данное исчисление строится на основе классического исчисления высказываний. В статье обращается внимание на то обстоятельство, что атрибутивные суждения могут быть определены с использованием суждений существования. В связи с этим возникает вопрос о метатеоретических отношениях между построенной логикой и различными силлогистическими теориями. Демонстрируется рекурсивная эквивалентность логики суждений существования и силлогистики с неопределенно-местной константой, которая является обобщением силлогистической константы a . С этой целью задается перевод из логики суждений существования в указанную силлогистику и доказывается, что он погружает первую систему во вторую. Задается и обратный перевод, и доказывается, что он также является погружающей операцией. В статье также доказываются метатеоремы о семантической непротиворечивости и полноте исчисления суждений существования.

Ключевые слова: суждения существования, атрибутивные суждения, силлогистика, логическое исчисление, семантика, погружающая операция

Для цитирования: Маркин В.И. Логика суждений существования и силлогистика // Логические исследования / Logical Investigations. 2021. Т. 27. № 2. С. 31–47. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-31-47

* Исследование выполнено в рамках научно-образовательной школы Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова «Мозг, когнитивные системы и искусственный интеллект».

Данная статья представляет собой существенно расширенную версию доклада [Маркин, 2021], сделанного на Двенадцатых Смирновских чтениях по логике (Москва, 24–26 июня 2021 г.).

1. Введение

В традиционной логике, наряду с атрибутивными и реляционными, выделялись простые суждения еще одного типа — так называемые *суждения существования*. Если в атрибутивных суждениях логическим сказуемым (предикатом) является знак свойства (атрибута) индивидов, а в реляционных — знак отношения между индивидами, то в суждениях существования в этой роли выступает термин «существует». Причем данный термин рассматривается не как квантор, а как знак особой *онтологической характеристики* индивидов.

Суждения существования — так же как простые суждения других видов — делят (по качеству) на *утвердительные* и *отрицательные*: в утвердительных фиксируется существование объекта (объектов), а в отрицательных — его (их) несуществование. Например, суждение «Черные лебеди существуют» утвердительное, а суждение «Флогистон не существует» отрицательное.

Суждения существования можно, в принципе, разделить и по количеству: на *единичные* и *множественные*. Основанием этого деления выступает тип их логического подлежащего (субъекта). Субъектом единичного суждения существования является сингулярный термин («флогистон»). В качестве субъектов множественных суждений существования могут выступать: простые (положительные) общие термины («млекопитающие»), отрицательные общие термины («беспозвоночные»), а также последовательности нескольких общих терминов («фруктоядные рукокрылые млекопитающие»).

В истории логики встречается точка зрения, согласно которой статус суждений существования более фундаментален по сравнению с атрибутивными (категорическими) суждениями в том отношении, что вторые можно — не меняя их смысла — редуцировать к первым.

Так, Франц Brentano считал, что суждение формы «Все S есть P » эквивалентно суждению существования « S не- P не существуют», суждение формы «Некоторые S есть P » — суждению « SP существуют», суждение формы «Ни один S не есть P » — суждению « SP не существуют», а суждение формы «Некоторые S не есть P » — суждению « S не- P существуют» (см. [Brandl, 2018]).

Сходной позиции придерживался и Льюис Кэрролл [Carroll, 1896]. При анализе силлогизмов он также интерпретировал категорические суждения как суждения существования. Интерпретация частноутвердительных и общеотрицательных суждений у него аналогична брентановской: суждение «Некоторые купцы являются скупцами» выражает ту же мысль, что и суждение «Купцы-скупцы существуют», а суждение «Ни одна русалка не

является модисткой» — ту же мысль, что и суждение «Русалок-модисток не существует». Общеутвердительное суждение формы «Все S есть P », согласно Кэрроллу, эквивалентно конъюнкции двух суждений существования: « SP существуют» и « $Sне-P$ не существуют». Например, суждение «Все банкиры богаты» выражает ту же мысль, что и «Богатые банкиры существуют, а небогатых банкиров не существует». Частноотрицательные суждения «Некоторые S не есть P » Кэрроллом не рассматривались, он считал их равнозначными суждениям формы «Некоторые S есть не- P ».

Наиболее ярко связь категорических суждений с суждениями существования проявляется у Кэрролла в предложенном им для проверки силлогизмов диаграммном методе. Информация суждения «Некоторые S есть P » выражается постановкой красной фишки в сектор SP , что означает существование элемента в пересечении объемов S и P . Информация суждения «Ни один S не есть P » выражается постановкой черной фишки в сектор SP , что указывает на пустоту пересечения объемов S и P . Информация суждения «Все S есть P » передается постановкой красной фишки в сектор SP и черной фишки в сектор $Sне-P$, таким образом, пересечение объемов S и P объявляется непустым, а пересечение объемов S и не- P пустым.

На трехбуквенных диаграммах Кэрролла атрибутивные суждения сводятся, по существу, к булевым комбинациям суждений существования, субъектами которых являются последовательности трех общих терминов. Так, информацию суждения «Все S есть M » он выражает постановкой красной фишки на границу секторов SMP и $SMне-P$ и помещением черных фишек в сектора $Sне-MP$ и $Sне-Mне-P$. При этом «Все S есть M » оказывается эквивалентным сложному суждению « SMP или $SMне-P$ существуют, а $Sне-MP$ и $Sне-Mне-P$ не существуют». Первая часть этого сложного суждения, согласно Кэрроллу, равносильна суждению « SM существуют», а вторая часть — суждению « $Sне-M$ не существуют».

В данной работе мы сформулируем логическую систему, в языке которой фиксируются логические формы множественных суждений существования, субъектами которых являются общие термины или их последовательности. Для данного языка мы предложим естественную теоретико-множественную семантику и построим исчисление, аксиоматизирующее класс общезначимых в этой семантике формул.

Далее будет доказана рекурсивная эквивалентность логики суждений существования и построенной в [Маркин, 2004] силлогистики с неопределенно-местной константой, которая является обобщением силлогистической константы a .

В заключении будет рассмотрен вопрос о соотношении логики суждений существования и дедуктивных теорий, сформулированных в стандартном силлогистическом языке.

2. Логика суждений существования: язык, семантика, аксиоматическое исчисление

Логику суждений существования будем строить на базе классической логики высказываний, как это принято при современных формализациях силлогистических теорий.

В *алфавите* языка содержатся: бесконечный список простых общих терминов (будем использовать для них метAPERЕМЕННЫЕ $S, P, M, S_1, \dots$), символ терминного отрицания ($'$), неопределенно-местная константа существования (Υ), пропозициональные связки и скобки.

Общими терминами являются: (1) произвольный простой общий термин, (2) выражение вида S' , где S — простой общий термин. При этом S будем называть *положительным*, а S' — *отрицательным* термином. В качестве метAPERЕМЕННЫХ по любым общим терминам (как положительным, так и отрицательным) будем использовать символы $X, Z, X_1, \dots$

Атомарными формулами языка нашей системы являются выражения вида $\Upsilon X_1 X_2 \dots X_k$ ($k \geq 1$), где $X_1, X_2, \dots, X_k$ — общие термины. Формула $\Upsilon X_1 X_2 \dots X_k$ фиксирует логическую форму суждения существования « $X_1 X_2 \dots X_k$ существуют». *Сложные формулы* образуются из других формул с помощью пропозициональных связок.

Для данного языка зададим точную семантику. *Моделью* называется пара $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, где $\mathbf{D} \neq \emptyset$, а $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$ для любого простого общего термина S . Определим функцию ψ , сопоставляющую значение каждому общему термину (включая отрицательные) в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$: $\psi(S) = \varphi(S)$, $\psi(S') = \mathbf{D} \setminus \varphi(S)$. $\psi(X)$ представляет собой подмножество предметной области $\mathbf{D}$ и называется *объемом* общего термина X .

Введем далее понятие $\mathcal{V}$ -значимости формулы нашего языка в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$. Условия значимости атомарных формул определяются так:

$$\mathcal{V}(\Upsilon X_1 X_2 \dots X_k, \mathbf{D}, \varphi), \text{ е.т.е. } \psi(X_1) \cap \psi(X_2) \cap \dots \cap \psi(X_k) \neq \emptyset.$$

Данное семантическое определение соответствует естественной трактовке суждений существования: суждение « $X_1 X_2 \dots X_k$ существуют» истинно тогда и только тогда, когда найдется объект, принадлежащий объемам всех общих терминов $X_1, X_2, \dots, X_k$.

Условия значимости формул, образованных с помощью пропозициональных связок, стандартные.

Формула A называется $\mathcal{V}$ -общезначимой, е.т.е. $\mathcal{V}(A, \mathbf{D}, \varphi)$ в каждой модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$.

Ниже будет доказано, что класс $\mathcal{V}$ -общезначимых формул аксиоматизирует исчисление **СТ**. Оно содержит схемы аксиом классического исчисления высказываний и шесть дополнительных схем аксиом:

- $\Upsilon 1. \Upsilon uv \supset (\Upsilon uM' \vee \Upsilon Mv),$
- $\Upsilon 2. \neg \Upsilon SS',$
- $\Upsilon 3. \Upsilon uXZv \supset \Upsilon uZXv,$
- $\Upsilon 4. \Upsilon uX \supset \Upsilon uXX,$
- $\Upsilon 5. \Upsilon wX \supset \Upsilon w,$
- $\Upsilon 6. \Upsilon S \vee \Upsilon S',$

где u и v — конечные и, возможно, пустые последовательности общих терминов (в $\Upsilon 1$ по крайней мере одна из них непуста), w — непустая конечная последовательность общих терминов, S и M — простые общие термины, X и Z — произвольные общие термины.

Единственным правилом вывода в **СТ** является *modus ponens*. Понятия доказательства и теоремы стандартные.

3. Силлогистика с неопределенно-местной константой

Осуществим сравнение логики суждений существования **СТ** с силлогистикой **СФ@**, сформулированной в [Маркин, 2004]. В последней решается проблема силлогистического представления всех возможных отношений между объемами произвольного конечного числа простых общих терминов в некотором универсуме без введения в язык терминообразующих операторов, т.е. в рамках *позитивной* силлогистики, где не рассматриваются отрицательные и другие сложные термины.

Язык **СФ@** содержит неопределенно-местную силлогистическую константу @, а также бесконечный список простых общих терминов, пропозициональные связки и скобки. Атомарные формулы этого силлогистического языка имеют вид $S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m$, где $S_1, S_2, ..., S_n, P_1, P_2, ..., P_m$ — простые общие термины и $n + m \geq 1$. Сложные формулы образуются с помощью пропозициональных связок.

В семантике данного языка используются модели того же типа, что и в сформулированной ранее логике суждений существования. Вводится понятие $\mathcal{W}$ -значимости формул языка **СФ@** в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$. Условия $\mathcal{W}$ -значимости атомарных формул определяются следующим образом:

$$\mathcal{W}(S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m, \mathbf{D}, \varphi), \text{ е.т.е. } \varphi(S_1) \cap \varphi(S_2) \cap ... \cap \varphi(S_n) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_1)) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_2)) \cap ... \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_m)) = \emptyset.$$

Таким образом, формула вида $S_1 S_2 \dots S_n @ P_1 P_2 \dots P_m$ значима в том и только в том случае, когда пересечение объемов $S_1, S_2, \dots, S_n$ и антиобъемов $P_1, P_2, \dots, P_m$ пусто.

Условия $\mathcal{W}$ -значимости сложных формул обычные.

Форма общеутвердительного суждения (SaP) при его стандартной трактовке как суждения о включенности объема субъекта в объем предиката выражается в этой силлогистике формулой $S@P$. Поэтому символ $@$ можно истолковать как своего рода обобщение обычной силлогистической константы a .

Форма общеотрицательного суждения (SeP), стандартно понимаемого как суждение об объемной несовместимости субъекта и предиката, выражается здесь формулой $SP@$. Формуле SiP обычного языка силлогистики соответствует $\neg SP@$, а формуле SoP — $\neg S@P$.

Формула B силлогистического языка (с константой $@$) $\mathcal{W}$ -общезначима, е.т.е. $\mathcal{W}(B, D, \varphi)$ в каждой модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$.

Класс $\mathcal{W}$ -общезначимых формул аксиоматизирует исчисление $\mathbf{C}\Phi@$. При формальной записи его постулатов s, p, q, r обозначают последовательности (возможно, пустые) общих терминов. Помимо схем аксиом классического исчисления высказываний, в $\mathbf{C}\Phi@$ постулируются следующие силлогистические схемы аксиом:

- @1. $(Mq@r \wedge s@pM) \supset sq@pr$,
- @2. $S@S$,
- @3. $sSPp@q \supset sPSp@q$,
- @4. $s@pSPq \supset s@pPSq$,
- @5. $SSs@p \supset Ss@p$,
- @6. $s@pPP \supset s@pP$,
- @7. $s@p \supset Ss@p$,
- @8. $s@p \supset s@pP$,
- @9. $\neg(S@ \wedge @S)$.

В @1 по крайней мере одна из последовательностей терминов — s, q, p или r — должна быть непустой. В @7 и @8 непуста хотя бы одна из последовательностей — s или p .

Единственное правило вывода в $\mathbf{C}\Phi@$ — *modus ponens*.

В [Маркин, 2004] доказано, что множество теорем исчисления $\mathbf{C}\Phi@$ и множество $\mathcal{W}$ -общезначимых формул совпадают.

4. Рекурсивная эквивалентность $\mathbf{C}\Upsilon$ и $\mathbf{C}\Phi@$

Сравнение исчислений $\mathbf{C}\Upsilon$ и $\mathbf{C}\Phi@$ будем осуществлять в терминах *погружающих операций*. Нам предстоит доказать, что эти системы погружаются друг в друга, т.е. *рекурсивно эквивалентны*.

Зададим функцию перевода Ω_1 , сопоставляющую каждой формуле A языка $\mathbf{C}\Upsilon$ силлогистическую формулу $\Omega_1(A)$ языка $\mathbf{C}\Phi@$.

Пусть u – произвольная непустая конечная последовательность общих терминов. Пусть $S_1, S_2, \dots, S_n$ – последовательность, получающаяся из u вычеркиванием всех отрицательных терминов, а $P'_1, P'_2, \dots, P'_m$ – последовательность, получающаяся из u вычеркиванием всех положительных терминов. Тогда перевод атомарной формулы Υu определяется так:

$$\Omega_1(\Upsilon u) = \neg S_1 S_2 \dots S_n @ P_1 P_2 \dots P_m.$$

На сложные формулы функция Ω_1 распространяется следующим образом:

$$\Omega_1(\neg C) = \neg \Omega_1(C), \quad \Omega_1(C \nabla D) = \Omega_1(C) \nabla \Omega_1(D),$$

где ∇ – любая бинарная пропозициональная связка.

Зададим также функцию перевода Ω_2 , сопоставляющую каждой силлогистической формуле B языка $\mathbf{C}\Phi@$ формулу $\Omega_2(B)$ языка $\mathbf{C}\Upsilon$:

$$\begin{aligned} \Omega_2(S_1 S_2 \dots S_n @ P_1 P_2 \dots P_m) &= \neg \Upsilon S_1 S_2 \dots S_n P'_1 P'_2 \dots P'_m, \\ \Omega_2(\neg C) &= \neg \Omega_2(C), \quad \Omega_2(C \nabla D) = \Omega_2(C) \nabla \Omega_2(D). \end{aligned}$$

Предварительно обоснуем справедливость ряда метаясуждений.

Теорема 1. *Для любой формулы A языка $\mathbf{C}\Upsilon$ верно, что если она доказуема в $\mathbf{C}\Upsilon$, то ее перевод – формула $\Omega_1(A)$ – доказуем в $\mathbf{C}\Phi@$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную формулу A , доказуемую в $\mathbf{C}\Upsilon$. Покажем, что Ω_1 -переводы всех формул, входящих в состав доказательства A в $\mathbf{C}\Upsilon$ (в том числе и последней формулы этой последовательности, т.е. самой A), доказуемы в $\mathbf{C}\Phi@$. Для этого нужно убедиться, во-первых, в том, что Ω_1 -переводы всех аксиом системы $\mathbf{C}\Upsilon$ доказуемы в $\mathbf{C}\Phi@$, а во-вторых, что если Ω_1 -переводы посылок правила *modus ponens* доказуемы в $\mathbf{C}\Phi@$, то и Ω_1 -перевод его заключения также доказуем в $\mathbf{C}\Phi@$.

$\Upsilon 1.$ $\Omega_1(\Upsilon uv \supset (\Upsilon u M' \vee \Upsilon M v)) = \neg sq @ pr \supset (\neg s @ p M \vee \neg M q @ r)$, где s и q – последовательности положительных терминов в составе, соответственно, u и v , а p и r получаются удалением терминных отрицаний из последовательностей отрицательных терминов в составе u и v .

Выводится из @1 ($(M q @ r \wedge s @ p M) \supset sq @ pr$) по законам классической логики высказываний (ЛВ).

$$\Upsilon 2. \Omega_1(\neg \Upsilon S S') = \neg \neg S @ S.$$

Выводится из @2 ($S @ S$) по законам ЛБ.

$\Upsilon 3$. Следует рассмотреть четыре случая в зависимости от того, положительными или отрицательными являются термины X и Z в схеме $\Upsilon u X Z v \supset \Upsilon u Z X v$. Пусть последовательности s, q, p и r определяются так же, как и в пункте ($\Upsilon 1$).

(1) X и Z — положительные термины (напр., S и P). Тогда $\Omega_1(\Upsilon u X Z v \supset \Upsilon u Z X v) = \neg s S P q @ p r \supset \neg s P S q @ p r$. Формула $\neg s S P q @ p r \supset \neg s P S q @ p r$ выводится из $s P S q @ p r \supset s S P q @ p r$ (варианта @3) по контрапозиции.

(2) X и Z — отрицательные термины (напр., S' и P'). Тогда $\Omega_1(\Upsilon u X Z v \supset \Upsilon u Z X v) = \neg s q @ p S P r \supset \neg s q @ p P S r$. Формула $\neg s q @ p S P r \supset \neg s q @ p P S r$ выводится из $s q @ p P S r \supset s q @ p S P r$ (варианта @4) по контрапозиции.

(3) X — положительный термин (напр., S), а Z — отрицательный термин (напр., P'). Тогда $\Omega_1(\Upsilon u X Z v \supset \Upsilon u Z X v) = \neg s S q @ p P r \neg s S q @ p P r$. Это закон тождества ЛБ.

(4) X — отрицательный термин (напр., S'), а Z — положительный термин (напр., P). Тогда $\Omega_1(\Upsilon u X Z v \supset \Upsilon u Z X v) = \neg s P q @ p S r \supset \neg s P q @ p S r$. Это закон тождества ЛБ.

$\Upsilon 4$. Пусть s — последовательность положительных терминов в составе u , а p получается удалением терминных отрицаний из последовательности отрицательных терминов в составе u .

Если X — положительный термин (напр., S), то $\Omega_1(\Upsilon u X \supset \Upsilon u X X) = \neg s S @ p \supset \neg s S S @ p$. Формула $\neg s S @ p \supset \neg s S S @ p$ получается из @5 ($S S s @ p \supset S s @ p$) с использованием законов ЛБ, а также аксиом «перестановки» @3.

Если X — отрицательный термин (напр., P'), то $\Omega_1(\Upsilon u X \supset \Upsilon u X X) = \neg s @ p P \supset \neg s @ p P P$. Формула $\neg s @ p P \supset \neg s @ p P P$ получается из @6 ($s @ p P P \supset s @ p P$) по контрапозиции.

$\Upsilon 5$. Пусть s — последовательность положительных терминов в составе w , а p получается удалением терминных отрицаний из последовательности отрицательных терминов в составе w .

Если X — положительный термин (напр., S), то $\Omega_1(\Upsilon w X \supset \Upsilon w) = \neg s S @ p \supset \neg s @ p$. Формула $\neg s S @ p \supset \neg s @ p$ получается из @7 ($s @ p \supset S s @ p$) с использованием законов ЛБ, а также аксиом «перестановки» @3.

Если X — отрицательный термин (напр., P'), то $\Omega_1(\Upsilon w X \supset \Upsilon w) = \neg s @ p P \supset \neg s @ p$. Формула $\neg s @ p P \supset \neg s @ p$ получается из @8 ($s @ p \supset s @ p P$) по контрапозиции.

$$\Upsilon 6. \Omega_1(\Upsilon S \vee \Upsilon S') = \neg @ S \vee \neg S @.$$

Выводится из @9 ($\neg(S @ \wedge @ S)$) по законам ЛБ.

МР. Пусть Ω_1 -переводы формул $A \supset B$ и A языка **СТ** доказуемы в **СФ@**. Поскольку по определению Ω_1 $\Omega_1(A \supset B) = \Omega_1(A) \supset \Omega_1(B)$, формула $\Omega_1(A) \supset \Omega_1(B)$ доказуема в этой системе. Но и $\Omega_1(A)$ в ней доказуема. Применяя МР к последним двум формулам в **СФ@**, получаем, что $\Omega_1(B)$ также доказуема в данном исчислении. ■

Теорема 2. Для любой формулы B языка **СФ@** верно, что если она доказуема в **СФ@**, то ее перевод — формула $\Omega_2(B)$ — доказуем в **СТ**.

Доказательство. Применяем тот же метод, что и при доказательстве Теоремы 1.

Пусть s, q, p и r — произвольные последовательности, состоящие из простых (положительных) общих терминов. Символами $\bar{s}, \bar{q}, \bar{p}$ и $\bar{r}$ будем обозначать последовательности, образуемые из s, q, p и r заменой каждого положительного термина в их составе на соответствующий отрицательный (напр., S на S').

$$@1. \Omega_2((Mq@r \wedge s@pM) \supset sq@pr) = (\neg \Upsilon Mq\bar{r} \wedge \neg \Upsilon s\bar{p}M') \supset \neg \Upsilon sq\bar{p}\bar{r}.$$

Доказываем в **СТ** сначала формулу $\Upsilon sq\bar{p}\bar{r} \supset \Upsilon s\bar{p}q\bar{r}$, используя нужное число раз аксиомы «перестановки» ($\Upsilon 3$) и законы транзитивности $\supset$. Далее используем вариант аксиомы $\Upsilon 1$ — формулу $\Upsilon s\bar{p}q\bar{r} \supset (\Upsilon s\bar{p}M' \vee \Upsilon Mq\bar{r})$. Из этих двух формул по законам ЛВ выводится искомая формула $(\neg \Upsilon Mq\bar{r} \wedge \neg \Upsilon s\bar{p}M') \supset \neg \Upsilon sq\bar{p}\bar{r}$.

$$@2. \Omega_2(S@S) = \neg \Upsilon SS'. \text{ Это аксиома } \Upsilon 2.$$

$$@3. \Omega_2(sSPp@q \supset sPSp@q) = \neg \Upsilon sSPp\bar{q} \supset \neg \Upsilon sPSp\bar{q}.$$

Выводится из $\Upsilon sPSp\bar{q} \supset \Upsilon sSPp\bar{q}$ (варианта $\Upsilon 3$) по контрапозиции.

$$@4. \Omega_2(s@pSPq \supset s@pPSq) = \neg \Upsilon s\bar{p}S'P'\bar{q} \supset \neg \Upsilon s\bar{p}P'S'\bar{q}.$$

Выводится из $\Upsilon s\bar{p}P'S'\bar{q} \supset \Upsilon s\bar{p}S'P'\bar{q}$ (варианта $\Upsilon 3$) по контрапозиции.

$$@5. \Omega_2(SSs@p \supset Ss@p) = \neg \Upsilon SSs\bar{p} \supset \neg \Upsilon Ss\bar{p}.$$

Выводится из $\Upsilon s\bar{p}S \supset \Upsilon s\bar{p}SS$ (варианта $\Upsilon 4$) с помощью аксиом «перестановки» ($\Upsilon 3$) и законов ЛВ.

$$@6. \Omega_2(s@pPP \supset s@pP) = \neg \Upsilon s\bar{p}P'P' \supset \neg \Upsilon s\bar{p}P'.$$

Выводится из $\Upsilon s\bar{p}P' \supset \Upsilon s\bar{p}P'P'$ (варианта $\Upsilon 4$) по контрапозиции.

$$@7. \Omega_2(s@p \supset Ss@p) = \neg \Upsilon s\bar{p} \supset \neg \Upsilon Ss\bar{p}.$$

Выводится из $\Upsilon s\bar{p}S \supset \Upsilon s\bar{p}$ (варианта $\Upsilon 5$) с помощью аксиом «перестановки» ($\Upsilon 3$) и законов ЛВ.

$$@8. \Omega_2(s@p \supset s@pP) = \neg \Upsilon s\bar{p} \supset \neg \Upsilon s\bar{p}P'.$$

Выводится из $\Upsilon s\bar{p}P' \supset \Upsilon s\bar{p}$ (варианта $\Upsilon 5$) по контрапозиции.

$$@9. \Omega_2(\neg(S@ \wedge @S)) = \neg(\neg \Upsilon S \wedge \neg \Upsilon S').$$

Выводится из $\Upsilon 6$ ($\Upsilon S \vee \Upsilon S'$) по законам ЛВ.

МР. Обосновывается аналогично последнему пункту Теоремы 1. ■

Теорема 3. Формула $A \equiv \Omega_2(\Omega_1(A))$ является теоремой **СТ** для любой формулы A языка данного исчисления.

Доказательство. Применяем возвратную индукцию по количеству пропозициональных связок в составе формулы A языка **СТ**.

Рассмотрим сначала базисный случай, когда A — атомарная формула, т.е. имеет вид Υu , где u — непустая конечная последовательность общих терминов. Выделим в составе u последовательность $S_1, S_2, \dots, S_n$ положительных терминов и последовательность $P'_1, P'_2, \dots, P'_m$ отрицательных терминов (причем эти термины расположим в том же порядке, что и в u). По определению перевода $\Omega_1 \Omega_1(A) = \neg S_1 S_2 \dots S_n @ P_1 P_2 \dots P_m$. Тогда по определению перевода $\Omega_2 \Omega_2(\Omega_1(A)) = \neg \neg \Upsilon S_1 S_2 \dots S_n P'_1 P'_2 \dots P'_m$. С использованием аксиом схемы $\Upsilon\exists$ системы **СТ** несложно доказать в ней формулу $\Upsilon u \equiv \Upsilon S_1 S_2 \dots S_n P'_1 P'_2 \dots P'_m$. Отсюда по законам ЛВ вытекает, что и формула $\Upsilon u \equiv \neg \neg \Upsilon S_1 S_2 \dots S_n P'_1 P'_2 \dots P'_m$ доказуема в **СТ**.

Обоснуем далее индуктивный переход. Допустим, что для любых формул C и D , содержащих меньше пропозициональных связок, чем A , утверждение теоремы верно, т.е. формулы $C \equiv \Omega_2(\Omega_1(C))$ и $D \equiv \Omega_2(\Omega_1(D))$ доказуемы в **СТ**.

Пусть $A = \neg C$. Поскольку $C \equiv \Omega_2(\Omega_1(C))$ доказуема в **СТ** по индуктивному допущению, постольку (в силу законов ЛВ) формула $\neg C \equiv \neg \Omega_2(\Omega_1(C))$ также доказуема в этой системе. Но по определению переводов Ω_1 и Ω_2 имеем: $\neg \Omega_2(\Omega_1(C)) = \Omega_2(\neg \Omega_1(C)) = \Omega_2(\Omega_1(\neg C))$.

Пусть $A = C \wedge D$. Из допущения о доказуемости формул $C \equiv \Omega_2(\Omega_1(C))$ и $D \equiv \Omega_2(\Omega_1(D))$ по законам ЛВ вытекает, что формула $(C \wedge D) \equiv \Omega_2(\Omega_1(C)) \wedge \Omega_2(\Omega_1(D))$ доказуема в **СТ**. Но по определению переводов Ω_1 и Ω_2 имеем: $\Omega_2(\Omega_1(C)) \wedge \Omega_2(\Omega_1(D)) = \Omega_2(\Omega_1(C) \wedge \Omega_1(D)) = \Omega_2(\Omega_1(C \wedge D))$.

Для сложных формул, образованных с помощью иных бинарных пропозициональных связок, рассуждаем аналогично. ■

Теорема 4. Формула $B \equiv \Omega_1(\Omega_2(B))$ является теоремой **СФ@** для любой формулы B языка данного исчисления.

Доказательство. Применяем возвратную индукцию по количеству пропозициональных связок в составе формулы B языка **СФ@**.

Пусть B — атомарная формула языка **СФ@**, т.е. имеет вид $S_1 S_2 \dots S_n @ P_1 P_2 \dots P_m$. По определению перевода $\Omega_2 \Omega_2(B) = \neg \Upsilon S_1 S_2 \dots S_n P'_1 P'_2 \dots P'_m$. Тогда, по определению перевода $\Omega_1, \Omega_1(\Omega_2(B)) = \neg \neg S_1 S_2 \dots S_n @ P_1 P_2 \dots P_m$. Формула $B \equiv \Omega_1(\Omega_2(B))$ в этом случае оказывается пропозициональной тавтологией ($B \equiv \neg \neg B$).

Обоснование индуктивного перехода аналогично соответствующему фрагменту доказательства Теоремы 3. ■

Из только что доказанных теорем, согласно известному критерию В.А. Смирнова [Смирнов, 2002, с. 122], непосредственно вытекают два важных результата:

Теорема 5. *Перевод Ω_1 погружает исчисление $\mathbf{CT}$ в $\mathbf{CF@}$.*

Теорема 6. *Перевод Ω_2 погружает исчисление $\mathbf{CF@}$ в $\mathbf{CT}$.*

Таким образом, доказано, что исчисление суждений существования $\mathbf{CT}$ и исчисление $\mathbf{CF@}$ с неопределенно-местной силлогистической константой рекурсивно эквивалентны.

5. Семантическая непротиворечивость и полнота $\mathbf{CT}$

Опираясь на результат о погружаемости $\mathbf{CT}$ в $\mathbf{CF@}$, можно достаточно просто доказать, что исчисление $\mathbf{CT}$ является адекватной формализацией логики суждений существования, семантически построенной в Разделе 2.

Сравнивая условия $\mathcal{V}$ -значимости произвольной формулы A языка $\mathbf{CT}$ в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ и условия $\mathcal{W}$ -значимости в той же модели ее Ω_1 -перевода, предварительно обоснуем следующее метаутверждение:

Теорема 7. *Для любой формулы A языка $\mathbf{CT}$ и каждой модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ верно, что $\mathcal{V}(A, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\mathcal{W}(\Omega_1(A), \mathbf{D}, \varphi)$.*

Доказательство. Применяем возвратную индукцию по количеству пропозициональных связок в составе формулы A языка $\mathbf{CT}$.

Пусть A — атомарная формула, т.е. формула вида $\Upsilon X_1 X_2 \dots X_k$. Она является $\mathcal{V}$ -значимой, е.т.е. $\psi(X_1) \cap \psi(X_2) \cap \dots \cap \psi(X_k) \neq \emptyset$. Выделим в списке общих терминов $X_1, X_2, \dots, X_k$ положительные (пусть ими будут $S_1, S_2, \dots, S_n$) и отрицательные ($P'_1, P'_2, \dots, P'_m$). Напомним, что $\psi(S_i) = \varphi(S_i)$ для любого положительного термина S_i и $\psi(P'_j) = \mathbf{D} \setminus \varphi(P_j)$ для любого отрицательного термина P'_j . Ω_1 -переводом формулы $\Upsilon X_1 X_2 \dots X_k$ является силлогистическая формула $\neg S_1 S_2 \dots S_n @ P_1 P_2 \dots P_m$. Она $\mathcal{W}$ -значима, е.т.е. неверно, что $\mathcal{W}$ -значима формула $S_1 S_2 \dots S_n @ P_1 P_2 \dots P_m$, е.т.е. неверно, что $\varphi(S_1) \cap \varphi(S_2) \cap \dots \cap \varphi(S_n) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_1)) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_2)) \cap \dots \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_m)) = \emptyset$, е.т.е. $\varphi(S_1) \cap \varphi(S_2) \cap \dots \cap \varphi(S_n) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_1)) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_2)) \cap \dots \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_m)) \neq \emptyset$. Очевидно, что условия $\mathcal{V}$ -значимости $\Upsilon X_1 X_2 \dots X_k$ и условия $\mathcal{W}$ -значимости ее Ω_1 -перевода в произвольной модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ эквивалентны (в силу коммутативности операции $\cap$).

В случае, когда A — сложная формула, справедливость теоремы основывается на одинаковой интерпретации пропозициональных связок в обеих логиках, а также на определении перевода Ω_1 . ■

Теперь несложно доказать следующую метатеорему:

Теорема 8. *Для любой формулы A языка $\mathbf{CT}$ верно, что A $\mathcal{V}$ -общезначима, е.т.е. ее перевод $\Omega_1(A)$ является $\mathcal{W}$ -общезначимым.*

Доказательство. Из формулировки Теоремы 7 по законам логики предикатов вытекает: для любой формулы A языка $\mathbf{CT}$ верно, что $\mathcal{V}(A, \mathbf{D}, \varphi)$ в каждой модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, е.т.е. $\mathcal{W}(\Omega_1(A), \mathbf{D}, \varphi)$ в каждой модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$. Далее просто используем определения $\mathcal{V}$ -общезначимой и $\mathcal{W}$ -общезначимой формул. ■

В [Маркин, 2004] был обоснован тезис о семантической непротиворечивости и полноте силлогистического исчисления $\mathbf{CF@}$:

Утверждение 1. *Для любой формулы B языка $\mathbf{CF@}$ верно, что B доказуема в $\mathbf{CF@}$, е.т.е. B $\mathcal{W}$ -общезначима.*

Поскольку Ω_1 -переводы всех формул языка $\mathbf{CT}$ являются формулами языка $\mathbf{CF@}$, в качестве непосредственного следствия из Утверждения 1 получаем:

Утверждение 2. *Для любой формулы A языка $\mathbf{CT}$ верно, что формула $\Omega_1(A)$ доказуема в $\mathbf{CF@}$, е.т.е. $\Omega_1(A)$ $\mathcal{W}$ -общезначима.*

Докажем, наконец, метатеорему о семантической непротиворечивости и полноте исчисления суждений существования $\mathbf{CT}$:

Теорема 9. *Для любой формулы A языка $\mathbf{CT}$ верно, что A доказуема в $\mathbf{CT}$, е.т.е. A является $\mathcal{V}$ -общезначимой.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную формулу A языка $\mathbf{CT}$.

Формула A доказуема в $\mathbf{CT}$, е.т.е. (по Теореме 5) формула $\Omega_1(A)$ доказуема в $\mathbf{CF@}$, е.т.е. (согласно Утверждению 2) формула $\Omega_1(A)$ $\mathcal{W}$ -общезначима, е.т.е. (по Теореме 8) формула A $\mathcal{V}$ -общезначима. Таким образом, множество доказуемых в исчислении $\mathbf{CT}$ формул и множество $\mathcal{V}$ -общезначимых формул равны. ■

6. Погружение $\mathbf{CT}$ в исчисление предикатов

В [Маркин, 2004] был сформулирован перевод $^\oplus$ из множества формул языка силлогистики $\mathbf{CF@}$ в язык классического одноместного исчисления предикатов:

$$(S_1 S_2 \dots S_n @ P_1 P_2 \dots P_m)^\oplus = \neg \exists x (S_1 x \wedge S_2 x \wedge \dots \wedge S_n x \wedge \neg P_1 x \wedge \neg P_2 x \wedge \dots \wedge \neg P_m x),$$

$$(\neg C)^\oplus = \neg C^\oplus, \quad (C \nabla D)^\oplus = C^\oplus \nabla D^\oplus.$$

Была доказана следующая метатеорема:

Утверждение 3. Перевод $^{\oplus}$ погружает **СФ@** в исчисление предикатов.

Зададим теперь перевод $^{\otimes}$ в первопорядковый язык для формул языка логики суждений существования.

Пусть u — произвольная конечная последовательность общих терминов. Пусть $S_1, S_2, \dots, S_n$ — результат вычеркивания из u всех отрицательных терминов, а $P'_1, P'_2, \dots, P'_m$ — результат вычеркивания из u всех положительных терминов. Тогда

$$\begin{aligned} (\Upsilon u)^{\otimes} &= \exists x(S_1x \wedge S_2x \wedge \dots \wedge S_nx \wedge \neg P_1x \wedge \neg P_2x \wedge \dots \wedge \neg P_mx), \\ (\neg C)^{\otimes} &= \neg C^{\otimes}, \quad (C \nabla D)^{\otimes} = C^{\otimes} \nabla D^{\otimes}. \end{aligned}$$

Покажем, что доказуемость формулы в системе **СΥ** равносильна доказуемости ее $^{\otimes}$ -перевода в исчислении предикатов:

Теорема 10. Перевод $^{\otimes}$ погружает **СΥ** в исчисление предикатов.

Доказательство. Поскольку Ω_1 погружает исчисление **СΥ** в **СФ@** (Теорема 5), а $^{\oplus}$ погружает **СФ@** в исчисление предикатов (Утверждение 3), постольку **СΥ** погружается в исчисление предикатов посредством композиции переводов Ω_1 и $^{\oplus}$. Остается доказать, что композиция Ω_1 и $^{\oplus}$ равносильна переводу $^{\otimes}$.

Докажем, иными словами, что для любой формулы A языка **СΥ** верно, что формула $A^{\otimes} \equiv \Omega_1(A)^{\oplus}$ доказуема в исчислении предикатов. Используем возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в A .

Пусть A — атомарная формула языка **СΥ**. Тогда она имеет вид Υu (точное описание u дано при задании переводов Ω_1 и $^{\otimes}$). $\Omega_1(\Upsilon u)^{\oplus} = (\neg S_1 S_2 \dots S_n @ P_1 P_2 \dots P_m)^{\oplus} = \neg(S_1 S_2 \dots S_n @ P_1 P_2 \dots P_m)^{\oplus} = \neg \neg \exists x(S_1x \wedge S_2x \wedge \dots \wedge S_nx \wedge \neg P_1x \wedge \neg P_2x \wedge \dots \wedge \neg P_mx)$. Последняя формула есть не что иное, как $\neg \neg \Upsilon u^{\otimes}$. Очевидно, что формула $\Upsilon u^{\otimes} \equiv \neg \neg \Upsilon u^{\otimes}$ доказуема в исчислении предикатов.

Пусть A — сложная формула. Ограничимся случаями, когда A имеет вид $\neg C$ и $C \wedge D$. По индуктивному допущению формулы $C^{\otimes} \equiv \Omega_1(C)^{\oplus}$ и $D^{\otimes} \equiv \Omega_1(D)^{\oplus}$ доказуемы в исчислении предикатов. Но тогда в нем также доказуемы формулы $\neg C^{\otimes} \equiv \neg \Omega_1(C)^{\oplus}$ и $(C^{\otimes} \wedge D^{\otimes}) \equiv \Omega_1(C)^{\oplus} \wedge \Omega_1(D)^{\oplus}$. Используя определения трех переводов в этих записях, получаем: формулы $(\neg C)^{\otimes} \equiv \Omega_1(\neg C)^{\oplus}$ и $(C \wedge D)^{\otimes} \equiv \Omega_1(C \wedge D)^{\oplus}$ доказуемы в исчислении предикатов. ■

7. Заключение

Предложенная в этой статье логика суждений существования может быть использована не только для сопоставления с достаточно экзотической силлогистикой с неопределенно-местной константой, но и для исследования обычных силлогистических теорий, язык которых содержит стандартные бинарные константы (напр., a , e , i , o). К настоящему времени построены многие системы позитивной и негативной силлогистик. С семантической точки зрения они различаются условиями истинности и ложности форм атрибутивных суждений, причем сами эти условия обычно формулируются (или могут быть эквивалентным образом переформулированы) в терминах суждений существования. Поэтому возникает возможность различным образом определять бинарные силлогистические константы посредством константы Υ . При этом мы получаем разные *дефинициальные расширения* логики $\mathbf{C}\Upsilon$, а каждая конкретная силлогистика может рассматриваться как своего рода фрагмент логики суждений существования.

Сформулируем описанную идею в более точных терминах. Пусть $\mathbf{Df}$ — система определений силлогистических констант в языке логики $\mathbf{C}\Upsilon$. Под $\mathbf{C}\Upsilon + \mathbf{Df}$ будем понимать дефинициальное расширение $\mathbf{C}\Upsilon$ посредством системы определений $\mathbf{Df}$. Исчисление $\mathbf{S}$, сформулированное в языке силлогистики, назовем *силлогистическим фрагментом $\mathbf{C}\Upsilon$* при определениях $\mathbf{Df}$, е.т.е. для любой формулы A языка $\mathbf{S}$ верно: A доказуема в $\mathbf{S}$, е.т.е. A доказуема в $\mathbf{C}\Upsilon + \mathbf{Df}$.

Приведем два примера, касающихся вступительной части этой статьи. Силлогистическим фрагментом $\mathbf{C}\Upsilon$ при брентановских определениях a , e , i , o является известная система фундаментальной силлогистики $\mathbf{C}\Phi$. А силлогистическим фрагментом $\mathbf{C}\Upsilon$ при кэрролловских определениях a , e , i будет некоторая формализация силлогистики Кэрролла.

Еще одной важной задачей представляется построение аналитикотабличного варианта логики суждений существования. Такого рода представление этой логической теории может дать эффективный метод установления законов и форм правильных рассуждений в силлогистиках с альтернативными трактовками атрибутивных суждений.

Литература

- Маркин, 2004 – *Маркин В.И.* Фундаментальная силлогистика с неопределенно-местной константой // Логические исследования. Вып. 11. М.: Наука, 2004. С. 187–199.
- Маркин, 2021 – *Маркин В.И.* Логика суждений существования, рекурсивно эквивалентная силлогистике с неопределенно-местной константой // Двенадцатые Смирновские чтения: материалы Международной научной конференции,

- Москва (24–26 июня 2021 г.). М.: Русское общество истории и философии науки, 2021. С. 112–117.
- Смирнов, 2002 – *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 263 с.
- Brandl, 2018 – *Brandl J.L.* Brentano’s Theory of Judgement // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. URL = <https://plato.stanford.edu/entries/brentano-judgement/>
- Carroll, 1896 – *Carroll L.* Symbolic Logic. London: Macmillan and Co., 1896. 200 p.

VLADIMIR I. MARKIN

Logic of existence judgements and syllogistic

Vladimir I. Markin

Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: markin@philos.msu.ru

Abstract: We set out a formal system for logical analyses of existence judgements. Its language contains the constant of existence, atomic formulas are formed by the concatenation of this constant with any finite sequence of general terms (positive and negative). Complex formulas are formed by means of propositional connectives. We formulate a natural semantics for this language. The extension of a positive general term in a model is a subset of the domain, the extension of a negative general term is the complement to the extension of the respective positive term. An atomic formula is valid in a model iff the intersection of the extensions of all terms in it is non-empty. We set out an axiomatization of the set of generally valid formulas. This calculus formulates on the base of classical propositional logic. We notice that categorical judgements can be defined with the aid of existence judgements and raise a question about metatheoretic interrelations among our logic and different syllogistic theories. We prove that the logic of existence judgements is recursively equivalent to the syllogistic with indefinably-placed constant which is the generalization of constant a . We formulate the embedding translations from each of these two systems to another. Also, we prove soundness and completeness theorems for the calculus of existence judgements.

Keywords: existence judgements, categorical judgements, syllogistic, logical calculus, semantics, embedding translation

For citation: Markin V.I. “Logika suzhdenii sushchestvovaniya i sillogistika” [Logic of existence judgements and syllogistic], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 31–47. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-31-47 (In Russian)

References

- Brandl, 2018 – Brandl, J.L. *Brentano’s Theory of Judgement*, in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. URL = <https://plato.stanford.edu/entries/brentano-judgement/>.
- Carroll, 1896 – Carroll, L. *Symbolic Logic*. London: Macmillan and Co., 1896. 200 pp.
- Markin, 2004 – Markin V.I. “Fundamental’naya sillogistika s neopredelenno-mestnoi konstantoi” [Fundamental syllogistic with indefinably-placed constant], in: *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations]. Vol. 11. Moscow: Nauka, 2004, pp. 187–199. (In Russian)
- Markin, 2021 – Markin, V.I. “Logika suzhdenii sushchestvovaniya, rekursivno ekvivalentnaya sillogistike s neopredelenno-mestnoi konstantoi” [Logic of existence

- judgements that is recursively equivalent to syllogistic with indefinably-placed constant], in: *Dvenadtsatye Smirnovskie chteniya: materialy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii, Moskva (24–26 iyunya 2021 g.)* [Twelfth Smirnovs Readings: Proceedings of the international scientific conference, Moscow (June 24–26, 2021)]. Moscow: Russkoe obshchestvo istorii i filosofii nauki, 2021, pp. 112–117. (In Russian)
- Smirnov, 2002 – Smirnov, V.A. *Logicheskie metody analiza nauchnogo znaniya* [Logical methods of the analyses of scientific knowledge]. Moscow: Editorial URSS, 2002. 263 pp. (In Russian)

В.И. ШАЛАК

Логика в онтологии процессов

Владимир Иванович Шалак

Институт философии РАН.

Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

E-mail: shalack@gmail.com

Аннотация: Целью работы является исследование языковых средств, которые могут быть использованы для проведения рассуждений о процессуальной онтологии, которая отличается от субстанциальной более сложной структурой элементарных «кирпичиков», лежащих в ее основе. Следствием этого является необходимость использовать языки с более богатыми выразительными возможностями, чем язык классической логики. В работе рассматриваются языки с унарными и бинарными модальностями. Отдельные процессы можно анализировать с двух точек зрения — статики и динамики. В первом случае нас интересуют высказывания, истинность которых зависит лишь от внутренней структуры текущего процесса. Отношение деления процессов позволяет определить на его частях транзитивный, плотный линейный порядок без первого и последнего элементов, который можно понимать как локальный временной порядок данного процесса. Это, в свою очередь, позволяет говорить о начале процессов, их протекании и окончании. Появляется возможность определить понятия состояния процесса и процесса как события. Включение в язык бинарной модальности типа некоммутативной конъюнкции позволяет определить аналог причинно-подобной условной связи между частями процесса. Динамика процессов подразумевает возможность их продолжения за пределы текущего процесса. Это может происходить либо благодаря имплицитным причинным связям, когда текущий процесс содержит в себе причину своего будущего продолжения, либо в результате действий активных агентов, которые сами формируют это продолжение. Для представления динамики процессов как следствия действий активных агентов использован упрощенный вариант языка динамической логики. Также показано, каким образом можно учитывать цели, которые ставят перед собой активные агенты при выполнении тех или иных действий.

Ключевые слова: процесс, онтология процессов, логика процессов, статика процессов, динамика процессов

Для цитирования: Шалак В.И. Логика в онтологии процессов // Логические исследования / Logical Investigations. 2021. Т. 27. № 2. С. 48–65. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-48-65

1. Введение

Целью настоящей работы является исследование языковых средств и логики, которые могут быть использованы для рассуждений о процессуальной онтологии.

В предыдущей публикации [Шалак, 2020] был проведен сравнительный логический анализ субстанциальной и процессуальной онтологий. Для процессуальной онтологии были выделены ее основные составляющие структуры и предложен ряд характеризующих их постулатов.

Процессуальную онтологию можно представить четверкой $\langle W, U, D, \leq \rangle$, где W — действительный мир, понимаемый как единый процесс. Предметы в самом общем смысле понимаются как «пучки» составляющих их подпроцессов. В соответствии с этим U представляет совокупность подпроцессов W . $\leq$ — отношение частичного порядка на U , понимаемое как отношение *быть подпроцессом*, а W — его наибольший элемент. Процессы характеризуются протяженностью и направленностью. Протяженность предполагает возможность (мысленного) деления процессов на последовательные части. Это деление представлено трехместным отношением $D \subseteq U \times U \times U$: $Dpqr$ — процесс p можно разделить на предшествующую и последующую части — q и r .

Ранее было показано, что отношение $\leq$ естественным образом приводит к логикам силлогистического типа. Теперь мы должны продолжить и исследовать логические структуры, связанные с протяженностью и направленностью процессов.

По сравнению с предыдущей публикацией [Шалак, 2020] семантические постулаты для отношения D уточнены и их стало меньше. Незначительные изменения коснулись постулатов 2, 6 и 7. Для краткости мы используем в метаязыке очевидные по смыслу сокращения $\sim$, $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$ для соответствующих фраз естественного языка.

1.1. Семантические постулаты для отношения D

1. $\forall p \exists x \exists y Dpxy$ — всякий процесс p можно разделить на предшествующую x и последующую y части, также являющиеся процессами.
2. $Dpxy \Rightarrow \sim \exists q Dqyx$ — левую и правую части деления процесса нельзя поменять местами.
3. $Dpxy \& Dqxy \Rightarrow p = q$ — процесс однозначно задается своими частями.
4. $Dpxy \& Dpzy \Rightarrow x = z$ — процесс однозначно задается своими частями.

5. $Dpxy \ \& \ Dprz \Rightarrow y = z$ — процесс однозначно задается своими частями.
6. $\exists w(Dpxw \ \& \ Dwyz) \Leftrightarrow \exists u(Dpru \ \& \ Duxy)$ — последовательное деление процесса на части ассоциативно. Сначала мы можем разделить процесс p на две части x и w , а потом разделить вторую часть w еще на две — y и z , а можно сначала разделить p на две части u и z , а потом разделить первую часть u на x и y . Результат останется прежним.
7. $\exists p(Dpxy \ \& \ Dpru) \Leftrightarrow \exists v(Dzxv \ \& \ Dyvu) \vee \exists v(Dxzv \ \& \ Duvy) \vee \exists p(x = z \ \& \ y = u \ \& \ Dpxu)$ — как могут соотноситься два произвольных деления одного и того же процесса.

Понятие процесса в процессуальной онтологии является исходным и не редуцируемым ни к чему другому, но это не означает, что мы не можем построить для постулатов стандартную модель, единственное назначение которой — подтвердить их непротиворечивость.

- Пусть $\mathbf{W}$ — множество всех рациональных чисел.
- Для любых двух таких рациональных чисел a и b , что $a < b$, существует открытый интервал $(a, b) = \{c : a < c < b\}$. Пусть $\mathbf{U} = \{(a, b) : a \in \mathbf{W} \ \& \ b \in \mathbf{W} \ \& \ a < b\} \cup \{\mathbf{W}\}$.
- Любое число $c \in (a, b)$ задает деление этого интервала на два других открытых интервала (a, c) и (c, b) . Это и будет отношением деления процессов $\mathbf{D} = \{ \langle x, y, z \rangle : \exists a \exists b \exists c [a < c < b \ \& \ x = (a, b) \ \& \ y = (a, c) \ \& \ z = (c, b)] \}$.
- Отношение *быть подпроцессом* отождествим с нестрогим отношением включения $\leq = \{ \langle x, y \rangle : x \in \mathbf{U} \ \& \ y \in \mathbf{U} \ \& \ x \subseteq y \}$.

Легко проверить, что все наши постулаты истинны в этой модели. При этом необходимо еще раз подчеркнуть, что предложенная модель не означает редукции онтологии процессов к теоретико-множественной субстанциальной онтологии, а всего лишь служит цели показать, что постулаты непротиворечивы. Мы знаем, что логику предикатов нельзя редуцировать к логике высказываний, но одним из способов показать ее непротиворечивость является построение перевода всех формул языка логики предикатов в язык логики высказываний путем стирания кванторов, индивидуальных констант и переменных. В результате все аксиомы логики предикатов превращаются в тавтологии логики высказываний. На семантическом уровне это равносильно тому, что для доказательства непротиворечивости логики

предикатов достаточно проверить истинность ее аксиом в одноэлементной модели. Так же и в нашем случае. Для описания и рассуждений о процессах мы вынуждены пользоваться тем фрагментом естественного языка, который имеет теоретико-множественную семантику. Этот язык обязан подчиняться требованию непротиворечивости. Мы всего лишь показали, что принятие постулатов для D не нарушает этого требования.

1.2. Основные характеристики отношения D

В дальнейшем нам понадобятся определения следующих отношений:

Def.1 $Lpx \Leftrightarrow_{def} \exists y Dpxy$, где x является левой частью (началом) процесса p .

Def.2 $Rpx \Leftrightarrow_{def} \exists y Dpyx$, где x является правой частью (концом) процесса p .

Def.3 $Spx \Leftrightarrow_{def} \exists y (Rpy \ \& \ Lyx)$, где x является внутренним сегментом процесса p .

Def.4 $Ppx \Leftrightarrow_{def} Lpx \vee Spx \vee Rpx$, где x является собственной частью процесса p .

Основные характеристики логики процессов определяются свойствами отношения D и производных от него, которые мы только что определили.

Утверждение 1. Отношения D , L , R и P обладают следующими свойствами:

1. $Dpxy \Rightarrow p \neq x \ \& \ p \neq y \ \& \ x \neq y$.
2. $\sim Lxx$ — иррефлексивность.
3. $Lxy \ \& \ Lyz \Rightarrow Lxz$ — транзитивность.
4. $Lxy \Rightarrow \exists z (Lxz \ \& \ Lzy)$ — плотность.
5. $Lpx \ \& \ Lpy \Rightarrow Lxy \vee Lyx \vee x = y$ — линейность.
6. $\forall x \exists y Lxy$ — нет последнего элемента.
7. $\sim Rxx$ — иррефлексивность.
8. $Rxy \ \& \ Ryx \Rightarrow Rxz$ — транзитивность.
9. $Rxy \Rightarrow \exists z (Rzx \ \& \ Rzy)$ — плотность.

10. $Rpx \ \& \ Rpy \Rightarrow Rxy \ \vee \ Ryx \ \vee \ x = y$ — линейность.
11. $\forall x \exists y Rxy$ — нет последнего элемента.
12. $Lpx \Rightarrow \sim Rpx$ — дизъюнктность L и R .
13. $\sim Pxx$ — иррефлексивность.
14. $\forall x \exists y Pxy$ — нет последнего элемента.
15. $Pxy \ \& \ Pyz \Rightarrow Pxz$ — транзитивность.
16. $Pxy \Rightarrow \exists z (Pxz \ \& \ Pzy)$ — плотность.

Поскольку в настоящей работе нас будут в основном интересовать те характеристики логики процессов, которые связаны с их протяженностью и направленностью, в определении модели $M = \langle U, D, I \rangle$ мы опустим упоминание отношения *быть подпроцессом* и наибольшего элемента W для него, оставив лишь множество всех процессов U , отношение деления процессов D и добавив функцию интерпретации $I: Prop \rightarrow 2^U$, сопоставляющую каждой пропозициональной переменной множество процессов, на которых она истинна. Определения обычных связок оставим стандартными.

2. Статика процессов

Обычно для выражения протяженности процессов мы прибегаем к использованию временных маркеров *было* или *будет*. В онтологии процессов время пока что никак не фигурирует, но, как следствие нашего понимания протяженности, условно левые и правые части могут быть ассоциированы с *началом* и *концом* процесса относительно данного деления. Это и послужит нашей отправной точкой.

2.1. Процессы и время

Расширим язык логики высказываний операторами $\langle L \rangle$, $\langle R \rangle$ и определим понятие формулы следующим образом:

$$Def.5 \ A := Prop \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid \langle L \rangle A \mid \langle R \rangle A.$$

Моделью будем называть тройку $M = \langle U, D, I \rangle$.

$$Def.6 \ M, x \models A \text{ — формула } A \text{ истинна на процессе } x \text{ модели } M:$$

- $M, x \models q \Leftrightarrow x \in I(q), q \in Prop;$
- $M, x \models \neg A \Leftrightarrow M, x \not\models A;$

- $M, x \models A \wedge B \Leftrightarrow M, x \models A \ \& \ M, x \models B$;
- $M, x \models \langle L \rangle A \Leftrightarrow \exists y (Lxy \ \& \ M, y \models A)$;
- $M, x \models \langle R \rangle A \Leftrightarrow \exists y (Rxy \ \& \ M, y \models A)$.

Def.7 $\models A \Leftrightarrow_{def} \forall M \forall x (M, x \models A)$ — формула A общезначима.

В дальнейшем, если модель M фиксирована, мы будем опускать ее упоминание. Смысл формул вида $\langle L \rangle A$ и $\langle R \rangle A$ достаточно очевиден. Формула $\langle L \rangle A$ истинна на процессе x , е. и т.е. A истинна на некотором его начале. Аналогично для $\langle R \rangle A$. Условия истинности формул $\langle L \rangle A$ и $\langle R \rangle A$ определяются аналогично условиям истинности формул с операторами возможности в модальной логике, если Lxy и Rxy понимать как отношения достижимости на возможных мирах. Это позволяет по аналогии с модальной логикой определить дуальные операторы $[L]$ и $[R]$ типа необходимости:

Def.8 $[L] A \Leftrightarrow_{def} \neg \langle L \rangle \neg A$.

Def.9 $[R] A \Leftrightarrow_{def} \neg \langle R \rangle \neg A$.

Им будут соответствовать следующие условия истинности:

- $x \models [L] A \Leftrightarrow \forall y (Lxy \Rightarrow y \models A)$;
- $x \models [R] A \Leftrightarrow \forall y (Rxy \Rightarrow y \models A)$.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2.

1. $\models A \Rightarrow \models [L] A$.
2. $\models [L] (A \supset B) \supset ([L] A \supset [L] B)$.
3. $\models [L] A \equiv \neg \langle L \rangle \neg A$.
4. $\models [L] A \supset [L] [L] A$ — транзитивность.
5. $\models [L] [L] A \supset [L] A$ — плотность.
6. $\models (\langle L \rangle A \wedge \langle L \rangle B) \supset \langle L \rangle (A \wedge B) \vee \langle L \rangle (A \wedge \langle L \rangle B) \vee \langle L \rangle (\langle L \rangle A \wedge B)$ — линейность.
7. $\models \langle L \rangle (A \vee \neg A)$ — бесконечность.
8. $\models A \Rightarrow \models [R] A$.

9. $\models [R] (A \supset B) \supset ([R] A \supset [R] B)$.
10. $\models [R] A \equiv \neg \langle R \rangle \neg A$.
11. $\models [R] A \supset [R] [R] A$ — транзитивность.
12. $\models [R] [R] A \supset [R] A$ — плотность.
13. $\models (\langle R \rangle A \wedge \langle R \rangle B) \supset \langle R \rangle (A \wedge B) \vee \langle R \rangle (A \wedge \langle R \rangle B) \vee \langle R \rangle (\langle R \rangle A \wedge B)$ — линейность.
14. $\models \langle R \rangle (A \vee \neg A)$ — бесконечность.
15. $\models \langle L \rangle \langle R \rangle A \equiv \langle R \rangle \langle L \rangle A$ — обратимость.
16. $\not\models \langle L \rangle A \equiv \langle R \rangle A$.

Мы видим, что операторы $\langle L \rangle$ и $\langle R \rangle$ позволяют выразить свойства транзитивности, плотности, линейности и бесконечности, что, в свою очередь, позволяет нам ассоциировать их с временным порядком отдельных процессов. Это находится в полном соответствии с тем, что было сказано в [Шалак, 2020]. Общеизвестность формулы 15 говорит о симметричности левого и правого направлений, что соответствует обратимости времени в законах физических наук. В то же время необщеизвестность формулы 16 говорит, что левые части процессов отличны от правых, прошлое отлично от будущего.

2.2. Состояния и события

Передо мной на столе лежит открытая книга. Ее *состояние* — быть открытой. Я могу перелистывать ее страницы, но она продолжает находиться в этом состоянии. Затем я закрываю книгу. Закрывание книги — *событие*, которое характеризуется тем, что наступает оно лишь после того, как книга становится закрытой. Многое в изменяющемся мире можно описать в терминах смены состояний и событий. *Состояние* — характеристика того, что стабильно в процессе, *событие* — характеристика происходящих в процессе изменений. Эти понятия не абсолютны. Книга у меня на столе сохраняет состояние быть открытой, но в то же время оно состоит из ряда промежуточных событий перелистывания страниц. Идея различения этих понятий взята из работ по планированию действий [Allen, 1984] и [Allen, Ferguson, 1994].

Введем в язык еще два оператора, которые обозначим посредством $\langle P \rangle$ и $[P]$. Они позволят делать утверждения не только о началах или концах процессов, но и о любых внутренних фрагментах:

$$Def.10 \quad \langle P \rangle A \Leftrightarrow_{def} \langle L \rangle A \vee \langle R \rangle \langle L \rangle A \vee \langle R \rangle A.$$

$$Def.11 \quad [P] A \Leftrightarrow_{def} \neg \langle P \rangle \neg A.$$

Им будут соответствовать условия истинности:

- $x \models \langle P \rangle A \Leftrightarrow \exists y (Pxy \ \& \ y \models A);$
- $x \models [P] A \Leftrightarrow \forall y (Pxy \Rightarrow y \models A).$

Утверждение 3. Формулы вида $\langle P \rangle A$ и $[P] A$ обладают следующими свойствами:

1. $\models A \Rightarrow \models [P] A.$
2. $\models [P] (A \supset B) \supset ([P] A \supset [P] B).$
3. $\models [P] A \supset [P] [P] A$ — транзитивность.
4. $\models [P] [P] A \supset [P] A$ — плотность.
5. $\models \langle P \rangle (A \vee \neg A)$ — бесконечность.

Теперь мы готовы определить понятия состояния процесса и события. В качестве сокращений введем в язык операторы S (*state*) и E (*event*).

Процесс характеризуется *состоянием* A , е.т.е. A истинно как на всем процессе, так и на всех его собственных частях:

$$Def.12 \quad SA \Leftrightarrow_{def} A \wedge [P] A.$$

Процесс представляет *событие* A , е.т.е. A истинно на всем процессе, но ложно на всех его собственных частях:

$$Def.13 \quad EA \Leftrightarrow_{def} A \wedge [P] \neg A.$$

Чтобы проиллюстрировать эти понятия на реальном примере, представим парусное судно, которое плывет против ветра, периодически меняя галсы. Каждая смена галсов является *событием*. Оно протекает во времени, но наступает лишь после того, как поворот с перебрасыванием парусов на другую сторону завершен. В промежутках между сменами галсов судно находится в *состоянии* движения в выбранном направлении. Этот процесс описывается последовательностью событий и состояний в том смысле, как мы их определили.

2.3. Бинарные модальности

Онтология процессов и отношение деления D естественным образом приводят к необходимости использования бинарных модальностей, поскольку унарные модальные операторы не позволяют выразить многих интересных логических характеристик процессов. Добавим к языку логики высказываний бинарный оператор $\oplus$ и определим понятие формулы следующим образом:

$$\text{Def.14 } A := Prop \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \oplus B).$$

В качестве условия истинности для формул вида $A \oplus B$ примем следующее:

$$\bullet x \models A \oplus B \Leftrightarrow \exists y \exists z (Dxyz \ \& \ y \models A \ \& \ z \models B).$$

Можно провести аналогию между оператором $\oplus$ и оператором временной логики Вригта «*And_next*» [Wright, 1965; Вригт, 1986]. У Вригта смысл формулы $(A \text{ And_next } B)$ заключается в том, что в модели дискретного времени в некоторый момент имеет место A , а в следующий момент имеет место B . В логике процессов формула $(A \oplus B)$ означает, что при некотором делении процесса на две части на левой имеет место A , а на правой — B , но это не то же самое, что B имеет место в следующий момент времени. Например, в модели дискретного времени трудно предложить естественную семантику для предложения «*Я пришел домой и отдыхаю*». В процессуальной логике это выражается непосредственным образом («*Я пришел домой*» $\oplus$ «*Я отдыхаю*»).

Оператор $\oplus$ обладает чертами некоммутативной конъюнкции и позволяет ввести в язык аналог импликации $\rightarrow$ для обозначения условной связи между предшествующими и последующими частями процессов.

$$\text{Def.15 } A \rightarrow B \Leftrightarrow_{def} \neg(A \oplus \neg B).$$

Условия истинности для формул типа $A \rightarrow B$ имеют следующий вид:

$$\bullet x \models A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall y \forall z (Dxyz \ \& \ y \models A \Rightarrow z \models B).$$

О выразительных возможностях языка с бинарным оператором $\oplus$ говорит уже то, что в нем можно легко определить рассмотренные ранее унарные операторы:

$$\text{Def.16 } \langle L \rangle A \Leftrightarrow_{def} A \oplus (A \vee \neg A).$$

$$\text{Def.17 } \langle R \rangle A \Leftrightarrow_{def} (A \vee \neg A) \oplus A.$$

Связка «если... то...» естественного языка часто употребляется в овремененном смысле для обозначения, например, причинной связи. Обычная материальная импликация для этого не подходит. Оператор $\rightarrow$ обладает характеристиками условной связи, которую можно понимать как причинную связь, когда причина отлична от действия и полностью ему предшествует. Примером такой причинной связи является, например, столкновение бильiardных шаров.

Логика с операторами $\oplus$ и $\rightarrow$ родственна интервальной временной логике *CDT* [Venema, 1991], но в деталях и семантике отличается.

Утверждение 4. Формулы вида $A \oplus B$ и $A \rightarrow B$ обладают следующими свойствами:

1. $\models (A \vee \neg A) \oplus (A \vee \neg A)$.
2. $\models A \oplus (B \oplus C) \equiv (A \oplus B) \oplus C$.
3. $\not\models A \rightarrow A$.
4. $\models A \Rightarrow \models B \rightarrow A$.
5. $\models A \Rightarrow \models \neg A \rightarrow B$.
6. $\models A \rightarrow (B \wedge C) \Leftrightarrow \models (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$.
7. $\models A \rightarrow B \Rightarrow \models (A \wedge C) \rightarrow B$.
8. $\models (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow \models (A \vee B) \rightarrow C$.
9. $\models A \rightarrow B \Rightarrow \models A \rightarrow (B \vee C)$.
10. $\models A, \models A \rightarrow B \Rightarrow \models [R] B$.
11. $\models (A \rightarrow B) \wedge \langle L \rangle A \supset \langle R \rangle B$.
12. $\models A \rightarrow \langle L \rangle B, \models B \rightarrow C \Rightarrow \models A \rightarrow \langle R \rangle C$.

Общезначимость формулы 1 соответствует семантическому постулату 1 для отношения D и говорит о том, что любой процесс может быть разделен на две части.

Формула 2 говорит об ассоциативности отношения деления процессов и соответствует постулату 6 для отношения D .

Необщезначимость закона тождества 3 следует из постулата 2 для отношения D и независимости приписывания истинностных значений пропозициональным переменным на частях процессов.

Формулы 4 и 5 являются аналогами парадоксов материальной импликации, но не для истинности, а для общезначимости формулы A .

Формулы 6–9 не нуждаются в комментариях.

Формулы 10 представляют аналог *modus ponens* для общезначимости: если общезначимы A и $A \rightarrow B$, то в конце каждого процесса будет истинно B .

Формула 11 является сильным вариантом 10, более детально представляя внутреннюю структуру *modus ponens*. Чтобы применить его, формула A должна быть истинна в начале текущего процесса, и тогда в конце процесса будет истинна формула B .

Формулы 12 представляют транзитивность условной связи $\rightarrow$ на процессах.

3. Динамика процессов

В предыдущих параграфах мы рассмотрели формулы с модальными операторами, истинность которых зависит лишь от истинности на частях данного процесса, но не зависит от возможного последующего его развития. Это развитие может быть обусловлено либо причинными связями, которые естественным образом приводят к продолжению текущих процессов, либо действиями активных агентов, которые сами выбирают, как дальше будет развиваться данный процесс.

3.1. Продолжение процессов

Добавим к языку с бинарными модальными операторами $\oplus$ и $\rightarrow$ новый унарный оператор $\Diamond$:

Def.18 $A := Prop \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \oplus B) \mid (A \rightarrow B) \mid \Diamond A$.

Следующим образом определим условия истинности формул вида $\Diamond A$:

- $x \models \Diamond A \Leftrightarrow \exists p \exists y (Dpxy \ \& \ y \models A)$.

Смысл формул вида $\Diamond A$ очевиден. $\Diamond A$ истинна на текущем процессе, е.т.е. этот процесс имеет продолжение, на котором истинна формула A . Это определение замечательно тем, что оно задает направленность развития процессов, и потому допустимо читать формулы вида $\Diamond A$ как «*далее будет A*». Итерацию оператора $\Diamond$ можно понимать просто как *будет*.

Добавим к языку новый оператор $\Box$ в качестве дуала для $\Diamond$:

Def.19 $\Box A \Leftrightarrow_{def} \neg \Diamond \neg A$.

- $x \models \Box A \Leftrightarrow \forall p \forall y (Dpxy \Rightarrow y \models A)$.

Утверждение 5. Имеют место следующие утверждения:

1. $\models A \Rightarrow \models \Box A$.
2. $\models \Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$.
3. $\not\models \Box A \supset \Diamond A$.
4. $\models A \rightarrow B \Rightarrow \models A \supset \Box B$.

Истинность формулы 4 говорит о том, что если общезначима условная связь $A \rightarrow B$ и на каком-то процессе истинно A , то на каждом его продолжении будет истинно B . Однако необщезначимость формулы 3 говорит, что из $\Box B$ еще не следует, что процесс действительно будет иметь продолжение. Образно говоря, онтология процессов допускает их окончание.

3.2. Порождение процессов

В предыдущем параграфе мы рассмотрели ситуацию продолжения процессов в общем виде независимо от того, чем это продолжение вызвано. Теперь же рассмотрим случай, когда продолжение текущего процесса имеет место в силу действий активного агента. Пусть он фиксирован и с ним ассоциирован набор элементарных действий Act , которые он способен совершить.

Распространим функцию интерпретации I на элементарные действия $I: Act \cup Prop \rightarrow 2^U$. Каждому действию $d \in Act$ эта функция сопоставляет множество процессов $I(d)$, которые оно может породить.

Понятие формулы определим следующим образом:

Def.20 $A := Prop \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \oplus B) \mid (A \rightarrow B) \mid \Diamond A \mid \langle d \rangle A$,
где $d \in Act$.

В качестве условий истинности для формул вида $\langle d \rangle A$ примем следующие:

- $x \models \langle d \rangle A \Leftrightarrow \exists p \exists y (Dpxy \ \& \ y \in I(d) \ \& \ y \models A)$.

Определим дуальный оператор $[d]$ и приведем для него соответствующие условия истинности:

Def.21 $[d] A \Leftrightarrow_{def} \neg \langle d \rangle \neg A$.

- $x \models [d] A \Leftrightarrow \forall p \forall y (Dpxy \ \& \ y \in I(d) \Rightarrow y \models A)$.

Утверждение 6. Имеют место следующие утверждения:

1. $\models A \Rightarrow \models [d] A$.
2. $\models [d] (A \supset B) \supset ([d] A \supset [d] B)$.
3. $\models [d] A \supset \Diamond A$.

Общезначимость формулы 3 говорит о том, что порождение новых процессов в результате действий активных агентов является частным случаем общего продолжения процессов.

3.3. Целеполагание активных агентов

Если посмотреть на происходящие в окружающем нас мире изменения, их можно разделить на два вида. К первому виду относятся изменения, описываемые законами наук. Они были эксплицированы в номологической модели объяснения К. Гемпеля. Ко второму виду относятся изменения, инициируемые активными целесообразно действующими агентами. Такие изменения могут быть названы алгоритмическими, поскольку получают объяснение в терминах следования предписаниям для достижения требуемого результата. Примером первого вида изменений может быть падение камня с крыши, второго — бросок камня, чтобы попасть в цель. В первом случае падение камня описывается законами механики, во втором — целесообразным действием человека.

Широко распространено мнение, что неформальное понятие алгоритма было строго уточнено в работах А. Чёрча и А. Тьюринга, что тезис Чёрча–Тьюринга является утверждением о том, что любой алгоритм может быть представлен в терминах абстрактного вычислительного устройства Тьюринга. Это не совсем верно. Тьюринг предложил математический формализм для описания возможных символьных преобразований, которые способен произвести человек-вычислитель, но не описание общего понятия алгоритма. Человек-вычислитель оперирует с символами, а не с физическими объектами. Законосители всего лишь репрезентируют то, что человек хочет видеть за ними, а вычисление на машине Тьюринга — это переход от одной символьной репрезентации, называемой начальной, к другой, называемой конечной. В зависимости от принятых соглашений одна и та же комбинация букв используемого алфавита может означать разные объекты. Например, три единички 111 по их количеству могут представлять число три, в двоичной системе записи они будут представлять уже число семь, а в десятичной — число сто одиннадцать. Соответственно, в зависимости от принятых соглашений одна и та же машина Тьюринга будет вычислять разные функции.

С другой стороны, машина Тьюринга описывается в языке с конечным алфавитом символов, внутренних состояний и действий. С их помощью формулируются конечные наборы правил, управляющих работой машины. Это позволяет путем гёделизации закодировать все возможные машины и дальше исследовать их характеристики в терминах Гёделевых номеров, которые однозначно представляют не только синтаксис, но и семантику машины Тьюринга. Результат работы машины Тьюринга однозначно детерминирован ее номером (программой) и входными данными. Именно это и используется для доказательства основных теорем теории вычислимости.

Всякое действие, выполняемое абстрактной машиной Тьюринга, завершается успешно. У нее не могут закончиться чернила для печати, и никто не может вдруг выключить ее или сломать. Результат любого действия совпадает с целью, ради которой оно совершается. Если машина должна напечатать символ на рабочей ленте, то она его печатает, и результат выполнения всей программы будет одним и тем же при каждом ее запуске.

Теперь посмотрим на алгоритмические явления в природе, которые внешним образом мы можем описать как следование набору предписаний для достижения требуемого результата. Любой такой набор предписаний можно переформулировать в виде набора правил «Если C , сделай d ». Легко показать, как с помощью таких правил задается очередность выполнения действий, их повторение, выбор вариантов, начало и завершение алгоритма. Именно с помощью таких условных правил формулируются программы для машины Тьюринга. Если мы захотим описать физически реализуемые алгоритмы таким же образом, то обнаружим, что в правилах не хватает указания на цели, ради которых они совершаются, и потому говорить об успешности выполнения правила нельзя без учета достижения цели. Более правильным было бы представлять правила, описывающие физический алгоритм, как «Если C , сделай d , чтобы G », где G (*goal*) — некоторое событие или процесс, являющиеся целью выполнения данного правила. Например, «Если ты голоден (C), пойди в магазин (d), чтобы купить продукты (G)». Покупка продуктов — это физический результат, а не символьная репрезентация в виде кассового чека. В этом заключается главное отличие символьных алгоритмов от физических. «Если в комнате темно (C), нажми на кнопку выключателя (d), чтобы зажечь лампу (G)». Горящая лампа — это конкретный физический процесс, а не символьная репрезентация. Если болит голова, мы выпиваем таблетку обезболивающего, чтобы запустить специальные физико-химические процессы в организме. Крестьяне пахут землю и бросают в нее зерна, чтобы запустить процесс созревания урожая.

Алгоритмические процессы в природе выполняются в окружении неалгоритмических процессов. Неожиданный порыв ветра может помешать упасть камнем в цель, хлеба в магазине может не оказаться, электропроводка в квартире может оказаться повреждена, капризы погоды могут загубить весь урожай. Выполнение одних и тех же действий вчера и сегодня не гарантирует получения того же результата. В этом заключается еще одно отличие природных алгоритмов от символьных. Они всегда выполняются в новом физическом контексте, а теория хаоса учит, что иногда даже малейшие изменения в условиях могут приводить к непредсказуемым последствиям. Поэтому, выполнив действие d , мы не можем быть уверены, что наступит G .

Чтобы иметь возможность описывать целесообразные действия агентов, возьмем язык с трехместным оператором $\langle;;\rangle$ и определим понятие формулы следующим образом:

Def.22 $A := Prop \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \oplus B) \mid (A \rightarrow B) \mid \Diamond A \mid \langle d \rangle A \mid \langle C; d; G \rangle A$.

В качестве условия истинности примем, что на процессе x после выполнения действия $\langle C; d; G \rangle$ истинна формула A , е. и т.е. на процессе x истинны условия C применения данного правила, в результате действия d существует продолжение y процесса x , и на этом продолжении y истинно A :

$$\bullet x \models \langle C; d; G \rangle A \Leftrightarrow \exists p \exists y (Dpxy \ \& \ x \models C \ \& \ y \in I(d) \ \& \ y \models A).$$

Обычным образом мы можем ввести в язык и дуал:

Def.23 $[C; d; G] A \Leftrightarrow_{def} \neg \langle C; d; G \rangle \neg A$.

$$\bullet x \models [C; d; G] A \Leftrightarrow \forall p \forall y (Dpxy \ \& \ x \models C \ \& \ y \in I(d) \Rightarrow y \models A).$$

Первое, что бросается в глаза, — в условиях истинности формул вида $\langle C; d; G \rangle A$ не фигурирует цель G выполнения этого правила. Но этого в общем случае и не должно быть. Выполнение любого правила всегда приводит к какому-то результату, и это отражено в определении, а достижение или недостижение цели — это оценка успешности или неуспешности его выполнения. Чтобы говорить об этом в языке, достаточно ввести следующее сокращение:

Def.24 $! \langle C; d; G \rangle A \Leftrightarrow_{def} \langle C; d; G \rangle (A \ \& \ G)$.

Подробный анализ построенной логики планируется сделать в последующих публикациях, посвященных теме построения теории физических (природных) алгоритмических процессов.

4. Заключение

Классическая логика высказываний, которую можно рассматривать как логику субстанциальной онтологии, проста и единственна с точностью до дефинициальной эквивалентности других формулировок. Исходные объекты процессуальной онтологии обладают внутренней структурой, связанной с их протяженностью и направленностью. Чтобы иметь возможность рассуждать о процессах, требуются языки с более богатыми выразительными возможностями по сравнению с языками классической логики. Эти языки неявно предполагают понятие времени, как производного от протяженности и направленности процессов.

Очевидное деление процессов на два вида — каузально-динамические и агентно-зависимые — требует учета существования активных действующих агентов, что приводит к необходимости построения вариантов логик действия. Важной темой в развитии логики процессуальной онтологии является тема построения теории физических (природных) алгоритмических процессов. В настоящее время она в основном разрабатывается как вспомогательная в рамках работ по построению роботизированных устройств и планированию действий в ИИ. Привлечение к данной теме внимания логиков-философов может позволить взглянуть на нее с более общей точки зрения.

Литература

- Вригт, 1986 — *Вригт Г.Х. фон*. Время, изменение и противоречие. Логико-философские исследования. Избр. тр. М.: Прогресс, 1986. С. 513–538.
- Шалак, 2020 — *Шалак В.И.* Сравнительный анализ процессуальной и субстанциальной онтологий // Логические исследования / Logical Investigations. 2020. Т. 26. № 2. С. 58–86. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-58-86.
- Allen, 1984 — *Allen J.F.* Towards a General Theory of Action and Time // Artificial Intelligence. 1984. Vol. 23. P. 123–154.
- Allen, Ferguson, 1994 — *Allen J.F., Ferguson G.* Actions and Events in Interval Temporal Logic // Journal of Logic and Computation. 1994. Vol. 4. Is. 5. P. 531–579. DOI: 10.1093/logcom/4.5.531.
- Venema, 1991 — *Venema Y.* A Modal Logic for Chopping Intervals // Journal of Logic and Computation. 1991. Vol. 1. Is. 4. P. 453–476. DOI: 10.1093/logcom/1.4.453.
- Wright, 1965 — *Wright G.H. von.* And next // Acta philosophica Fennica. 1965. № 18. P. 293–304.

VLADIMIR I. SHALACK

Logic in the process ontology

Vladimir I. Shalack

Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: shalack@gmail.com

Abstract: The aim of the work is to study the language tools that can be used to conduct arguments about the processual ontology, which differs from the substantial more complex structure of the elementary “bricks” that underlie it. As a result, it becomes necessary to use languages that have richer expressive capabilities than the language of classical logic. In this paper, we consider languages with unary and binary modalities. Individual processes can be analyzed from two points of view—statics and dynamics. In the first case, we are interested in statements whose truth depends only on the internal structure of the current process. The relation of division of the processes allows us to determine on its parts a transitive dense linear order without the first and last elements, which can be understood as the local time order of this process. This allows us to talk about the beginning of processes, their flow and end. It becomes possible to define the concepts of process state and process as events. The inclusion of a binary modality such as a noncommutative conjunction in the language allows us to define an analog of a causal-like conditional relationship between parts of the process. The dynamics of processes implies the possibility of their continuation beyond the current process. This can happen either due to implicit causal relationships, when the current process contains the cause for its future continuation, or as a result of the actions of active agents who themselves construct this continuation. To represent the dynamics of processes as a consequence of the actions of active agents, we use a simplified version of the dynamic logic language. Also it's shown how you can take into account the goals that active agents set for themselves when performing certain actions.

Keywords: process, process ontology, process logic, process statics, process dynamics

For citation: Shalack V.I. “Logika v ontologii protsessov” [Logic in the process ontology], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 48–65. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-48-65 (In Russian)

References

- Allen, 1984 – Allen, J.F. “Towards a General Theory of Action and Time”, *Artificial Intelligence*, 1984, Vol. 23, pp. 123–154.
- Allen, Ferguson, 1994 – Allen, J.F., Ferguson, G. “Actions and Events in Interval Temporal Logic”, *Journal of Logic and Computation*, 1994, Vol. 4, Is. 5, pp. 531–579. DOI: 10.1093/logcom/4.5.531.

- Shalack, 2020 – Shalack, V.I. “Sravnitel’nyi logicheskii analiz substantzial’noi i protsessual’noi ontologii” [Comparative logical analysis of substantive and processual ontologies], *Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 58–86. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-58-86. (In Russian)
- Venema, 1991 – Venema, Y. “A Modal Logic for Chopping Intervals”, *Journal of Logic and Computation*, 1991, Vol. 1, Is. 4, pp. 453–476. DOI: 10.1093/logcom/1.4.453.
- Wright, 1965 – von Wright, G.H. “And next”, *Acta philosophica Fennica*, 1965, No. 18, pp. 293–304.
- Wright, 1986 – von Wright, G.H. “Vremya, izmenenie i protivorechie” [Time, change, and contradiction], in *Logiko-filosofskie issledovaniya* [Philosophical papers]. Moscow: Progress, 1986, pp. 513–538. (In Russian)

Неклассическая логика
Non-classical Logic

Л.Ю. ДЕВЯТКИН

**О выразительных возможностях максимально
паранепротиворечивых и максимально
параполных четырехзначных расширений FDE**

Леонид Юрьевич Девяткин

Институт философии РАН.

Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Аннотация: Статья посвящена замкнутым классам функций четырехзначной логики, которые могут быть порождены системами элементарных операций характеристических матриц для таких языковых расширений логики **FDE**, которые являются одновременно максимально паранепротиворечивыми и максимально параполными.

Мы начинаем с представления необходимых и достаточных условий, которым должны отвечать четырехзначные языковые расширения **FDE**, чтобы быть максимально паранепротиворечивыми и максимально параполными. В обоих случаях критерии максимальной связанны с наличием в матрице рассматриваемого расширения операторов определенного рода, из-за которых это расширение не является подлогикой трехзначного языкового расширения логики Асеньо–Приста **LP** — в случае паранепротиворечивости и логики Клини **K₃** — в случае параполноты.

Далее, опираясь на теорему Бэйкера–Пиксли, мы даем описание такого множества из 5 одноместных и 20 двухместных предикатов, что любой замкнутый класс функций, порожденный системой элементарных операций четырехзначной характеристической матрицы языкового расширения **FDE**, есть класс функций, сохраняющих одно из подмножеств данного множества. Это дает простой алгоритм сравнения выразительных возможностей любых произвольно взятых четырехзначных языковых расширений **FDE**.

Кроме того, принимая во внимание, что в приведенное множество предикатов включаются все предикаты, описывающие предполные классы функций четырехзначной логики, которые сохраняются операциями характеристической матрицы **FDE**, мы приводим критерии функциональной полноты и предполноты для множества всех операций любой четырехзначной матрицы, характеризующей языковое расширение **FDE**.

Наконец, используя критерии максимальной паранепротиворечивости и параполноты, а также список предикатов для расширений **FDE**, представленные в статье, мы идентифицируем все 14 множеств предикатов, описывающих замкнутые классы, которые соответствуют четырехзначным характеристическим матрицам максимально паранепротиворечивых и максимально параполных расширений **FDE**.

Ключевые слова: четырехзначные логики, паранепротиворечивость, парapolнота, замкнутые классы функций, замкнутые классы предикатов

Для цитирования: *Девяткин Л.Ю.* О выразительных возможностях максимально паранепротиворечивых и максимально парapolных четырехзначных расширений FDE // *Логические исследования / Logical Investigations*. 2021. Т. 27. № 2. С. 66–92. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-66-92

Введение

Настоящая работа затрагивает две сферы современных исследований в области неклассических логик. Первая из них — это изучение выразительных возможностей языков различных многозначных логик. Вторая — паранепротиворечивые и парapolные логики, в частности, проблема поиска критериев максимальной для паранепротиворечивости и парapolноты. В основе методологии работы лежит рассмотрение выразительных возможностей логических матриц с точки зрения замкнутых классов функций, порождаемых их системами элементарных операций.

Уже в конце 40-х годов прошлого столетия исследователями многозначных логик ставились вопросы о выразительных возможностях их языков — они касались как критериев определимости тех или иных операций в отдельно взятой матрице, так и подобных критериев для определимости операций одной матрицы в другой [Łoś, 1949, Ch. III]. Особенную актуальность эти вопросы приобретают, когда речь идет о матрице для логики **FDE**, предложенной Н.Д. Белнапом в [Belnap, 1977]. Эта актуальность продиктована тем, что популярным подходом к построению четырехзначных логик является пополнение матрицы **FDE** новыми операциями. Обзоры многочисленных логик, полученных таким образом, можно найти в [Omori, Wansing, 2017] и [Petrukhin, Shangin, 2019]. Анализу и классификации расширений **FDE** с точки зрения выразительных возможностей их языков специально посвящены работы [Arieli, Avron, 1998; Avron, 1999; Omori, Sano, 2015; Karpenko, 2017; Přenosil, 2021]. Наша работа лежит в русле данных исследований, дополняя уже известные результаты. При этом в фокусе внимания находятся расширения **FDE**, принадлежащие к числу паранепротиворечивых и парapolных логик.

Паранепротиворечивые логики — это логики, в которых противоречия не ведут к тривиальности; парapolные логики — это логики, в которых некоторая формула и ее отрицание могут быть одновременно ложны¹. Вопросы паранепротиворечивости, связанные с расширениями **FDE**, затрагиваются в [Omori, Sano, 2014] и [Arieli, Avron, 2017].

¹Более строгие формальные определения будут даны ниже.

Важную роль в исследованиях паранепротиворечивых логик играет понятие максимальности. В основе этого понятия лежит неформальный принцип, принадлежащий Н. Да Коста: полезная паранепротиворечивая логика должна содержать наибольший фрагмент классической логики, не влекущий потери паранепротиворечивости [Da Costa, 1974]. Как указывают авторы [Arieli et al., 2011], принятая в литературе интерпретация этого принципа состоит в том, что добавление любого фрагмента классической логики, который уже не содержится в рассматриваемой паранепротиворечивой логике, превращает эту логику в классическую. Если логика обладает этим свойством, ее называют максимально паранепротиворечивой относительно классической логики. Кроме того, в процитированной статье авторы предлагают следующее обобщение: логика является максимально паранепротиворечивой *в абсолютном смысле*, если она паранепротиворечива, однако ни одна ее надлогика не является таковой. В нашей работе рассматривается максимальная противоречивость именно в абсолютном смысле. Аналогичным образом определяется понятие максимальной параконсistency.

Число возможных четырехзначных расширений **FDE** бесконечно, поскольку бесконечно число алгебраических функций на четырехэлементном множестве. В то же время, расширения, различающиеся наборами элементарных операций, могут при этом совпадать по выразительным возможностям. Например, в [Omori, Sano, 2015] демонстрируется «выразительная» эквивалентность для четырех расширений с попарно различными наборами элементарных операций. Поэтому при исследовании выразительных возможностей языков многозначных логик имеет смысл рассматривать не наборы их элементарных операций, а замкнутые классы функций, соответствующие множествам всех операций, определяемых в рассматриваемых логиках. Примеры такого подхода можно найти в [Adams, Dziobiak, 1994; Přenosil, 2021; Tomova, 2021]. В первой работе найдены замкнутые классы функций, соответствующие всем расширениям **K₃**, сильной логики Клини². Для описания этих классов используется предикатный подход, то есть каждый класс определяется как класс всех функций, сохраняющих некое множество предикатов. Во второй работе описаны замкнутые классы, соответствующие отдельным расширениям **FDE**, однако эти классы определяются на основе их порождающих систем, а не предикатов. В третьей работе рассматриваются замкнутые классы, порожденные некоторыми четырехзначными паранепротиворечивыми и параконсистентными логиками. Изложенные ниже результаты сочетают черты этих работ: мы даем описа-

²Отметим, что логика **K₃** связана с **FDE** существенным для настоящей работы образом. Мы вернемся к этой связи позже.

ния замкнутых классов функций для паранепротиворечивых и парapolных четырехзначных расширений **FDE** определенного типа, применяя предикатный подход.

Дальнейшее изложение материала построено следующим образом. Первый раздел посвящен необходимым и достаточным условиям того, чтобы логика, полученная добавлением к **FDE** новых операций, являлась максимально паранепротиворечивой (Теорема 1) или максимально парapolной (Теорема 2). Второй раздел содержит два основных результата. Во-первых, даются необходимые и достаточные условия функциональной полноты и предполноты для произвольных четырехзначных расширений **FDE** (Теорема 3). Во-вторых, дается полный список замкнутых классов, соответствующих четырехзначным расширениям **FDE**, которые являются одновременно максимально паранепротиворечивыми и максимально парapolными (Теорема 4). В заключении рассмотрены возможные приложения полученных результатов, а также направления дальнейших исследований.

1. Критерии максимальной паранепротиворечивости и парapolноты в четырехзначных языковых расширениях **FDE**

В этом разделе мы показываем, что четырехзначное языковое расширение **FDE** является максимально паранепротиворечивым, е.т.е. его матрица содержит операцию, которая дает значение **n** на некотором наборе, все элементы которого принадлежат множеству $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$ (Теорема 1), и что оно является максимально парapolным е.т.е. его матрица содержит операцию, которая дает значение **b** на некотором наборе, все элементы которого принадлежат множеству $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ (Теорема 2). Структура раздела такова. Сперва мы даем определения необходимых понятий, таких как пропозициональный язык, отношение следования, пропозициональная логика, логическая матрица, многозначная логика, паранепротиворечивость, парapolнота, максимальность паранепротиворечивости и парapolноты. Отдельно отметим, что при определении базовых понятий используется определение следования с множественными заключениями из [Shoesmith, Smiley, 1978, p. 29]. Причина этого в том, что оно наиболее удобно для работы с понятиями паранепротиворечивости и парapolноты [Marcos, 2005]. После основных определений мы останавливаемся на четырехзначной матрице для **FDE** и демонстрируем, что логика **FDE** не является ни максимально паранепротиворечивой, ни максимально парapolной. Далее следует описание произвольного четырехзначного языкового расширения **FDE** и его характеристической матрицы. Формулировки основных теорем и их доказательства завершают раздел.

Называем *пропозициональным языком* $\mathcal{L} = \langle Fm(\mathcal{L}), \S_1, \dots, \S_k \rangle$ алгебру, свободно порожденную счетным множеством пропозициональных переменных $Var(\mathcal{L})$, которая свободна в классе всех алгебр аналогичной сигнатуры. Говорим, что $\vdash$ является *отношением следования* на $\mathcal{L}$, когда следующие условия выполняются для всех $X, Y, S \subseteq Fm(\mathcal{L})$:

- если $X \cap Y \neq \emptyset$, то $X \vdash Y$ (рефлексивность);
- если $X' \vdash Y'$, где $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, то $X \vdash Y$ (монотонность);
- если для всех $Z \subseteq S$ имеет место $X \cup Z \vdash Y \cup (S \setminus Z)$, то $X \vdash Y$ (сечение).

Когда вдобавок $X \vdash Y \implies \varepsilon(X) \vdash \varepsilon(Y)$ для каждого эндоморфизма ε языка $\mathcal{L}$, называем отношение следования $\vdash$ *структурным*. Если $\mathcal{L}$ — пропозициональный язык и $\vdash$ — структурное отношение следования на $\mathcal{L}$, говорим, что $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — *пропозициональная логика*.

Пусть $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ и $\mathbf{L}^* = \langle \mathcal{L}, \vdash^* \rangle$ — пропозициональные логики в одном и том же языке. Если $X \vdash Y \implies X \vdash^* Y$ для всех $X, Y \subseteq Fm(\mathcal{L})$, называем $\mathbf{L}^*$ *дедуктивным расширением* $\mathbf{L}$. Если, кроме того, найдутся такие $X', Y' \subseteq Fm(\mathcal{L})$, что $X' \vdash^* Y'$ и $X' \not\vdash Y'$, говорим, что $\mathbf{L}^*$ — *собственное дедуктивное расширение* $\mathbf{L}$, а $\mathbf{L}$ — *подлогика* $\mathbf{L}^*$.

Пусть $\mathbf{L}_1 = \langle \mathcal{L}_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathbf{L}_2 = \langle \mathcal{L}_2, \vdash_2 \rangle$ — пропозициональные логики, где $Var(\mathcal{L}_1) = Var(\mathcal{L}_2)$ и $Fm(\mathcal{L}_1) \subseteq Fm(\mathcal{L}_2)$. Если $X \vdash_1 Y \iff X \vdash_2 Y$ для всех $X, Y \subseteq Fm(\mathcal{L}_1)$, говорим, что $\mathbf{L}_2$ — *языковое расширение* $\mathbf{L}_1$.

Называем логику $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *паранепротиворечивой* (относительно отрицания³ $\neg$), если $\alpha, \neg\alpha \not\vdash \beta$ для некоторых $\alpha, \beta \in Fm(\mathcal{L})$. Называем логику $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *параполной* (относительно отрицания $\neg$), если $\alpha \not\vdash \beta, \neg\beta$ для некоторых $\alpha, \beta \in Fm(\mathcal{L})$. Если $\mathbf{L}$ паранепротиворечива (параполна), но никакое ее собственное дедуктивное расширение не является таковым, называем $\mathbf{L}$ *максимально паранепротиворечивой (параполной) в абсолютном смысле*.

Логическая матрица — это структура $\mathcal{M} = \langle A, f_1, \dots, f_k, D \rangle$, где $A = \langle A, f_1, \dots, f_k \rangle$ — алгебра, а D — подмножество A . Функции $f_1, \dots, f_k$ называем *элементарными операциями* $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{L} = \langle Fm(\mathcal{L}), \S_1, \dots, \S_k \rangle$ и $A = \langle A, f_{\S_1}, \dots, f_{\S_k} \rangle$, где местность $\S_i$ совпадает с местностью $f_{\S_i}$ для каждого $1 \leq i \leq k$, говорим, что $\mathcal{M}$ — *матрица для* $\mathcal{L}$. Когда $\mathcal{M}$ — матрица для $\mathcal{L}$, гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в A называем *оценкой* $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$. Будем обозначать

³Вопрос о том, какими свойствами должна обладать унарная связка $\neg$ в общем случае, чтобы ее можно было считать отрицанием, выходит за рамки данной работы, поскольку в ней рассматриваются только паранепротиворечивость и параполнота относительно отрицания логики **FDE**, которое определяется на с. 71.

множество всех подобных оценок как $Val(\mathcal{M})$. Определяем *матричное отношение следования* $Cn(\mathcal{M})$ на $\mathcal{L}$, порожденное $\mathcal{M}$, следующим образом:

$$Cn(\mathcal{M}) = \{\langle X, Y \rangle \mid \forall h \in Val(\mathcal{M}) (h(X) \subseteq D \implies h(Y) \cap D \neq \emptyset)\}.$$

Если даны пропозициональная логика $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ и матрица $\mathcal{M}$ для $\mathcal{L}$, говорим, что $\mathcal{M}$ является *характеристической* для $\mathbf{L}$, если $X \vdash Y \iff \langle X, Y \rangle \in Cn(\mathcal{M})$. Называем пропозициональную логику $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *k-значной*, если существует *k-значная* матрица, которая является характеристической для $\mathbf{L}$.

Четырехзначная характеристическая матрица для **FDE** была дана Н.Д. Белнапом [Belnap, 1977]. Она имеет вид $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}} = \langle \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}, \wedge, \vee, \neg, \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\} \rangle$, где элементарные операции определяются следующими таблицами⁴:

$\wedge$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\vee$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	x	$\neg x$
$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{n}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{n}$
$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$

Обратим внимание, что в оригинальной формулировке **FDE** предполагает следование исключительно между парами индивидуальных формул вида $\alpha \vdash \beta$, а не между множествами формул⁵. В то же время табличные определения $\wedge$ и $\vee$ таковы, что для любых конечных множеств формул выполняется следующее:

$$\begin{aligned} & \langle \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \rangle \in Cn(\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}}) \iff \\ & \iff \langle \{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m\}, \{\beta_1 \vee \dots \vee \beta_n\} \rangle \in Cn(\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}}). \end{aligned}$$

Это демонстрирует, что все результаты, представленные ниже в рамках выбранной нами системы базовых понятий, имеют место также для **FDE** в ее изначальном определении.

Известно, что логика **FDE** является одновременно паранепротиворечивой и парapolной. В том, что $\langle \{p, \neg p\}, \{q\} \rangle \notin Cn(\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}})$ и $\langle \{p\}, \{q \neg q\} \rangle \notin Cn(\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}})$, нетрудно убедиться, посмотрев на табличное определение $\neg$. Однако **FDE** ни максимально паранепротиворечива, ни максимально парapolна. Чтобы показать это, используем связь между **FDE** и **K₃**, о которой упоминали раньше, а также логикой парадокса **LP**.

⁴В дальнейшем, злоупотребляя нотацией, будем использовать символы $\wedge, \vee, \neg$ как для обозначения пропозициональных связок, так и для обозначения соответствующих им матричных операторов.

⁵Вариант **FDE** со следованием, где посылки и заключения являются множествами формул, как в нашем случае, рассматривается в [Shapiro, 2017].

Каждая из операций $\wedge, \vee, \neg$ является алгебраической функцией⁶ как на $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$, так и на $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$. Это означает, что $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}}$ имеет подматрицы⁷ с множествами-носителями $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$ и на $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$. Как отмечает Г. Прист, первая является характеристической матрицей для логики $\mathbf{LP}$, а вторая — для логики $\mathbf{K}_3$, и поэтому $\mathbf{FDE}$ является подлогикой $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{LP}$ [Priest, 2008, § 8.4]. При этом $\langle \{p, \neg p\}, \{q\} \rangle \notin \text{Cn}(\mathcal{M}_{\mathbf{LP}})$, $\langle \{p\}, \{q, \neg q\} \rangle \in \text{Cn}(\mathcal{M}_{\mathbf{LP}})$, $\langle \{p, \neg p\}, \{q\} \rangle \in \text{Cn}(\mathcal{M}_{\mathbf{K}_3})$, $\langle \{p\}, \{q, \neg q\} \rangle \notin \text{Cn}(\mathcal{M}_{\mathbf{K}_3})$. Таким образом, $\mathbf{LP}$ — паранепротиворечивое собственное дедуктивное расширение $\mathbf{FDE}$, $\mathbf{K}_3$ — парapolное собственное дедуктивное расширение $\mathbf{FDE}$. Следовательно, $\mathbf{FDE}$ не является ни максимально паранепротиворечивой, ни максимально парapolной.

Будем обозначать как $\mathbf{FDE}^x$ произвольно взятое четырехзначное языковое расширение $\mathbf{FDE}$. В силу введенных выше определений такое расширение имеет характеристическую матрицу вида $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x} = \langle \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}, \wedge, \vee, \neg, f_1, \dots, f_k, \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\} \rangle$, где $f_1, \dots, f_k$ — функции, соответствующие новым связкам, добавленным к алфавиту $\mathbf{FDE}$.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{FDE}^x$ — четырехзначное языковое расширение $\mathbf{FDE}$. Логика $\mathbf{FDE}^x$ является максимально паранепротиворечивой, е.т.е. ее характеристическая матрица $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержит такую элементарную операцию f , что $f(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{n}$ на некотором наборе $(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}^n$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $\mathbf{FDE}^{x+}$ — собственное дедуктивное расширение $\mathbf{FDE}^x$. Тогда найдутся такие множества формул X и Y , что $h^*(X) \subseteq \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ и $h^*(Y) \subseteq \{\mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ для некоторой оценки h^* в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$, однако $X \vdash Y$ в $\mathbf{FDE}^{x+}$. Пусть ϵ — подстановка, причем для каждой формулы $\gamma \in X$ и каждой формулы $\alpha \in Y$ верно, что $p_0, \neg p_0 \vdash \epsilon(\gamma)$ и $p_0, \neg p_0, \epsilon(\alpha) \vdash q_0$ в $\mathbf{FDE}^x$. Поскольку $\mathbf{FDE}^{x+}$ — собственное дедуктивное расширение $\mathbf{FDE}^x$, $p_0, \neg p_0 \vdash \epsilon(\gamma)$ для всех $\gamma \in X$ и $p_0, \neg p_0, \epsilon(\alpha) \vdash q_0$ для всех $\alpha \in Y$ также в $\mathbf{FDE}^{x+}$. Кроме того, в силу структурности $\epsilon(X) \vdash \epsilon(Y)$ в $\mathbf{FDE}^{x+}$. (1) Из $p_0, \neg p_0 \vdash \epsilon(\gamma)$ получаем $p_0, \neg p_0, Z \vdash (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z, q_0$ для любого такого $Z \subseteq \epsilon(X) \cup \epsilon(Y)$, что $\epsilon(\gamma) \in (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z$ для некоторой формулы $\gamma \in X$ (монотонность). (2) Из $p_0, \neg p_0, \epsilon(\alpha) \vdash q_0$ получаем $p_0, \neg p_0, Z \vdash (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z, q_0$ для любого такого $Z \subseteq \epsilon(X) \cup \epsilon(Y)$, что $\epsilon(\alpha) \in Z$ для некоторой формулы $\alpha \in Y$ (монотонность). (3) Из $\epsilon(X) \vdash \epsilon(Y)$

⁶Алгебраической функцией на множестве A называем такую функцию от n переменных, которая дает значение из A на каждом наборе из A^n .

⁷Называем $M = \langle A, f_1, \dots, f_k, D \rangle$ подматрицей матрицы $N = \langle B, g_1, \dots, g_k, E \rangle$, если $A \subseteq B$, $D \subseteq E$ и на каждом наборе $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$ выполняется $f_i(a_1, \dots, a_n) = g_i(a_1, \dots, a_n)$.

получаем $p_0, \neg p_0, Z \vdash (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z, q_0$ для $Z = \epsilon(X)$, то есть единственного такого $Z \subseteq \epsilon(X) \cup \epsilon(Y)$, что $\epsilon(\gamma) \notin (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z$ для всех $\gamma \in X$ и $\epsilon(\alpha) \notin Z$ для всех $\alpha \in Y$ (монотонность). Из (1)–(3) получаем, что для всех $Z \subseteq \epsilon(X) \cup \epsilon(Y)$ имеет место $p_0, \neg p_0, Z \vdash (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z, q_0$. Таким образом, $p_0, \neg p_0 \vdash q_0$ в $\mathbf{FDE}^{x+}$ (сечение). В силу последнего логика $\mathbf{FDE}^{x+}$ не является паранепротиворечивой. Теперь покажем, что нужная подстановка ϵ всегда существует.

Случай 1. В $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержится такая элементарная операция g' , существенно зависящая от n переменных, что $g'(\mathbf{b}, \dots, \mathbf{b}) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$. Тогда в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ определима такая унарная операция g , что $g(\mathbf{b}) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$. Всегда можно получить g из g' отождествлением переменных. Это означает, что в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ можно также определить такую операцию g^* , что $g^*(\mathbf{b}) = \mathbf{n}$. Покажем это. Если $g(\mathbf{b}) = \mathbf{n}$, утверждение тривиально. Допустим, что $g(\mathbf{b}) = \mathbf{t}$. По условию $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержит такую операцию f , что $f(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{n}$ на некотором наборе $(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}^n$. Тогда $g^* = f(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))$, где для всех $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\phi(x_i) = \begin{cases} g(x_0), & \text{если } a_i = \mathbf{t}, \\ x_0, & \text{если } a_i = \mathbf{b}, \\ \neg g(x_0), & \text{если } a_i = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Рассуждение для $g(\mathbf{b}) = \mathbf{f}$ аналогично, достаточно поменять местами $g(x_0)$ и $\neg g(x_0)$ в определении ϕ . Пусть формула $\delta(p)$ выражает функцию $g^*(x_0)$, то есть $h(\delta(p)) = g^*(h(p))$ для любой оценки h в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$.

Обозначим как $Var(X, Y)$ множество $\{p_1, \dots, p_k\}$ всех переменных, входящих в формулы, принадлежащие X или Y . Рассмотрим такую подстановку ϵ , что для каждой переменной $p \in Var(X, Y)$ выполняется приведенное ниже условие:

$$\epsilon(p) = \begin{cases} p_0 \vee \delta(p_0), & \text{если } h^*(p) = \mathbf{t}, \\ p_0, & \text{если } h^*(p) = \mathbf{b}, \\ \delta(p_0), & \text{если } h^*(p) = \mathbf{n}, \\ p_0 \wedge \delta(p_0), & \text{если } h^*(p) = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Пусть $h(p_0) = \mathbf{b}$. Тогда $h(\delta(p_0)) = g^*(h(p_0)) = \mathbf{n}$; $h(p_0 \vee \delta(p_0)) = h(p_0) \vee h(\delta(p_0)) = \mathbf{b} \vee \mathbf{n} = \mathbf{t}$; $h(p_0 \wedge \delta(p_0)) = h(p_0) \wedge h(\delta(p_0)) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{f}$. Поэтому для каждой оценки h в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ имеет место следующее: если $h(p_0) = \mathbf{b}$, то $h(\epsilon(\gamma)) = h^*(\gamma) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ для всех $\gamma \in X$ и $h(\epsilon(\alpha)) = h^*(\alpha) \in \{\mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ для всех $\alpha \in Y$. Это означает, что $p_0, \neg p_0 \vdash \epsilon(\gamma)$ и $p_0, \neg p_0, \epsilon(\alpha) \vdash q_0$ в $\mathbf{FDE}^x$ для всех $\gamma \in X$ и всех $\alpha \in Y$.

Случай 2. Для каждой операции g в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ верно, что $g(\mathbf{b}, \dots, \mathbf{b}) = \mathbf{b}$. Поскольку $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержит такую операцию f , что $f(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{n}$ на некотором наборе $(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}^n$, найдется такая формула β , не содержащая переменных из $Var(X, Y)$, что для некоторой оценки $h^{\mathbf{n}}$ в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ выполняется следующее условие: $h^{\mathbf{n}}(\beta) = \mathbf{n}$ и $h^{\mathbf{n}}(r) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$ для каждой $r \in Var(\beta)$, где $Var(\beta)$ есть множество $\{r_1, \dots, r_m\}$ всех переменных, входящих в β .

Рассмотрим такую подстановку ϵ , что для каждой переменной $r \in Var(\beta)$ и каждой переменной $p \in Var(X, Y)$ выполняются приведенные ниже условия:

$$\epsilon(r) = \begin{cases} (p_0 \vee q_0) \vee (\neg p_0 \vee \neg q_0), & \text{если } h^{\mathbf{n}}(r) = \mathbf{t}, \\ p_0, & \text{если } h^{\mathbf{n}}(r) = \mathbf{b}, \\ (p_0 \wedge q_0) \wedge (\neg p_0 \wedge \neg q_0), & \text{если } h^{\mathbf{n}}(r) = \mathbf{f}. \end{cases}$$

$$\epsilon(p) = \begin{cases} (p_0 \vee q_0) \vee (\neg p_0 \vee \neg q_0), & \text{если } h^*(p) = \mathbf{t}, \\ p_0, & \text{если } h^*(p) = \mathbf{b}, \\ \epsilon(\beta), & \text{если } h^*(p) = \mathbf{n}, \\ (p_0 \wedge q_0) \wedge (\neg p_0 \wedge \neg q_0), & \text{если } h^*(p) = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Пусть $h(p_0) = \mathbf{b}$. Если $h(q_0) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$, то $h(p_0 \vee q_0) = \mathbf{t}$. Если $h(q_0) = \mathbf{f}$, то $h(\neg p_0 \vee \neg q_0) = \mathbf{t}$. Таким образом, если $h(p_0) = \mathbf{b}$ и $h(q_0) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, то $h((p_0 \vee q_0) \vee (\neg p_0 \vee \neg q_0)) = \mathbf{t}$. Далее, если $h(q_0) \in \{\mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, то $h(p_0 \wedge q_0) = \mathbf{f}$. Если же $h(q_0) = \mathbf{t}$, то $h(\neg p_0 \wedge \neg q_0) = \mathbf{f}$. Таким образом, если $h(p_0) = \mathbf{b}$ и $h(q_0) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, то $h((p_0 \wedge q_0) \wedge (\neg p_0 \wedge \neg q_0)) = \mathbf{f}$. Следовательно, если $h(p_0) = \mathbf{b}$ и $h(q_0) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, то $h(\epsilon(\beta)) = h^{\mathbf{n}}(\beta) = \mathbf{n}$. В свою очередь, это означает, что для каждой оценки h в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ имеет место следующее: если $h(p_0) = \mathbf{b}$ и $h(q_0) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, то $h(\epsilon(\gamma)) = h^*(\gamma) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ для всех $\gamma \in X$ и $h(\epsilon(\alpha)) = h^*(\alpha) \in \{\mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ для всех $\alpha \in Y$. Кроме того, поскольку для каждой операции g в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ верно, что $g(\mathbf{b}, \dots, \mathbf{b}) = \mathbf{b}$, если $h(p_0) = h(q_0) = \mathbf{b}$, то $h(\epsilon(\gamma)) = h(\epsilon(\alpha)) = \mathbf{b}$ для всех $\gamma \in X$ и всех $\alpha \in Y$. Таким образом, снова $p_0, \neg p_0 \vdash \epsilon(\gamma)$ и $p_0, \neg p_0, \epsilon(\alpha) \vdash q_0$ в $\mathbf{FDE}^x$ для всех $\gamma \in X$ и всех $\alpha \in Y$. Достаточность доказана.

Теперь докажем необходимость. Допустим, что для каждой операции f в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ верно, что $f(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$ для каждого набора $(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}^n$. В этом случае $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержит подматрицу вида $\mathcal{M}_{\mathbf{LP}^x} = \langle \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}, \wedge, \vee, \neg, f_1, \dots, f_k, \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\} \rangle$. Имеют место следующие факты: если $\langle X, Y \rangle \in Cn(\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x})$, то $\langle X, Y \rangle \in Cn(\mathcal{M}_{\mathbf{LP}^x})$; $\langle \{p, \neg p\}, \{q, \neg q\} \rangle \notin Cn(\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x})$, но $\langle \{p, \neg p\}, \{q, \neg q\} \rangle \in Cn(\mathcal{M}_{\mathbf{LP}^x})$; $\langle \{p, \neg p\}, \{q\} \rangle \notin Cn(\mathcal{M}_{\mathbf{LP}^x})$. Следовательно, трехзначная логика $\mathbf{LP}^x$, для

которой матрица $\mathcal{M}_{\mathbf{LP}^x}$ является характеристической, — это паранепротиворечивое собственное дедуктивное расширение $\mathbf{FDE}^x$. Таким образом, $\mathbf{FDE}^x$ не максимально паранепротиворечива. ■

Теорема 2. Пусть $\mathbf{FDE}^x$ — четырехзначное языковое расширение $\mathbf{FDE}$. Логика $\mathbf{FDE}^x$ является максимально параконной, е.т.е. ее характеристическая матрица $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержит такую элементарную операцию f , что $f(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{b}$ на некотором наборе $(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $\mathbf{FDE}^{x+}$ — собственное дедуктивное расширение $\mathbf{FDE}^x$. Тогда найдутся такие множества формул X и Y , что $h^*(X) \subseteq \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ и $h^*(Y) \subseteq \{\mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ для некоторой оценки h^* в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$, однако $X \vdash Y$ в $\mathbf{FDE}^{x+}$. Пусть ϵ — подстановка, причем для каждой формулы $\gamma \in X$ и каждой формулы $\alpha \in Y$ верно, что $p_0 \vdash \epsilon(\gamma)$, $q_0, \neg q_0$ и $\epsilon(\alpha) \vdash q_0, \neg q_0$ в $\mathbf{FDE}^x$. Поскольку $\mathbf{FDE}^{x+}$ — собственное дедуктивное расширение $\mathbf{FDE}^x$, $p_0 \vdash \epsilon(\gamma)$, $q_0, \neg q_0$ для всех $\gamma \in X$ и $\epsilon(\alpha) \vdash q_0, \neg q_0$ для всех $\alpha \in Y$ также в $\mathbf{FDE}^{x+}$. Кроме того, в силу структурности $\epsilon(X) \vdash \epsilon(Y)$ в $\mathbf{FDE}^{x+}$. (1) Из $p_0 \vdash \epsilon(\gamma)$, $q_0, \neg q_0$ получаем $p_0, Z \vdash (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z, q_0, \neg q_0$ для любого такого $Z \subseteq \epsilon(X) \cup \epsilon(Y)$, что $\epsilon(\gamma) \in (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z$ для некоторой формулы $\gamma \in X$ (монотонность). (2) Из $\epsilon(\alpha) \vdash q_0, \neg q_0$ получаем $p_0, Z \vdash (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z, q_0, \neg q_0$ для любого такого $Z \subseteq \epsilon(X) \cup \epsilon(Y)$, что $\epsilon(\alpha) \in Z$ для некоторой формулы $\alpha \in Y$ (монотонность). (3) Из $\epsilon(X) \vdash \epsilon(Y)$ получаем $p_0, Z \vdash (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z, q_0, \neg q_0$ для $Z = \epsilon(X)$, то есть единственного такого $Z \subseteq \epsilon(X) \cup \epsilon(Y)$, что $\epsilon(\gamma) \notin (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z$ для всех $\gamma \in X$ и $\epsilon(\alpha) \notin Z$ для всех $\alpha \in Y$ (монотонность). Из (1)–(3) получаем, что для всех $Z \subseteq \epsilon(X) \cup \epsilon(Y)$ имеет место $p_0, Z \vdash (\epsilon(X) \cup \epsilon(Y)) \setminus Z, q_0, \neg q_0$. Таким образом, $p_0 \vdash q_0, \neg q_0$ в $\mathbf{FDE}^{x+}$ (сечение). В силу последнего логика $\mathbf{FDE}^{x+}$ не является параконной. Теперь покажем, что нужная подстановка ϵ всегда существует.

Случай 1. В $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержится такая элементарная операция g' , существенно зависящая от n переменных, что $g'(\mathbf{n}, \dots, \mathbf{n}) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$. Тогда в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ определима такая унарная операция g , что $g(\mathbf{n}) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$. Всегда можно получить g из g' отождествлением переменных. Это означает, что в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ можно также определить такую операцию g^* , что $g^*(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$. Покажем это. Если $g(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$, утверждение тривиально. Допустим, что $g(\mathbf{n}) = \mathbf{t}$. По условию $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержит такую операцию f , что $f(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{b}$ на некотором наборе $(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$. Тогда $g^* = f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$, где для всех $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\varphi(x_i) = \begin{cases} g(x_0), & \text{если } a_i = \mathbf{t}, \\ x_0, & \text{если } a_i = \mathbf{n}, \\ \neg g(x_0), & \text{если } a_i = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Рассуждение для $g(\mathbf{n}) = \mathbf{f}$ аналогично, достаточно поменять местами $g(x_0)$ и $\neg g(x_0)$ в определении φ . Пусть формула $\theta(p)$ выражает функцию $g^*(x_0)$, то есть $h(\theta(p)) = g^*(h(p))$ для любой оценки h в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$.

Обозначим как $Var(X, Y)$ множество $\{q_1, \dots, q_k\}$ всех переменных, входящих в формулы, принадлежащие X или Y . Рассмотрим такую подстановку ε , что для каждой переменной $q \in Var(X, Y)$ выполняется приведенное ниже условие:

$$\varepsilon(q) = \begin{cases} q_0 \vee \theta(q_0), & \text{если } h^*(q) = \mathbf{t}, \\ \theta(q_0), & \text{если } h^*(q) = \mathbf{b}, \\ q_0, & \text{если } h^*(q) = \mathbf{n}, \\ q_0 \wedge \theta(q_0), & \text{если } h^*(q) = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Для каждой оценки h в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ имеет место следующее: если $h(q_0) = \mathbf{n}$, то $h(\varepsilon(\gamma)) = h^*(\gamma) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ для всех $\gamma \in X$ и $h(\varepsilon(\alpha)) = h^*(\alpha) \in \{\mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ для всех $\alpha \in Y$. Обоснование этого утверждения строится по аналогии со Случаем 1 в доказательстве Теоремы 1. Это означает, что $\varepsilon(\alpha) \vdash q_0, \neg q_0$ и $p_0 \vdash \varepsilon(\gamma), q_0, \neg q_0$ в $\mathbf{FDE}^x$ для всех $\gamma \in X$ и всех $\alpha \in Y$.

Случай 2. Для каждой операции g в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ верно, что $g(\mathbf{n}, \dots, \mathbf{n}) = \mathbf{n}$. Поскольку $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержит такую операцию f , что $f(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{b}$ на некотором наборе $(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$, найдется такая формула β , не содержащая переменных из $Var(X, Y)$, что для некоторой оценки h^b в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ выполняется следующее условие: $h^b(\beta) = \mathbf{b}$ и $h^b(r) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ для каждой $r \in Var(\beta)$, где $Var(\beta)$ есть множество $\{r_1, \dots, r_m\}$ всех переменных, входящих в β .

Рассмотрим такую подстановку ε , что для каждой переменной $r \in Var(\beta)$ и каждой переменной $q \in Var(X, Y)$ выполняются приведенные ниже условия:

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} (p_0 \vee q_0) \vee (\neg p_0 \vee \neg q_0), & \text{если } h^b(r) = \mathbf{t}, \\ q_0, & \text{если } h^b(r) = \mathbf{n}, \\ (p_0 \wedge q_0) \wedge (\neg p_0 \wedge \neg q_0), & \text{если } h^b(r) = \mathbf{f}. \end{cases}$$

$$\varepsilon(q) = \begin{cases} (p_0 \vee q_0) \vee (\neg p_0 \vee \neg q_0), & \text{если } h^*(q) = \mathbf{t}, \\ \varepsilon(\beta), & \text{если } h^*(q) = \mathbf{b}, \\ q_0, & \text{если } h^*(q) = \mathbf{n}, \\ (p_0 \wedge q_0) \wedge (\neg p_0 \wedge \neg q_0), & \text{если } h^*(q) = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Для каждой оценки h в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ имеет место следующее: если $h(q_0) = \mathbf{n}$ и $h(p_0) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$, то $h(\varepsilon(\gamma)) = h^*(\gamma) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ для всех $\gamma \in X$ и $h(\varepsilon(\alpha)) = h^*(\alpha) \in \{\mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ для всех $\alpha \in Y$. Обоснование этого утверждения строится по аналогии со Случаем 2 в доказательстве Теоремы 1. Кроме того, поскольку для каждой операции g в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ верно, что $g(\mathbf{n}, \dots, \mathbf{n}) = \mathbf{n}$, если $h(p_0) = h(q_0) = \mathbf{n}$, то $h(\varepsilon(\gamma)) = h(\varepsilon(\alpha)) = \mathbf{n}$ для всех $\gamma \in X$ и всех $\alpha \in Y$. Таким образом, снова $\varepsilon(\alpha) \vdash q_0, \neg q_0$ и $p_0 \vdash \varepsilon(\gamma), q_0, \neg q_0$ в $\mathbf{FDE}^x$ для всех $\gamma \in X$ и всех $\alpha \in Y$. Достаточность доказана.

Теперь докажем необходимость. Допустим, что для каждой операции f в $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ верно, что $f(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ для каждого набора $(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$. В этом случае $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержит подматрицу вида $\mathcal{M}_{\mathbf{K}_3^x} = \langle \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}, \wedge, \vee, \neg, f_1, \dots, f_k, \{\mathbf{t}\} \rangle$. Имеют место следующие факты: если $\langle X, Y \rangle \in \text{Cn}(\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x})$, то $\langle X, Y \rangle \in \text{Cn}(\mathcal{M}_{\mathbf{K}_3^x})$; $\langle \{p, \neg p\}, \{q, \neg q\} \rangle \notin \text{Cn}(\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x})$, но $\langle \{p, \neg p\}, \{q, \neg q\} \rangle \in \text{Cn}(\mathcal{M}_{\mathbf{K}_3^x})$; $\langle \{p\}, \{q, \neg q\} \rangle \notin \text{Cn}(\mathcal{M}_{\mathbf{K}_3^x})$. Следовательно, трехзначная логика $\mathbf{K}_3^x$, для которой матрица $\mathcal{M}_{\mathbf{K}_3^x}$ является характеристической, — это парapolное собственное дедуктивное расширение $\mathbf{FDE}^x$. Таким образом, $\mathbf{FDE}^x$ не максимально парapolно. ■

Полученные результаты позволяют ответить на вопрос, какие замкнутые классы функций могут быть порождены четырехзначными языковыми расширениями $\mathbf{FDE}$, которые одновременно максимально паранепротиворечивы и максимально парapolны. Этот ответ будет дан в следующем разделе.

2. Замкнутые классы функций, порожденные максимально паранепротиворечивыми и парapolными четырехзначными языковыми расширениями $\mathbf{FDE}$

Основным результатом раздела является Теорема 4. В ней мы приводим полный список замкнутых классов функций, которые могут быть порождены наборами элементарных операций матриц, характеризующих такие четырехзначные языковые расширения $\mathbf{FDE}$, что в них совмещаются свойства максимальной паранепротиворечивости и максимальной парapolности. Кроме того, в Теореме 3 предложены критерии функциональной полноты и предполноты для произвольного четырехзначного расширения $\mathbf{FDE}$. Содержание раздела имеет следующий вид. Сперва мы вводим ряд понятий, таких как сохранение функцией предиката, замкнутые классы функций и предикатов, понятие существенного предиката. Далее уделяется внимание тому факту, что замкнутый класс функций можно трактовать

как класс всех функций, сохраняющих определенное множество существенных предикатов. Для замкнутого класса, порождаемого элементарными операциями характеристической матрицы **FDE**, такое множество конечно, причем местность предикатов, входящих в него не превышает 2. Как следствие, это верно и для всех надклассов данного класса, то есть замкнутых классов функций, порождаемых элементарными операциями матриц, которые являются характеристическими для четырехзначных языковых расширений **FDE**. Мы описываем множество $R_{\mathbf{FDE}}$ всех существенных предикатов местности не более 2, которые сохраняют операции $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}}$. На основе этого описания мы устанавливаем, какие классы, предполные в классе всех функций на множестве $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, могут быть порождены расширениями **FDE**, что позволяет сформулировать и доказать Теорему 3. После этого доказываются Леммы 1–5, на которые опирается доказательство Теоремы 4, и сама основная теорема. Раздел завершает диаграмма, на которой замкнутые классы, представленные в основной теореме, упорядочены по отношению включения.

Если дано множество A , назовем отображение $A^n \mapsto \{0, 1\}$ n -местным предикатом на A . Для удобства будем записывать предикаты в форме матриц вида

$$\varrho = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

где $\varrho(a_{i,1}, \dots, a_{i,n}) = 1$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$ и ϱ принимает значение 0 на всех прочих наборах. В случаях, когда это не повлечет нежелательных последствий, будем рассматривать предикаты как отношения и писать $(a_1, \dots, a_n) \in \varrho$ вместо $\varrho(a_1, \dots, a_n) = 1$.

Говорим, что k -местная функция f сохраняет предикат ϱ , если

$$f \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & \dots & b_{k,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & \dots & b_{k,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,n} & b_{2,n} & \dots & b_{k,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(b_{1,1}, b_{2,1}, \dots, b_{k,1}) \\ f(b_{1,2}, b_{2,2}, \dots, b_{k,2}) \\ \vdots \\ f(b_{1,n}, b_{2,n}, \dots, b_{k,n}) \end{pmatrix} \in \varrho,$$

когда скоро $\varrho(b_{i,1}, \dots, b_{i,n}) = 1$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$. Если даны множество функций F и множество предикатов R , говорим, что F сохраняет R , если всякая функция из F сохраняет всякий предикат из R .

Обозначаем как $Inv(F)$ множество всех предикатов, которые сохраняет каждая функция из F , и как $Pol(R)$ — множество всех функций, которые сохраняют каждый предикат из R .

Введем понятия замыкания класса функций и замыкания класса предикатов следующим образом: $[F] = \text{Pol}(\text{Inv}(F))$; $[R] = \text{Inv}(\text{Pol}(R))$. Для краткости вместо прямых определений, в которых не задействованы Pol и Inv , мы используем результаты теории Галуа для замкнутых классов (см. [Lau, 2006, p. 132, 135]). Стандартные определения этих понятий можно найти в [Lau, 2006, Р. II, §§ 1.2, 2.3–2.4]).

Называем предикат ϱ *существенным*, если не существует таких предикатов $\varrho_1, \dots, \varrho_n$, что $\text{ar}(\varrho_i) < \text{ar}(\varrho)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, и при этом $\{\varrho\} = \{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}$ [Жук, 2011].

Пусть функция f выполняет следующее условие: $f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(y, x, x) = x$. В этом случае называем f *функцией голосования*. Как указывает Д.Н. Жук [Жук, 2018] со ссылкой на работу [Baker, Pixley, 1975], для любого замкнутого класса F , содержащего функцию голосования, выполняется тождество $F = \text{Pol}(R)$, где $1 \leq \text{ar}(\varrho) \leq 2$ для каждого $\varrho \in R$. Действительно, соответствующее утверждение (Лемма 3) в [Жук, 2018] является частным случаем результата, изложенного в [Baker, Pixley, 1975, § 5.1]. В силу Леммы 2 из [Жук, 2011] также верно, что любой замкнутый класс, содержащий функцию голосования, может быть задан множеством только существенных предикатов арности 1 или 2.

Будем обозначать замкнутый класс функций, порожденный элементарными операциями матрицы $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}}$, как $[FDE]^8$ и замкнутый класс функций, порожденный элементарными операциями матрицы $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$, — как $[FDE^x]$. Нетрудно убедиться, что $[FDE]$ и, как следствие, $[FDE^x]$ содержат функцию голосования:

$$f(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z).$$

Поэтому $[FDE] = \text{Pol}(R_{FDE})$, где R_{FDE} — множество существенных предикатов местности 1 или 2.

Ниже мы приводим полный список существенных предикатов местности 1 и 2, которые сохраняет каждая функция $[FDE]$. Он был получен перебором с помощью компьютерной программы.

$$\varrho_1^1 = (\mathbf{n}), \varrho_2^1 = (\mathbf{b}), \varrho_3^1 = (\mathbf{t}, \mathbf{f}), \varrho_4^1 = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}), \varrho_5^1 = (\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}).$$

$$\begin{aligned} \varrho_1^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{n} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{pmatrix}, \varrho_2^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} \end{pmatrix}, \varrho_3^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{t} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \\ \partial\varrho_3^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{t} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \varrho_4^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{t} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \partial\varrho_4^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{b} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

⁸Заметим, что $[FDE] = [\wedge, \neg]$, так как $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$.

$$\begin{aligned}
\varrho_5^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{t} & \mathbf{b} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \partial\varrho_5^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{b} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \\
\varrho_6^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{t} & \mathbf{b} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \partial\varrho_6^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{b} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \\
\varrho_7^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{f} & \mathbf{n} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \partial\varrho_7^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{b} & \mathbf{f} & \mathbf{b} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{b} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \\
\varrho_8^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{b} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \varrho_9^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{t} & \mathbf{b} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \\
\partial\varrho_9^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{b} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \varrho_{10}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{b} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \\
\partial\varrho_{10}^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{b} & \mathbf{f} \end{pmatrix}, \varrho_{11}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{b} & \mathbf{f} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{t} & \mathbf{b} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \end{pmatrix}, \\
\partial\rho_{11}^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{b} \end{pmatrix}, \\
\rho_{12}^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{n} & \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \\ \mathbf{t} & \mathbf{f} & \mathbf{b} & \mathbf{n} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & \mathbf{b} & \mathbf{f} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $R_{FDE} = \{\varrho_1^1, \dots, \varrho_5^1, \varrho_1^2, \dots, \varrho_{12}^2, \partial\varrho_4^2, \dots, \partial\varrho_{11}^2\}$.

Здесь мы сделаем небольшое отступление, касающееся проблемы функциональной полноты в матрицах четырехзначных языковых расширений **FDE**. Пусть даны множества функций F и G . Говорим, что множество F *функционально полно* в G , если $[F] = G$. Называем множество F *предполным* в G , если F не полно в G , однако $[F \cup \{g\}] = G$ для всех $g \in G \setminus F$. Обозначим как $P_{\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}}$ класс всех функций на множестве $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$. Вопрос об условиях полноты системы элементарных операций матрицы, задающей четырехзначное языковое расширение **FDE**, неоднократно поднимался в литературе. Доказательства функциональной полноты или предполноты для отдельных примеров даются в [Arieli, Avron, 1998; Avron, 1999; Arieli, Avron, 2017; Přenosil, 2021]. Более общие достаточные условия функциональной полноты, данные в терминах выразимости тех или иных функций в матрицах, можно найти в [Rynko, 1999; Omori, Sano, 2015]. Полученный нами результат позволяет внести новый вклад в исследование проблемы полноты расширений **FDE**, сформулировав необходимые и достаточные условия в терминах сохранения операциями матриц классов предикатов.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^\times} = \langle \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}, \wedge, \vee, \neg, f_1, \dots, f_k, \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\} \rangle$ — характеристическая матрица языкового расширения **FDE**.

(1) Система функций $\{\wedge, \vee, \neg, f_1, \dots, f_k\}$ функционально полна в $P_{\{t, b, n, f\}}$, е.т.е. для каждого $\varrho \in \{\varrho_1^1, \dots, \varrho_5^1, \varrho_{12}^2\}$ найдется такая функция f_i ($1 \leq i \leq k$), что $f_i \notin \text{Pol}(\varrho)$ ⁹.

(2) Система функций $\{\wedge, \vee, \neg, f_1, \dots, f_k\}$ предполна в $P_{\{t, b, n, f\}}$, е.т.е. существует в точности один такой предикат $\varrho \in \{\varrho_1^1, \dots, \varrho_5^1, \varrho_{12}^2\}$, что для каждой функции f_i ($1 \leq i \leq k$) выполняется $f_i \in \text{Pol}(\varrho)$.

Доказательство. Известно, что система функций k -значной логики является функционально полной в классе всех функций на k -элементном множестве, е.т.е. она не содержится полностью ни в одном из замкнутых классов функций, предполных в этом классе [Лау, 2006, р.91]. Предикаты, задающие каждый замкнутый класс, предполный в классе всех функций на четырехэлементном множестве, даны в [Нагорный, 2013, с.105–107]. Пересечение множества этих предикатов со множеством R_{FDE} дает $\{\varrho_1^1, \dots, \varrho_5^1, \varrho_{12}^2\}$, что демонстрирует истинность утверждения (1). Далее, истинность утверждения (2) вытекает из того факта, что ни один предполный в $P_{\{t, b, n, f\}}$ класс не может целиком содержаться ни в каком другом замкнутом классе, кроме $P_{\{t, b, n, f\}}$. ■

Возвращаемся к основному предмету работы — вопросу о том, какие замкнутые классы могут быть порождены языковыми расширениями **FDE**, которые одновременно максимально паранепротиворечивы и максимально параполны. В силу теории Галуа для замкнутых классов, из $[FDE] \subseteq [FDE^x]$ вытекает $\text{Inv}([FDE^x]) \subseteq \text{Inv}([FDE])$ [Лау, 2006, Th.2.9.3]. Так как $[FDE] = \text{Pol}(R_{FDE})$, это влечет $[FDE^x] = \text{Pol}(R_{FDE^x}) \implies R_{FDE^x} \subseteq R_{FDE}$, где R_{FDE^x} — множество всех существенных предикатов местности 1 и 2, которые сохраняет $[FDE^x]$. Теперь остается определить, какие именно подмножества R_{FDE} описывают замкнутые классы функций, соответствующие интересующим нас расширениям **FDE**.

Лемма 1. $\mathbf{FDE}^x$ максимально паранепротиворечива, е.т.е. $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержит операцию, не сохраняющую предикат ϱ_5^1 .

Доказательство. Вытекает из Теоремы 1 и $\varrho_5^1 = (t \quad b \quad f)$. ■

Лемма 2. $\mathbf{FDE}^x$ максимально параполна, е.т.е. $\mathcal{M}_{\mathbf{FDE}^x}$ содержит операцию, не сохраняющую предикат ϱ_4^1 .

Доказательство. Вытекает из Теоремы 2 и $\varrho_4^1 = (t \quad n \quad f)$. ■

⁹Условимся писать $\text{Pol}(\varrho)$ вместо $\text{Pol}(\{\varrho\})$, когда речь идет об одноэлементных множествах предикатов

Лемма 3. $f \in \text{Pol}(\varrho_i^2) \implies f \in \text{Pol}(\varrho_4^1)$ для $2 \leq i \leq 11$;
 $f \in \text{Pol}(\partial\varrho_i^2) \implies f \in \text{Pol}(\varrho_5^1)$ для $3 \leq i \leq 11$.

Доказательство. Пусть одна из строк матрицы предиката ϱ содержит только три значения. Например, $\mathbf{t}$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{b}$. Допустим, существует такая функция f , что она сохраняет предикат ϱ и не сохраняет предикат ϱ_5^1 . В этом случае $f(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{n}$ на некотором наборе $(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}^n$. Чтобы при этом имело место $f \in \text{Pol}(\varrho)$, для каждой строки матрицы ϱ должно выполняться следующее условие: если строка содержит одновременно $\mathbf{t}$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{b}$, то она содержит также $\mathbf{n}$. Но это противоречит условию. Аналогичным образом, если хотя бы одна строка матрицы предиката ϱ состоит из значений $\mathbf{t}$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{n}$, это означает, что $f \in \text{Pol}(\varrho) \implies f \in \text{Pol}(\varrho_4^1)$. Лемма доказана для всех предикатов из условия, кроме ϱ_{11}^2 и $\partial\varrho_{11}^2$.

Теперь пусть среди столбцов матрицы предиката ϱ в точности три состоят из одного и того же значения. Например, это столбцы $\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$. Допустим, существует такая функция f , что она сохраняет предикат ϱ и не сохраняет предикат ϱ_5^1 . В этом случае $f(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{n}$ на некотором наборе $(a_1, \dots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}^n$. Чтобы при этом имело место $f \in \text{Pol}(\varrho)$, для матрицы ϱ должно выполняться следующее условие: если матрица содержит одновременно $\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$, то она содержит также $\begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}$. Но это противоречит условию. Данное построение доказывает лемму для $\partial\varrho_{11}^2$. Доказательство для ϱ_{11}^2 аналогично, достаточно в рассуждении поменять местами значения $\mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$, а также заменить ϱ_5^1 на ϱ_4^1 . ■

Лемма 4. $f \in \text{Pol}(\varrho_3^1) \cap \text{Pol}(\varrho_{12}^2) \implies f \in \text{Pol}(\varrho_4^1) \cap \text{Pol}(\varrho_5^1)$.

Доказательство. Класс $\text{Pol}(\varrho_3^1)$ — это класс всех алгебраических функций на $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, принадлежащих $P_{\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}}$. Класс $\text{Pol}(\varrho_{12}^2)$ — это класс всех функций, монотонных относительно порядка $\leq_k$, где $\mathbf{n} \leq_k \mathbf{t} \leq_k \mathbf{b}$, $\mathbf{n} \leq_k \mathbf{f} \leq_k \mathbf{b}$. Порождающая система для $\text{Pol}(\varrho_3^1) \cap \text{Pol}(\varrho_{12}^2)$ приводится в [Přenosil, 2021, Th. 18]. Все функции этой системы сохраняют как ϱ_4^1 , так и ϱ_5^1 . ■

Лемма 5. $f \in \text{Pol}(\varrho_1^2) \implies f \in \text{Pol}(\varrho_3^1)$; $f \in \text{Pol}(\varrho_1^2) \implies (f \in \text{Pol}(\varrho_1^1) \iff f \in \text{Pol}(\varrho_2^1))$.

Доказательство. Класс $Pol(\varrho_1^2)$ — это класс всех функций, самодвойственных относительно ∂ , где $\partial(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$, $\partial(\mathbf{b}) = \mathbf{n}$, $\partial(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$, $\partial(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$. Порождающая система для $Pol(\varrho_1^2)$ приводится в [Přenosil, 2021, Th. 5]. Все функции этой системы сохраняют ϱ_3^1 , что демонстрирует истинность первого утверждения. Докажем второе утверждение. Пусть $f \in Pol(\varrho_1^2)$, $f \in Pol(\varrho_1^1)$ и $f \notin Pol(\varrho_2^1)$, то есть $f(\mathbf{b}, \dots, \mathbf{b}) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$. Однако, как это следует из определения ϱ_1^2 , в этом случае либо $f(\mathbf{n}, \dots, \mathbf{n}) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$, то есть $f \notin Pol(\varrho_1^1)$, либо $f \notin Pol(\varrho_1^2)$. В обоих случаях получаем противоречие. Рассуждение для случая $f \in Pol(\varrho_1^2)$, $f \in Pol(\varrho_2^2)$, $f \notin Pol(\varrho_1^1)$ аналогично, достаточно поменять местами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$. ■

Теорема 4. Существует в точности 14 замкнутых классов функций, которые могут быть порождены наборами элементарных операций четырехзначных матриц, характеризующих максимально паранепротиворечивые и максимально парapolные языковые расширения **FDE**. Это классы функций, сохраняющие одно из следующих множеств предикатов: $R_1 = \{\emptyset\}$; $R_2 = \{\varrho_{12}^2\}$; $R_3 = \{\varrho_1^1, \varrho_{12}^2\}$; $R_4 = \{\varrho_2^1, \varrho_{12}^2\}$; $R_5 = \{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_{12}^2\}$; $R_6 = \{\varrho_1^1\}$; $R_7 = \{\varrho_3^1\}$; $R_8 = \{\varrho_3^1, \varrho_1^2\}$; $R_9 = \{\varrho_2^1\}$; $R_{10} = \{\varrho_1^1, \varrho_2^1\}$; $R_{11} = \{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_3^1, \varrho_1^2\}$; $R_{12} = \{\varrho_1^1, \varrho_3^1\}$; $R_{13} = \{\varrho_2^1, \varrho_3^1\}$; $R_{14} = \{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_3^1\}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{FDE}^x$ — максимально паранепротиворечивое и максимально парapolное четырехзначное языковое расширение **FDE** и $[FDE^x] = Pol(R_{FDE^x})$. В силу Лемм 1–3 $R_{FDE^x} \subseteq \{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_3^1, \varrho_1^2, \varrho_{12}^2\}$. В силу Леммы 4 $\varrho_3^1 \notin R_{FDE^x}$ или $\varrho_{12}^2 \notin R_{FDE^x}$.

Пусть $\varrho_{12}^2 \notin R_{FDE^x}$. Тогда $R_{FDE^x} \subseteq \{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_3^1, \varrho_1^2\}$. Из Леммы 5 вытекает $\varrho_1^1 \in R_{FDE^x} \implies \varrho_3^1 \in R_{FDE^x}$, а также $\{\varrho_1^1, \varrho_2^1\} \subseteq R_{FDE^x} \implies \varrho_2^1 \in R_{FDE^x}$ и $\{\varrho_2^1, \varrho_1^2\} \subseteq R_{FDE^x} \implies \varrho_1^1 \in R_{FDE^x}$. Поэтому $R_{FDE^x} \in \{R_1, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}\}$. Теперь пусть $\varrho_{12}^2 \in R_{FDE^x}$. Тогда $\varrho_3^1 \notin R_{FDE^x}$. В силу Леммы 5 $\varrho_1^2 \notin R_{FDE^x}$. Следовательно, $R_{FDE^x} \in \{R_2, R_3, R_4, R_5\}$. Таким образом, мы показали, что $R_{FDE^x} \in \{R_1, \dots, R_{14}\}$.

Покажем, что для каждого $R_i \in \{R_1, \dots, R_{14}\}$ найдется такая логика $\mathbf{FDE}^x$, что $[FDE^x] = Pol(R_i)$. Примеры для $i \in \{1, \dots, 7\}$ заимствуем из [Avron, 1999] (см. Теоремы 3.10, 3.11, 3.15, 3.22–3.24). Пусть операции $\supset$, $\otimes$, $\oplus$ отвечают таблицам, приведенным ниже.

$\supset$	t	b	n	f	$\otimes$	t	b	n	f	$\oplus$	t	b	n	f
t	t	b	n	f	t	t	t	n	n	t	t	b	t	b
b	t	b	n	f	b	t	b	n	f	b	b	b	b	b
n	t	t	t	t	n	n	n	n	n	n	t	b	n	f
f	t	t	t	t	f	n	f	n	f	f	b	b	f	f

Тогда имеет место следующее:

1. $[\{\wedge, \neg, \supset, \mathbf{b}, \mathbf{n}\}]$ — это класс $P_{\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}}$ всех функций на множестве $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, то есть $Pol(R_1)$.
2. $[\{\wedge, \neg, \otimes, \oplus, \mathbf{b}, \mathbf{n}\}]$ — это подкласс $P_{\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}}$, состоящий из всех $\leq_k$ -монотонных функций, то есть $Pol(R_2)$.
3. $[\{\wedge, \neg, \otimes, \mathbf{b}\}]$ — это подкласс $P_{\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}}$, состоящий из всех $\leq_k$ -монотонных функций, которые являются алгебраическими функциями на $\{\mathbf{b}\}$, то есть $Pol(R_3)$.
4. $[\{\wedge, \neg, \oplus, \mathbf{n}\}]$ — это подкласс $P_{\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}}$, состоящий из всех $\leq_k$ -монотонных функций, которые являются алгебраическими функциями на $\{\mathbf{n}\}$, то есть $Pol(R_4)$.
5. $[\{\wedge, \neg, \otimes, \oplus\}]$ — это подкласс $P_{\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}}$, состоящий из всех $\leq_k$ -монотонных функций, которые являются алгебраическими функциями как на $\{\mathbf{b}\}$, так и на $\{\mathbf{n}\}$, то есть $Pol(R_5)$.
6. $[\{\wedge, \neg, \supset, \otimes, \oplus\}]$ — это подкласс $P_{\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}}$, состоящий из всех функций, которые являются алгебраическими функциями на $\{\mathbf{b}\}$, то есть $Pol(R_6)$.
7. $Pol(R_7) = [\{\wedge, \neg, \supset, \partial\}]$ — это подкласс $P_{\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}}$, состоящий из всех функций, которые являются алгебраическими функциями на $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, то есть $Pol(R_7)$.

Далее, как следует из [Přenosil, 2021, Th. 5], $[\{\wedge, \neg, \partial\}]$ — это подкласс $P_{\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}}$, состоящий из всех функций, самодвойственных относительно ∂ , то есть $Pol(R_8)$. В оставшихся случаях R_9 – R_{14} имеет место следующее: $Pol(R_i) = [\{\wedge, \vee, \neg, g_i\}]$, где g_i определяется одной из приведенных ниже таблиц истинности. Достаточно убедиться, что для каждого $9 \leq i \leq 14$ функция g_i сохраняет все предикаты из R_i и не сохраняет никакие иные предикаты из множества R_{FDE} .

g_9	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	g_{10}	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	g_{11}	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$
g_{12}	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	g_{13}	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	g_{14}	$\mathbf{t}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{t}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$

■

Полученный результат позволяет не только перечислить замкнутые классы, которые служат предметом данной работы, но и упорядочить их по включению:

$$\begin{aligned}
 &Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_3^1, \varrho_1^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_3^1\}); \quad Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_3^1, \varrho_1^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_3^1, \varrho_1^2\}); \\
 &Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_3^1\}) \subseteq Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1\}); \quad Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_3^1\}) \subseteq Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_3^1\}); \\
 &Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_3^1\}) \subseteq Pol(\{\varrho_2^1, \varrho_3^1\}); \quad Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_1^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1\}); \\
 &Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_1^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_1^2\}); \quad Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_1^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_2^1, \varrho_1^2\}); \\
 &Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_1^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1\}); \quad Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1, \varrho_1^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_2^1, \varrho_1^2\}); \\
 &Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1\}) \subseteq Pol(\{\varrho_1^1\}); \quad Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_2^1\}) \subseteq Pol(\{\varrho_2^1\}); \\
 &Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_3^1\}) \subseteq Pol(\{\varrho_1^1\}); \quad Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_3^1\}) \subseteq Pol(\{\varrho_3^1\}); \\
 &Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_{12}^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_1^1\}); \quad Pol(\{\varrho_1^1, \varrho_{12}^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_{12}^2\}); \\
 &Pol(\{\varrho_2^1, \varrho_3^1\}) \subseteq Pol(\{\varrho_2^1\}); \quad Pol(\{\varrho_2^1, \varrho_3^1\}) \subseteq Pol(\{\varrho_3^1\}); \\
 &Pol(\{\varrho_2^1, \varrho_{12}^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_2^1\}); \quad Pol(\{\varrho_2^1, \varrho_{12}^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_{12}^2\}); \\
 &Pol(\{\varrho_3^1, \varrho_1^2\}) \subseteq Pol(\{\varrho_3^1\}); \quad Pol(\{\varrho_1^1\}) \subseteq Pol(\{\emptyset\}); \quad Pol(\{\varrho_2^1\}) \subseteq Pol(\{\emptyset\}); \\
 &Pol(\{\varrho_3^1\}) \subseteq Pol(\{\emptyset\}); \quad Pol(\{\varrho_1^2\}) \subseteq Pol(\{\emptyset\}).
 \end{aligned}$$

Для наглядности изобразим отношения между классами на диаграмме (рис. 1). В качестве обозначений классов используем множества предикатов, которые они сохраняют.

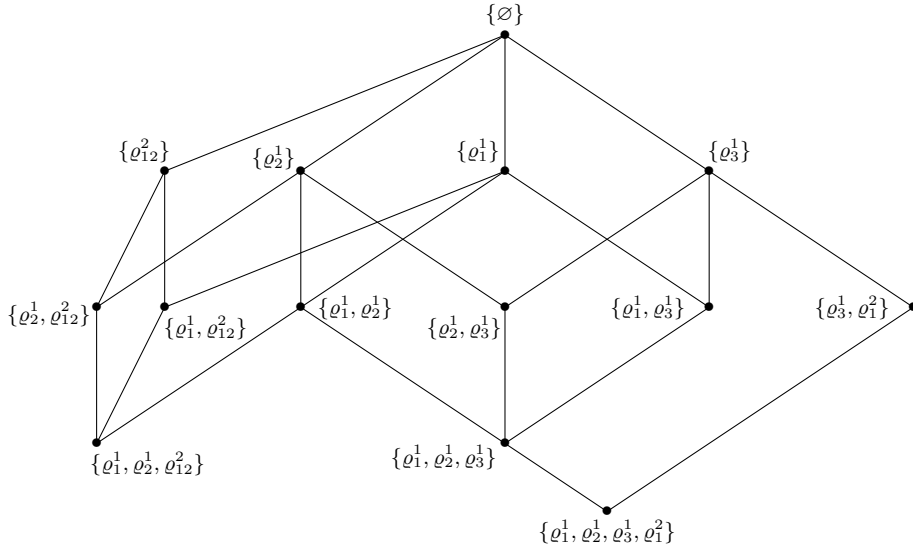


Рис. 1. Отношения между замкнутыми классами

Заключение

Представленные результаты можно применить для анализа свойств четырехзначных расширений **FDE**, которые могут быть сформулированы через определимость в этих расширениях тех или иных операторов. Раскроем этот тезис на примере, установив связь между свойствами формальной противоречивости и неопределенности с определимостью классического отрицания в максимально парapolных и максимально паранепротиворечивых четырехзначных расширениях **FDE**.

Пусть **FDE^x** — четырехзначное языковое расширение **FDE**. Говорим, что **FDE^x** — *логика формальной противоречивости (LFI)*, если в **FDE^x** имеет место $p \wedge \neg p \not\vdash q$; $p \wedge op \not\vdash q$; $\neg p \wedge op \not\vdash q$; $p \wedge \neg p \wedge op \vdash q$ для некоторого унарного оператора o . Говорим, что **FDE^x** — *логика формальной неопределенности (LFU)*, когда в **FDE^x** для некоторого унарного оператора $\star$ верны следующие утверждения: $p \not\vdash q \vee \neg q$; $p \not\vdash q \vee \star q$; $p \not\vdash \neg q \vee \star q$; $p \vdash q \vee \neg q \vee \star q$. В определениях понятий опираемся на [Marcos, 2005], адаптируя их для расширений **FDE**. Анализ данных свойств применительно к четырехзначным расширениям **FDE** можно найти в [Omori, Sano, 2014] и [Arieli, Avron, 2017].

Чтобы выполнялось условие $p \wedge \neg p \wedge op \vdash q$, необходимо $o(\mathbf{b}) \in \{\mathbf{n}, \mathbf{f}\}$. При этом должны также выполняться условия $p \wedge op \not\vdash q$ и $\neg p \wedge op \not\vdash q$, поэтому $o(x) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ для $x \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$. Отсюда имеем следующее: если **FDE^x** является **LFI**, то $[FDE^x]$ не сохраняет ни ϱ_1^1 , ни ϱ_{12}^2 . Аналогичным образом $\star(\mathbf{n}) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ и $\star(x) \in \{\mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ для $x \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, поэтому если **FDE^x** является **LFU**, то $[FDE^x]$ не сохраняет ни ϱ_1^1 , ни ϱ_{12}^2 . Теперь пусть $o(x) = \mathbf{t}$, если $x \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $o(\mathbf{b}) = \mathbf{n}$, $o(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$. Пусть также $\star(x) = \mathbf{f}$, если $x \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $\star(\mathbf{b}) = \mathbf{n}$, $\star(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$. Тогда $\{o, \star\} \subseteq \text{Pol}(\varrho_1^2)$. Как следствие, если **FDE^x** — максимально паранепротиворечивое и максимально парapolное языковое расширение **FDE**, эта логика является одновременно логикой формальной противоречивости и логикой формальной неопределенности тогда и только тогда, когда $[FDE^x] = \text{Pol}(R_i)$, где $i \in \{1, 7, 8\}$.

Теперь рассмотрим следующее свойство — определимость в расширении **FDE** классического отрицания. Анализу этого свойства отдельно посвящена работа [Omori, Sano, 2015]. Говорим, что в **FDE^x** *определимо классическое отрицание*, если в $[FDE^x]$ содержится такая функция $\sim$, что $\sim x \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\} \iff x \in \{\mathbf{n}, \mathbf{f}\}$. Если выполнено это условие, то $\sim$ не сохраняет ни ϱ_1^1 , ни ϱ_2^1 , ни ϱ_{12}^2 . Пусть $\sim(\mathbf{t}) = \mathbf{f}$, $\sim(\mathbf{b}) = \mathbf{n}$, $\sim(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$, $\sim(\mathbf{f}) = \mathbf{t}$. В этом случае $\sim$ сохраняет ϱ_1^2 . Как следствие, если **FDE^x** — максимально паранепротиворечивое и максимально парapolное языковое расширение **FDE**, в этой логике определимо классическое отрицание то-

гда и только тогда, когда она является одновременно логикой формальной противоречивости и логикой формальной неопределенности.

Мы показали, как замкнутые классы могут быть поставлены в соответствие тем или иным свойствам расширений **FDE**. Конечно, применимость этого метода не исчерпывается приведенным примером. Например, в [Přenosil, 2021] аналогичный подход применяется для анализа расширений **FDE** с точки зрения абстрактной алгебраической логики — замкнутым классам функций сопоставляются свойства «быть протоалгебраической логикой», «быть алгебраизируемой логикой», «быть импликативной логикой» и др.

Еще одна область применения результатов статьи касается полученного нами множества предикатов R_{FDE} . Оно позволяет сравнить выразительные возможности двух произвольных четырехзначных языковых расширений **FDE**. Для этого достаточно установить, какое подмножество R_{FDE} сохраняют одновременно все элементарные операции матрицы первого из сравниваемых расширений, а какое — второго.

Завершая статью, остановимся на возможных направлениях дальнейших исследований. В статьях [Shramko et al., 2017; Shramko et al., 2019] рассматриваются родственные **FDE** логики **ETL** и **NFL**, характеристические матрицы которых отличаются от $\mathcal{M}_{FDE}$ только классами выделенных значений. В то время как $D = \{t, b\}$ в $\mathcal{M}_{FDE}$, $D = \{t\}$ в $\mathcal{M}_{ETL}$ и $D = \{t, b, n\}$ в $\mathcal{M}_{NFL}$. Логика **ETL** парapolна, но не паранепротиворечива. Логика **NFL** паранепротиворечива, но не парapolна. Представляют интерес критерии максимальной паранепротиворечивости (или парapolноты) в данных логиках, а также замкнутые классы, порождаемые операциями их максимально паранепротиворечивых (или парapolных) четырехзначных языковых расширений. Кроме того, актуальной представляется задача построения полной решетки замкнутых надклассов $[FDE]$, а не только ее отдельных фрагментов.

Литература

- Жук, 2011 — Жук Д.Н. Предикатный метод построения решетки Поста // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 2. С. 115–128.
- Жук, 2018 — Жук Д.Н. От двужначной к k -значной логике // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22. Вып. 1. С. 131–149.
- Нагорный, 2013 — Нагорный А.С. О пересечениях и объединениях предполных классов многозначной логики: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. М., 2013. 162 с.
- Adams, Dziobiak, 1994 — Adams M.E, Dziobiak W. Lattices of quasivarieties of 3-element algebras // Journal of Algebra. 1994. Vol. 166. No. 1. P. 181–210.

- Avron, 1999 – *Avron A.* On the expressive power of three-valued and four-valued languages // *Journal of Logic and Computation*. 1999. Vol. 9. No. 6. P. 977–994.
- Arieli, Avron, 1998 – *Arieli O., Avron A.* The value of the four values // *Artificial Intelligence*. 1998. Vol. 102. No. 1. P. 97–141.
- Arieli, Avron, 2017 – *Arieli O., Avron A.* Four-valued parafinite logics // *Studia Logica*. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1087–1122.
- Arieli et al., 2011 – *Arieli O., Avron A., Zamansky A.* Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics // *Studia Logica*. 2011. Vol. 97. No. 1. P. 31–60.
- Baker, Pixley, 1975 – *Baker K.A., Pixley A.F.* Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // *Mathematische Zeitschrift*. 1975. Vol. 143. No. 2. P. 165–174.
- Belnap, 1977 – *Belnap N.D.* How a computer should think // *Contemporary Aspects of Philosophy* / Ed. by G. Ryle. Oriel Press, 1977. P. 30–56.
- Da Costa, 1974 – *Da Costa N.C.A.* On the theory of inconsistent formal systems // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 1974. Vol. 15. No. 4. P. 497–510.
- De, Omori, 2015 – *De M., Omori H.* Classical Negation and Expansions of Belnap–Dunn Logic // *Studia Logica*. 2015. Vol. 103. No. 5. P. 825–851.
- Karpenko, 2017 – *Karpenko A.S.* Four-valued logics BD and DM4: Expansions // *Bulletin of the Section of Logic*. 2017. Vol. 46. No. 1–2. P. 33–45.
- Lau, 2006 – *Lau D.* Function algebras on finite sets: Basic course on many-valued logic and clone theory. Springer: Science & Business Media, 2006. 670 c.
- Łoś, 1949 – *Łoś J.* O matrycach logicznych // *Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego*. Seria B. 1949. No. 19. P. 1–141.
- Marcos, 2005 – *Marcos J.* Nearly every normal modal logic is paranormal // *Logique et Analyse*. 2005. Vol. 48. No. 189–192. P. 279–300.
- Omori, Sano, 2014 – *Omori H., Sano K.* Da Costa meets Belnap and Nelson // *Recent Trends in Philosophical Logic* / Ed. by R. Ciuni, H. Wansing, C. Willkommen. Springer, 2014. P. 145–166.
- Omori, Sano, 2015 – *Omori H., Sano K.* Generalizing functional completeness in Belnap–Dunn logic // *Studia Logica*. 2015. Vol. 103. No. 5. P. 883–917.
- Omori, Wansing, 2017 – *Omori H., Wansing H.* 40 years of FDE: an introductory overview // *Studia Logica*. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1021–1049.
- Petrukhin, Shangin, 2019 – *Petrukhin Ya.I., Shangin V.O.* Correspondence analysis and automated proof-searching for first degree entailment // *European Journal of Mathematics*. 2019. P. 1–44.
- Přenosil, 2021 – *Přenosil A.* De Morgan clones and four-valued logics // *Algebra universalis*. 2021. Vol. 82. No. 2. P. 1–42.
- Priest, 2008 – *Priest G.* An introduction to non-classical logic: From if to is. Cambridge University Press, 2008. 613 p.

- Pynko, 1999 – *Pynko A.* Functional Completeness and Axiomatizability within Belnap's Four-Valued Logic and its Expansions // Journal of Applied Non-Classical Logics. 1999. Vol. 9. No. 1. P. 61–105.
- Shapiro, 2017 – *Shapiro L.* LP, K3 and FDE as Substructural Logics // The Logica Yearbook 2016 / Ed. by P. Arazim and T. Lavička. London: College Publications, 2017. P. 257–272.
- Shoesmith, Smiley, 1978 – *Shoesmith D.J., Smiley T.J.* Multiple-conclusion logic. CUP Archive, 1978. 396 p.
- Shramko et al., 2017 – *Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A.* First-Degree Entailment and its Relatives // Studia Logica. 2017. Vol. 105. P. 1291–1317.
- Shramko et al., 2019 – *Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A.* The FMLA-FMLA Axiomatizations of the Exactly True and Non-falsity Logics and Some of Their Cousins // Journal of Philosophical Logic. 2019. Vol. 48. P. 787–808.
- Tomova, 2021 – *Tomova N.* A Semi-lattice of Four-valued Literal-paraconsistent-paracomplete Logics // Bulletin of the Section of Logic. 2021. Vol. 50. No. 1. P. 35–53.

LEONID YU. DEVYATKIN

On the expressive power of maximally paraconsistent and maximally paracomplete expansions of FDE

Leonid Yu. Devyatkin

Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Abstract: The paper is devoted to the closed classes of functions of four-valued logics which can be generated by the primitive operations of characteristic matrices for the expansions of **FDE** that are simultaneously maximally paraconsistent and paracomplete.

We begin with presenting the necessary and sufficient conditions which four-valued expansions of **FDE** must satisfy in order to be maximally paraconsistent and paracomplete. In both cases, the criteria of maximality are linked to operations of a certain kind being present in a matrix of an expansion in question, which prevent it from being a sublogic of a three-valued expansion of Asenjo–Priest’s logic **LP** — in the paraconsistent case, or Kleene’s logic **K₃** — in the paracomplete case.

Further, relying on the Baker–Pixley theorem, we describe a set of 5 unary and 20 binary predicates such that any closed class of functions generated by the operations of a four-valued characteristic matrix characterizing an expansion of **FDE** is a class of functions that preserve one of its subsets. This yields a simple algorithm for comparing the expressive power of any arbitrary four-valued expansion of **FDE**.

Moreover, taking into account that the given set of predicates includes all predicates describing precomplete classes of functions of four-valued logic which are preserved by the operations of the characteristic matrix for **FDE**, we provide criteria of functional completeness and pre-completeness for the operations of any four-valued matrix which characterizes an expansion of **FDE**.

Finally, by utilizing the conditions of maximal paraconsistency and paracompleteness, as well as the list of predicates for expansions of **FDE**, given in the paper, we identify all 14 sets of predicates describing the closed classes of functions which can be generated by systems of primitive operations of four-valued characteristic matrices for such expansions of **FDE** that are at the same time maximally paraconsistent and maximally paracomplete. This allows us to not only list all closed classes corresponding to the maximally paraconsistent and paracomplete four-valued expansions of **FDE**, but also to order them with respect to inclusion.

Keywords: four-valued logics, paraconsistency, paracompleteness, closed classes of functions, closed classes of predicates

For citation: Devyatkin L.Yu. “O vyrazitel’nykh vozmozhnostyakh maksimal’no paraneprotivorechivyykh i maksimal’no parapolnykh chetyrekhznachnykh rasshirenii FDE ”

[On the expressive power of maximally paraconsistent and maximally paracomplete expansions of FDE], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 66–92. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-66-92 (In Russian)

References

- Zhuk, 2011 – Zhuk, D.N. “Predikatnyi metod postroeniya reshetki Posta” [The predicate method for constructing Post’s lattice], *Diskretnaya Matematika*, 2011, Vol. 23, No. 2, pp. 115–128. (In Russian)
- Zhuk, 2018 – Zhuk, D.N. “Ot dvuznachnoi k k -znachnoi logike” [From two-valued to k -valued, logic], *Intellektual’nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, 2018, Vol. 22, Is. 1, pp. 131–149. (In Russian)
- Nagorny, 2013 – Nagorny, A.S. *O peresecheniyakh i ob’edineniyakh predpolnykh klassov mnogoznachnoi logiki* [On meets and joins of precomplete classes of many-valued logic], Moscow, 2013. 162 pp. (In Russian)
- Adams, Dziobiak, 1994 – Adams M.E, Dziobiak W. “Lattices of quasivarieties of 3-element algebras”, *Journal of Algebra*, 1994, Vol. 166, No. 1, pp. 181–210.
- Avron, 1999 – Avron, A. “On the expressive power of three-valued and four-valued languages”, *Journal of Logic and Computation*, 1999, Vol. 9, No. 6, pp. 977–994.
- Arieli, Avron, 1998 – Arieli, O., Avron, A. “The value of the four values”, *Artificial Intelligence*, 1998, Vol. 102, No. 1, pp. 97–141.
- Arieli, Avron, 2017 – Arieli, O., Avron, A. “Four-valued parafinite logics”, *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1087–1122.
- Arieli et al., 2011 – Arieli, O., Avron, A., Zamansky, A. “Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics”, *Studia Logica*, 2011, Vol. 97, No. 1, pp. 31–60.
- Baker, Pixley, 1975 – Baker, K.A., Pixley, A.F “Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems”, *Mathematische Zeitschrift*, 1975, Vol. 143, No. 2, pp. 165–174.
- Belnap, 1977 – Belnap, N. “A useful four-valued logic”, *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, ed. by J.M. Dunn, G. Epstein. Boston: D. Reidel Publishing Co., 1977, pp. 8–37.
- Da Costa, 1974 – Da Costa, N.C.A. “On the theory of inconsistent formal systems”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1974, Vol. 15, No. 4, pp. 497–510.
- De, Omori, 2015 – De, M., Omori, H., “Classical Negation and Expansions of Belnap–Dunn Logic”, *Studia Logica*, 2015, Vol. 103, No. 5, pp. 825–851.
- Karpenko, 2017 – Karpenko, A.S., “Four-valued logics BD and DM4: Expansions”, *Bulletin of the Section of Logic*, 2017, Vol. 46, No. 1–2, pp. 33–45.
- Lau, 2006 – Lau, D. *Function algebras on finite sets: Basic course on many-valued logic and clone theory*. Springer: Science & Business Media, 2006. 670 pp.
- Łoś, 1949 – Łoś, J. “O matrycach logicznych”, *Prace Wroclawskiego Towarzystwa Naukowego. Seria B*, 1949, No. 19, pp. 1–141. (In Polish)

- Marcos, 2005 – Marcos, J. “Nearly every normal modal logic is paranormal”, *Logique et Analyse*, 2005, Vol. 48, No. 189–192, pp. 279–300.
- Omori, Sano, 2014 – Omori, H., Sano, K. “da Costa meets Belnap and Nelson”, *Recent Trends in Philosophical Logic*, ed. by R. Ciuni, H. Wansing, C. Willkommen. Springer, 2014, pp. 145–166.
- Omori, Sano, 2015 – Omori, H., Sano, K. “Generalizing functional completeness in Belnap–Dunn logic”, *Studia Logica*, 2015, Vol. 103, No. 5, pp. 883–917.
- Omori, Wansing, 2017 – Omori, H., Wansing, H. “40 years of FDE: an introductory overview”, *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1021–1049.
- Petrukhin, Shangin, 2019 – Petrukhin, Ya.I., Shangin, V.O. “Correspondence analysis and automated proof-searching for first degree entailment”, *European Journal of Mathematics*, 2019, pp. 1–44.
- Přenosil, 2021 – Přenosil, A. “De Morgan clones and four-valued logics”, *Algebra universalis*, 2021, Vol. 82, No. 2, pp. 1–42.
- Priest, 2008 – Priest, G. *An introduction to non-classical logic: From if to is*. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2008. 613 pp.
- Pynko, 1999 – Pynko, A. “Functional Completeness and Axiomatizability within Belnap’s Four-Valued Logic and its Expansions”, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 1999, Vol. 9, No. 1, pp. 61–105.
- Shapiro, 2017 – Shapiro, L. “LP, K3 and FDE as Substructural Logics”, *The Logica Yearbook 2016*, ed. by P. Arazim and T. Lavička. London: College Publications, 2017, pp. 257–272.
- Shoesmith, Smiley, 1978 – Shoesmith, D.J., Smiley, T.J. *Multiple-conclusion logic*, CUP Archive, 1978. 396 pp.
- Shramko et al., 2017 – Shramko, Y., Zaitsev, D., Belikov, A. “First-Degree Entailment and its Relatives”, *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, pp. 1291–1317.
- Shramko et al., 2019 – Shramko, Y., Zaitsev, D., Belikov, A. “The FMLA-FMLA Axiomatizations of the Exactly True and Non-falsity Logics and Some of Their Cousins”, *Journal of Philosophical Logic*, 2019, Vol. 48, pp. 787–808.
- Tomova, 2021 – Tomova N. “A Semi-lattice of Four-valued Literal-paraconsistent-paracomplete Logics”, *Bulletin of the Section of Logic*, 2021, Vol. 50, No. 1, pp. 35–53.

MIKHAIL RYBAKOV, DMITRY SHKATOV

Undecidability of QLTL and QCTL with two variables and one monadic predicate letter

Mikhail Rybakov

Tver State University,
Zhelyabova Street, 33, Tver, 170100, Russia.
E-mail: m_rybakov@mail.ru

Dmitry Shkatov

University of the Witwatersrand, Johannesburg,
Private Bag 3, WITS2050, South Africa.
Tver State University,
Zhelyabova Street, 33, Tver, 170100, Russia.
E-mail: shkatov@gmail.com

Abstract: We study the algorithmic properties of the quantified (first-order) temporal logics **QLTL** and **QCTL** in languages with restrictions on the number of individual variables as well as the number and arity of predicate letters. We prove that satisfiability problems for **QLTL** and **QCTL** in languages with two individual variables and one monadic predicate letter are Σ_1^1 -hard. Thus, **QLTL** and **QCTL** are Π_1^1 -hard, and so not recursively enumerable, in such languages. The results, which hold both for the expanding domain and for the constant domain semantics, are obtained by reduction from a Σ_1^1 -hard $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ recurrent tiling problem. The results presented in this paper strengthen those by I. Hodkinson, F. Wolter, and M. Zakharyashev, who have shown that the satisfiability problem for **QLTL** (and, by a straightforward modification of the proof, for **QCTL**) is Σ_1^1 -hard in languages with two individual variables and an unlimited supply of monadic predicate letters.

Keywords: quantified temporal logic, first-order temporal logic, linear-time temporal logic, branching-time temporal logic, restricted languages, undecidability, recursive enumerability, arithmetic complexity, algorithmic classification problem, satisfiability problem, validity problem

For citation: Rybakov M., Shkatov D. “Undecidability of QLTL and QCTL with two variables and one monadic predicate letter”, *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 93–120. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-93-120

1. Introduction

Temporal logics [Emerson, 1990; Goldblatt, 1992; Gabbay et al., 1994; Demri et al., 2016] (we use the term “temporal logics” for formalisms studied

primarily in the context of computer science; by contrast, the term “tense logics” is commonly used for formalisms studied primarily by philosophers and linguists), having appeared in the 1980s [Pnueli, 1986] as a tool for the verification of concurrent systems, have since been extensively used as specification languages [Manna, Pnueli, 1992; Manna, Pnueli, 1995; Clarke et al., 2000], knowledge representation formalisms [Baader et al., 2015; Borgwardt et al., 2015; Bourgaux et al., 2019; Artale et al., 2004], and query languages [Chomicki, Niwinski, 1993; Chomicki, 1994; Abiteboul, 1996], often in combination with other formalisms, such as epistemic [Halpern, Vardi, 1998; Fagin et al., 1995; van der Hoek, Wooldridge, 2003] and description [Wolter, Zakharyashev, 2000; Artale, Franconi, 2000; Baader et al., 2012] logics.

Most applications of temporal logics in computer science have been those of propositional temporal logics, mostly because the quantified temporal logics of relevance to computer science are computationally badly behaved — most of them are not even recursively enumerable¹ and, hence, deductively incomplete: no effective proof system can capture all the valid inferences in quantified temporal languages [Andréka et al., 1979; Szalas, 1986; Szalas, Holenderski, 1988; Abadi, 1989; Merz, 1992; Garson, 2001]. By comparison, propositional temporal logics, which are typically PSPACE-, EXPTIME-, or 2EXPTIME-complete [Fischer, Ladner, 1979; Sistla, Clarke, 1985; Vardi, Stockmeyer, 1985; Emerson, Halpern, 1985; Goranko, van Drimmelen, 2006; Walther et al., 2006; Schewe, 2008] and usually have sound and complete proof systems [Emerson, Halpern, 1985; Goldblatt, 1992; Goranko, van Drimmelen, 2006; Goranko, Shkatov, 2009d]², look quite attractive.

In some applications, however, — temporal databases being an example — propositional logics do not suffice; hence, a need for quantified temporal logics. The bad computational behaviour of quantified temporal logics does not have to spell end to their applicability: the classical first-order logic, despite being undecidable [Church, 1936; Turing, 1936], has had a very long and highly successful history of applications in computer science and artificial intelligence. What is important from the point of view of applications is not whether a logic as a whole is decidable, but whether it has sufficiently expressive decidable fragments: no application requires the full expressive power of a logic. Therefore, the study of the algorithmic properties of *fragments* of quantified temporal

¹For a brief discussion of how this relates to their propositional bases, see the authors’ earlier article [Rybakov, Shkatov, 2020a].

²These can be used to obtain, by being combined with proof systems for other formalisms such as epistemic logics [Goranko, Shkatov, 2008; Goranko, Shkatov, 2009a; Ajspur et al., 2013], proof systems for combined systems such as temporal-epistemic logics [Goranko, Shkatov, 2009b; Goranko, Shkatov, 2009c].

logics is crucial for grasping the range of their applicability within computer science and artificial intelligence.

The study of the algorithmic properties of fragments of a logic, which typically involves identification of its maximal decidable and minimal undecidable fragments — the decidable fragments that become undecidable when slightly extended and the undecidable fragments that become decidable when slightly restricted, — is known as an *algorithmic classification problem* for a logic. Such a study pursues at least two objectives: to understand the root causes of the bad computational behaviour of a logic and to obtain expressive, yet computationally feasible, fragments. The first objective is pursued mainly through identification of undecidable, the second through identification of decidable, fragments.

The main success story of algorithmic classification research has been the classical first-order logic **QCI** [Börger et al., 1997]. The algorithmic classification problem for non-classical — modal, temporal, and superintuitionistic — logics has been much less studied: despite extensive literature [Kripke, 1962; Artemov, Dzhabaridze, 1990; Gabbay, Shehtman, 1993; Wolter, Zakharyashev, 2001; Kontchakov et al., 2005; Rybakov, Shkatov, 2019c; Shehtman, Shkatov, 2019; Rybakov, Shkatov, 2020b; Rybakov, Shkatov, 2020c; Shehtman, Shkatov, 2020; Rybakov, Shkatov, 2021b; Rybakov, Shkatov, 2021c; Rybakov, Shkatov, 2021d; Rybakov, Shkatov, 2021e], much less is known about the algorithmic properties of fragments of non-classical logics than about the algorithmic properties of fragments of **QCI**.

The present paper aims to contribute to the algorithmic classification problem for quantified temporal logics. We originally focus on the quantified linear-time temporal logic **QLTL**, both the simplest and the most widely used quantified temporal logic, and then show how our treatment of **QLTL** can be extended to the quantified branching-time temporal logic **QCTL**, and hence to the quantified alternating-time temporal logic **QATL**. Clearly, our results also apply to **QCTL*** and **QATL***, since **QCTL** can be viewed as a fragment of **QCTL*** and **QATL** as a fragment of **QATL***.

The largest known decidable fragments of **QLTL** are *monodic* fragments [Hodkinson et al., 2000, Theorem 15] (see also [Gabbay et al., 2003, Ch. 11]): a monodic fragment is obtained by adding to a decidable fragment of **QCI** valid temporal formulas in which scopes of temporal operators do not contain more than one free variable (many temporal formulas of interest, including the Barcan formula corresponding to the semantic condition of constant domains, have this form). Following up on the discovery of monodic fragments, the complexity of a number of decidable fragments of **QLTL** has been iden-

tified [Hodkinson et al., 2003], and effective axiomatizations of monodic fragments have been obtained [Wolter, Zakharyashev, 2002].

The smallest known undecidable fragment of **QLTL** [Hodkinson et al., 2000, Theorem 2] contains formulas with two individual variables and an unlimited supply of monadic predicate letters.

Thus, the gap between the known decidable and the known undecidable fragments of **QLTL** is quite narrow: the fragment with two individual variables, an unlimited supply of monadic predicate letters, and unrestricted use of temporal operators is undecidable, but the fragment with two variables, only monadic predicate letters, and the monodic use of temporal operators — i.e., using the temporal operators so that their scopes contain formulas with at most one free variable — is decidable (the corresponding fragment of **QCI** is decidable [Mortimer, 1975; Grädel et al., 1997]; hence, it forms a suitable classical basis for a monodic fragment).

Nevertheless, in light of recent results [Rybakov, Shkatov, 2019c; Rybakov, Shkatov, 2020b; Rybakov, Shkatov, 2020c; Rybakov, Shkatov, 2021b; Rybakov, Shkatov, 2021c] on undecidability of quantified modal and superintuitionistic logics, close relations of quantified temporal logics, — which show that fragments with a few variables (two [Rybakov, Shkatov, 2019c; Rybakov, Shkatov, 2021c] or three [Rybakov, Shkatov, 2020c; Rybakov, Shkatov, 2021b], depending on the logic) and a *single* monadic predicate letter often turn out to be undecidable when no restrictions are placed on the use of non-classical operators — a very natural question arises of whether the gap between the known decidable and the known undecidable fragments can be tightened still further: can we prove undecidability of **QLTL** in languages with two variables and a single monadic predicate letter?

In the present paper we do just that: we narrow the gap between the known decidable and the known undecidable fragments of **QLTL** by proving that the fragment containing formulas with two variables and a *single* monadic predicate letter is already undecidable — more precisely, this fragment is Π_1^1 -hard, i.e. has the same computational complexity as the full logic (we are not aware of upper-bound results for **QLTL**; whatever the upper bound is, it is surely inherited by all the fragments).

The main technical novelty of the present paper is modelling of an arbitrary number of monadic predicate letters with a single one for logics of linear structures. The techniques used in the proofs of analogous results for most modal and superintuitionistic logics [Rybakov, Shkatov, 2019c; Rybakov, Shkatov, 2020c; Rybakov, Shkatov, 2021b] are inapplicable to **QLTL**: being ultimately based on the propositional level techniques [Halpern, 1995; Chagrov, Rybakov, 2003; Rybakov, Shkatov, 2018a; Rybakov, Shkatov, 2018b; Rybakov,

Shkatov, 2019a; Rybakov, Shkatov, 2021a] developed for modal logics of frames without restrictions on the branching factor, they cannot be used for logics of linear frames, such as **QLTL**, since they rely on transformations of models that arbitrarily increase their branching factor. We adopt here to **QLTL** an approach recently [Rybakov, Shkatov, 2020b; Rybakov, Shkatov, 2021c] used for monomodal logics of linear frames: in that setting, however, it is not clear how undecidability can be obtained for languages with a single monadic predicate letter. In the present paper, we adapt those techniques to **QLTL** to obtain undecidability for languages with two variables and a single monadic predicate letter.³

The proof proceeds by reduction from the Σ_1^1 -hard [Harel, 1986] $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ recurrent tiling problem. The initial reduction to satisfiability for **QLTL** in languages with two individual variables, one binary, and an unlimited supply of monadic letters, carried out in Lemma 1, resembles the reduction from a known proof by I. Hodkinson, F. Wolter, and M. Zakharyashev [Hodkinson et al., 2000, Theorem 2]; it is not, however, enough for our purposes to reuse their formulas — we, therefore, define our own reduction from the recurrent tiling problem preparing the ground for subsequent reductions to less expressive subfragments, carried out in Lemmas 2 and 3.

The paper is structured as follows. In Section 2, we introduce the syntax and semantics of **QLTL**. In Section 3, we present our undecidability result for **QLTL**. In Section 4, we show how to obtain an analogous result for **QCTL**. We conclude in Section 5 by discussing directions for future study.

We assume the reader’s familiarity with the basic notions of computability theory; the reader wishing a reminder may consult [Rogers, 1967] and [Ender-ton, 2011].

Throughout the paper, we denote by $\mathbb{N}$ the set of natural numbers, which includes zero, and by $\mathbb{N}^+$ the set of positive integers, which excludes zero.

2. Preliminaries

In this section, we present the syntax and semantics of first-order quantified linear time temporal logic **QLTL**.

2.1. Syntax of **QLTL**

The full, unrestricted, language of **QLTL** contains:

- countably many individual variables, denoted by $x, y, x_1, y_1, \dots$;
- for every $n \in \mathbb{N}$, countably many n -ary predicate letters, denoted by $P^n, Q^n, R^n, \dots$; when the arity of a predicate letter is clear from the

³The result itself was announced, without proof, in the Discussion section of an earlier paper [Rybakov, Shkatov, 2021c].

context, the superscript is usually omitted; nullary predicate letters are propositional variables;

- the Boolean constant $\perp$ (falsity);
- the binary Boolean connective $\rightarrow$ (implication);
- the binary temporal connective $\mathcal{U}$ (until);
- the quantifier symbol $\forall$ (for every);
- technical symbols: parentheses $(,)$, and the comma.

Formulas are defined by the BNF expression

$$\varphi := P(x_1, \dots, x_n) \mid \perp \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\varphi \mathcal{U} \varphi) \mid \forall x \varphi,$$

where P ranges over n -ary predicate letters. *Atomic* formulas are those of the form $P(x_1, \dots, x_n)$. *Closed* formulas are those without free occurrences of variables. We use the standard abbreviations

$$\begin{aligned} \neg \varphi &= (\varphi \rightarrow \perp); \\ \top &= \neg \perp; \\ \varphi \wedge \psi &= \neg \varphi \rightarrow \neg \psi; \\ \varphi \vee \psi &= \neg \varphi \rightarrow \psi; \\ \varphi \leftrightarrow \psi &= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi); \\ \bigcirc \varphi &= \perp \mathcal{U} \varphi; \\ \Diamond \varphi &= \varphi \vee (\top \mathcal{U} \varphi); \\ \Box \varphi &= \neg \Diamond \neg \varphi; \\ \exists x \varphi &= \neg \forall x \neg \varphi, \end{aligned}$$

as well as

$$\begin{aligned} \bigcirc^0 \varphi &= \varphi; \\ \bigcirc^{n+1} \varphi &= \bigcirc \bigcirc^n \varphi, \text{ for every } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

When parentheses are omitted, $\neg$, $\bigcirc$, $\Diamond$, $\Box$, $\forall$, and $\exists$ are assumed to bind tighter than $\wedge$, $\vee$, and $\mathcal{U}$, which are assumed to bind tighter than $\rightarrow$ and $\leftrightarrow$. To enhance readability of formulas, we occasionally use square brackets in place of parentheses.

2.2. Semantics of QLTL

The semantics of **QLTL**-formulas is defined in terms of *Kripke frames*, also known — particularly, in computer science — as *transition systems*.

A *Kripke frame* is a structure $\mathfrak{F} = \langle S, \mapsto \rangle$, where S is a non-empty set of *states* and $\mapsto$ is a binary *transition relation* on S satisfying the seriality condition: for every $s \in S$, there exists $t \in S$ such that $s \mapsto t$. If $s \mapsto t$, we say that t is *accessible from* s . The relation $\mapsto$ is not required to be functional: more than one state can be accessible from any state.

A *path* in a frame $\langle S, \mapsto \rangle$ is an infinite sequence π of elements of S such that $\pi[i] \mapsto \pi[i+1]$, for every $i \in \mathbb{N}$; thus, $\pi[i]$ is the i th state of π . For every $i \in \mathbb{N}$, we denote by $\pi[i, \infty]$ the infinite suffix of π beginning with $\pi[i]$, i.e., the sequence $\pi[i], \pi[i+1], \dots$ of states.

A *predicate Kripke frame with a system of expanding domains* is a tuple $\mathfrak{F}_D = \langle S, \mapsto, D \rangle$, where $\langle S, \mapsto \rangle$ is a Kripke frame and D is a function from S into the set of non-empty subsets of some set, *the domain of* $\mathfrak{F}_D$; the function D is required to satisfy the monotonicity condition: $s \mapsto s'$ implies $D(s) \subseteq D(s')$. The set $D(s)$ is *the domain of state* s . We often write D_s for $D(s)$. We shall also consider predicate frames satisfying the stronger constancy condition: $s \mapsto s'$ implies $D(s) = D(s')$; such predicate frames are called *predicate frames with constant domains*. By *predicate frame simpliciter* we mean predicate frames with expanding domains. If needed, consult [Gabbay et al., 1994; Hughes, Cresswell, 1996; Fitting, Mendelsohn, 1998; Braüner, Ghilardi, 2007; Goldblatt, 2011] and [Gabbay et al., 2009, §3.1] for fuller description of Kripke semantics for predicate temporal — and closely related modal — logics.

A *Kripke model* is a tuple $\mathfrak{M} = \langle S, \mapsto, D, I \rangle$, where $\langle S, \mapsto, D \rangle$ is a predicate Kripke frame and I , called *the interpretation of predicate letters* with respect to states of S , is a function assigning to a state $s \in S$ and an n -ary predicate letter P an n -ary relation $I(s, P)$ on D_s ; thus, $I(s, P) \subseteq D_s^n$. In particular, if P is nullary, $I(s, P) \subseteq D_s^0 = \{\langle \rangle\}$; thus, we can identify truth with $\{\langle \rangle\}$ and falsity with $\emptyset$. We often write $P^{I,s}$ for $I(s, P)$. We say that $\langle S, \mapsto, D, I \rangle$ is a model *over* the frame $\langle S, \mapsto \rangle$ and *over* the predicate frame $\langle S, \mapsto, D \rangle$. We also say that $\langle S, \mapsto \rangle$ is the *underlying frame*, and $\langle S, \mapsto, D \rangle$ the *underlying predicate frame*, of a model $\langle S, \mapsto, D, I \rangle$. If π is a path in a frame underlying a model $\mathfrak{M}$, we also say that π is a path in $\mathfrak{M}$.

An *assignment* in a model is a function g associating with every individual variable x an element $g(x)$ of the domain of the underlying predicate frame. We write $g' \stackrel{x}{=} g$ if assignment g' differs from assignment g in at most the value of variable x .

Formulas are evaluated in Kripke models relative to paths (rather than states, as in modal, and some other temporal, logics). The satisfaction relation between models $\mathfrak{M}$, paths π , assignments g , and formulas φ is defined by recursion:

- $\mathfrak{M}, \pi \models^g P(x_1, \dots, x_n) \iff \langle g(x_1), \dots, g(x_n) \rangle \in P^{I, \pi[0]}$;
- $\mathfrak{M}, \pi \not\models^g \perp$;
- $\mathfrak{M}, \pi \models^g \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \iff \mathfrak{M}, \pi \not\models^g \varphi_1 \text{ or } \mathfrak{M}, \pi \models^g \varphi_2$;

- $\mathfrak{M}, \pi \models \varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2 \iff \mathfrak{M}, \pi[i, \infty] \models \varphi_2$, for some $i > 0$, and $\mathfrak{M}, \pi[j, \infty] \models \varphi_1$, for every j with $0 < j < i$;
- $\mathfrak{M}, \pi \models^g \forall x \varphi_1 \iff \mathfrak{M}, \pi \models^{g'} \varphi_1$, for every g' such that $g' \stackrel{x}{=} g$ and $g'(x) \in D(\pi[0])$.

This definition implies that

- $\mathfrak{M}, \pi \models^g \bigcirc \varphi \iff \mathfrak{M}, \pi[1, \infty] \models^g \varphi$;
- $\mathfrak{M}, \pi \models^g \Diamond \varphi \iff \mathfrak{M}, \pi[i, \infty] \models^g \varphi$, for some $i \in \mathbb{N}$;
- $\mathfrak{M}, \pi \models^g \Box \varphi \iff \mathfrak{M}, \pi[i, \infty] \models^g \varphi$, for every $i \in \mathbb{N}$.

We note that, if $\mathfrak{M} = \langle S, \mapsto, D, I \rangle$ is a Kripke model, $s \in S$, and $I_s(P) = I(s, P)$, then the tuple $\mathfrak{M}_s = \langle D_s, I_s \rangle$ is a classical predicate model, or structure.

We also note that we take the strict version of “until” as our primitive temporal connective: $\pi \models \varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2$ implies that φ_2 is satisfied at a future state of π and φ_1 is satisfied at every future state of π preceding the state satisfying φ_2 . The non-strict “until”, allowing φ_2 to be satisfied at the current state of π , can be expressed using the strict “until”: $\varphi_1 \mathcal{U}^\circ \varphi_2 = \varphi_2 \vee (\varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2)$. Conversely, the strict until can be expressed using $\mathcal{U}^\circ$ and $\bigcirc$: $\varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2 = \bigcirc(\varphi_1 \mathcal{U}^\circ \varphi_2)$. Thus, it is immaterial whether $\{\bigcirc, \mathcal{U}^\circ\}$ or $\{\mathcal{U}\}$ is taken as the set of primitive temporal operators.

We shall often use the following notation. Let $\mathfrak{M} = \langle S, \mapsto, D, I \rangle$ be a Kripke model, π a path in $\mathfrak{M}$, and $a_1, \dots, a_n$ elements of $D(\pi[0])$; let also $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ be a formula whose free variables are among $x_1, \dots, x_n$ and g be an assignment with $g(x_1) = a_1, \dots, g(x_n) = a_n$. Then, we shall often write $\mathfrak{M}, \pi \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ instead of $\mathfrak{M}, \pi \models^g \varphi(x_1, \dots, x_n)$. This notation is unambiguous since the languages we consider do not contain constants.

Since the satisfaction of atomic formulas at a path depends only on its initial state, we often write $\mathfrak{M}, s \models P(a_1, \dots, a_n)$ instead of $\mathfrak{M}, \pi \models P(a_1, \dots, a_n)$ whenever $\pi[0] = s$. If $\mathfrak{M}, s \models P(a_1, \dots, a_n)$, we also say that $P(a_1, \dots, a_n)$ is true at s in $\mathfrak{M}$.

A formula φ is *satisfied at a path* π in a model $\mathfrak{M}$ (symbolically, $\mathfrak{M}, \pi \models \varphi$) if $\mathfrak{M}, \pi \models^g \varphi$, for every g assigning to the free variables of φ elements of $D(\pi[0])$. A formula φ is *satisfied at a state* s of a model $\mathfrak{M}$ (symbolically, $\mathfrak{M}, s \models \varphi$) if $\mathfrak{M}, \pi \models \varphi$, for every path π with $\pi[0] = s$. A formula φ is *true in a model* $\mathfrak{M}$ (symbolically, $\mathfrak{M} \models \varphi$) if $\mathfrak{M}, s \models \varphi$, for every state s of $\mathfrak{M}$. A formula φ is *valid on a predicate frame* $\mathfrak{F}_D$ (symbolically, $\mathfrak{F}_D \models \varphi$) if φ is true in every model over $\mathfrak{F}_D$. A formula φ is *valid on a frame* $\mathfrak{F}$ (symbolically, $\mathfrak{F} \models \varphi$) if φ is valid on every predicate frame $\langle \mathfrak{F}, D \rangle$.

To simplify the notation, we write $\pi \models \varphi$ and $s \models \varphi$, rather than, respectively, $\mathfrak{M}, \pi \models \varphi$ and $\mathfrak{M}, s \models \varphi$, when $\mathfrak{M}$ is clear from the context.

A formula φ is *satisfiable in a model* $\mathfrak{M} = \langle S, \mapsto, D, I \rangle$ if there exists a path π in $\mathfrak{M}$ and an assignment g assigning to the free variables of φ elements of $D(\pi[0])$ such that $\mathfrak{M}, \pi \models^g \varphi$.

We note that satisfiability of a closed formula in a model does not depend on the assignment: a closed formula φ is satisfiable in a model $\mathfrak{M} = \langle S, \mapsto, D, I \rangle$ if, and only if, there exists a path π in $\mathfrak{M}$ such that $\mathfrak{M}, \pi \models \varphi$.

A formula φ is **QLTL**-*valid* if it is valid on every frame; it is **QLTL**-*satisfiable* if it is satisfiable in some model.

In this paper, we are concerned with the computational complexity of the following computational problems:

- *Validity problem for QLTL*: given a formula φ , determine whether φ is **QLTL**-valid.
- *Satisfiability problem for QLTL*: given a formula φ , determine whether φ is **QLTL**-satisfiable.

We note that φ is valid if, and only if, $\neg\varphi$ is not satisfiable; therefore, validity and satisfiability for **QLTL** are dual problems.

3. Main results

In this section, we prove that satisfiability for **QLTL** is Σ_1^1 -hard — hence, validity for **QLTL** is Π_1^1 -hard — in languages with two individual variables and a single monadic predicate letter. This implies that the set of validities of **QLTL** in such languages is not recursively enumerable, and hence cannot be captured by an effective sound and complete proof system.

3.1. Reduction from the recurrent tiling problem

We proceed by reduction from a Σ_1^1 -complete [Harel, 1986] recurrent tiling problem for $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.⁴ We are given a set of tiles, a tile t being a 1×1 square, with a fixed orientation, whose edges are “colored” with $left(t)$, $right(t)$, $up(t)$, and $down(t)$. A tile type is fully determined by the edge colors. Every tile belongs to one of the finitely many types $T = \{t_0, \dots, t_\alpha\}$, with tiles of each type being in unlimited supply. A *tiling* is an arrangement of tiles on a rectangular $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ grid so that the edge colors of the adjacent tiles match, both horizontally and vertically. We are to determine whether there exists a tiling in which a tile of

⁴D. Harel proves Σ_1^1 -completeness of this problem by one-to-one reduction from a Σ_1^1 -complete set of nondeterministic Turing machines: each machine is mapped to an instance of the recurrent tiling problem, i.e., to a set of tile types.

type t_0 occurs infinitely often in the leftmost column, i.e., whether there exists a function $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow T$ such that, for every $n, m \in \mathbb{N}$,

$$(T_1) \text{ } right(f(n, m)) = left(f(n + 1, m));$$

$$(T_2) \text{ } up(f(n, m)) = down(f(n, m + 1));$$

$$(T_3) \text{ the set } \{m \in \mathbb{N} : f(0, m) = t_0\} \text{ is infinite.}$$

To make the underlying idea clearer, we initially encode the recurrent tiling problem with formulas of two individual variables, without regard for the number of predicate letters used. This encoding is similar to the one used by I. Hodkinson, F. Wolter, and M. Zakharyashev [Hodkinson et al., 2000, Theorem 2] (similar techniques have been used elsewhere [Spaan, 1993; Marx, 1999; Wolter, Zakharyashev, 2001; Kontchakov et al., 2005] and [Gabbay et al., 2003, Theorem 11.1]), but our encoding is different from theirs since we need to prepare the ground for the subsequent reductions, presented in Lemmas 2 and 3, eliminating all the predicate letter bar a single monadic one in the formula obtained in the initial encoding. Thus, the formulas we use in the initial encoding resemble, but are not the same as, those used by I. Hodkinson, F. Wolter, and M. Zakharyashev [Hodkinson et al., 2000, Theorem 2].

To obtain a grid for the tiling, we shall think of the states of the path satisfying a formula as rows, and of elements of the domain of the state satisfying a formula as columns, of the $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ grid. Indeed, a path can be thought of as the set of natural numbers with the immediate successor relation; we shall also write formulas that capture, within the domain of a state, the structure of the naturals with the immediate successor relation. Then, to describe a tiling on thus obtained grid, we use a family $\{P_t : t \in T\}$ of monadic predicate letters corresponding to the tile types: intuitively, $\pi[m] \models P_t(a_n)$ shall mean that the square $\langle n, m \rangle$ is tiled with a tile of type t from T .

Not all the states on the satisfying path shall be part of the tiling: to prepare the ground for subsequent reductions, we create gaps, non-empty equal-sized sequences of states that are not part of the tiling, in the timeline; the states meant to partake in the tiling shall be marked off by a propositional variable p . The size of the gaps, $\alpha + 6$, is proportional to the number of monadic predicate letters we need to eliminate in subsequent reductions.

Thus, let $\triangleleft$ be a binary, P_t , for every $t \in T$, monadic, and p nullary predicate letter.

Let (for brevity, in formulas we write l , r , u , and d instead of *left*, *right*, *up*, and *down*)

$$\begin{aligned}
 A_0 &= p \wedge \Box(p \leftrightarrow \bigcirc^{\alpha+6} p); \\
 A_1 &= \exists x \Box \Diamond(p \wedge P_{t_0}(x)); \\
 A_2 &= \forall x \exists y x \triangleleft y; \\
 A_3 &= \forall x \forall y [x \triangleleft y \rightarrow \Box(p \rightarrow x \triangleleft y)]; \\
 A_4 &= \forall x \Box [p \rightarrow (\bigvee_{t \in T} P_t(x) \wedge \bigwedge_{t' \neq t} (P_t(x) \rightarrow \neg P_{t'}(x))]); \\
 A_5 &= \forall x \forall y \Box \bigwedge_{t \in T} (x \triangleleft y \wedge P_t(x) \rightarrow \bigvee_{r(t)=l(t')} P_{t'}(y)); \\
 A_6 &= \forall x \Box \bigwedge_{t \in T} (P_t(x) \rightarrow \bigcirc^{\alpha+6} \bigvee_{u(t)=d(t')} P_{t'}(x)),
 \end{aligned}$$

and let A be the conjunction of A_0 through A_6 . Notice that the formula A contains only two individual variables.

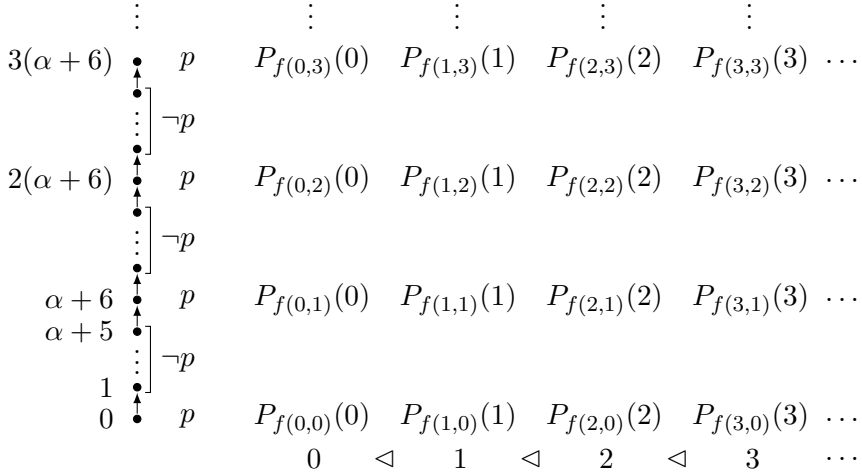


Fig. 1. Model $\mathfrak{M}_0$

Lemma 1. *There exists a recurrent tiling of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ satisfying (T_1) through (T_3) if and only if A is satisfiable.*

Proof. (“if”) Suppose A is satisfiable, i.e., $\mathfrak{M}, \pi \models A$, for some model $\mathfrak{M} = \langle S, \mapsto, D, I \rangle$ and some path π in $\mathfrak{M}$.

By A_0 ,

$$\pi[m] \models p \iff m \equiv 0 \pmod{\alpha + 6}. \quad (1)$$

By A_1 , there exists $a_0 \in D(\pi[0])$ such that $\pi[0] \models P_{t_0}(a_0)$.

By A_2 , there exists an infinite sequence $a_0, a_1, a_2, \dots$ of elements of $D(\pi[0])$ such that

$$a_0 \triangleleft^{I, \pi[0]} a_1 \triangleleft^{I, \pi[0]} a_2 \triangleleft^{I, \pi[0]} \dots$$

By A_3 and (1), for every m such that $m \equiv 0 \pmod{\alpha + 6}$,

$$a_0 \triangleleft^{I, \pi[m]} a_1 \triangleleft^{I, \pi[m]} a_2 \triangleleft^{I, \pi[m]} \dots$$

By A_4 , for every $n \in \mathbb{N}$ and every m such that $m \equiv 0 \pmod{\alpha + 6}$, there exists a unique $t \in T$ such that $\pi[m] \models P_t(a_n)$. Hence, we can define a function $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow T$ by

$$f(n, m) = t \text{ whenever } \pi[m(\alpha + 6)] \models P_t(a_n).$$

Since $\pi \models A_1 \wedge A_5 \wedge A_6$, conditions (T_1) through (T_3) are satisfied for f . Therefore, f is a required function.

(“only if”) Suppose f is a function satisfying conditions (T_1) through (T_3) . We obtain a model satisfying A . Let

- $S = \mathbb{N}$,
- $s \mapsto s' \iff s' = s + 1$,
- $D(n) = \mathbb{N}$, for every $n \in \mathbb{N}$,

and let $\mathfrak{M}_0 = \langle \mathbb{N}, <, D, I \rangle$ be a model, depicted in Figure 1, such that, for every $n \in \mathbb{N}$,

- $n \models p \iff n \equiv 0 \pmod{\alpha + 6}$;
- $n \models k \triangleleft l \iff n \equiv 0 \pmod{\alpha + 6} \text{ and } l = k + 1$;
- $n \models P_t(k) \iff \exists m \in \mathbb{N} (n = m(\alpha + 6) \text{ and } f(m, k) = t)$.

Lastly, let π_0 be the path defined by $\pi_0[n] = n$, for every $n \in \mathbb{N}$.

It is straightforward to check that $\mathfrak{M}_0, \pi_0 \models A$, so we leave this to the reader. ■

Thus, in the proof of the “if” part of Lemma 1, we obtained a grid for the required tiling by treating the states of path π as rows and elements $a_0, a_1, a_2, \dots$ of the domain of the state $\pi[0]$ as columns.

3.2. Elimination of the binary predicate letter

We next eliminate, in a satisfiability-preserving way, all predicate letters of the formula A bar a single monadic one, without increasing the number of individual variables in the resultant formula. We, thus, obtain a reduction from the recurrent tiling problem to satisfiability for **QLTL** in languages with two variables and a single monadic predicate letter.

The elimination of predicate letters is carried out in two steps: first, we simulate the binary letter $\triangleleft$ with two monadic predicate letters; then, we simulate all the predicate letters of thus obtained formula with a single monadic one.

From now on, we assume, for ease of notation, that the formula A contains monadic predicate letters $P_0, \dots, P_\alpha$ — rather than a letters P_t , for each $t \in \{t_0, \dots, t_\alpha\}$ — to refer to the tile types.

First, using a suitable adaptation of the ideas of Kripke's [Kripke, 1962], we eliminate the binary predicate letter $\triangleleft$ of A .

Recall that Kripke's construction [Ibid.] transforms a model $\mathfrak{M}$ satisfying a formula containing a binary predicate letter, and no modal operators, at a state s in such a way that a sufficiently large number of states — more precisely, one state for every pair of elements of the domain of s — accessible from s is added to $\mathfrak{M}$. This idea cannot be applied to **QLTL** in a straightforward manner, for two reasons. First, in Kripke's version, the added states do not form a path, which is needed for **QLTL**. Second, since $\triangleleft$ occurs in the scope of the temporal operator $\Box$ in A , we need to simulate $\triangleleft$ not just at the initial state of a path satisfying A , but at every state affecting the satisfaction of A .

We resolve these difficulties by working the model $\mathfrak{M}_0$ defined in the proof of Lemma 1 and by exploiting its properties: the domains of the states of $\mathfrak{M}_0$ are all equal, and the interpretation of $\triangleleft$ is the same at every state of $\mathfrak{M}_0$ affecting the satisfaction of A .

Let $P_{\alpha+1}$ and $P_{\alpha+2}$ be monadic predicate letters distinct from $P_0, \dots, P_\alpha$ and from each other, and let $\cdot'$ be the function substituting

$$\Diamond(P_{\alpha+1}(x) \wedge P_{\alpha+2}(y)), \quad \text{for } x \triangleleft y.$$

Lemma 2. *There exists a recurrent tiling of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ satisfying (T_1) through (T_3) if and only if A' is satisfiable.*

Proof. (“if”) Suppose $\mathfrak{M}, \pi \models A'$, for some model $\mathfrak{M} = \langle S, \mapsto, D, I \rangle$ and some path π . Define an interpretation I' on the frame $\langle S, \mapsto, D \rangle$ so that, for every $s \in S$,

$$I'(s, \triangleleft) = \{ \langle a, b \rangle : \mathfrak{M}, s \models \Diamond(P_{\alpha+1}(a) \wedge P_{\alpha+2}(b)) \}$$

and, for every $s \in S$ and every $Q \in \{p, P_0, \dots, P_\alpha\}$,

$$I'(s, Q) = I(s, Q).$$

and let $\mathfrak{M}' = \langle S, \mapsto, D, I' \rangle$. Then, $\mathfrak{M}', \pi \models A$. Hence, by Lemma 1, there exists a recurrent tiling of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ satisfying (T_1) through (T_3) .

(“only if”) Suppose f is a function satisfying conditions (T_1) through (T_3) . Let $\mathfrak{M}_0$ and π_0 be, respectively, the model and the path defined in the proof of the “only if” part of Lemma 1. As we have seen, $\mathfrak{M}_0, \pi_0 \models A$. We use $\mathfrak{M}_0$ to obtain a model satisfying A' .

Let σ be the infinite sequence

$$0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

and let σ_k , for each $k \in \mathbb{N}$, be the k th element of σ .

Let $\mathfrak{M}'_0 = \langle \mathbb{N}, \mapsto, D, I' \rangle$ be a model such that, for every $n, c \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}'_0, n \models P_{\alpha+1}(c) &\iff \exists m \in \mathbb{N} (n = m(\alpha + 6) \text{ and } c = \sigma_m); \\ \mathfrak{M}'_0, n \models P_{\alpha+2}(c) &\iff \exists m \in \mathbb{N} (n = m(\alpha + 6) \text{ and } c = \sigma_m + 1), \end{aligned}$$

and for every $n \in \mathbb{N}$ and every $S \in \{p, P_0, \dots, P_\alpha\}$,

$$I'(n, S) = I(n, S).$$

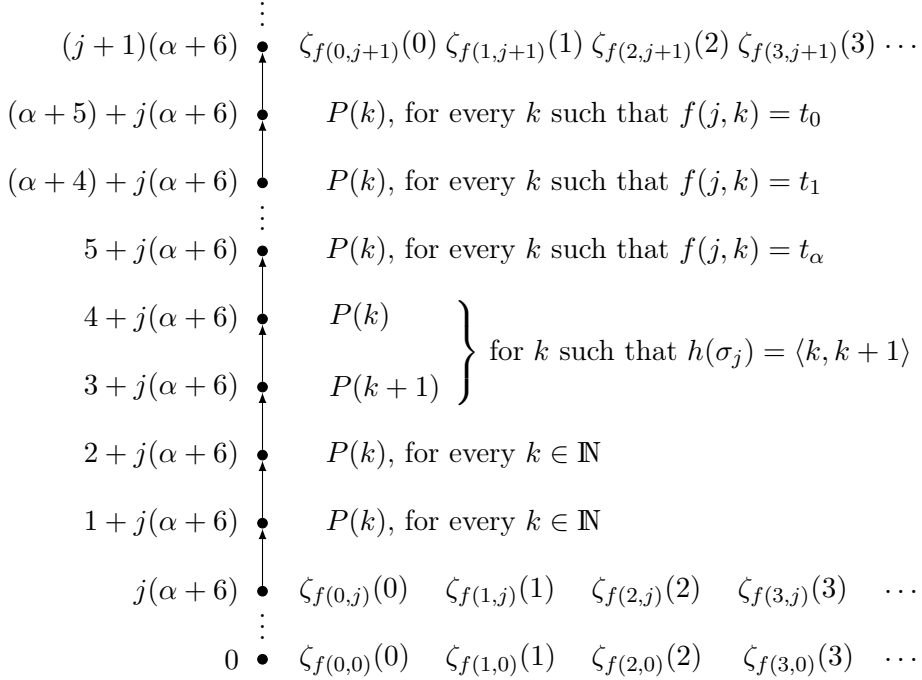
We show that $\mathfrak{M}'_0, \pi_0[0] \models A'$.

Since $\mathfrak{M}_0, \pi_0[0] \models A$, it suffices to prove, for every $m, a, b \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{M}_0, m(\alpha + 6) \models a \triangleleft b \iff \mathfrak{M}'_0, m(\alpha + 6) \models \Diamond(P_{\alpha+1}(a) \wedge P_{\alpha+2}(b)).$$

Assume $\mathfrak{M}_0, m(\alpha + 6) \models a \triangleleft b$. Then, $b = a + 1$, by definition of $\mathfrak{M}_0$. Choose $k \in \mathbb{N}$ so that $m \leq k$ and $\sigma_k = a$; by definition of σ , such a number k certainly exists. Then, $\mathfrak{M}'_0, k(\alpha + 6) \models P_{\alpha+1}(a) \wedge P_{\alpha+2}(b)$, by definition of $\mathfrak{M}'_0$. Hence, $\mathfrak{M}'_0, m(\alpha + 6) \models \Diamond(P_{\alpha+1}(a) \wedge P_{\alpha+2}(b))$.

Conversely, assume $\mathfrak{M}'_0, m(\alpha + 6) \models \Diamond(P_{\alpha+1}(a) \wedge P_{\alpha+2}(b))$, i.e., $\mathfrak{M}'_0, v \models P_{\alpha+1}(a) \wedge P_{\alpha+2}(b)$, for some $v \geq m(\alpha + 6)$. The definition of $\mathfrak{M}'_0$ implies that $v = k(\alpha + 6)$, for some $k \geq m$. Hence, by definition of $\mathfrak{M}'_0$, both $a = \sigma_k$ and $b = \sigma_k + 1$. Hence, $b = a + 1$. Therefore, $\mathfrak{M}_0, m(\alpha + 6) \models a \triangleleft b$, by definition of $\mathfrak{M}_0$. ■


 Fig. 2. Model $\mathfrak{M}_0^*$

3.3. Elimination of monadic predicate letters

We lastly simulate the occurrences of predicate letters $p, P_0, \dots, P_{\alpha+2}$ in A' with a single monadic letter P , without increasing the number of individual variables in the resultant formula. We, thus, obtain a reduction of the recurrent tiling problem to satisfiability for **QLTL** with formulas containing two individual variables and a single monadic predicate letter P .

Let P be a monadic predicate letter distinct from the letters $P_0, \dots, P_{\alpha+2}$. Define

$$\theta = \forall x \neg P(x) \wedge \bigcirc \forall x P(x) \wedge \bigcirc^2 \forall x P(x),$$

and, for every $k \in \{0, \dots, \alpha+2\}$,

$$\begin{aligned} \zeta_k(x) &= \theta \wedge \bigcirc^{\alpha+5-k} P(x); \\ \zeta_k(y) &= \theta \wedge \bigcirc^{\alpha+5-k} P(y). \end{aligned}$$

Let $\cdot^*$ be the function replacing

- p with θ ;
- $P_k(x)$ with $\zeta_k(x)$, for each $k \in \{0, \dots, \alpha + 2\}$;
- $P_k(y)$ with $\zeta_k(y)$, for each $k \in \{0, \dots, \alpha + 2\}$,

and let A^* be the result of applying the function $\cdot^*$ to A' .

To obtain a model satisfying A^* , provided a recurrent tiling exists, we use the model $\mathfrak{M}'_0$ defined in the proof of Lemma 2. Call a state s of $\mathfrak{M}'_0$ a *tiling* state if $\mathfrak{M}'_0, s \models p$ (recall that these are the states corresponding to the tiling) and a *gap* state otherwise. We use gap states to simulate the interpretation of letters $p, P_0, \dots, P_{\alpha+2}$ at a tiling state of $\mathfrak{M}'_0$. The truth of $P_k(a)$, for every $k \in \{0, \dots, \alpha + 2\}$ and every $a \in \mathbb{N}$, at a tiling state s is simulated by making $P(a)$ true at the gap state $k + 1$ steps away from the next tiling state. The interpretation of the nullary letter p at a tiling state s is simulated by making P universally true at the two gap states immediately succeeding s . As we shall show, this pattern of two consecutive states making P universally true does not occur anywhere else — hence, it marks off exactly the tiling states.

Lemma 3. *There exists a recurrent tiling of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ satisfying (T_1) through (T_3) if and only if A^* is satisfiable in **QLTL**.*

Proof. (“if”) Suppose $\mathfrak{M}, \pi \models A^*$, for some model $\mathfrak{M} = \langle S, \mapsto, D, I \rangle$ and some path π . Define an interpretation I' on the frame $\langle S, \mapsto, D \rangle$ so that, for every $s \in S$ and every $k \in \{0, \dots, \alpha + 2\}$,

$$I'(s, P_k) = \{ \langle a \rangle : \mathfrak{M}, s \models \zeta_k(a) \}$$

and, for every $s \in S$,

$$I'(s, p) = \begin{cases} \{ \langle \rangle \} & \text{if } \mathfrak{M}, s \models \theta; \\ \emptyset & \text{if } \mathfrak{M}, s \not\models \theta, \end{cases}$$

and let $\mathfrak{M}' = \langle S, \mapsto, D, I' \rangle$. Then, $\mathfrak{M}', \pi \models A'$. Hence, by Lemma 2, there exists a recurrent tiling of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ satisfying (T_1) through (T_3) .

(“only if”) Suppose f is a function satisfying conditions (T_1) through (T_3) . Let $\mathfrak{M}'_0$ and π_0 be, respectively, the model and the path defined in the “only if” part of the proof of Lemma 2. As we have seen, $\mathfrak{M}'_0, \pi_0[0] \models A'$. We use $\mathfrak{M}'_0$ to obtain a model satisfying A^* .

Let $\langle \mathbb{N}, \mapsto, D \rangle$ be the frame underlying $\mathfrak{M}'_0$, i.e. let $D(s) = \mathbb{N}$, for every $s \in \mathbb{N}$. Define a model $\mathfrak{M}^*_0 = \langle \mathbb{N}, \mapsto, D, I^* \rangle$ so that, for every $s \in \mathbb{N}$,

- if $s \equiv 0 \pmod{\alpha + 6}$, then $I^*(s, P) = \emptyset$;
- if $s \equiv 1 \pmod{\alpha + 6}$ or $s \equiv 2 \pmod{\alpha + 6}$, then $I^*(s, P) = \mathbb{N}$;
- if $s = j + n(\alpha + 6)$, for some $j \in \{3, \dots, \alpha + 5\}$ and some $n \in \mathbb{N}$, then for every $a \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{M}_0^*, s \models P(a) \iff \mathfrak{M}'_0, n(\alpha + 6) \models P_{\alpha+5-j}(a).$$

Let π_0^* be a path with $\pi_0^*[0] = s_0$. It is straightforward to check that $\mathfrak{M}_0^*, \pi_0^* \models A^*$, so we leave this to the reader.

Thus, A^* is satisfiable. ■

We, therefore, obtain the following:

Theorem 1. *Satisfiability for QLTL is Σ_1^1 -hard in languages with two individual variables and a single monadic predicate letter.*

Proof. Immediate from Lemma 3. ■

As we have observed in Section 2, satisfiability and validity for QLTL are dual problems. Hence, we have also proven the following:

Corollary 1. *Validity for QLTL is Π_1^1 -hard in languages with two individual variables and a single monadic predicate letter.*

Thus, QLTL is not recursively enumerable even in languages with only two variables and only a single monadic predicate letter. Therefore, even for such a fragment of QLTL, no effective sound and complete proof system exists.

In the proofs of this section, we have never relied on the domains of the predicate frames we have worked with being properly increasing. We have, therefore, also established the following:

Theorem 2. *Satisfiability for QLTL over predicate frames with constant domains is Σ_1^1 -hard in languages with two individual variables and a single monadic predicate letter. Validity for QLTL over predicate frames with constant domains is Π_1^1 -hard in languages with two individual variables and a single monadic predicate letter.*

4. QCTL and QATL

Since **QCTL** is neither more nor less expressive than **QLTL**, an undecidability result for either of these logics does not automatically imply an analogous result for the other logic. The formulas used in Section 3 were, however, chosen so that a simple translation, presented in this section, effectively embeds the undecidable fragment of **QLTL** obtained in Section 3 into a fragment of **QCTL**. Since the translation does not affect either the individual variables or the predicate letters of a formula, we obtain a result analogous to Theorem 2 for **QCTL**.

Recall that the main difference between **QCTL** and **QLTL** (just as between their propositional bases **CTL** and **LTL** [Huth, Ryan, 2004]) is that in **QCTL** formulas are evaluated at states rather than at paths, as in **QLTL**, of Kripke models. The language of **QCTL** contains, in place of formulas $(\varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2)$, formulas $\mathcal{E}(\varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2)$ and $\mathcal{A}(\varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2)$ (“existential until” and “universal until”, respectively; the quantifiers $\mathcal{E}$ and $\mathcal{A}$ refer to the paths beginning with the state at which the formula is evaluated). The satisfaction conditions for these formulas are (here, s is a state of a Kripke model)

- $\mathfrak{M}, s \models \mathcal{E}(\varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2) \Leftrightarrow$ there exists a path π with $\pi[0] = s$ such that $\mathfrak{M}, \pi[i] \models \varphi_2$, for some $i > 0$, and $\mathfrak{M}, \pi[j] \models \varphi_1$, for every j with $0 < j < i$;
- $\mathfrak{M}, s \models \mathcal{A}(\varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2) \Leftrightarrow$ for every π with $\pi[0] = s$, both $\mathfrak{M}, \pi[i] \models \varphi_2$, for some $i > 0$, and $\mathfrak{M}, \pi[j] \models \varphi_1$, for every j with $0 < j < i$.

The satisfaction clauses for the other formulas are similar to those for **QLTL** (with paths replaced by states). By analogy with **QLTL**, the other temporal operators can be defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\bigcirc\varphi &= \mathcal{E}(\perp \mathcal{U} \varphi); & \mathcal{A}\bigcirc\varphi &= \mathcal{A}(\perp \mathcal{U} \varphi); \\ \mathcal{E}\Diamond\varphi &= \varphi \vee \mathcal{E}(\top \mathcal{U} \varphi); & \mathcal{A}\Diamond\varphi &= \varphi \vee \mathcal{A}(\top \mathcal{U} \varphi); \\ \mathcal{E}\Box\varphi &= \neg\mathcal{E}\Diamond\neg\varphi; & \mathcal{A}\Box\varphi &= \neg\mathcal{A}\Diamond\neg\varphi. \end{aligned}$$

Now, if we replace in the formulas defined in Section 3 $\Diamond$ with $\mathcal{E}\Diamond$, $\Box$ with $\mathcal{A}\Box$, and $\bigcirc$ with $\mathcal{A}\bigcirc$, then we readily obtain results for **QCTL** analogous to those obtained in Section 3 for **QLTL**. This observation yields the following result:

Theorem 3. *Satisfiability for **QCTL** over predicate frames with both expanding and constant domains is Σ_1^1 -hard in languages with two individual variables and a single monadic predicate letter. Validity for **QCTL** over predicate frames with both expanding and constant domains is Π_1^1 -hard in languages with two individual variables and a single monadic predicate letter.*

The language of quantified alternating-time temporal logic **QATL** contains — in place of the two path quantifiers, $\mathcal{E}$ and $\mathcal{A}$, of **QCTL** — path quantifiers parametrised by groups of agents; the so obtained formulas are evaluated over concurrent game structures [Alur et al., 2002]. The **QCTL** path quantifiers $\mathcal{E}$ and $\mathcal{A}$ can, however, be expressed [Ibid.] as **QATL** path quantifiers parametrised by, respectively, the empty set of agents and the set of all the agents in the language. Such a replacement of path quantifiers gives us a recursive embedding of **QCTL** into **QATL** that affects neither the variables nor the predicate letters of formulas. Hence, from Theorem 3, we obtain the following result:

Theorem 4. *Satisfiability for **QATL** over predicate frames with both expanding and constant domains is Σ_1^1 -hard in languages with two individual variables and a single monadic predicate letter. Validity for **QATL** over predicate frames with both expanding and constant domains is Π_1^1 -hard in languages with two individual variables and a single monadic predicate letter.*

Obviously, Theorems 3 and 4 extend to the more expressive logics **QCTL**^{*} and **QATL**^{*}, since **QCTL** and **QATL** are fragments of, respectively, **QCTL**^{*} and **QATL**^{*} obtained by disallowing formulas of certain form.

5. Conclusion

We conclude with mentioning directions for future research.

First, an important open problem is identification of the minimal undecidable fragments of **QLTL** over finite domains (it is known that **QLTL** over finite domains behaves differently from **QLTL** over arbitrary domains [Hodkinson et al., 2000, Theorem 25]). The reduction used in the present paper essentially relied on the domains of the states to be infinite; therefore, the construction we used is not applicable to **QLTL** over finite domains. First-order logics over finite domains are usually computationally harder than logics over arbitrary domains [Trakhtenbrot, 1953; Libkin, 2004], even in languages with a small number of individual variables [Rybakov, Shkatov, 2019b] — is this true for **QLTL**? Monodic fragments of **QLTL** over finite domains are known to be decidable [Hodkinson et al., 2000, Theorem 26] — what are the minimal undecidable fragments?

Second, similar question arise for **QLTL** over structures with a finite set of states. Some undecidability results for this logic are known [Cerrito et al., 1999], but the gap between the decidable and the undecidable remains quite wide. We do know that, in structures with finite sets of states, we can model finite domains [Rybakov, Shkatov, 2020c; Rybakov, Shkatov, 2018c, Lemma 3.3]; while we would, in such a setting, be able to model all the predicate letters in

the language with a single monadic one, the number of variables needed would be quite large.

The last, and perhaps most technically challenging, direction for future research is the study of similar questions in the context of **QLTL** based on intuitionistic [Mints, 2000], rather than classical logic. Intuitionistic modal and temporal logics [Fischer Servi, 1977; Fischer Servi, 1980; Fischer Servi, 1984; Davoren, 2009], which formalise constructive modal and temporal reasoning, have been found of particular interest in computer science [Simpson, 1994; Davies, Pfenning, 2001; de Paiva et al., 2004; Yuse, Igarashi, 2006; Brewka et al., 2011; Davies, 2017]. Recently, motivated by applications in computer science, propositional linear-time temporal logics with an intuitionistic base have been proposed and studied [Maier, 2004; Boudou et al., 2017; Fernández-Duque, 2018; Diéguez et al., 2018; Boudou et al., 2019; Balbiani et al., 2019]. While a number of techniques for studying decidability and complexity of intuitionistic modal and temporal logics are known [Ono, 1977; Simpson, 1994; Grefe, 1998; Wolter, Zakharyashev, 1997; Wolter, Zakharyashev, 1999; Alechina, Shkatov, 2006; Gabbay et al., 2003, Chapter 10], no research, as far as we know, has been done on first-order temporal intuitionistic logic. If this direction is pursued, however, we expect to be able to draw on extensive research into computational properties of various fragments of both propositional [Nishimura, 1960; Rybakov, 2006; Rybakov, 2008] and first-order [Maslov et al., 1965; Mints, 1968; Gabbay, 1981; Kontchakov et al., 2005; Rybakov, Shkatov, 2019c; Rybakov, Shkatov, 2021b] intuitionistic logics.

Acknowledgements. The work on this paper, carried out at Tver State University during the second author’s visit, has been supported by Russian Science Foundation, project 21-18-00195.

References

- Abadi, 1989 – Abadi, M. “The power of temporal proofs”, *Theoretical Computer Science*, 1989, Vol. 65, No. 1, pp. 35–83.
- Abiteboul, 1996 – Abiteboul, S., Herr, L., Van den Bussche, J. “Temporal versus first-order logic to query temporal databases”, in: *Proceedings of the 15th International Conference on Principles of Databases (PODS ’96)*, 1996.
- Ajspur et al., 2013 – Ajspur, M., Goranko, V., Shkatov, D. “Tableau-based decision procedure for the multiagent epistemic logic with all coalitional operators for common and distributed knowledge”, *Logic Journal of the IGPL*, 2013, Vol. 21, No. 3, pp. 407–437.
- Alechina, Shkatov, 2006 – Alechina, N., Shkatov, D. “A general method for proving decidability of intuitionistic modal logics”, *Journal of Applied Logic*, 2006, Vol. 4, No. 3, pp. 219–230.

- Alur et al., 2002 – Alur, R., Henzinger, T.A., Kuperman, O. “Alternating-Time temporal logic”, *Journal of ACM*, 2002, Vol. 49, No. 5, pp. 672–713.
- Andréka et al., 1979 – Andréka, H., Németi, I., Sain, I. “Completeness problems in verification of programs and program schemes”, in: *Mathematical Foundations of Computer Science 1979. MFCS 1979*, ed. by J. Bečvář, Vol. 74 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 1979.
- Artale, Franconi, 2000 – Artale, A., Franconi, E. “A survey of temporal extensions of description logics”, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 2000, Vol. 30, pp. 171–210.
- Artale et al., 2004 – Artale, A., Kontchakov, R., Kovtunova, A., Ryzhikov, V., Wolter, F., Zakharyashev, M. “First-order rewritability of ontology-mediated queries in linear temporal logic”, 2020. Preprint available at <https://arxiv.org/abs/2004.07221>
- Artemov, Dzhaparidze, 1990 – Artemov, S., Dzhaparidze, G. “Finite Kripke models and predicate logics of provability”, *The Journal of Symbolic Logic*, 1990, Vol. 55, No. 3, pp. 1090–1098.
- Baader et al., 2015 – Baader, F., Borgwardt, S., Lippmann, M. “Temporal query entailment in the description logic SHQ”, *Journal of Web Semantics*, 2015, Vol. 33, pp. 71–93.
- Baader et al., 2012 – Baader, F., Ghilardi, S., Lutz, C. “Ltl over description logic axioms”, *ACM Transactions on Computational Logic*, 2012, Vol. 13, No. 3, Article 21.
- Balbani et al., 2019 – Balbani, P., Boudou, J., Diéguez, M., Fernández-Duque, D. “Intuitionistic linear temporal logics”, 2019, *ACM Transactions on Computational Logic*, Vol. 21, Article 14.
- Börger et al., 1997 – Börger, E., Grädel, E., Gurevich, Y. *The Classical Decision Problem*. Springer, 1997.
- Borgwardt et al., 2015 – Borgwardt, S., Lippmann, M., Thost, V. “Temporalizing rewritable query languages over knowledge bases”, *Journal of Web Semantics*, 2015, Vol. 33, pp. 50–70.
- Boudou et al., 2017 – Boudou, J., Diéguez, M., Fernández-Duque D. “A decidable intuitionistic temporal logic”, in: *Proceedings of the 26th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL’17)*, 2017, Vol. 82, pp. 14:1–14:17.
- Boudou et al., 2019 – Boudou, J., Diéguez, M., Fernández-Duque, D., Romero F. “Axiomatic systems and topological semantics for intuitionistic temporal logic”, in: F. Calimeri, N. Leone, M. Manna (eds.), *Logics in Artificial Intelligence. JELIA 2019*, Vol. 11468 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2019, pp. 763–777.
- Bourgaux et al., 2019 – Bourgaux, C., Koopmann, P., Turhan, A.-Y. “Ontology-mediated query answering over temporal and inconsistent data”, *Semantic Web Journal*, 2019, Vol. 10, pp. 475–521.

- Braüner, Ghilardi, 2007 – Braüner, T., Ghilardi, S. “First-order modal logic”, in: P. Blackburn, J. Van Benthem, F. Wolter (eds.), *Handbook of Modal Logic*, Vol. 3 of *Studies in Logic and Practical Reasoning*. Elsevier, 2007, pp. 549–620.
- Brewka et al., 2011 – Brewka, G., Eiter, T., Truszczyński, M. “Answer set programming at a glance”, *Communications of the ACM*, 2011, Vol. 54, No. 12, pp. 92–103.
- Cerrito et al., 1999 – Cerrito, S., Mayer, M.C., Praud, S. “First order linear temporal logic over finite time structures”, in: H. Ganzinger, D. McAllester, A. Voronkov (eds.), *Logic for Programming and Automated Reasoning. LPAR 1999*, Vol. 1705 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 1999.
- Chagrov, Rybakov, 2003 – Chagrov, A., Rybakov, M. “How many variables does one need to prove PSPACE-hardness of modal logics?” in: P. Balbiani, N.-Y. Suzuki, F. Wolter, M. Zakharyashev (eds.), *Advances in Modal Logic*, Vol. 4. London: King’s College Publications, 2003, pp. 71–82.
- Chomicki, 1994 – Chomicki, J. “Temporal query languages: A survey”, in: D.M. Gabbay and H.J. Ohlbach (eds.), *Temporal Logic. ICTL 1994*, Vol. 827 of *Lecture Notes in Computer Science (Lecture Notes in Artificial Intelligence)*. Springer, 1994.
- Chomicki, Niwinski, 1993 – Chomicki, J., Niwinski, D. “On the feasibility of checking temporal integrity constraints”, *Journal of Computer and System Sciences*, 1995, Vol. 51, No. 3, pp. 523–535.
- Church, 1936 – Church, A. “A note on the ‘Entscheidungsproblem’”, *The Journal of Symbolic Logic*, 1936, Vol. 1, pp. 40–41.
- Clarke et al., 2000 – Clarke, E.M., Grumberg, O., Peled, D.A. *Model Checking*. Cambridge: MIT Press, 2000.
- Davies, Pfenning, 2001 – Davies, R., Pfenning, F. “A modal analysis of staged computation”, *Journal of the ACM*, 2001, Vol. 48, No. 3, pp. 555–604.
- Davies, 2017 – Davies, R. “A temporal logic approach to binding-time analysis”, *Journal of the ACM*, 2017, Vol. 64, No. 1, pp. 1–45.
- Davoren, 2009 – Davoren, J.M. “On intuitionistic modal and tense logics and their classical companion logics: Topological semantics and bisimulations”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 2009, Vol. 161, No. 3, pp. 349–367.
- de Paiva et al., 2004 – de Paiva, V., Goré, R., Mendler, M. “Modalities in constructive logics and type theories”, *Journal of Logic and Computation*, 2004, Vol. 14, pp. 439–446.
- Demri et al., 2016 – Demri, S., Goranko, V., Lange, M. *Temporal Logics in Computer Science: Finite-state systems*, Vol. 58 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 2016.
- Diéguez et al., 2018 – Diéguez, M., Fernández-Duque, D. “An intuitionistic axiomatization of ‘eventually’” in: G. Metcalfe, G. Bezhanishvili, G. D’Agostino and T. Studer (eds.), *Advances in Modal Logic*, Vol. 12, College Publications, 2018, pp. 199–218.
- Emerson, 1990 – Emerson, E.A. “Temporal and modal logic”, in: J. van Leeuwen (ed.), *Handbook of Theoretical Computer Science*, 1990, Vol. B, pp. 995–1072.

- Emerson, Halpern, 1985 – Emerson, E.A., Halpern, J. “Decision procedures and expressiveness in temporal logic of branching time”, *Journal of Computer and System Sciences*, 1985, Vol. 30, No. 1, pp. 1–24.
- Enderton, 2011 – Enderton, H.B. *Computability Theory: An Introduction to Recursion Theory*. New York: Academic Press, 2011.
- Fagin et al., 1995 – Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y., Vardi, M.Y. *Reasoning About Knowledge*. Cambridge: MIT Press, 1995.
- Fernández-Duque, 2018 – Fernández-Duque, D. “The intuitionistic temporal logic of dynamical systems”, *Logical Methods in Computer Science*, 2018, Vol. 14, No. 3, pp. 1–35.
- Fischer, Ladner, 1979 – Fischer, M., Ladner, R.E. “Propositional dynamic logic of regular programs”, *Journal of Computer and System Sciences*, 1979, Vol. 18, pp. 194–211.
- Fischer Servi, 1977 – Fischer Servi, G. “On modal logic with an intuitionistic base”, *Studia Logica*, 1977, Vol. 36, No. 3, pp. 141–149.
- Fischer Servi, 1980 – Fischer Servi, G. “Semantics for a class of intuitionistic modal calculi”, in: M.L. Dalla Chiara (ed.), *Italian Studies in the Philosophy of Science*, pp. 59–72. Reidel; Dordrecht, 1980.
- Fischer Servi, 1984 – Fischer Servi, G. “Axiomatizations for some intuitionistic modal logics”, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 1984, Vol. 42, pp. 179–194.
- Fitting, Mendelsohn, 1998 – Fitting, M., Mendelsohn, R.L. *First-Order Modal Logic*, Vol. 277 of *Synthese Library*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- Gabbay, 1981 – Gabbay, D. *Semantical Investigations in Heyting’s Intuitionistic Logic*. Netherlands: D. Reidel, 1981.
- Gabbay et al., 1994 – Gabbay, D., Hodkinson, I., Reynolds, M. *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects, Volume 1*, Vol. 28 of *Oxford Logic Guides*. New York: Oxford University Press, 1994.
- Gabbay et al., 2003 – Gabbay, D., Kurucz, A., Wolter, F., Zakharyashev, M. *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*, Vol. 148 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier, 2003.
- Gabbay, Shehtman, 1993 – Gabbay, D., Shehtman, V. “Undecidability of modal and intermediate first-order logics with two individual variables”, *The Journal of Symbolic Logic*, 1993, Vol. 58, No. 3, pp. 800–823.
- Gabbay et al., 2009 – Gabbay, D., Shehtman, V., Skvortsov, D. *Quantification in Nonclassical Logic, Volume 1*, Vol. 153 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier, 2009.
- Garson, 2001 – Garson, J.W. Quantification in modal logic. in: D.M. Gabbay and F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 3, pp. 267–323. Springer; Dordrecht, 2001.
- Goldblatt, 1992 – Goldblatt, R. *Logics of Time and Computation*, Vol. 7 of *CSLI Lecture Notes*. Second edition. Stanford: Center for the Study of Language and Information, 1992.

- Goldblatt, 2011 – Goldblatt, R. *Quantifiers, Propositions and Identity: Admissible Semantics for Quantified Modal and Substructural Logics*. Lecture Notes in Logic. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- Goranko, Shkatov, 2008 – Goranko, V., Shkatov, D. “Tableau-based decision procedures for the multi-agent epistemic logic with operators of common and distributed knowledge”, in: *Proceedings of the Sixth International Conference on Software Engineering and Formal Methods*, IEEE Press, 2008, pp. 237–246.
- Goranko, Shkatov, 2009a – Goranko, V., Shkatov, D. “Tableau-based decision procedure for full coalitional multiagent temporal-epistemic logic of linear time”, in: S. Artemov and A. Nerode (eds.), *International Symposium on Logical Foundations of Computer Science*, 2009, pp. 197–213.
- Goranko, Shkatov, 2009b – Goranko, V., Shkatov, D. “Tableau-based procedure for deciding satisfiability in the full coalitional multiagent epistemic logic”, in: C. Sierra, C. Castelfranchi, K.S. Decker, J. Sichman (eds.), *Proceedings of 8th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 09)*, 2009, pp. 969–976.
- Goranko, Shkatov, 2009c – Goranko, V., Shkatov, D. “Tableau-based decision procedure for the full coalitional multiagent temporal-epistemic logic of branching time”, in: *Proceedings of Formal Approaches to Multi-Agent Systems 2009*, 2009.
- Goranko, Shkatov, 2009d – Goranko, V., Shkatov, D. “Tableau-based decision procedures for logics of strategic ability in multiagent systems”, *ACM Transactions on Computational Logic*, 2009, Vol. 11, No. 1, pp. 3–51.
- Goranko, van Drimmelen, 2006 – Goranko, V., Shkatov, D. “Complete axiomatization and decidability of the alternating-time temporal logic”, *Theoretical Computer Science*, 2006, Vol. 353, No. 1–3, pp. 93–117.
- Grädel et al., 1997 – Grädel E., Kolaitis, P.G., Vardi, M.Y. “On the decision problem for two-variable first-order logic”, *Bulletin of Symbolic Logic*, 1997, Vol. 3, No. 1, pp. 53–69.
- Grefe, 1998 – Grefe, C. “Fischer Servi’s intuitionistic modal logic has the finite model property”, in: M. Kracht, M. de Rijke, H. Wansing, M. Zakharyashev (eds.), *Advances in Modal Logic*, Vol. 1, CSLI Publications, 1998, pp. 85–98.
- Halpern, 1995 – Halpern, J.Y. “The effect of bounding the number of primitive propositions and the depth of nesting on the complexity of modal logic”, *Artificial Intelligence*, 1995, Vol. 75, No. 2, pp. 361–372.
- Halpern, Vardi, 1998 – Halpern, J.Y., Vardi, M.Y. “The complexity of reasoning about knowledge and time I: Lower bounds”, *Journal of Computer and System Sciences*, 1989, Vol. 38, No. 1, pp. 195–237.
- Harel, 1986 – Harel, D. “Effective transformations on infinite trees, with applications to high undecidability, dominoes, and fairness”, *Journal of the ACM*, 1986, Vol. 33, pp. 224–248.
- Hodkinson et al., 2003 – Hodkinson, I., Kontchakov, R., Kurucz, A., Wolter, F., Zakharyashev, M. “On the computational complexity of decidable fragments of

- first-order linear temporal logics”, in: *10th International Symposium on Temporal Representation and Reasoning 2003 and Fourth International Conference on Temporal Logic. Proceedings*. IEEE, 2003, pp. 91–98.
- Hodkinson et al., 2000 – Hodkinson, I., Wolter, F., Zakharyashev, M. “Decidable fragments of first-order temporal logics”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 2000, Vol. 106, pp. 85–134.
- Hodkinson et al., 2001 – Hodkinson, I., Wolter, F., Zakharyashev, M. “Monodic fragments of first-order temporal logics: 2000–2001 A.D.”, in: R. Nieuwenhuis and A. Voronkov (eds.), *Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning. LPAR 2001*, Vol. 2250 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2001, pp. 1–23.
- Hughes, Cresswell, 1996 – Hughes, G.E., Cresswell, M.J. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1996.
- Huth, Ryan, 2004 – Huth, M., Ryan, M. *Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems*, second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- Kontchakov et al., 2005 – Kontchakov, R., Kurucz, A., Zakharyashev, M. “Undecidability of first-order intuitionistic and modal logics with two variables”, *Bulletin of Symbolic Logic*, 2005, Vol. 11, No. 3, pp. 428–438.
- Kripke, 1962 – Kripke, S. “The undecidability of monadic modal quantification theory”, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1962, Vol. 8, pp. 113–116.
- Libkin, 2004 – Libkin, L. *Elements of Finite Model Theory*. Springer, 2004.
- Maier, 2004 – Maier, P. “Intuitionistic LTL and a new characterization of safety and liveness”, in: J. Marcinkowski, A. Tarlecki (eds.), *Proceedings of the Computer Science Logic 18th International Workshop (CSL’04)*, Vol. 3210 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2004, pp. 295–309.
- Manna, Pnueli, 1992 – Manna, Z., Pnueli, A. *The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems: Specification*. Springer, 1992.
- Manna, Pnueli, 1995 – Manna, Z., Pnueli, A. *Temporal Verification of Reactive Systems: Safety*. Springer, 1995.
- Marx, 1999 – Marx, M. “Complexity of products of modal logics”, *Journal of Logic and Computation*, 1999, Vol. 9, No. 2, pp. 197–214.
- Maslov et al., 1965 – Maslov, S., Mints, G., Orevkov, V. “Unsolvability in the constructive predicate calculus of certain classes of formulas containing only monadic predicate variables”, *Soviet Mathematics Doklady*, 1965, Vol. 6, pp. 918–920.
- Merz, 1992 – Merz, S. “Decidability and incompleteness results for first-order temporal logics of linear time”, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 1992, Vol. 2, No. 2, pp. 139–156.
- Mints, 1968 – Mints, G. “Some calculi of modal logic”, *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, 1968, Vol. 98, No. 88–111. (In Russian)
- Mints, 2000 – Mints, G. *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2000.

- Mortimer, 1975 – Mortimer, M. “On languages with two variables”, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1975, pp. 135–140.
- Nishimura, 1960 – Nishimura, I. “On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus”, *The Journal of Symbolic Logic*, 1960, Vol. 25, No. 4, pp. 327–331.
- Ono, 1977 – Ono, H. “On some intuitionistic modal logics”, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 1977, Vol. 13, No. 3, pp. 687–722.
- Pnueli, 1986 – Pnueli, A. “Applications of temporal logic to the specification and verification of reactive systems: A survey of current trends”, in: J.W. de Bakker, W.P. de Roever, G. Rozenberg (eds.), *Current Trends in Concurrency*, Vol. 224 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 1986.
- Rogers, 1967 – Rogers, H. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill, 1967.
- Rybakov, 2006 – Rybakov, M. “Complexity of intuitionistic and Visser’s basic and formal logics in finitely many variables”, in: G. Governatori, I.M. Hodkinson, Y. Venema (eds.), *Advances in Modal Logic 6*. Stanford: College Publications, 2006, pp. 393–411.
- Rybakov, 2008 – Rybakov, M. “Complexity of intuitionistic propositional logic and its fragments”, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2008, Vol. 18, No. 2–3, pp. 267–292.
- Rybakov, Shkatov, 2018a – Rybakov, M., Shkatov, D. “Complexity and expressivity of propositional dynamic logics with finitely many variables”, *Logic Journal of the IGPL*, 2018, Vol. 26, No. 5, pp. 539–547.
- Rybakov, Shkatov, 2018b – Rybakov, M., Shkatov, D. “Complexity and expressivity of branching- and alternating-time temporal logics with finitely many variables”, in: B. Fischer, T. Uustalu (eds.), *Theoretical Aspects of Computing–ICTAC 2018*, Vol. 11187 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2018, pp. 396–414.
- Rybakov, Shkatov, 2018c – Rybakov, M., Shkatov, D. “A recursively enumerable Kripke complete first-order logic not complete with respect to a first-order definable class of frames”, in: G. Metcalfe, G. Bezhanishvili, G. D’Agostino, T. Studer (eds.), *Advances in Modal Logic*, Vol. 12. Stanford: College Publications, 2018, pp. 531–540.
- Rybakov, Shkatov, 2019a – Rybakov, M., Shkatov, D. “Complexity of finite-variable fragments of propositional modal logics of symmetric frames”, *Logic Journal of the IGPL*, 2019, Vol. 27, No. 1, pp. 60–68.
- Rybakov, Shkatov, 2019b – Rybakov, M., Shkatov, D. “Trakhtenbrot theorem for classical languages with three individual variables”, in: *Proceedings of SAIC-SIT2019*. Article No. 19. ACM, 2019.
- Rybakov, Shkatov, 2019c – Rybakov, M., Shkatov, D. “Undecidability of first-order modal and intuitionistic logics with two variables and one monadic predicate letter”, *Studia Logica*, 2019, Vol. 107, No. 4, pp. 695–717.
- Rybakov, Shkatov, 2020a – Rybakov, M., Shkatov, D. “Recursive enumerability and elementary frame definability in predicate modal logic”, *Journal of Logic and Computation*, 2020, Vol. 30, No. 2, pp. 549–560.

- Rybakov, Shkatov, 2020b – Rybakov, M., Shkatov, D. “Algorithmic properties of first-order modal logics of the natural number line in restricted languages”, in: S. Negri, N. Olivetti, R. Verbrugge, G. Sandu (eds.), *Advances in Modal Logic*, Vol. 13. Stanford: College Publications, 2020, pp. 523–539.
- Rybakov, Shkatov, 2020c – Rybakov, M., Shkatov, D. “Algorithmic properties of first-order modal logics of finite Kripke frames in restricted languages”, *Journal of Logic and Computation*, 2020, Vol. 30, No. 7, pp. 1305–1329.
- Rybakov, Shkatov, 2021a – Rybakov, M., Shkatov, D. “Complexity of finite-variable fragments of products with **K**”, *Journal of Logic and Computation*, 2021, Vol. 31, No. 2, pp. 426–443.
- Rybakov, Shkatov, 2021b – Rybakov, M., Shkatov, D. “Algorithmic properties of first-order superintuitionistic logics of finite Kripke frames in restricted languages”, *Journal of Logic and Computation*, 2021, Vol. 31, No. 2, pp. 494–522.
- Rybakov, Shkatov, 2021c – Rybakov, M., Shkatov, D. “Algorithmic properties of first-order modal logics of linear Kripke frames in restricted languages”, *Journal of Logic and Computation*, 2021, Vol. 31, No. 5, pp. 1266–1288.
- Rybakov, Shkatov, 2021d – Rybakov, M., Shkatov, D. “Algorithmic properties of **QK4.3** and **QS4.3**”, *Smirnov Readings on Logic 2021*, 2021, pp. 50–54.
- Rybakov, Shkatov, 2021e – Rybakov, M., Shkatov, D. “Undecidability of the logic of partial quasiary predicates”. To appear in *Logic Journal of the IGPL*, doi 10.1093/jigpal/jzab018.
- Schewe, 2008 – Schewe, S. “ATL* satisfiability is 2EXPTIME-complete”, in: *Automata, Languages and Programming. ICALP 2008*, Vol. 5126 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, pp. 373–385.
- Shehtman, Shkatov, 2019 – Shehtman, V., Shkatov, D. “On one-variable fragments of modal predicate logics”, in: *Proceedings of SYSMICS2019*. Amsterdam: Institute for Logic, Language and Computation; University of Amsterdam, 2019, pp. 129–132.
- Shehtman, Shkatov, 2020 – Shehtman, V., Shkatov, D. “Some prospects for semi-products and products of modal logics”, in: *Short papers. AiML2020*. Helsinki: University of Helsinki, 2020, pp. 107–111.
- Simpson, 1994 – Simpson, A. *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*. PhD thesis. Edinburgh: University of Edinburgh, 1995.
- Sistla, Clarke, 1985 – Sistla, A.P., Clarke, E.M. “The complexity of propositional linear temporal logics”, *Journal of ACM*, 1985, Vol. 32, No. 3, pp. 733–749.
- Spaan, 1993 – Spaan, E. *Complexity of Modal Logics*. PhD thesis. Amsterdam: University of Amsterdam, 1993.
- Szalas, 1986 – Szalas, A. “Concerning the semantic consequence relation in first-order temporal logic”, *Theoretical Computer Science*, 1086, Vol. 47, pp. 329–334.
- Szalas, Holenderski, 1988 – Szalas, A., Holenderski, L. “Incompleteness of first-order temporal logic with until”, *Theoretical Computer Science*, 1988, Vol. 57, pp. 317–325.

- Trakhtenbrot, 1953 – Trakhtenbrot, B.A. “On recursive separability”, *Doklady AN SSSR*, 1953, Vol. 88, pp. 953–956. (In Russian)
- Turing, 1936 – Turing, A.M. “On computable numbers, with an application to the ‘Entscheidungsproblem’”, *Proceedings of the London Mathematical Society, 2 series*, 1936/1937, Vol. 42, pp. 230–265.
- van der Hoek, Wooldridge, 2003 – van der Hoek, W., Wooldridge, M. “Cooperation, knowledge, and time: Alternating-time temporal epistemic logic and its applications”, *Studia Logica*, 2003, Vol. 75, No. 1, pp. 125–157.
- Vardi, Stockmeyer, 1985 – Vardi, M.Y., Stockmeyer, L. “Improved upper and lower bounds for modal logics of programs”, in: *Proceedings of the seventeenth annual ACM symposium on Theory of computing*, 1985, pp. 240–251.
- Walther et al., 2006 – Walther, D., Lutz, C., Wolter, F., Wooldridge, M. “ATL satisfiability is indeed ExpTime-complete”, *Journal of Logic and Computation*, 2006, Vol. 16, No. 6, pp. 765–787.
- Wolter, Zakharyashev, 1997 – Wolter, F., Zakharyashev, M. “On the relation between intuitionistic and classical modal logics”, *Algebra and Logic*, 1997, Vol. 36, pp. 121–155.
- Wolter, Zakharyashev, 1999 – Wolter, F., Zakharyashev, M. “Intuitionistic modal logics as fragments of classical bimodal logics”, in: E. Orłowska (ed.), *Logic at Work*. Springer; Berlin, 1999, pp. 168–186.
- Wolter, Zakharyashev, 2000 – Wolter, F., Zakharyashev, M. “Temporalizing description logics”, in: D. Gabbay and M. de Rijke (eds.), *Frontiers of Combining Systems II*. London: Studies Press/Wiley, 2000, pp. 379–401.
- Wolter, Zakharyashev, 2001 – Wolter, F., Zakharyashev, M. “Decidable fragments of first-order modal logics” *The Journal of Symbolic Logic*, 2001, Vol. 66, pp. 1415–1438.
- Wolter, Zakharyashev, 2002 – Wolter, F., Zakharyashev, M. “Axiomatizing the monodic fragment of first-order temporal logic”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 2002, Vol. 118, No. 1–2, pp. 133–145.
- Yuse, Igarashi, 2006 – Yuse, Y., Igarashi, A. “A modal type system for multi-level generating extensions with persistent code”, in: *Proceedings of the 8th ACM SIGPLAN International Conference on Principles and Practice of Declarative Programming (PPDP’06)*. New York, 2006, pp. 201–212.

Н.Е. ТОМОВА

О критерии паранормальности для n -значных логических матриц

Наталья Евгеньевна Томова

Институт философии РАН.

Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Аннотация: В результате обобщения на n -значный случай алгоритма конструирования литеральных паранепротиворечивых/параполных логик посредством комбинирования изоморфов классической логики получаем классы паранепротиворечивых, параполных и паранормальных логик. Паранормальные логики — логики, которые одновременно и паранепротиворечивы, и параполны. В качестве критерия паранепротиворечивости логики взята неverifiedируемость закона Дунса Скота в соответствующей логической матрице. В качестве критерия параполноты логики взята неverifiedируемость закона Клавия в соответствующей логической матрице. В статье рассмотрен тип n -значных логических матриц, определяющих паранормальные системы. Исследован вопрос о классе тавтологий, определяемом этим типом матриц. Доказано, по классу тавтологий исследуемые матрицы совпадают с представленными в литературе четырехзначными паранормальными матрицами логик $\mathbf{V}$, $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$.

Ключевые слова: паранепротиворечивость, параполнота, паранормальность, n -значные логические матрицы, изоморфы

Для цитирования: Томова Н.Е. О критерии паранормальности для n -значных логических матриц // Логические исследования / Logical Investigations. 2021. Т. 27. № 2. С. 121–132. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-121-132

1. Введение

Данная статья продолжает цикл работ, посвященных рассмотрению литеральных паранепротиворечивых / параполных логик¹. В предыдущей статье [Томова, 2020] было построено обобщение на n -значный случай алгоритма построения LPP-логик (литеральных паранепротиворечи-

¹Т.е. в этих логиках свойства паранепротиворечивости и (или) параполноты имеют место только на уровне литералов. Литералами называем множество Lit всех формул вида $\neg^k p$, где $\neg^0 p = p$ и $\neg^{k+1} p = \neg(\neg^k p)$, для $p \in Var$, Var — счетное множество пропозициональных переменных.

вых/параполных логик) посредством комбинирования изоморфов классической логики. Выделены типы n -значных паранепротиворечивых и параполных логических матриц, порождающих те же логические теории, что и паранепротиворечивая логика Сетте $\mathbf{P}^1$ и дуальная ей параполная логика $\mathbf{I}^1$.

В настоящей статье будет указан критерий для паранормальных логических матриц, а также рассмотрен вопрос о классе тавтологий, индуцируемом этим типом матриц.

В изложении материала будем придерживаться следующего порядка. Для удобства восприятия материала вначале приведем используемые определения. Далее, поскольку мы будем рассматривать паранормальные матрицы, полученные методом комбинирования изоморфов классической логики, напомним также этот алгоритм построения LPP-логик. В следующем разделе рассмотрим четырехзначные LPP-логики. Четырехзначные логические матрицы — минимально возможные характеристические матрицы для паранормальной теории. И далее перейдем к рассмотрению n -значных паранормальных логик. Приведем тип соответствующих логических матриц. Докажем утверждение относительно класса тавтологий, порождаемого этими матрицами.

2. Определения

Определение 1. Пусть $Var = \{p, q, r, \dots\}$ — счетное множество пропозициональных переменных и $Con = \{F_1, \dots, F_n\}$ — конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке F_i сопоставлено натуральное число $a(F_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Хотя бы для одного $i \in \{1, \dots, n\}$ имеет место $a(F_i) \neq 0$. Множество For определяется индуктивно:

- (1) $Var \subseteq For$;
- (2) для каждого такого $F_i \in Con$, что $a(F_i) = k$, $F_i(A_1, \dots, A_k) \in For$, если $A_1, \dots, A_k \in For$;
- (3) ничто иное не принадлежит For .

Алгебру формул $\mathcal{L} = \langle For, F_1, \dots, F_m \rangle$ будем называть *пропозициональным языком*.

Пусть $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \dots, f_m \rangle$ — алгебра того же типа, что и пропозициональный язык $\mathcal{L}$, где V — множество истинностных значений и f_i — функция на V той же местности, что и F_i .

Определение 2. Упорядоченная тройка $\mathfrak{M} = \langle V, F, D \rangle$, где $F = \{f_1, \dots, f_m\}$, $D \subseteq V$ — непустое собственное подмножество V ,

называется *логической матрицей* для $\mathcal{L}$. Элементы D будем называть *выделенными значениями* $\mathfrak{M}$.

Определение 3. *Оценкой v формулы A в матрице $\mathfrak{M}$ для языка $\mathcal{L}$ называется такое отображение $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \dots, f_m \rangle$, что*

- 1) если p — пропозициональная переменная, тогда $v(p) \in V$;
- 2) если $A_1, A_2, \dots, A_n$ — формулы и F^n — n -местная связка языка $\mathcal{L}$, тогда $v(F^n(A_1, A_2, \dots, A_n)) = f^n(v(A_1), v(A_2), \dots, v(A_n))$, где f^n — функция на V , соответствующая F^n .

Определение 4. Некоторая формула A есть *тавтология* в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\models_{\mathfrak{M}} A$), е.т.е. для каждой оценки v в $\mathfrak{M}$ верно, что $v(A) \in D$.

Определение 5. Теорией, порождаемой $\mathfrak{M}$, называем множество всех тавтологий в $\mathfrak{M}$ и обозначаем его как $E(\mathfrak{M})$.

Определение 6. Формула B логически следует из множества формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\Gamma \models_{\mathfrak{M}} B$), е.т.е. не существует такой оценки v в $\mathfrak{M}$, что $v(A_i) \in D$ для каждой $A_i \in \Gamma$ и $v(B) \notin D$.

Определение 7. Отношением следования, порождаемым $\mathfrak{M}$, называем множество $Cn(\mathfrak{M})$ упорядоченных пар $\langle \Gamma, B \rangle$ таких, что для всякой оценки v в $\mathfrak{M}$ если $v(\Gamma) \subseteq D$, то $v(B) \in D$.

К рассмотрению матричных логик могут быть применены различные подходы (см., например, [Wójcicki, 1984, ch. 2] и [Девяткин, 2016, с. 30–32]). Под логикой L можно понимать пару $\langle \mathcal{L}, Cn(\mathfrak{M}) \rangle$, с другой стороны, логику L можно рассматривать как теорию, т.е. класс тавтологий $E(\mathfrak{M}_L)$.

Определение 8. *Изоморфом классической пропозициональной логики* называется логическая матрица, характеризующая классический класс тавтологий.

Существуют различные формальные и содержательные критерии, характеризующие паранепротиворечивость, парapolноту, паранормальность.

Мы будем использовать следующие.

Определение 9. В системе *паранепротиворечивой* логики не верифицируется *закон Дунса Скота* $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ [Jaskowski, 1969] (см. также [Karpenko, 1999]).

Определение 10. В системе *парapolной* логики не верифицируется *закон Клавия* $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ [Ciuciura, 2015].

Определение 11. Логика называется *паранормальной*, если она одновременно является и паранепротиворечивой, и парapolной.

3. Четырехзначные паранормальные логики

Паранепротиворечивые и парapolные логики позволяют строить выводы в условиях противоречивых и неполных данных. Для работы отдельно с каждым видом неопределенности достаточно трехзначных семантик. Однако для одновременной работы с двумя видами неопределенности необходимо как минимум четыре истинностных значения. И это понятно, так как отрицание в паранормальной матрице, с одной стороны, паранепротиворечиво, т.е. в отличие от классического отрицания оно не формирует противоречие, и формулы A и $\neg A$ могут быть одновременно истинными. С другой стороны, отрицание должно обладать свойством парapolноты, т.е. допускать ситуацию, чтобы формулы A и $\neg A$ были одновременно ложными.

В данном разделе мы приведем ранее полученные результаты относительно четырехзначных литеральных паранормальных логик, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики. При исследовании n -значных систем мы будем обращаться к этим результатам.

В статье [Томова, 2018] рассмотрен класс четырехзначных литеральных паранормальных логик, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики. Эти логики определяются логическими матрицами:

$$\mathfrak{M}_{15} = \langle \{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_4, \rightarrow_3, \{1, 2/3\} \rangle;$$

$$\mathfrak{M}_{16} = \langle \{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_3, \rightarrow_4, \{1, 1/3\} \rangle,$$

где $\neg_3$, $\neg_4$, $\rightarrow_3$ и $\rightarrow_4$ имеют следующие истинностные таблицы:

x	$\neg_3 x$	$\neg_4 x$	$\rightarrow_3$	1	2/3	1/3	0	$\rightarrow_4$	1	2/3	1/3	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
2/3	0	1	2/3	1	1	0	0	2/3	1	1	1	1
1/3	1	0	1/3	1	1	1	1	1/3	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1

Доказано, что приведенные матрицы функционально эквивалентны между собой и представляют класс всех внешних четырехзначных функций².

Также доказана функциональная эквивалентность матриц $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ логической матрице логики $\mathbf{V}$ [Puga, Da Costa, 1988] и матрице логики $\mathbf{I}_0$ [Роров, 1999, р. 89].

²Функция $f \in F$ называется *внешней*, если $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ или $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ для любого набора истинностных значений $x_1, \dots, x_n$.

Логические матрицы логик $\mathbf{V}$ и $\mathbf{I}_0$ совпадают.

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{V}} = \langle \{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_4, \rightarrow_3, \vee_{\mathbf{V}}, \wedge_{\mathbf{V}}, \{1\} \rangle^3.$$

Матрица $\mathfrak{M}_{I_1P1}$, являющаяся членом последовательности паранормальных матриц, предложенной В. Фернандесом [Fernández, Coniglio, 2003, р. 22], в точности совпадает с матрицей $\mathfrak{M}_{15}$.

Все вышеперечисленные четырехзначные паранормальные матрицы совпадают по классу тавтологий, т.е. задают одну и ту же паранормальную теорию. В [Fernández, 2001, pp. 121–123] приведена аксиоматизация логики $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$.

4. N -значные изоморфы классической логики и LPP-матрицы

Прежде чем перейти к рассмотрению n -значных литеральных паранормальных логик, кратко напомним суть метода комбинирования изоморфов классической логики для конструирования литеральных паранепротиворечивых/параполных логик (см. также [Томова, 2020, с. 150–152]).

Для построения изоморфов классической логики используются функции перевода промежуточных истинностных значений. Такая функция каждому промежуточному значению сопоставляет одно из классических значений — 0 или 1.

В случае n -значной логики имеем $2^{(n-2)}$ функций перевода:

1. $f_1(x)$ переводит все промежуточные значения $\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}$ в 0;
2. $f_2(x)$ переводит все промежуточные значения $\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}$ в 1;
3. $f_3(x)$ переводит промежуточные значения $\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}$ в 1 и $\frac{1}{n-1}$ в 0;
- ...
- $2^{(n-2)}$. $f_{2^{(n-2)}}(x)$ переводит промежуточное значение $\frac{n-2}{n-1}$ в 0 и промежуточные значения $\frac{n-3}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}$ в 1.

Логическая матрица n -значных изоморфов классической логики выглядит следующим образом⁴:

³Здесь для удобства используем нашу нотацию: истинностное значение $\bar{1}$ из [Puga, Da Costa, 1988] в нашем обозначении — $2/3$ и истинностное значение $\bar{0}$ — $1/3$. Матричные операции $\vee_{\mathbf{V}}$ и $\wedge_{\mathbf{V}}$ могут быть введены по определению (см. [Томова, 2018, с. 82–83]).

⁴В рамках нашего исследования рассматриваются логические системы, сформулированные в пропозициональном языке, включающем только лишь отрицание и импликацию в качестве исходных связей.

$$\mathfrak{M} = \langle V_n, \neg_i, \rightarrow_i, D \rangle,$$

где $V_n = \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}$ — множество истинностных значений, $i = 1, 2, \dots, 2^{(n-2)}$, D — множество выделенных значений.

Используя соответствующие функции перевода, получаем $2^{(n-2)}$ отрицаний и $2^{(n-2)}$ импликаций. Примеры соответствующих таблиц истинности:

x	$\neg_1 x$	$\dots$	$\neg_{2^{(n-2)}} x$	$\rightarrow_1$	1	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{n-3}{n-1}$	$\dots$	$\frac{2}{n-1}$	$\frac{1}{n-1}$	0
1	0	$\dots$	0	1	1	0	0	$\dots$	0	0	0
$\frac{n-2}{n-1}$	1	$\dots$	1	$\frac{n-2}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	1
$\frac{n-3}{n-1}$	1	$\dots$	0	$\frac{n-3}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2}{n-1}$	1	$\dots$	0	$\frac{2}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	1
$\frac{1}{n-1}$	1	$\dots$	0	$\frac{1}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	1
0	1	$\dots$	1	0	1	1	1	$\dots$	1	1	1

Имеем следующие логические матрицы изоморфов классической логики:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_1, \rightarrow_1, \{1\} \rangle; \\ \mathfrak{M}_2 &= \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_2, \rightarrow_2, \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \rangle; \\ &\dots \\ \mathfrak{M}_{2^{(n-2)}} &= \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_{2^{(n-2)}}, \rightarrow_{2^{(n-2)}}, \{1, \frac{n-3}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \rangle. \end{aligned}$$

Метод комбинирования изоморфов состоит в построении такой логической матрицы, в класс матричных операций которой входят операции из двух различных изоморфов. При этом класс выделенных значений D берется точно такой же, как в изоморфе, из которого взята импликация. Таким образом, применив метод комбинирования изоморфов классической логики, мы получим класс n -значных LPP-логик.

5. N -значные паранормальные логики

В статье [Томова, 2020] приведены виды n -значных литеральных паранепротиворечивых (и не парapolных) и парapolных (и не паранепротиворечивых) логических матриц, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики. Также доказано, что эти матрицы порождают ту же паранепротиворечивую теорию, что и матрица логики $\mathbf{P}^1$ [Sette,

1973], и ту же парapolную теорию, что и матрица логики $\mathbf{I}^1$ [Sette, Carnielli, 1995].

Относительно класса n -значных литеральных паранормальных логик получены следующие результаты.

Утверждение 1. Логические матрицы вида

$$\mathfrak{M}^{pnorm} = \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_i, \rightarrow_j, D \rangle,$$

$$(1) \neg_i(\alpha_k) = 1, \quad (2.1) \alpha_k \rightarrow_j x = 1 \rightarrow_j x, \\ (2.2) x \rightarrow_j \alpha_k = x \rightarrow_j 1 = 1,$$

$$(3) \neg_i(\alpha_m) = 0, \quad (4.1) \alpha_m \rightarrow_j x = 0 \rightarrow_j x = 1, \\ (4.2) x \rightarrow_j \alpha_m = x \rightarrow_j 0,$$

где $i, j \in \{1, 2, \dots, 2^{(n-2)}\}$ и $i \neq j$; $\alpha_k, \alpha_m \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\}$, $k \neq m$, определяют класс паранормальных логик.

Замечание 1. Условия (1) и (2) достаточны для того, чтобы закон Дунса Скота в матрице $\mathfrak{M}^{pnorm}$ не являлся тавтологией, т.е. определяют свойство паранепротиворечивости матрицы.

Условия (3) и (4) достаточны для того, чтобы закон Клавия в матрице $\mathfrak{M}^{pnorm}$ не являлся тавтологией, т.е. определяют свойство парapolноты матрицы.

Доказательство. Согласно определению 11, в логических матрицах, задающих паранормальные системы, не верифицируются закон Дунса Скота $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ и закон Клавия $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$. Покажем, что матрица $\mathfrak{M}^{pnorm}$ удовлетворяет этому определению.

I. Докажем, что в матрице $\mathfrak{M}^{pnorm}$ закон Дунса Скота $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ не является тавтологией, т.е. существует такая оценка v в $\mathfrak{M}^{pnorm}$, что $v(A \rightarrow_j (\neg_i A \rightarrow_j B)) = 0$.

Пусть $v(A) = \alpha_k$ и $v(B) = 0$.

Тогда $v(\neg_i A) = 1$ (условие (1)) и $v(\neg_i A \rightarrow_j B) = v(\neg_i A) \rightarrow_j v(B) = 1 \rightarrow_j 0 = 0$.

Согласно условию (2.1), $\alpha_k \rightarrow_j x = 1 \rightarrow_j x$. Т.к. $1 \rightarrow_j 0 = 0$, значит, $v(A \rightarrow_j (\neg_i A \rightarrow_j B)) = 0$.

II. Докажем, что в матрице $\mathfrak{M}^{pnorm}$ закон Клавия $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ не является тавтологией, т.е. существует такая оценка v в $\mathfrak{M}^{pnorm}$, что $v((\neg_i A \rightarrow_j A) \rightarrow_j A) = 0$.

Пусть $v(A) = \alpha_m$ ⁵.

Тогда $v(\neg_i A) = 0$ (условие (3)) и
 $v(\neg_i A \rightarrow_j A) = v(\neg_i A) \rightarrow_j v(A) = 0 \rightarrow_j \alpha_m = 1$.

Согласно условию (4.2), $x \rightarrow_j \alpha_m = x \rightarrow_j 0$. Т.к. $1 \rightarrow_j 0 = 0$, значит,
 $v((\neg_i A \rightarrow_j A) \rightarrow_j A) = 0$. ■

Таким образом, предложенный критерий паранормальности для n -значных логических матриц обусловлен наличием в носителе логической матрицы как минимум *двух* различных промежуточных истинностных значений таких, что если одно из них в случае отрицания ведет себя как истинностное значение 0, а в случае импликации — как 1, то отличное от него промежуточное истинностное значение, наоборот, — в случае отрицания ведет себя как истинностное значение 1, а в случае импликации — как 0.

Отсюда имеем:

Следствие 1. N -значная логическая матрица *паранепротиворечива* (закон Дунса Скота не является тавтологией), если в носителе логической матрицы имеется по крайней мере одно такое промежуточное истинностное значение, что в случае отрицания оно ведет себя как истинностное значение 0, а в случае импликации — как 1.

Следствие 2. N -значная логическая матрица *параполна* (закон Клавия не является тавтологией), если в носителе логической матрицы имеется по крайней мере одно такое промежуточное истинностное значение, что в случае отрицания оно ведет себя как истинностное значение 1, а в случае импликации — как 0.

Напомним, что класс литеральных паранепротиворечивых/параполных матриц, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики, является подклассом LPP-матриц, заданных алгоритмом Левина–Микенберг в [Lewin, Mikenberg, 2006].

Обратим внимание, что в этой же статье (р. 479) указаны условия паранепротиворечивости и параполноты для LPP-матриц. Так, LPP-матрица паранепротиворечива, если для некоторого $x \in V$: $x \in D$ и $\neg x \in D$. Матрица параполна, если для некоторого $x \in V$: $x \notin D$ и $\neg x \notin D$. Соответственно, для паранормальной LPP-матрицы необходимо наличие двух условий.

Очевидно, что условия паранормальности логической матрицы, сформулированные в утверждении 1, и вышеприведенные условия Левина–Микенберг согласуются между собой.

⁵Еще раз обратим внимание на то, что промежуточное значение α_m отлично от промежуточного значения α_k .

Перейдем к вопросу о паранормальной теории, задаваемой классом матриц $\mathfrak{M}^{pnorm}$.

Оказалось, что все матрицы вида $\mathfrak{M}^{pnorm}$ индуцируют ту же паранормальную теорию, что и матрицы $\mathfrak{M}_{15}$, $\mathfrak{M}_{16}$, $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$, $\mathfrak{M}_{I^1 P^1}$.

Утверждение 2. Логическая матрица вида

$$\mathfrak{M}^{pnorm} = \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_i, \rightarrow_j, D \rangle,$$

$$(1) \neg_i(\alpha_k) = 1, \quad (2.1) \alpha_k \rightarrow_j x = 1 \rightarrow_j x,$$

$$(2.2) x \rightarrow_j \alpha_k = x \rightarrow_j 1 = 1,$$

$$(3) \neg_i(\alpha_m) = 0, \quad (4.1) \alpha_m \rightarrow_j x = 0 \rightarrow_j x = 1,$$

$$(4.2) x \rightarrow_j \alpha_m = x \rightarrow_j 0,$$

где $i, j \in \{1, 2, \dots, 2^{(n-2)}\}$ и $i \neq j$; $\alpha_k, \alpha_m \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\}$, $k \neq m$,

индуцирует ту же паранормальную теорию, что и матрица $\mathfrak{M}_{15}$.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из фактов:

- (1) если матрица $\mathfrak{M}$ является гомоморфным прообразом матрицы $\mathfrak{N}$, тогда $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$ [Bols, 1992, p. 21];
- (2) матрица $\mathfrak{M}^{pnorm}$ есть гомоморфный прообраз матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ относительно отображения h :

$$h(x) = \begin{cases} 2/3, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } \neg_i(x) = 0, x \rightarrow_j y = 0 \rightarrow_j y, \\ 1/3, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } \neg_i(x) = 1, x \rightarrow_j y = 1 \rightarrow_j y, \\ x, & \text{если } x \in \{1, 0\}, \end{cases}$$

где $y \in \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}$, $k = 2, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$. ■

Таким образом, мы определили класс n -значных литеральных паранормальных логических матриц, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики. В ходе исследования также удалось сформулировать требования для любой n -значной матрицы, в которой не верифицируется закон Дунса Скота и закон Клавия. Относительно свойств теории, определяемой вышеприведенным типом матриц, показано, что этот класс матриц индуцирует ту же паранормальную теорию, что и ранее исследованные четырехзначные матрицы $\mathfrak{M}_{15}$, $\mathfrak{M}_{16}$, $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$, $\mathfrak{M}_{I^1 P^1}$ (см. [Томова, 2018]), т.е. выделен целый класс n -значных матриц, характеристических для этой паранормальной теории.

В результате исследован класс n -значных литеральных паранепротиворечивых/параполных логик, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики. Выделены типы матриц, соответствующие

паранепротиворечивым, парapolным (см. [Томова, 2020]) и паранормальным логикам, а также определены теории, индуцируемые этими матрицами. В настоящее время остается открытым вопрос о функциональных свойствах исследуемого класса n -значных матриц.

Литература

- Девяткин, 2016 – *Девяткин Л.Ю.* Неклассические модификации многозначных матриц классической логики. Ч. I // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 2. С. 27–58.
- Томова, 2018 – *Томова Н.Е.* О свойствах одного класса четырехзначных паранормальных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 1. С. 75–89.
- Томова, 2020 – *Томова Н.Е.* Об одном классе n -значных литеральных паранепротиворечивых / парapolных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2020. Т. 26. № 2. С. 144–159.
- Bolc, 1992 – *Bolc L., Borowik P.* Many-Valued Logics 1: Theoretical Foundations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992. 288 p.
- Ciuciura, 2015 – *Ciuciura J.* A weakly-intuitionistic logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. No. 2. P. 53–60.
- Fernández, 2001 – *Fernández V.L.* Semântica de Sociedades para Lógicas n -valentes. Campinas: IFCH-UNICAMP, 2001. 126 p.
- Fernández, Coniglio, 2003 – *Fernández V.L., Coniglio M.E.* Combining valuations with society semantics // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2003. Vol. 13. No. 1. P. 21–46.
- Jaskowski, 1969 – *Jaśkowski S.* A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.
- Karpenko, 1999 – *Karpenko A.S.* Jaśkowski's criterion and three-valued paraconsistent logics // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol. 7. P. 81–86.
- Lewin, Mikenberg, 2006 – *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.
- Popov, 1999 – *Popov V.M.* On the logics related to A. Arruda's system V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol. 7. P. 87–90.
- Puga, Da Costa, 1988 – *Puga L.Z., Da Costa N.C.A.* On the imaginary logic of N.A. Vasiliev // Z. Math. Logik Grundl. Math. 1988. Vol. 34. P. 205–211.
- Sette, 1973 – *Sette A.M.* On propositional calculus P1 // Mathematica Japonicae. 1973. Vol. 18. P. 173–180.
- Sette, Carnielli, 1995 – *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal weakly-intuitionistic logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. No. 1. P. 181–203.
- Wójcicki, 1984 – *Wójcicki R.* Lectures on Propositional Calculi. Wrocław: Ossolineum, 1984. 292 p.

NATALYA E. TOMOVA

On a paranormal criterion for n -valued logical matrices

Natalya E. Tomova

Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Abstract: As a result of generalization of the n -valued case of the algorithm for constructing literal paraconsistent / paracomplete logics by combining isomorphs of classical logic, we obtain classes of paraconsistent, paracomplete and paranormal logics. A logic is called paranormal if it is both paraconsistent and paracomplete at the same time.

The non-verifiability of the Duns Scotus law in the corresponding logical matrix is taken as the criterion of the paraconsistency of logic. The non-verifiability of Clavius' law in the corresponding logical matrix is taken as a criterion of the paracompleteness of logic. The paper deals the type of n -valued logical matrices that define paranormal systems. The class of tautologies defined by this type of matrices is investigated. It is proved that with respect to the induced class of tautologies, the studied matrices coincide with the four-valued paranormal matrices of the logics $\mathbf{V}$, $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ known in the literature.

Keywords: paraconsistency, paracompleteness, many-valued logics, logical matrices, isomorphs

For citation: Tomova N.E. “O kriterii paranormal’nosti dlya n -znachnykh logicheskikh matrits” [On a paranormal criterion for n -valued logical matrices], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 121–132. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-121-132 (In Russian)

References

- Devyatkin, 2016 – Devyatkin, L.Yu. “Neklassicheskie modifikatsii mnogoznachnykh matrits klassicheskoi logiki. Chast’ I” [Non-classical Modifications of Many-valued Matrices of the Classical Propositional Logic. Part I], *Logical Investigations*, 2016, Vol. 22, No. 2, pp. 27–58.
- Bolc, 1992 – Bolc, L., Borowik, P. *Many-Valued Logics 1: Theoretical Foundations*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992. 288 pp.
- Ciuciura, 2015 – Ciuciura, J. “A weakly-intuitionistic logic II”, *Logical Investigations*, 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 53–60.
- Fernández, 2001 – Fernández, V.L. *Semântica de Sociedades para Lógicas n -valentes*. Campinas: IFCH-UNICAMP, 2001. 126 pp.

- Fernández, Coniglio, 2003 – Fernández, V.L., Coniglio, M.E. “Combining valuations with society semantics”, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2003, Vol. 13, No. 1, pp. 21–46.
- Jaskowski, 1969 – Jaśkowski, S. “A propositional calculus for inconsistent deductive systems”, *Studia Logica*, 1969, Vol. 24, pp. 143–157.
- Karpenko, 1999 – Karpenko, A.S. “Jaśkowski’s criterion and three-valued paraconsistent logics”, *Logic and Logical Philosophy*, 1999, Vol. 7, pp. 81–86.
- Lewin, Mikenberg, 2006 – Lewin, R.A., Mikenberg, I.F. “Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices”, *Math. Log. Quart.*, 2006, Vol. 52, No. 5, pp. 478–493.
- Popov, 1999 – Popov, V.M. “On the logics related to A. Arruda’s system V1”, *Logic and Logical Philosophy*, 1999, Vol. 7, pp. 87–90.
- Puga, Da Costa, 1988 – Puga, L.Z., Da Costa, N.C.A. “On the imaginary logic of N.A. Vasiliev”, *Z. Math. Logik Grundle. Math.*, 1988, Vol. 34, pp. 205–211.
- Sette, 1973 – Sette, A.M. “On propositional calculus P1”, *Mathematica Japonicae*, 1973, Vol. 18, pp. 173–180.
- Sette, Carnielli, 1995 – Sette, A.M., Carnielli, W.A. “Maximal weakly-intuitionistic logics”, *Studia Logica*, 1995, Vol. 55, No. 1, pp. 181–203.
- Tomova, 2018 – Tomova, N.E. “O svoistvakh odnogo klassa chetyrekhznachnykh paranormal’nykh logik” [On properties of a class of four-valued paranormallogics], *Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 1, pp. 75–89.
- Tomova, 2020 – Tomova, N.E. “Ob odnom klasse n -znachnykh literal’nykh paraneprotivorechivyykh/parapolnykh logik” [On a class of n -valued literal paraconsistent/paracomplete logics], *Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 144–159.
- Wójcicki, 1984 – Wójcicki, R. *Lectures on Propositional Calculi*. Wrocław: Ossolineum, 1984. 292 pp.

История логики
History of logic

IRVING H. ANELLIS, VALENTIN A. BAZHANOV

**Image of Soviet and Russian logic in the West.
Latter half of the XXth century**

Irving H. Anellis

Iowa State University,
Ames, IA 50011, USA.
Indiana University-Purdue University at Indianapolis,
Indianapolis, IN 46202, USA.
E-mail: -

Valentin A. Bazhanov

Interregional Non-Governmental Organization “Russian Society for History and Philosophy of Science”,
1/36 Lyalin lane, bd. 2, Moscow, 105062, Russian Federation.
E-mail: vbazhanov@yandex.ru

Abstract: The article attempts to overview Western scientific knowledge of research in mathematical logic and its history in the USSR and Russia in the second half of the 20th century. We claim that Western scholars followed and were generally aware of the main works of their Soviet and Russian colleagues on mathematical logic and its history. It was possible, firstly, due to the fact that a number of Western scientists knew the Russian language, and, secondly, because Soviet and Russian logicians published their works in English (sometimes in German) in the original journals of mathematical logic or Soviet publishing houses (mainly Mir Publishers) translated Soviet authors into English. Thus, the names of A.G. Dragalin, Yu.L. Ershov, A.S. Karpenko, A.N. Kolmogorov, Z.A. Kuzicheva, Yu.I. Manin, S.Yu. Maslov, F.A. Medvedev, G.E. Mints, V.N. Salii, V.A. Smirnov, A.A. Stolyar, N.I. Styazhkin, V.A. Uspensky, I.M. Yaglom, S.A. Yanovskaya, A.P. Yushkevich, A.A. Zinov’ev were quite known to their Western counterparts. With the dawn of perestroika, contacts of Soviet / Russian logicians expanded significantly. Nevertheless, the analysis of Western works on mathematical logic and the history of logic suggests that by the end of the 20th century the interest of Western scientists in the works of their Russian colleagues had noticeably waned.

Keywords: the history of logic in Russia and the USSR, mathematical logic, traditional logic, non-classical logic, bibliography

For citation: Anellis I.H., Bazhanov V.A. “Image of Soviet and Russian logic in the West. Latter half of the XXth century”, *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 133–152. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-133-152

1. Introduction

From the nineteenth century forward, Russian and Soviet logicians have been an integral and important part of the international logic community. Nevertheless, much of their work is known only second-hand, if at all, either because the work is sometimes inaccessible or because so much of it was written in Russian. More often than not, little is known about the work of Russian/Soviet logicians. As an example, one can refer to M.J. Beeson's mere half-page discussion of A.A. Markov and his school of constructivist mathematics within the twenty-two page "Historical Appendix" of his *Foundations of Constructive Mathematics* [Beeson, 1985, p. 434]. But even when western-language versions of Russian work is available, that work is not always given due consideration. Thus, for example, B. Kushner [Kushner, 1994, pp. 183–184] has pointedly noted that although "the language barrier is often mentioned" in this regard, it does not always explain the reason for the neglect. He mentions that it would have been no easier, for example, for Kolmogorov to read English than it would be for his English-speaking colleagues to read Russian. Moreover, even work that appeared in Germany, such as Kolmogorov's [Kolmogorov, 1932] "Zur Deutung der intuitionistischen Logik" and Novikov's [Novikov, 1943] "On the Consistency of Certain Logical Calculus" were, Kushner avers, neglected, and is "practically unknown outside the former USSR." Similarly, W. Weidlé [Weidlé, 1961, pp. 60–61], in another context, namely nineteenth-century Russian literature, offered three possible reasons why "Europe" "has not fully assimilated" the work of the great Russian writers: a lack of translations; ignorance of the Russian language; or the indolence of readers. There is little excuse in the case of Kolmogorov's paper for blaming inaccessibility, since the paper appeared in Germany and in a German, not a Russian, journal — and a well-known German mathematics journal at that. Kushner does not explicitly say so, but he leaves nonetheless the impression that there may be some other explanation. One might re-tort that every mathematician in the world knows the names and work of N. Lobachevskii, of M. Ostrogradskii, of P. Chebyshev, so that the neglect that Kushner detects of the work of Kolmogorov and Novikov does not reflect any particular bias. But one can no more legitimately speak about the history of mathematics in Russia by citing only Lobachevskii, Ostrogradskii, and Chebyshev than about the history of mathematics by citing only Euclid, Fermat, and Gauss.

In writing about the "paucity" of American scholarship on the history of the Russian Orthodox church, the bibliographer and historian E. Kasinec suggested a less sinister explanation than the one that Kushner has seemingly hinted at in regard to the lack of American or western European scholarship on the history of mathematics or logic in Russia. Kasinec proposed that this dearth of

attention which he detected was owing to “lack of familiarity with this subject’s vast published and unpublished sources” [Kasinec, 1978, p. 202].

To the present day, there exist no comprehensive, systematic, up-to-date surveys of Russian/Soviet contributions to the field of logic, even in Russian language. Nor for that matter, are there any such broad surveys of the history of logic in Russia generally in Western languages. We are setting the goal to fill up this gap. We planned with Dr. I. Anellis some articles on the history of logic in Russia and the USSR. However, the decease of Dr. Anellis interrupted and postponed this work. Present paper is the first part of this plan.

2. Surveys

Ch. Thiel announced a plan to produce a study of mathematical logic in Russia, but this work was not accomplished [Thiel, 1991]. A. Walicki’s *A History of Russian Thought* specifically notes that history of logic in Russia falls outside of its scope, as does philosophy of science [Walicki, 1979, XV]. The monumentally long, comprehensive survey papers by S.A. Yanovskaya (1896–1966), “*Foundations of Mathematics and Mathematical Logic*” [Yanovskaya, 1948] and “*Mathematical Logic and Foundations of Mathematics*” [Yanovskaya, 1959] are now long out of date. Yanovskaya’s surveys have been followed by the collection of articles published by P.I. Nikitin [Nikitin, 1962] under the title *Outline of the History of Logic in Russia* and by the books of N.I. Styazhkin and V.D. Silakov [Styazhkin, Silakov, 1962], *Short Sketch of the History of General and Mathematical Logic in Russia* and of Styazhkin [Ibid.], *Outline of the History of Logic in Russia*, which concentrate their attention on the nineteenth century. In 1955 A.P. Primakovskii published a fifty-six page bibliography of Russian-language logic studies for the period of the XVIII to XX centuries¹ [Primakovskii, 1955], which, regrettably, had been denounced by professional bibliographers [Zozulya, Fomin, 1955] as badly organized and plagued by numerous errors. Later, Soviet historians of mathematics have written only very short surveys on logic, as part of larger general histories of mathematics in Russia and the Soviet Union; among these are A.P. [Yushkevich, 1968] *History of Mathematics in Russia to the Year 1917*, which devotes seven pages to logic, A.N. Kolmogorov and A.P. Yushkevich’s [Kolmogorov, Yushkevich, 1978, pp. 531–537] *Mathematics in the Nineteenth Century*, the first chapter of which, by Z.A. Kuzicheva [Kuzicheva, 1978], on mathematical logic, gives some attention to Russian logicians such as P.S. Poretskii (1846–1907), and Y.L. Ershov’s [Ershov, 1983] “*Mathematical Logic and Foundations of Mathematics*”, one of the more recent Soviet surveys, which attempts to cover Soviet

¹Another bibliography of Russian/Soviet logical studies was published in 2001 [Antonova et al., 2001], but this work is far from being perfect as well.

contributions to mathematical logic by devoting an average of less than one page per decade. Kuzicheva's essay is also available in English translation² [Kuzicheva, 1992]. First intellectual biography of N.A. Vasiliev attracted close attention by Western scholars [Bazhanov, 1988]. V.L. Vasyukov translated major Vasiliev's work "Logic and Metalogic" into English [Vasilev, 1993].

In Western languages, one finds very much less; An Annotated Bibliography of Western-Language (mainly English) Sources for the History of Formal Logic in Russia compiled by H. Kormin and I.H. Anellis [Kormin, Anellis, 2000] lists just over 330 titles, of which many are merely brief notices in abstracting or review journals. [Küng, 1962] "Bibliography of Soviet Work in the Field of Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics is vastly out of date, focuses considerable attention on philosophical rather than technical writings, and is heavily based upon Yanovskaya's (1948) and (1959) surveys. Another bibliography was published by [Hänggi, 1971], and is also therefore seriously outdated. In addition, there are a handful of very brief survey articles, most prominent among them [Bochenski, 1961] "Soviet Logic", [Cavaliere, 1988] "Il dibattito sulla logica in Unione Sovietica (1945–1965)", [Comey, 1966] "Current Trends in Soviet Logic" [Hänggi, 1967] "Die Entwicklung der Diskussion um die formale Logik in der Sowjetunion" [Küng, 1961] "Mathematical Logic in the Soviet Union (1917–1947 and 1947–1957)", A. Winkelmann's "Die Stellung der formalen Logik im Sowjetunion" [Winkelmann, 1956] and "Formal Logic in Soviet Philosophy" [Winkelmann, 1957], and A.A. Zinov'ev's "Logic in the USSR" [Zinov'ev, 1968] with his books published in English [Zinov'ev, 1963; Zinov'ev, 1973; Zinov'ev, 1983]. Brief summaries of Yanovskaya's two surveys are also available, by [Kline, 1951] and [Cogan, 1962] respectively. A small number of more specialized surveys have also been undertaken, among them [Cavaliere, 1985] report on the Soviet discussions about the extension of mathematical logic to non-classical logics and her full-scale survey, *La logica formale in Unione* [Cavaliere, 1990], of the philosophical/ ideological debates during the crucial period 1946–1965 between formal logicians and dialecticians on the role and status of formal logic and its impact on Soviet work in formal logic, L.H. Hackstaff and J.M. Bochenski's [Hackstaff, Bochenski, 1962] study of A.A. Zinov'ev's work in many-valued logics, D. Comey's [Comey, 1962] discussion of two Soviet conferences on logic (one, which met in 1958 and was largely concerned with the status of logic within the Soviet educational system and curriculum, another which met in 1960, which largely consisted of talks on philo-

²There are also detailed biographies of important figures in the history of modern logic published later, for example [Bazhanov, 2001a; Bazhanov, 2001b; Bazhanov, 2007; Bazhanov, 2013; Bazhanov, 2016; Bazhanov, 2017], as well as [Biryukov, 2001; Karpenko, 2013], personal and intellectual biography of N.A. Vasiliev [Bazhanov, 2009; Schumann, 2013].

sophical, methodological, and foundational issues of logic), the S.Y. Maslov, G.E. Mints and [Maslov et al., 1971] survey on “Mechanical Proof Search and the Theory of Logical Deduction in the USSR”, and émigré V. Lifschitz’s survey on *Mechanical Theorem Proving in the USSR (The Leningrad School)* [Lifschitz, 1986], an informally prepared and published typescript, Anellis’s very brief account [Anellis, 1988] of Maslov’s inverse method for establishing the decidability of certain calculi, and Mints’s surveys on “Proof Theory in the USSR 1925–1969” [Mints, 1991] and “Proof Theory in the USSR 1925–69” [Mints, 1989] on which the former article is based. Lifschitz’s publication belongs to a series established by emigré Soviet scientists who describe the work of their former Soviet colleagues in their own areas of expertise. Some special attention has also been given, especially by [Bochenski, 1967; Bochenski, 1973] and [Anellis, 1987; Anellis, 1987a; Anellis, 1996] to the work of S.A. Yanovskaya in logic and history of mathematics and to her critical role in establishing a chair of mathematical logic at Moscow State University. Bazhanov has written a large number of articles in English on various aspects of Vasiliev and his work since 1985, as well as more general articles on the history of non-classical logics, especially of paraconsistent logics, including articles on Vasiliev published in English in *Studies in Soviet Thought* [Bazhanov, 1990] and *Modern Logic* [Bazhanov, 1992; Bazhanov, 1994]. Similarly, Kuzicheva has published a sketch, in Russian, of the life and work of historian of logic N.I. Styazhkin (1932–1986) [Kuzicheva, 1991], along with a bibliography of his scientific writings [Kuzicheva, 1991a]. S.A. Yanovskaya has also recently been written about in English by some of her former students, in particular by [Kushner, 1996], who has also written in English about [Kushner, 1993], A.N. Kolmogorov and V.A. Uspenskii [Kushner, 1994]. Some information related to the state of logical studies in the USSR/Russia may be found in the book “Logic in Central and Eastern Europe” [Schumann, 2013].

All of these surveys are rather brief, and so by their very nature are unable to give a thorough or timely picture of the impressive and significant contributions to mathematical logic by Russian/Soviet researchers. The survey book *Recent Soviet Contributions to Mathematics* by J.P. LaSalle and S. Lefschetz [LaSalle, Lefschetz, 1962] is already very old, and in any case does not consider the field of mathematical logic at all; moreover, it is barely more than an annotated bibliography of those areas which it does cover.

3. Western-language translations of Russian-language works in logic

Not only is there a small number of surveys of Russian and Soviet work in logic, but there is also a rather small number of Western-language translations of Russian-language work in this area, compared to what would be desirable, and especially in comparison to the number of translations from other languages into Russian — although admittedly the number of translations of Russian studies is now beginning to grow. Thus, the American Association for the Advancement of Science reported in 1984 that, despite translation programs that are under way, Soviet contributions to the field of mathematics generally are neither well known to, nor sufficiently represented in the literature of, American colleagues of Soviet researchers (see [Holden, 1984]), while the American Mathematical Society (AMS) has expressed concern that, in response to its own translation program, however limited that program is, there are fewer numbers of mathematicians in the U.S., Britain, Canada or Australia who are able to read Russian, and that it has frequently searched long and hard for mathematicians who could serve as Russian translators for its programs.

For much of the time, Russian and Soviet work in logic has been greatly undervalued, despite the crucial role which it might have, and on occasion has had, because of its frequent inaccessibility. In the period before World War II, many Russian logicians and their Soviet successors wrote in French or German rather than in Russian, and this helped to some extent, but did not always solve the problem (since, as often as not, even many of those papers written in French or German appeared in Russian journals which were not well known in the West). Moreover, the greater amount of published scientific research in Russia / the USSR continues to be written in Russian. A joint Association for Symbolic Logic / American Mathematical Society Russian translations program has done much to alleviate this situation, but again only in comparatively small measure.

The AMS has an active program of translation into English of Russian texts in all branches of mathematics (including mathematical logic); this program is administered by Ben Silver at the AMS offices in Providence, Rhode Island. The AMS translations of the Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics include many volumes devoted exclusively to logic, and the AMS actively cooperates in the dissemination of translation volumes of nearly all major Soviet mathematics journals, including those published by the Plenum Publishing Corporation. At the same time, the London Mathematical Society publishes an English translation of *Uspekhi Matematicheskoi Nauk*, under the title *Russian Mathematical Surveys*, and began, with volume 33 in 1978, to include in their translation the “Short Communication” which appear in

Uspekhi. In addition, the AMS has its own continuing series, “AMS Translations”, already in its second series of well over one hundred volumes, which consist of anthologies of translations of important Russian-language research papers in all fields, including logic. One of the more recent publications in the “AMS Translations” series appeared, under the title *Six Papers in Logic*, edited by Ben Silver [Silver, 1987]; this book includes articles of S.N. Artemov, M.I. Bekenov, A.D. Korshunov, V.E. Vail’, and B.I. Zil’ber. Off the press in 1988 was the book *Mathematical Intuitionism: Introduction to Proof Theory* by A.G. Dragalin [Dragalin, 1988], who for many years was an important figure in logic and mathematics in the USSR. Among the other works in the AMS translation series which have some interest for logicians working in algebraic logic and related area are such books as V.N. Salii’s [Salii, 1988] *Lattices with Unique Complements*.

Academic presses also on occasion publish translations of Russian-language logic books. Most prominent of these are MIT Press, which published N.I. [Styazhkin, 1969] *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano* and A.A. Stolyar’s [Stolyar, 1970] textbook *Introduction to Elementary Mathematical Logic*, the latter having been published on the advice of J. van Heijenoort [Kolmogorov, 1967], who refereed it for MIT Press. Stolyar’s book has been reprinted by Dover Publications [Stolyar, 1983], while the Springer, which specializes in high-quality mathematical monographs, has published Y. Manin’s [Manin, 1977] *A Course in Mathematical Logic*, Berlin’s VEB Deutscher-Verlag published P.S. Novikov’s classic and historically significant textbook, *Grundzüge der mathematischen Logik* [Novikov, 1973], while Addison-Wesley published that same work as *Elements of Mathematical Logic* [Novikov, 1964], and North-Holland Publishing, which likewise specializes in highquality, but costly, mathematical monographs, has published A.I. Mal’tsev’s *The Metamathematics of Algebraic Systems* [Mal’tsev, 1971]. Styazhkin’s history of mathematical logic has also been made available in Italian translation [Styazhkin, 1980]. Some books by Russian logicians were published in English directly in English [Chagrov, Zakharyashev, 1997].

In early 1989, Anellis began assembling an editorial board for *Modern Logic*, a new journal of the history of modern logic; included on the board was A.G. Barabashev and V.A. Bazhanov. *Modern Logic* had made an effort to bring the work of Russian and Soviet logicians to the attention of the international community, and published expository surveys and historical studies of Russian and Soviet research, both in Russian and in western European languages. These examples may, of course, be multiplied. Mir Publishers of Moscow also had its own translation series, the “Little Mathematics Library”, which makes available English translations of texts which, with a few exceptions, are

mainly of a rather elementary level. Among these, three which are of particular interest to logicians are V.A. Uspenskii's Post's Machine [Uspenskii, 1983] and Gödel's Incompleteness Theorem [Uspenskii, 1987], and I.M. Yaglom's An Unusual Algebra on Boolean algebra [Yaglom, 1978]. Many of the booklets in this series were based upon lectures either to young children or to secondary school students. A notable exception is Uspenskii's [Uspenskii, 1974] work on Gödel's incompleteness theorem, which is based upon an article of the author's which originally appeared in *Uspekhi* and which presents a solid technical exposition of Gödel's result and the details of its proof from a Markovian, or algorithmic, point of view. All of these translations appeared within a fairly short time of their original publication. The Soviet publisher Mir has also published Y.L. Ershov and E.A. Palyutin's text *Mathematical Logic* [Ershov, Palyutin, 1984], and this translation, as a matter of fact, is technically superior to the Russian original, since mathematical errors which appeared in the original have been corrected in the translation, although the translation itself is clumsy at best (see the reviews of the original by Mints [Mints, 1986b] and of the translation by E. Mendelson [Mendelson, 1986a]). Moscow's Progress Publishers have provided English translations of A.D. Getmanova's undergraduate-level introductory textbook *Logic* [Getmanova, 1989] and A.D. Getmanova, M.I. Panov, and V.V. Petrov's elementary-level logic dictionary *Logic Made Simple* [Getmanova et al., 1990].

One of the most active organizations for the dissemination of Russian/Soviet research in logic is the US-based international Association for Symbolic Logic and its official organ, the *Journal of Symbolic Logic*. From its first volume, which appeared in 1936, the *Journal of Symbolic Logic* has provided reviews of many major Soviet publications in logic; this includes work in classical and mathematical logic, history and philosophy of mathematics and logic, and computer science and algorithmic logic, as well, occasionally, as work in applications of logic to other areas of mathematics such as number theory and algebra, including, for example, group theory and associative algebras. The AMS/ASL Translations Committee, formed in 1982, originally included S. Feferman, an American whose specialty is proof theory, J.P. Jones, a Canadian whose specialty is recursion theory and its applications, Soviet emigré to the US V. Lifschitz, specializing in constructive logic and currently working in algorithmic logic and development of mechanical proof procedures for computers, and G.E. Mints. Feferman was replaced on the committee in 1984 by the American G. Cherlin. In 1988 and 1989, the committee consisted of E. Mendelson, the coordinator, whose term expired at the end of 1989, B.F. Wells, whose term also expires at the end of 1989, and G.E. Mints and V. Lifschitz, both of whose terms expired at the end of 1990.

These institutional translation efforts were preceded by individual efforts; perhaps the best known is J. van Heijenoort's translation of A.N. Kolmogorov's pioneering paper of 1925 in constructive logic, "O principe tertium non datur" ("On the principle of excluded middle" [Kolmogorov, 1925]), published by van Heijenoort [Kolmogorov, 1967], with the permission of Kolmogorov, along with an expository introduction by Hao Wang, in van Heijenoort groundbreaking anthology, *From Frege to Gödel* [Ibid.].

Also of special interest to logicians among the translations available is *Algebra and Logic*. This represents a unique situation. *Algebra and Logic* was published as a journal by Plenum.

The intense translation programs from English into Russian and the rather less active translation programs from Russian into English give strong indications of the interdependence of Soviet work and Western work in logic. Nowhere, perhaps, is this thorough interdependence better evidenced than by the translation into Russian of N. Cutland's textbook *Computability: An Introduction to Recursive Function Theory* [Cutland, 1983], just within three years of its initial publication. For, in the "Bibliography" of the original English edition, Cutland includes an English translation from the Russian of Y.I. Manin's logic textbook *A Course in Mathematical Logic* [Manin, 1977].

4. Attempts to reach an international audience

In addition to translations of their work into Western languages, we find Soviet logicians were attempting to reach an international audience by publication of some of their original research papers in Western languages. The appearance of F.A. Medvedev's [Medvedev, 1982] German-language paper on Jules König is but one example of the latter. Publication in western languages revives a tradition that, as we noted, was once very strong. Prior to the Russian Revolution of 1917, and indeed up until the beginning of World War II, it was not in the least uncommon for Russian scientists to publish their research, even works appearing in Russian journals, in Western European languages, most notably in French and German. This tradition never died out completely, as evidenced by the republication, as "Theorie der Numerierungen" [Ershov, 1973–1977], of Y.L. Ershov's three-volume book *The Theory of Enumerations* [Ershov, 1977]. It was also common for Russian and Soviet scholars prior to World War II to carry out at least some of their studies at Western European universities. This tradition can be traced back to the early seventeenth century, when some Russians travelled to England, and especially to Cambridge, to study the mathematical and scientific work of John Dee, while others travelled to Spain to study the logic and philosophy of Raymond Llully. This tradition of travel abroad for study was especially notable in the late seventeenth and early eighteenth centur-

ies; the most famous of these examples is that of M.V. Lomonosov (1711–1756), who in 1736 travelled to Marburg, where he studied mathematics and logic (among other subjects) with Christian Wolff. We will also note, in our examination of the development of mathematical logic in the early Soviet period, the active presence of Soviet mathematicians, particularly at Göttingen, under the influence of Emmy Noether; among these were A.G. Kurosh (1908–1971), P.S. Aleksandrov (1896–1982) and P.S. Urysohn (1898–1924), the latter two, together with N.N. Luzin (1883–1950), also actively carrying out research in France with mathematicians such as Maurice René Fréchet. The most notable example of this trend during the early Soviet period, however, must be M.I. Sheinfinkel' (Moses Schönfinkel; 1889–1942), founder of combinatory logic, a student of S.O. (or often (I)osifovich) Shatunovskii (1859–1929) in Odessa, who later carried out most of his work at Göttingen, under the influence of Hilbert, and who died in Moscow in 1942. More recently, we have the very similar example of the Ukrainian algebraic logician and specialist in universal algebra, L.A. Kaluzhnin, who received his mathematical training in Berlin, Hamburg, and Paris during the post-war period, before becoming Professor in the Chair of Algebra and Logic at the Kiev State University in 1955.

These formal and institutional contacts were further enhanced by a strong network of informal and personal contacts that have resulted in joint publications by Soviet and Western logicians, as well as in joint collaboration on special projects. Some of these collaborative efforts will be considered in the course of our survey. Thus, for example, while G.E. Mints was still in Leningrad, he participated with I.H. Anellis in the organization of the American Mathematical Society Special Session on Proof Theory, 5–9 January 1982. This kind of collaboration was particularly active also in the interbellum period, circa 1920–1939, and included close cooperation between the internationally dominant Soviet, French, and Polish schools of set theory in the 1920s and 1930s. It was renewed after the mid-1950s when the immediate post-war period drew to a close, evidenced in the 1950s by the Boone-Novikov theorem on the unsolvability of the word problem for groups, and, much more recently, by joint work of American and Canadian logicians such as the late Julia Robinson (1919–1985), James P. Jones, and Martin Davis with Y. Matiyasevich of LOMI, extending Matiyasevich's initial results of the negative solution to Hilbert's tenth problem on the solvability of the word problem for diophantine equations.

This collaboration has been carried out in the context of international exchange programs as well as by participation at international conferences. These events partly removed iron curtain for Soviet scholars for a while. These included, by way of examples not meant to be exhaustive, the visit to Canada in 1981–1982 of Y.V. Matiyasevich, who was then the director of LOMI and

a leading recursion theorist, as well as the visit the following year of James P. Jones to LOMI, the inclusion of Y.L. Ershov, the premier Soviet recursion theorist, senior academician at the Siberian Branch of the Steklov Mathematics Institute at Novosibirsk, and developer of numeration theory, as invited speaker at Logic Colloquium '85, the European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, at Paris, 7–13 July 1985, and the participation of Soviet logicians in Heyting '88, the Summer School and Conference on Mathematical Logic Honourably Dedicated to the 90-th Anniversary of Arend Heyting, at Chaika, Bulgaria, 13–23 September 1988; this included noted Soviet logicians such as M.I. Kanovich, B.A. Kushner, L.L. Maksimova, G.E. Mints, A.A. Muchnik, and I.D. Zaslavskii among the invited speakers, and Kanovich, Maksimova, Mints, and Muchnik, and Soviet emigrés V. Lifschitz (US) and B.A. Trakhtenbrot (Israel), as members of the program committee. (Since that time, both Mints and Kushner emigrated to the US.) In addition, several international logic conferences have recently been held in the USSR, including COLOG-88, a conference on computer logic held at Tallinn, Estonian SSR on 12–16 December 1988 (which included Ershov, S. Lavrov, Mints, and D.A. Pospelov on the Program committee and Ershov, Lifschitz, Mints, A.L. Semenov and M.A. Taitslin among the invited speakers, as well as such internationally recognized logicians as J.-Y. Girard and J.C. Shepherdson on the program committee and included among the invited speakers), and Logic at Botik '89: Seminar on the Logical Foundations of Computer Science, held at Pereslavl-Zalesskii in July 1989, which received wide attention through the American Mathematical Society. Nor must we forget to mention regular International congresses of Logic, Methodology and Philosophy of Science that provided the opportunity for Soviet logicians to present their works directly to Western colleagues. For instance the volume of Sixth congress included the works by N.N. Nepeivoda "Logical Approach to Program-ming", Y. Gurevich "Crumbly Spaces", E.A. Palyutin "Number of Models in Complete Varieties", E.K. Voishvillo "Semantic of generalized State Descriptions", V.N. Kostyuk "Possible Worlds and the Ontology of a Scientific Theory". Some Soviet logicians have had poor English, but their works were translated by native speakers. Very successful Eighth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science took place on 17–22 August 1987 in Moscow, on the campus of Moscow State University and which attracted 1500 scientists from throughout the world.

V.A. Smirnov (1931–1996) and his logical school at the Institute of Philosophy of the Academy of Sciences in Moscow did his best to ensure close collaboration of Soviet/Russian scholars with Western counterparts. He was among organizers of regular Soviet-Polish and Soviet-Finnish Conferences on Logic and Methodology of Science [Smirnov, 1979]. Some of his works were published

in leading European logical journals [Smirnov, 1971; Smirnov, 1973; Smirnov, 1982; Smirnov, 1983; Smirnov, 1986a; Smirnov, 1986b; Smirnov, 1987]. His spouse was logician as well [Smirnova, 1997; Smirnova, 1998; Smirnova, 2000a; Smirnova, 2000b; Smirnova, 2001]. Smirnov's left numerous pupils and may be considered as major figures in Soviet/Russian school of philosophical logic thought. Some of Ph.D. students Smirnov's introduced to the Western logical community [Gerasimova, 1996; Karpenko, 1996; Popov, 1996; Vasyukov, 1988; Vasyukov, 1993; Vasyukov, 1994]. After Smirnov's has gone, memorial notes were published [Bazhanov, 1996; Vasyukov, 1996; Finn, 2000] as well as his complete bibliography [Modern Logic, 1997]. Since 1997 Smirnov's readings took place in Moscow on regular base.

5. Conclusion

All of these considerations, taken together, should give a representative indication of the international significance of Russian and Soviet work in logic and of the integration of Russian and Soviet work into the whole network of developments of mathematical logic. It is also clear that a survey of the history of mathematical logic in Russia and the Soviet Union in a Western language is long overdue, and in general that a new systematic and comprehensive history in the tradition of Yanovskaya is warranted at this time.

Acknowledgements. We would like to thank V.I. Shalack and two anonymous reviewers for their thoughtful comments and useful suggestions to improve the paper informative content. The research of V.A. Bazhanov was financially supported by the Russian Science Foundation grant No. 21-18-00428 (Russian Society for History and Philosophy of Science).

References

- Abeles, Fuller, 2016 – *Modern Logic 1850–1950, East and West (Studies in Universal Logic)*, F.F. Abeles, M.E. Fuller (eds.). Springer; Birkhauser, 2016. 256 pp.
- Anellis, 1987 – Anellis, I.H. “The heritage of S.A. Janovskaja”, *History and Philosophy of Logic*, 1987, Vol. 8, pp. 45–56.
- Anellis, 1987a – Anellis, I.H. “Sof’ja Aleksandrovna Janovskaja (1896–1966)”, in: *Women of Mathematics: A Biobibliographic Sourcebook*, eds. by L.S. Grinstein, P.J. Campbel. New York: Westport; CT/London: Greenwood Press, 1987, pp. 80–85.
- Anellis, 1988 – Anellis, I.H. “Maslov’s inverse method and its application to programming logic”, in: *Iowa State University Conference on Algebraic Logic and Universal Algebra in Computer Science, 1–4 June 1988*, ed. by C. Bergman. New York: Ames, Iowa, Abstracts, 1988, p. 2.
- Anellis, 1996 – Anellis, I.H. “Sof’ya Aleksandrovna Yanovskaya’s contributions to logic and history of logic”, *Modern Logic*, 1996, Vol. 6, pp. 7–36.

- Antonova et al., 2001 – *Logika: Biobibliograficheskii spravochnik (Rossiya – SSSR – Rossiya)* [Logic: A Biobibliographical Directory (Russia–the USSR–Russia)], compiled by O. Antonova, A. Miloslavov, T. Sokhor. SPb: Nauka, 2001. 488 pp.
- Bazhanov, 1988 – Bazhanov, V.A. *Nikolai Aleksandrovich Vasiliev* [Nikolay Alexandrovich Vasiliev]. Moskva: Nauka, 1988, p. 144. (In Russian)
- Bazhanov, 1990 – Bazhanov, V.A. “The fate of one forgotten idea: N.A. Vasiliev and his imaginary logic”, *Studies in Soviet Thought*, 1990, Vol. 37, pp. 333–341.
- Bazhanov, 1992 – Bazhanov, V.A. “C.S. Peirce’s influence on the logical work of N.A. Vasiliev”, *Modern Logic*, 1992, Vol. 3, pp. 45–51.
- Bazhanov, 1994 – Bazhanov, V.A. “The imaginary geometry of N.I. Lobachevsky and the imaginary logic of N.A. Vasiliev”, *Modern Logic*, 1994, Vol. 4, No. 2, pp. 148–156.
- Bazhanov, 1996 – Bazhanov, V.A. “Vladimir Aleksandrovich Smirnov”, *Modern Logic*, 1996, Vol. 6, No. 2, p. 197.
- Bazhanov, 2001a – Bazhanov, V.A. “The Origins and Emergence of Non-Classical Logic in Russia (Nineteenth Century until the Turn of the Twentieth Century)”, in: *Zwischen traditioneller und moderner Logik. Nicht-klassische Ansätze*. Paderborn: Mentis-Verlag, 2001, pp. 205–217.
- Bazhanov, 2001b – Bazhanov, V.A. “Restoration: S.A. Yanovskaya’s Path in Logic”, *History and Philosophy of Logic*, 2001, Vol. 22, No. 3, pp. 129–133.
- Bazhanov, 2007 – Bazhanov, V.A. *Istoriya logiki v Rossii i SSSR* [History of Logic in Russia and the USSR]. Moscow: Canon+, 2007. 336 pp.
- Bazhanov, 2009 – Bazhanov, V.A. *N.A. Vasiliev i yego voobrazhayemaya logika. Voskresheniye odnoy zabytoy idei* [N.A. Vasiliev and His Imaginary Logic. The Resurrection of One Forgotten Idea]. Moscow: Canon+, 2009. 240 pp.
- Bazhanov, 2013 – Bazhanov, V.A. “The Logical Community in the USSR and Modern Russia: The Furrow Syn-drome”, in: *Logic in Central and Eastern Europe History, Science, and Discourse*. University Press of America, 2013, pp. 65–72.
- Bazhanov, 2016 – Bazhanov, V.A. *Russian Origins of Non-Classical Logic, Modern Logic 1850–1950, East and West (Studies in Universal Logic)*, eds. by Francine F. Abeles, Mark E. Fuller. Springer; Birkhauser, 2016, pp. 197–203.
- Bazhanov, 2017 – Bazhanov, V.A. “From Under the Rubble: Logic and Philosophy of Logic in the USSR and the Ideologized Science Phenomenon”, *Social Epistemology*, 2017, Vol. 31, No. 1, pp. 66–77.
- Beeson, 1985 – Beeson, M.J. *Foundations of Constructive Mathematics: Metamathematical Studies*. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1985. 465 pp.
- Biryukov, 2001 – Biryukov, B.V. “Die Antozipation nichtklassischer Iden durch russische Logikere Ende des 19. Und Anfang des 20. Jahrhunderts”, *Zwischen traditioneller und moderner Logik. Nichtklassische Ansätze*. Paderborn: Mentis-Verlag, 2001, pp. 219–238.
- Bochenski, 1961 – Bochenski, J.M. “Soviet logic”, *Studies in Soviet Thought*, 1961, Vol. 1, pp. 29–38.

- Bochenski, 1967 – Bochenski, J.M. “Sof’ja Aleksandrovna Janovskaja” [Sofia Alexandrovna Yanovskaya], *Studies in Soviet Thought*, 1967, Vol. 7, pp. 66–67.
- Bochenski, 1973 – Bochenski, J.M. “S.A. Janovskaja”, *Studies in Soviet Thought*, 1973, Vol. 13, pp. 1–10.
- Cavaliere, 1985 – Cavaliere, F. “Cenni sul recente dibattito nell’ ambito delle logiche formali in Unione Sovietica”, *Epistemologia*, 1985, Vol. 8, pp. 321–328.
- Cavaliere, 1988 – Cavaliere, F. “Il dibattito sulla logica in Unione Sovietica (1945–1965)”, *Rivista di Storia della Filosofia*, 1988, No. 3, pp. 533–569.
- Cavaliere, 1990 – Cavaliere, F. *La logica formale in Unione Sovietica: Gli anni del dibattito, 1946–1965*. Firenze: La Nuova Italia Editrice, 1990. 140 pp.
- Chagrov, Zakharyashev, 1997 – Chagrov, A., Zakharyashev, M. *Modal Logic* (Oxford Logic Guides, vol. 35). Oxford: University Press Oxford, 1997. 605 pp.
- Cogan, 1962 – Cogan, E.J. “Review of Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics, by S.A. Yanovskaya”, *Journal of Symbolic Logic*, 1962, Vol. 27, p. 470.
- Comey, 1962 – Comey, D.D. “Two recent Soviet conferences on logic”, *Studies in Soviet Thought*, 1962, Vol. 2, pp. 21–36.
- Comey, 1966 – Comey, D.D. “Current trends in Soviet logic”, *Inquiry*, 1966, Vol. 9, pp. 94–108.
- Cutland, 1983 – Cutland, N. *Vychislimost’. Vvedenie v teoryu rekursivnykh funktsii* [Extensiveness. Introduction to the theory of recursive functions]. Moscow: Mir, 1983. 255 pp. (In Russian)
- Dragalin, 1988 – Dragalin, A.G. *Mathematical Intuitionism: Introduction to Proof Theory. Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 67, trans. by E. Mendelson. Providence: American Mathematical Society, 1988. 228 pp.
- Ershov, 1977 – Ershov, Y.L. *Teoriya numeratsii* [Theory of Numeration], 3 tm. Novosibirsk: Izdat. Novosib. Gosud. Un-ta, 1977. 416 pp. (In Russian)
- Ershov, 1973–1977 – Ershov, Y.L. “Theorie der Numerierungen”, *Zeitschrift für mathematischen Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1973, Vol. 19, pp. 289–388; 1975, Vol. 21, pp. 473–584; 1977, Vol. 23, pp. 289–371.
- Ershov, 1983 – Ershov, Y.L. “Matematicheskaya logika i osnovaniya matematiki” [Mathematical logic and foundations of mathematics], in: *Ocherki razvitiya matematiki v SSSR* [Essays on the Development of Mathematics in the USSR]. Kiev: Naukova Dumka, 1983, pp. 57–61. (In Russian)
- Ershov, Palyutin, 1979 – Ershov, Y.L., Palyutin, E.A. *Matematicheskaya logika* [Mathematical Logic]. Moscow: Nauka, 1979. 336 pp. (In Russian)
- Ershov, Palyutin, 1984 – Ershov, Y.L., Palyutin, E.A. *Mathematical Logic*. Moscow: Mir, 1984. 303 pp. (English translation by V. Shokurov, revised from Ershov, Palyutin, 1979.)
- Finn, 2000 – Finn, V.K. “Vladimir Alexandrovich Smirnov as a Founder of Research Schools in Logic and Methodology of Science in the USSR and Russia”, *Studia Logica*, 2000, No. 2, pp. 205–213.

- Gerasimova, 1996 – Gerasimova, I. “Normative Reasonings and Default Assumptions”, in: *Philosophical Logic and Logical Philosophy*, ed. by P.I. Bystrov, V. Sadovsky. Netherlands: Kluwer Acad. Press, 1996, pp. 203–212.
- Getmanova, 1989 – Getmanova, A.D. *Logic*. Moscow: Progress Publishers, 1989. 357 pp. (Trans. by S. Smith of: Logika. Moscow: Vysshaya shkola.)
- Getmanova et al., 1990 – Getmanova, A.D., Panov, M.I., Panov, V.V. *Logic Made Simple: A Dictionary*. Moscow: Progress Publishers, 1990. 356 pp. (Trans. by S. Syrovatkin of their: Logika: prosto o slozhnom. Slovar’.)
- Gnedenko, 1946 – Gnedenko, B.V. *Ocherki po istorii matematiki v Rossii* [Essays on the History of Mathematics in Russia]. Moscow: OGIZ, 1946. 246 pp. (In Russian)
- Hackstaff, Bochenski, 1962 – Hackstaff, L.H., Bochenski, J.M. “A study of many-valued logic”, *Studies in Soviet Thought*, 1962, Vol. 2, pp. 37–48.
- Hänggi, 1967 – Hänggi, J. “Die Entwicklung der Diskussion um die formale Logik in der Sowjetunion”, *Studies in Soviet Thought*, 1967, Vol. 7, pp. 142–153.
- Hänggi, 1971 – Hänggi, J. *Bibliographie der Sowjetischen Logik*. Winterthur, 1971.
- Holden, 1984 – Holden, C. “Russian influence in science diminishing”, *Science*, 1984, Vol. 223, p. 1155.
- Karpenko, 1996 – Karpenko, A.S. “A Logic Without Fixed Points”, in: *Philosophical Logic and Logical Philosophy*, ed. by P.I. Bystrov, V. Sadovsky. Netherlands: Kluwer Acad. Press, 1996, pp. 213–219.
- Karpenko, 2013 – Karpenko, A.S. “Moscow Logical Schools (Period of Ideology 1917–1991)”, *Logic in Central and Eastern Europe History, Science, and Discourse*. Lanham: University Press of America, 2013, pp. 317–380.
- Kasinec, 1978 – Kasinec, E. “A bibliographical essay on the documentation of Russian Orthodoxy during the imperial era”, *Russian Orthodoxy under the Old Regime*, R.L. Nichols, T.G. Stavrou (eds.). Minneapolis: University of Minnesota Press, 1978, pp. 202–228.
- Kline, 1951 – Kline, G.L. “Review of Foundations of Mathematics and Mathematical Logic by S.A. Yanovskaya”, *Journal of Symbolic Logic*, 1951, Vol. 16, pp. 46–48.
- Kolmogorov, 1925 – Kolmogorov, A.N. “O principe tertium non datur” [On principle tertium non datur], in: *Matematicheskyy Sbornik* [Mathematical Collection], 1925, Vol. 32, pp. 646–667. (English trans. by J. van Heijenoort: Kolmogorov, 1967.) (In Russian)
- Kolmogorov, 1932 – Kolmogorov, A.N. “Zur Deutung der intuitionistischen Logik”, *Mathematische Zeitschrift*, 1932, Vol. 35, pp. 58–65.
- Kolmogorov, 1967 – Kolmogorov, A.N. “On the principle of excluded middle”, in: *From Frege to Gödel: a source-book in mathematical logic, 1879–1931*, ed. by J. van Heijenoort. Cambridge; Massachusetts: Harvard University Press, 1967, pp. 416–437; with an “Introduction” by Hao Wang van Heijenoort, 1967, pp. 414–416.
- Kolmogorov, Yushkevich, 1978 – Kolmogorov, A.N., Yushkevich A.P. *Matematika XIX veka* [Mathematics in XIX century]. Moscow: Nauka, 1978. 256 pp. (English trans.: [Kolmogorov, Yushkevich, 1992].) (In Russian)

- Kolmogorov, Yushkevich, 1992 – Kolmogorov, A.N., Yushkevich, A.P. *Mathematics of the 19th Century: Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory*, trans. by A. Shenitzer, et al. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verlag, 1992. 332 pp.
- Kormin, Anellis, 2000 – Kormin, H., Anellis, I.H. *An Annotated Bibliography of Western-Language (mainly English) Sources for the History of Formal Logic in Russia*. Ames: Studio 2K/MLP Books, 2000. 52 pp.
- Küng, 1961 – Küng, G. “Mathematical logic in the Soviet Union (1917–1947 and 1947–1957)”, *Studies in Soviet Thought*, 1961, Vol. 1, pp. 39–43.
- Küng, 1962 – Küng, G. “Bibliography of Soviet work in the field of mathematical logic and the foundations of mathematics, from 1917 to 1957”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1962, Vol. 3, pp. 1–40.
- Kushner, 1993 – Kushner, B.A. “Markov and Bishop: An Essay in Memory of A.A. Markov and E. Bishop (1928–1983)”, in: *Golden Years of Moscow Mathematics*, S. Zdravkovskaya, P.L. Duren (eds.). Providence: American Mathematical Society; London: London Mathematical Society, 1993, pp. 179–197.
- Kushner, 1994 – Kushner, B.A. “Memories of Mech.-Math. in the ‘Sixties, inspired by Uspensky’s Journal of Symbolic Logic article on Kolmogorov’s work in logic”, *Modern Logic*, 1994, Vol. 4, pp. 165–195.
- Kushner, 1996 – Kushner, B.A. “Sof’ja Aleksandrovna Janovskaja: A few reminiscences”, *Modern Logic*, 1996, Vol. 6, pp. 67–72.
- Kuzicheva, 1978 – Kuzicheva, Z.A. “Matematicheskaya logika [Mathematical logic]”, in: *Matematika XIX veka*, A.N. Kolmogorov, A.P. Yushkevich (eds.). Moscow: Nauka, 1978, pp. 11–38, w/refs, pp. 242–243. (English translation: Kuzicheva, 1992.) (In Russian)
- Kuzicheva, 1991 – Kuzicheva, Z.A. “Nikolai Ivanovich Styazhkin (kratkii ocherk zhizni i nauchnoi deyatel’nosti)” [Nikolay Ivanovich Styazhkin (a brief outline of life and scientific activity)], *Modern Logic*, 1991, Vol. 2, pp. 53–169. (In Russian)
- Kuzicheva, 1991a – Kuzicheva, Z.A. “Ukazatel’ opublikovannykh nauchnykh rabot starshego nauchnogo sotrudnika, professora, doktora filosofskikh nauk Styazhkina Nikolaya Ivanovicha za period s 1956 po 1986 gg.” [Index of published scientific works of senior researcher, professor, doctor of philosophical sciences Nikolai Ivanovich Styazhkin for the period from 1956 to 1986], *Modern Logic*, 1991, Vol. 2, pp. 170–188. (In Russian)
- Kuzicheva, 1992 – Kuzicheva, Z.A. “Mathematical Logic”, in: *Mathematics of the 19th Century: Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory*, A.N. Kolmogorov, A.P. Yushkevich (eds.), trans. by A. Shenitzer et al. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verlag, 1992, pp 1–34, w/refs. pp. 291–293.
- LaSalle, Lefschetz, 1962 – *Recent Soviet Contributions to Mathematics*, J.P. LaSalle, S. Lefschetz (eds.). New York; London: Macmillan, 1962. 324 pp.
- LaSalle, Lefschetz, 1962a – LaSalle, J.P. Lefschetz, S. “A general appraisal of mathematics in the USSR”, in: *Recent Soviet Contributions to Mathematics*, J.P. LaSalle, S. Lefschetz (eds.). New York; London: Macmillan, 1962, pp. 3–13.

- Lifschitz, 1986 – Lifschitz, V. *Mechanical Theorem Proving in the USSR (The Lenin-grad School)*. Falls Church, Virginia: Delphic Associates, 1986. 103 pp.
- Logical Legacy, 2017 – *The Logical Legacy of Nikolai Vasiliev and Modern Logic*, V. Markin, D. Zaitsev (eds.). Springer, 2017. 221 pp.
- Mal'tsev, 1971 – Mal'tsev, A.I. *The Metamathematics of Algebraic Systems, Collected Papers: 1936–1967*, transl. by B.F. Wells. Amsterdam; London: North-Holland, 1971. 494 pp.
- Manin, 1977 – Manin, Y.I. *A Course in Mathematical Logic*, transl. by N. Koblitz. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1977. 384 pp.
- Maslov et al., 1971 – Maslov, S.Yu., Mints, G.E., Orevkov V.P. “Mechanical proof-search and the theory of logical deduction in the USSR”, *Revue Internationale de Philosophie*, 1971, Vol. 25, pp. 575–584.
- Medvedev, 1982 – Medvedev, F.A. “Über ein Theorem von G. König”, *NTM-Schriften. Geschichte Naturwiss. Techn. und Med.*, 1982, Vol. 19, pp. 15–20.
- Mendelson, 1986a – Mendelson, E. “Review of Mathematical Logic by E.A. Palyutin & Yu.L. Ershov”, *Journal of Symbolic Logic*, 1986, Vol. 51, No. 3, p. 829.
- Mints, 1986b – Mints, G.E. “Review of Mathematical Logic by E.A. Palyutin & Yu.L. Ershov”, *Journal of Symbolic Logic*, 1986, Vol. 51, No. 3, pp. 827–829.
- Mints, 1989 – Mints, G.E. “Proof theory in the USSR 1925–1969”, in: *Proceedings, COLOG-88, Tallinn, Estonian Academy of Sciences, Tallinn, Eston. SSR, December 12–16, 1988*. Berlin: Springer, 1989, pp. 25–66.
- Mints, 1991 – Mints, G.E. “Proof theory in the USSR 1925–1969”, *Journal of Symbolic Logic*, 1991, Vol. 56, pp. 385–424.
- Modern Logic, 1997 – “Bibliografiya Nauchnykh Trudov V.A. Smirnova” [Bibliography of V.A. Smirnov's Academic Works], *Modern Logic*, 1997, Vol. 7, No. 3/4, pp. 345–359. (In Russian)
- Nikitin, 1962 – *Ocherki po istorii logiki v Rossii* [Essays on the History of Logic in Russia], ed. by P.I. Nikitin. Moscow: Izdat. Moskov. Un-ta, 1962. 256 pp. (In Russian)
- Novikov, 1943 – Novikov, P.S. “On the Consistency of Certain Logical Calculus”, *Matematicheskii Sbornik*, 1943, Vol. 12 (54), pp. 231–261.
- Novikov, 1964 – Novikov, P.S. *Elements of Mathematical Logic*, transl. by L.F. Boron. Edinburgh; London: Addison-Wesley, 1964. 296 pp.
- Novikov, 1973 – Novikov, P.S. *Grundzüge der mathematischen Logik*. Berlin: VEB Deutscher-Verlag, 1973. 302 pp.
- Popov, 1996 – Popov, V.M. “The Sequent Variant of System R”, in: *Philosophical Logic and Logical Philosophy*, P.I. Bystrov, V. Sadovsky (eds.). Netherlands: Kluwer Acad. Press, 1996, pp. 227–234.
- Primakovskii, 1955 – Primakovskii, A.P. *Bibliografiya po logike. Khronologicheskii ukazatel' Proizvedenii po voprosam logiki*, *Izdannykh na Russkom yazyke v SSSR v XVIII–XX vv.* [Bibliography on logic. Logical works published in Russian language in the USSR within XVIII–XX]. Kiev: Akad. Nauk Ukrain. SSR, 1955. 95 pp. (In Russian)

- Salii, 1988 – Salii, V.N. “Lattices with Unique Complements”, in: *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 69, transl. by G.A. Kandall. Providence: American Mathematical Society, 1988. XI, p. 113.
- Schumann, 2013 – *Logic in Central and Eastern Europe, 2013 – Logic in Central and Eastern Europe: History, Science, and Discourse*, ed. by A. Schumann. Lanham: University press of America, 2013. 730 pp.
- Silver, 1987 – “Six Papers in Logic”, in: *American Mathematical Society Translations (2)*, Vol. 135, ed. by B. Silver. Providence: American Mathematical Society, 1987. X, p. 79.
- Smirnov, 1971 – Smirnov, V.A. “Elimination des termes dans la logique intuitionniste”, *Revue internationale de philosophie*, 1971, No. 98, Fasc. 4, pp. 512–519.
- Smirnov, 1973 – Smirnov, V.A. “An Absolute First Order Predicate Calculus”, *Bull. of the Section of Logic*, 1973, Vol. 3, pp. 38–45.
- Smirnov, 1979 – Smirnov, V.A. “Theory of Quantification and e-calculi”, *Essays on Mathematical and Philosophical Logic. Proceedings of the Fourth Scandinavian Logic Symposium and of the First Soviet-Finnish Logic Conference, Jyväskylä, Finland, June 29–July 6, 1976*, J. Hintikka, I. Niiniluoto, E. Saarinen (eds.). Dordrecht; Holland; Boston: D. Reidel, 1979, pp. 41–47.
- Smirnov, 1982 – Smirnov, V.A. “The Definition of Modal Operators by Means of Tense Operators”, *Acta Philosophica Fennica*, 1982, Vol. 35: Intensional Logic: Theory and Applications, pp. 50–69.
- Smirnov, 1983 – Smirnov, V.A. “Embedding the Elementary Ontology of S. Lesniewski into the Monadic Second Order Calculus of Predicates”, *Studia Logica*, 1983, Vol. 42, No. 2–3, pp. 197–207.
- Smirnov, 1986a – Smirnov, V.A. “Logical Relations Between Theories”, *Synthese*, 1986, Vol. 66, No. 1, pp. 71–87.
- Smirnov, 1986b – Smirnov, V.A. “Modality de re and Vasiliev’s Imaginary Logics”, *Logique et Analyse*, 1986, Vol. 45, No. 114, pp. 205–211.
- Smirnov, 1987 – Smirnov, V.A. “Strict Embedding of the Elementary Ontology into the Monadic Second-Order Calculus of the Predicates Admitting the Empty Individual Domain”, *Studia Logica*, 1987, Vol. 46, No. 1, pp. 1–15.
- Smirnova, 1997 – Smirnova, E.D. “Scaffolding” of the World and Logic. A Logical-Semantic Analysis of Wittgenstein’s Tractatus”, *Analyomen 2. Proceedings of the 2nd Conference “Perspectives in Analytical Philosophy”*, Vol. 2. Berlin; New York: 1997, pp. 241–247.
- Smirnova, 1998 – Smirnova, E.D. “An approach to nonstandard semantics and some problems of the foundation of logical systems”, *Bull. of the Section of Logic*, 1998, Vol. 27, No. 1/2, pp. 82–84.
- Smirnova, 2000a – Smirnova, E.D. *Logic in Philosophy and Philosophical Logic*. New York: The Edwin Mellen press Ltd., 2000a. 392 pp.
- Smirnova, 2000b – Smirnova, E.D. “An approach to the justification of semantics to paraconsistent logics”, in: *Frontiers of Paraconsistent Logic*, D. Batens,

- C. Mortensen, G. Priest, J.-P. Van Bendegem (eds.), No. 8. Baldock: Research Studies Press Ltd., 2000, pp. 255–262.
- Smirnova, 2001 – Smirnova, E.D. “The problem of formalization of some nonstandard semantics”, *Logic and Logical Philosophy*, 2001, Vol. 9, pp. 153–157.
- Stolyar, 1970 – Stolyar, A.A. *Introduction to Elementary Mathematical Logic*, trans. by Scripta Technica, Inc., ed. by E. Mendelson. Cambridge; MA; London: MIT Press, 1970. 209 pp.
- Stolyar, 1983 – Stolyar, A.A. *Introduction to Elementary Mathematical Logic*. New York: Dover Publications, 1983. 209 pp.
- Styazhkin, 1969 – Styazhkin, N.I. *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano*. Cambridge; MA; London: MIT Press, 1969. 344 pp.
- Styazhkin, 1980 – Styazhkin, N.I. *Storia della logica*. Roma: Editori Riuniti, 1980. 331 pp.
- Styazhkin, Silakov, 1962 – Styazhkin, N.I., Silakov V.D. *Kratkii ocherk istorii obshchei i matematicheskoi logiki v Rossii* [Concise essay on history of general and mathematical logic in Russia]. Moscow: Vysshchaya Shkola, 1962. 88 pp. (In Russian)
- Thiel, 1991 – Thiel, Ch. *Projektantrag: Mathematische Logik in Rußland*. Universität Erlangen-Nürnberg, 1991. 12 pp.
- Uspenskii, 1974 – Uspenskii, V.A. “Teorema Gödelia o nepolnote v elementarnom izlozhenii” [Godel’s incompleteness theorem in elementary form], *Uspehi Matematicheskikh Nauk*, 1974, Vol. 29, No. 1, pp. 1–47. (In Russian)
- Uspenskii, 1983 – Uspenskii, V.A. *Post’s Machine*. English trans. by R. Alavina. Moscow: Mir, 1983. 88 pp.
- Uspenskii, 1987 – Uspenskii, V.A. *Gödel’s Incompleteness Theorem*. English translation by N. Koblitz. Moscow: Mir, 1987. 104 pp.
- van Heijenoort, 1967 – *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, ed. by J. van Heijenoort. Cambridge; MA: Harvard University Press, 1967. 664 pp.
- Vasilev, 1993 – Vasilev, N. “Logic and metalogic”, *Axiomathes*, 1993, No. 3, pp. 329–351. (Transl. by Vasyukov V.L.)
- Vasyukov, 1988 – Vasyukov, V.L. “T-F-toposes for Lukasiewicz’s infinite valued logics”, *Bull. Sect. Logic*, 1988, Vol. 17, No. 3/4, pp. 182–190.
- Vasyukov, 1993 – Vasyukov, V.L. “A Lesniewskian Guide to Husserl’s and Meinong’s jungle”, *Axiomathes*, 1993, No. 1, pp. 59–74.
- Vasyukov, 1994 – Vasyukov, V.L. “From Ternary to Tetrarary?”, *Bull. Sect. Logic*, 1994, Vol. 23, No. 4, pp. 163–167.
- Vasyukov, 1996 – Vasyukov, V.L. “In Memoriam: Vladimir Aleksandrovich Smirnov”, *Bull. of Symbolic Logic*, 1996, No. 2, pp. 371–372.
- Walicki, 1979 – Walicki, A. *A History of Russian Thought from the Enlightenment to Marxism*, trans. from the Polish by H. Andrews-Rusiecka. Stanford: Stanford University Press, 1979. 456 pp.

- Weidle, 1961 – Weidle, W. *Russia Absent and Present*. New York: Vintage Books, 1961. 164 pp.
- Winkelmann, 1956 – Winkelmann, A. “Die Stellung der formalen Logik im Sowjetunion”, *Scholastik*, 1956, Vol. 1, pp. 85–89.
- Winkelmann, 1957 – Winkelmann, A. “Formal logic in Soviet philosophy”, *Philosophy Today*, 1957, Vol. 1, pp. 26–28.
- Yaglom, 1978 – Yaglom, I.M. *An Unusual Algebra*. Moscow: Mir, 1978. 128 pp. (English trans. by I.G. Volosova.)
- Yanovskaya, 1948 – Yanovskaya, S.A. “Osnovaniya matematiki i matematicheskaya logika” [Foundations of mathematics and mathematical logic], in: *Matematiki v SSSR za tridcat let, 1917–1947* [Mathematics in the USSR from 1917 to 1947], A.G. Kurosh, A.I. Markushevich, P.K. Rashevskii (eds.). Moscow; Leningrad: GITTL, 1948, pp. 9–50. (In Russian)
- Yanovskaya, 1959 – Yanovskaya, S.A. “Matematicheskaya logiki i osnovani matematiki” [Foundations of mathematics and mathematical logic], in: *Matematika v SSSR za sorok let, 1917–1957 Mathematics in the USSR from 1917 to 1957, tm. 1*. Moscow: Fiz-matgiz., 1959, pp. 13–120. (In Russian)
- Yushkevich, 1968 – Yushkevich, A.P. *Istoriya v matematiki v Rossii do 1917 goda* [History of mathematics in Russia until 1917]. Moscow: Nauka, 1968. 592 pp. (In Russian)
- Zinov’ev, 1963 – Zinov’ev, A.A. *Philosophical Problems of Many-Valued Logic*. Netherlands: Springer, 1963. 155 pp.
- Zinov’ev, 1968 – Zinov’ev, A.A. “Logic in the USSR”, in: *Contemporary Philosophy, A Survey, I. Logic and Foundations of Mathematics*, ed. by R. Klibansky. Firenze: La Nova Italia Editrice, 1968, pp. 209–219.
- Zinov’ev, 1973 – Zinov’ev, A.A. *Foundations of the Logical Theory of Scientific Knowledge (Complex Logic)*. Ed. by T. Blakeley. Netherlands: Springer, 1973. 301 pp.
- Zinov’ev, 1983 – Zinov’ev, A.A. *Logical Physics*. Ed. by R.S. Cohen. Netherlands: Springer, 1983. 282 pp.
- Zozulya, Fomin, 1955 – Zozulya, A.M., Fomin O.P. “Nedobrokachestvennyi ukazatel’ po logike” [Poor bibliography on logic], *Sovetskaya bibliografiya* [Soviet Bibliography], 1955, No. 41, pp. 82–86. (In Russian)

Аналитические обзоры
Analytical overviews

О.М. ГРИГОРЬЕВ

**Системы временной логики I:
моменты, истории, деревья***

Олег Михайлович Григорьев

МГУ им. М.В. Ломоносова.

Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.

E-mail: grig@philos.msu.ru

Аннотация: В статье дается обзор семантических структур и формализованных языков ряда пропозициональных логик линейного и ветвящегося времени, даны ссылки на основные технические результаты, связанные с формализациями (в виде аксиоматических исчислений гильбертовского типа) этих логических систем. Рассматриваемые модельные структуры строятся на основании онтологии, предполагающей наличие моментов времени и в некоторых случаях образуемых ими историй. Языки систем ветвящегося времени, затрагиваемых в настоящей статье, расширяют стандартный язык классической логики высказываний за счет добавления прайоровских временных операторов, а также модальностей, играющих роль кванторов на множестве историй. Язык некоторых логик линейного времени содержит также операторы типа Until, Since и NextTime.

Ключевые слова: логика времени, линейное время, ветвящееся время, индетерминизм, будущие случайные события

Для цитирования: Григорьев О.М. Системы временной логики I: моменты, истории, деревья // Логические исследования / Logical Investigations. 2021. Т. 27. № 2. С. 153–184. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-153-184

Введение

Логики времени (временные логики) возникают и изучаются в связи с поиском решений различных познавательных задач, понимаемых достаточно широко: от описания свойств конкретных вычислений до глубоких философских проблем. Среди таких задач можно выделить по крайней мере следующие:

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-011-00698а.

1. Логический анализ оременённых (т.е. содержащих временные параметры или характеристики) высказываний естественного языка и рассуждений, в которых временные параметры или характеристики высказываний существенны (см., например, вводные главы книг [Rescher, 1971; McArthur, 1976; Galton, 1987]).
2. Разработка философской проблематики, связанной с оппозицией предопределенности и свободы воли, детерминизма и индетерминизма ([Thomason, 1970; Belnap et al., 2001; Belnap et al., 2021; Correia, Iacona, 2013; Øhrstrøm, 2006]).
3. Исследование различных временных онтологий и обусловленных ими формальных моделей времени ([van Benthem, 1983; van Benthem, 1995; Hajnicz, 1996]).
4. Описание вычислительных процессов, развивающихся во времени, с помощью того или иного формализованного языка, анализ временных аспектов представления знания, извлечения информации из изменяющихся баз данных и т.п. ([Emerson, 1990; Kröger, Merz, 2008; Fisher et al., 2005; Demri et al., 2016]).

Разумеется, этот перечень не претендует на полноту охвата всей проблемной области¹, однако важным здесь является следующее обстоятельство. Каждый из вышеперечисленных пунктов можно принять за отправную точку при изучении как истории формирования и развития логики времени в целом, так и особенностей отдельных ее составляющих: формализованных языков, их возможных интерпретаций, теорий и их представлений в виде формальных систем. Хочется также надеяться, что приведенный список демонстрирует одну важную особенность временной логики, а именно что мотивации для ее развития происходят из очень разных источников: от лингвистического анализа системы времен глаголов до прикладных аспектов компьютерных наук и разработки искусственного интеллекта.

Для философской логики традиционный интерес представляют временные онтологии и определяемые ими семантические структуры, формализации теорий классов тех или иных семантических структур, анализ выразительных возможностей формализованных языков временных логик (см., например, тематику разделов главы [Burgess, 2002]). Вычислительно

¹Заинтересованный читатель также может обратиться, например, к монографии [Gabbay et al., 1994, с. 3–6], где приводится детализированный перечень сфер применения временной логики с акцентом на использовании ее в компьютерных науках.

ориентированные временные системы, как правило, предназначены для решения конкретных прикладных задач (как, скажем, в работе [Gabbay et al., 1980]).

Логический анализ времени предполагает принятие той или иной его онтологии, то есть представления о том, что собой представляют элементарные, исходные сущности (индивиды), образующие время, и какие имеются отношения между ними. В качестве элементарных сущностей обычно² берутся моменты времени (неделимые точки) или интервалы, имеющие, в отличие от моментов, протяженность. Иногда рассматривают смешанный вариант (подробнее об этом см. в [van Benthem, 1983, гл. I.1.]). В логиках ветвящегося времени самостоятельным онтологическим статусом могут обладать *истории* (см., например, [Zanardo, 2003]), то есть линейно упорядоченные множества моментов времени. Существуют и иные разновидности исходных онтологических объектов, распространенные в литературе по временной логике, разрабатываемой в рамках исследований по искусственному интеллекту. Упомянем здесь логики действий, событий (см. [Allen, 1984; Allen, Ferguson, 1994] и [Hajnicz, 1996, гл. 1.1]). Варьирование свойств отношений между исходными сущностями времени определяет специфику его «устройства»: оно может иметь (не иметь) начальный (конечный) момент, быть дискретным или плотным, непрерывным или имеющим пробелы, ветвиться в прошлое (будущее) или же нет (подробнее см. [Goranko, Rumberg, 2020]).

Можно далее сказать, что допущение тех или иных исходных онтологических сущностей и характера устройства временного потока порождает самостоятельные традиции внутри общего направления логики времени. Точечно ориентированные онтологии времени естественным образом находят свое формальное представление в виде реляционных структур, которые изучаются с использованием теоретико-модельных методов, разработанных в модальной логике (поэтому временные логики таких модельных структур иногда рассматриваются как разновидности модальной логики ([Blackburn et al., 2002]) или излагаются наряду со «стандартной» мономодальной логикой ([Goldblatt, 1992])). Интервальные семантики требуют несколько иных технических конструкций и развиваются в виде самостоятельной отрасли исследований (см. [Allen, 1984; Allen, Ferguson, 1994; van Benthem, 1983; van Benthem, 1995]). Отдельно могут изучаться логики се-

²Как пишет ван Бентем в книге [van Benthem, 1983, гл. I.1.], «превалирующее математическое изображение времени — это множество точек (мгновений, моментов), не имеющих протяженности. Такое представление встречается уже в Античности, в классических парадоксах Зенона».

мантических структур, определяемых конкретными свойствами временных отношений. Например, это могут быть логики линейного времени, которое, в свою очередь, может быть дискретным, плотным, непрерывным и т.д. (ссылки на соответствующие исследования будут приведены ниже).

Еще один важный аспект изучения временных логик состоит в том, какие именно формализованные языки используются для построения логических теорий и какие временные операторы эти языки содержат. Основная часть исследований в рамках общего направления временной логики предполагает использование пропозициональных языков. Однако не менее важными и интересными являются исследования логических теорий в квантовых языках: с квантификацией по пропозициональным переменным; ограниченные первопорядковые языки, обогащенные временными модальностями. В настоящем обзоре будут фигурировать только пропозициональные языки. Временные логики в квантовых языках потребовали бы отдельного обзора.

За последние полвека логика времени претерпела впечатляющую эволюцию. Отчасти это объясняется различными по происхождению стимулами, определяющими развитие этой ветви неклассической логики. Первичными мотивациями были философские и даже грамматические изыскания³. Примерно с середины 70-х годов прошлого века (в особенности после выхода работы [Pnueli, 1977]) временная логика стала рассматриваться как средство для описания вычислительных процессов в теоретической информатике. Отсюда происходит некоторый параллелизм в развитии систем временной логики. Например, разнообразные логические системы ветвящегося времени активно изучаются в философской логике в рамках широкого контекста противопоставления детерминизма и индетерминизма, проблемы свободы воли и т.п., тогда как в компьютерных науках существуют родственные системы, логики вычислительных деревьев (хорошо известные системы **CTL** и **CTL***, а также их разновидности). Однако методы, развиваемые для решения метатеоретических задач, оказываются полезными как для «философских» систем временной логики, так и для их «вычислительных» напарников⁴.

Энциклопедический обзор текущего состояния области исследования, существующей и развивающейся под общим названием «временная логика», вряд ли возможен в объеме небольшой статьи. В рамках данного обзора мы сосредоточимся на временных системах, семантически основанных на онтологии, предполагающей наличие моментов времени и в некоторых

³Не случайно логика времени первоначально носила название *tense logic*, которое постепенно заменилось на *temporal logic*.

⁴В качестве примера укажем на работы [Reynolds, 2001; Reynolds, 2003].

случаях более сложных объектов — образуемых ими историй. С точки зрения устройства временного потока наиболее важным для данной статьи является наличие или отсутствие ветвления времени. Более пристальное внимание будет уделено логикам ветвящегося времени, изучаемым в русле философской логической традиции (иногда называемым логиками исторической необходимости, философскими напарниками логик вычислительных деревьев).

Настоящий обзор рассчитан не только на специалистов в области логики, но и на более широкий круг исследователей-философов, интересующихся логическими аспектами проблематики детерминизма/индетерминизма, онтологии времени, выразительными возможностями формализованных языков. В силу этого обстоятельства автор постарался не перегружать изложение материала сложными техническими деталями. В частности, в обзоре отсутствуют доказательства каких-либо утверждений, но в то же время выписываются некоторые хорошо известные специалистам-логикам сведения.

Литература по временной логике трудно обозрима, учитывая динамический характер развития данного направления и его широту. Без сомнения, и по сей день актуальными, богатыми философскими и логическими идеями остаются труды основоположника современных исследований в логике времени А. Прайора, в особенности его монографии [Prior, 1957; Prior, 1967]. Результаты Прайора получили развитие в книгах [Rescher, 1971; McArthur, 1976]. Хорошим источником информации по разнообразным модельным структурам (как точно, так и интервально ориентированным) может служить книга [van Benthem, 1983] и обзорная глава [van Benthem, 1995] того же автора. Наиболее значительным источником сведений технического характера является монография [Gabbay et al., 1994]. Большое количество справочной и библиографической информации имеется в [Blackburn et al., 2006, ch. 11] и [Goranko, Rumberg, 2020]. Вычислительные варианты временных логик представлены в [Emerson, 1990; Kröger, Merz, 2008; Demri et al., 2016]. Монография [Blackburn et al., 2002] также содержит обширную информацию по временной логике как разделу широко понимаемой модальной логики.

1. Логика линейного времени

Формальная модель времени (временной поток, временная шкала, временная модельная структура)⁵ представляет собой пару $\mathcal{T} = (T, <)$, состоящую из непустого множества моментов времени T и заданного на нем бинарного отношения $<$, которое по крайней мере иррефлексивно (то есть

⁵См., например, источники [Gabbay et al., 1994; Blackburn et al., 2006, гл. 11], в которых используется термин *flow of time* в указанном далее смысле. В русскоязычной литературе по модальной логике такие объекты называют (временными) *шкалами Крипке* или просто *шкалами*; в традиции философской логики часто употребляется термин (временная) *модельная структура*. Мы будем использовать все эти термины как синонимы.

$\forall t(t \not< t)$) и транзитивно ($\forall t_1 \forall t_2 \forall t_3 (t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_3 \Rightarrow t_1 < t_3)$). Следующее свойство, естественным образом добавляемое к указанным двум, — это линейность, или трихотомия ($\forall t_1 \forall t_2 (t_1 < t_2 \vee t_2 < t_1 \vee t_1 = t_2)$).

Сам по себе линейный временной поток может обладать рядом дополнительных свойств: наличие/отсутствие начального/конечного момента времени, дискретность/плотность, полнота, непрерывность⁶. Математические модели перечисленных видов линейных порядков — числовые множества: $(\mathbb{N}, <)$ — бесконечное в будущее дискретное время с начальным моментом; $(\mathbb{Z}, <)$ — бесконечное дискретное время без начального и конечного моментов; $(\mathbb{Q}, <)$ — бесконечное плотное время без начального и конечного моментов; $(\mathbb{R}, <)$ — бесконечное непрерывное время без начального и конечного моментов.

Числовые множества, таким образом, выступают в роли модельных структур. Коль скоро определены классы модельных структур, дальнейшая задача, решению которой посвящено большое количество работ по временной (и не только) логике, состоит в исследовании метатеоретических свойств логик этих классов. Можно ли построить адекватные семантикам исчисления (аксиоматического, секвенциального, аналитико-табличного или иного типа), решить проблему разрешения (множества теорем исчисления, общезначимых в классе определенных структур формул), исследовать сложность этой проблемы, если она решена, и т.д.?

1.1. Логика линейного времени в языке с прайоровскими модальностями

Логические теории линейных порядков строятся в рамках определенных формализованных (то есть интерпретированных искусственных [Tarski, 1935]) языков. Первоначально, в частности в работах А. Прайора, язык временной логики получался добавлением к языку классической логики высказываний двух исходных временных операторов, например, F (когда-нибудь будет) и P (когда-то было). Сильные модальности G (всегда будет) и H (всегда было) вводятся по определению: $GA \equiv_{df} \neg F\neg A$, $HA \equiv_{df} \neg P\neg A$. Модальности типа F и P иногда называют в литературе прайоровскими, так же как и сами языки, содержащие только эти операторы (или даже лишь один из них).

Временная модельная структура $\mathcal{T} = (T, <)$ становится моделью для прайоровского языка временной логики, если задана функция оценки на множестве PV пропозициональных переменных. Обычно это отображение $v: PV \mapsto 2^T$, которое каждой переменной ставит в соответствие множество моментов времени (в которых эта переменная полагается истинной). Для приписывания значений сложным формулам можно расширить функцию

⁶Определения этих свойств см., например, в [Burgess, 2002; Goranko, Rumberg, 2020].

оценки или же индуктивно определить отношение $\models$ истинности формулы A в момент времени t модельной структуры $\mathcal{T}$. Для случая классических пропозициональных связок определение истинности формулы стандартное для всех языков, рассматриваемых в данном обзоре. Напомним лишь условия истинности для формул с внешними прайоровскими модальностями в момент t модельной структуры $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}, t \models FA &\Leftrightarrow \exists t' (t < t' \wedge \mathcal{T}, t' \models A), \\ \mathcal{T}, t \models PA &\Leftrightarrow \exists t' (t' < t \wedge \mathcal{T}, t' \models A).\end{aligned}$$

Формула A общезначима во временной модельной структуре $\mathcal{T}$, если она истинна в каждой точке временной модельной структуры $\mathcal{T}$ при любой оценке v .

Формула A общезначима в классе временных модельных структур $\mathcal{C}$, если она общезначима в каждой модельной структуре этого класса. Логика класса модельных структур $\mathcal{C}$ есть множество всех общезначимых в этом классе формул.

Основные технические результаты, относящиеся к метатеоретическим свойствам логик линейных порядков в прайоровском языке, можно найти в монографии [Goldblatt, 1992, ch. 8]. Отметим здесь некоторые нюансы.

Конечная аксиоматизация логики шкалы $(\mathbb{N}, <)$ (логика, обозначенная как Ω), построенная в языке, содержащем только модальность будущего F , есть, по существу, расширение мономодальной системы **K**. Доказательство полноты системы аксиом обеспечивает также и *финитную аппроксимируемость* Ω , а значит (при учете *конечности* аксиоматизации), и разрешимость данной логики. Финитная аппроксимируемость обеспечивается тем, что фактически доказательство полноты аксиоматизации логики Ω относительно $(\mathbb{N}, <)$ сводится к доказательству полноты этой системы аксиом относительно класса конечных структур. Модификации данного метода одновременного доказательства полноты и финитной аппроксимируемости для логики Ω используются в тех же целях и для других систем логик линейного времени, изучаемых в той же главе. Конечные аксиоматизации логик модельных структур $(\mathbb{Q}, <)$ и $(\mathbb{R}, <)$ в мономодальном языке не различаются.

Временные логики числовых множеств в бимодальном прайоровском языке уже отличаются от мономодального случая. В той же главе 8 указанной монографии Гольдблатта (р. 78–83) даются конечные аксиоматизации логик множеств целых, рациональных и действительных чисел. В этом случае системы аксиом для логик структур $(\mathbb{Q}, <)$ и $(\mathbb{R}, <)$, как сами их логики, различны, поскольку в бимодальном языке можно выписать аксиому, характеристическую для $(\mathbb{R}, <)$, но опровержимую в $(\mathbb{Q}, <)$.

Дополнительные сведения о логиках линейного времени в прайоровском языке можно найти в монографии [Gabbay et al., 1994, ch. 6].

Минимальная система временной логики $\mathbf{K}_t$ представляет собой логику *всех* временных модельных структур, без каких-либо ограничений на отношение $<$, в том числе без иррефлексивности и транзитивности. Первые результаты, включая аксиоматизацию в языке с временными операторами F и P , были получены еще А. Прайором в [Prior, 1957]. Однако с содержательной точки зрения эта логика еще не «полноценная» временная, так как ее семантические структуры если и репрезентируют какую-то модель времени, то все же еще не вполне соответствующую философской интуиции времени. Расширения системы $\mathbf{K}_t$ получаются добавлением к числу ее аксиом новых постулатов, которым соответствуют определенные свойства временного потока (наличие или отсутствие начального / конечного моментов, дискретности/плотности и т.п.). На сегодняшний день наиболее важными как с философской, так и с прикладной точек зрения являются логики линейных порядков и логики деревьев. Основные технические сведения о системе $\mathbf{K}_t$ и ряде ее стандартных расширений приведены в [Goldblatt, 1992; Gabbay et al., 1994; Burgess, 2002].

1.2. Логика линейного времени в расширенных языках

Появление в языке временной логики двухместных модальностей *Until* и *Since* оказало серьезное влияние на развитие всей этой области исследований в целом, существенно расширив *выразительные возможности* ее формализованных языков. Данные модальности были введены в обиход в диссертации Х. Кампа ([Kamp, 1968]). Основным результатом Кампа связан с вопросом об уточнении выразительных возможностей языков временной логики. Кэмп показал, что 1) операторы *Until* и *Since* не выразимы в стандартном прайоровском языке временной логики и 2) в языке временной логики с *Until* и *Since* (говоря нестрого) выразимы все временные операторы на непрерывных строгих линейных порядках (таких, как $(\mathbb{R}, <)$), определимые в языке первопорядковой логики. В этом смысле расширенный операторами *Until* (U) и *Since* (S) язык временной логики является *выразительно полным*.

В литературе встречается как префиксная, так и инфиксная нотации для формул с данными операторами: $U(A, B)$ означает то же самое, что и BUA . В естественном языке выражение $U(A, B)$ читается как «будет A , и до того, как это случится, всегда будет B », $S(A, B)$ — как «было A , и с тех пор, как это случилось, всегда было B ».

Точный смысл утверждений с этими модальностями передается первопорядковыми условиями истинности⁷ для формул $U(A, B)$ и $S(A, B)$ в момент t модельной структуры $\mathcal{T}$:

⁷Заметим, что такой вариант семантических условий для U и S считается характерным для философской логической литературы (см. [Blackburn et al., 2006, с. 672–673]), тогда как в вычислительных вариантах логики линейного времени обычно употребляются «рефлексивные» разновидности этих операторов.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}, t \models U(A, B) &\Leftrightarrow \exists t'(t < t' \wedge \mathcal{T}, t' \models A \wedge \forall t''(t < t'' < t' \Rightarrow \mathcal{T}, t'' \models B)), \\ \mathcal{T}, t \models S(A, B) &\Leftrightarrow \exists t'(t' < t \wedge \mathcal{T}, t' \models A \wedge \forall t''(t' < t'' < t \Rightarrow \mathcal{T}, t'' \models B)).\end{aligned}$$

Прайоровские операторы выразимы через U и S : $FA \equiv_{df} U(A, \top)$, $PA \equiv_{df} S(A, \top)$.

Аксиоматизации логик всех линейных порядков в языке с модальностями U и S были предложены в статьях [Burgess, 1982; Xu, 1988]. Система аксиом логики множества действительных чисел была опубликована в работе [Reynolds, 1992], логики множества целых чисел — в работе [Reynolds, 1994], логики множества натуральных чисел — в статье [Venema, 1993].

Стоит сказать несколько слов и о «вычислительном» варианте логики линейного времени, системе LTL (также PLTL), сформулированной в языке, содержащем одноместный оператор X (*NextTime*, в следующий момент времени) и двухместный оператор U в «рефлексивном» варианте.

Последнее обстоятельство приводит к тому, что и прайоровские модальности в языке LTL тоже «рефлексивны». В частности, для обеспечения истинности утверждения FA в момент времени t достаточно истинности A в этот же самый момент.

Оператор X осмысленно вводить лишь в языке, интерпретируемом в таких моделях, в которых для любого элемента t множества-носителя модели существует элемент t' , непосредственно следующий за t . Например, в модельной структуре $(\mathbb{N}, <)$ условия истинности для XA задаются следующим образом:

$$(\mathbb{N}, <), n \models XA \Leftrightarrow (\mathbb{N}, <), n' \models A,$$

где n' — следующее за n натуральное число.

В логиках времени, развиваемых в прикладных целях в теоретической информатике, обычно ограничиваются лишь модальностями будущего⁸, а время представляется в виде дискретной бесконечной линейно упорядоченной последовательности состояний, имеющей начальный момент.

Система LTL была задумана как средство для описания свойств вычислительных процессов, программ. Сформулирована она была в основополагающей статье [Pnueli, 1977], а первые технические результаты, в том числе и аксиоматизация, появились в работе [Gabbay et al., 1980]. Более современный и общепринятый на сегодняшний день вариант этой системы представлен в [Demri et al., 2016].

⁸Система логики линейного времени типа LTL с операторами прошлого исследована в работе [Lichtenstein et al., 1985]. Даны полная аксиоматическая система и разрешающая процедура.

2. Логика ветвящегося времени

«Ветвление» времени кажется само собой разумеющейся идеей, когда рассуждают о случайности, возможных сценариях развития событий. Однако же подобные представления о времени формировались постепенно, в результате длительной эволюции идей, связанных с трактовкой утверждений о будущих случайных событиях (см., например, [Øhrstrøm, 1995; Øhrstrøm, 2006]). Более того, встает вопрос о том, действительно ли эта идея является адекватной для понимания *природы* времени? Более или менее стандартный ответ на этот вопрос приведен в известной работе [Thomason, 1970]:

Линейная модель времени может допускать «альтернативное будущее» как эпистемическую возможность; хотя в соответствии с таким пониманием каждый момент времени α может иметь только одно возможное будущее, мы можем не обладать в момент α полным знанием относительно этого будущего, поэтому это лишь знание о множественности альтернатив будущего. $\langle \dots \rangle$ Мы будем называть временные модельные структуры подобного типа *индетерминистскими* модельными структурами.

В соответствии с эпистемической трактовкой ветвления времени можно было бы рассматривать ситуации, когда время ветвится как в прошлое, так и в будущее. Однако в процитированной выше статье Томасон также пишет, что допущение «альтернативных прошлых» было бы в высшей степени контринтуитивным, поскольку два момента α и β совпадают, если их прошлое неразличимо. В противном случае α и β различны. Этот взгляд на модельные структуры стал преобладающим в литературе, индетерминистские модельные структуры имеют *древовидную* структуру с ветвлением в будущее. Формально такая модельная структура есть пара $(T, <)$, где T есть непустое множество моментов времени, $<$ есть иррефлексивное и транзитивное бинарное отношение на T , линейное влево, то есть $\forall t_1 \forall t_2 \forall t_3 (t_2 < t_1 \wedge t_3 < t_1 \Rightarrow t_2 < t_3 \vee t_3 < t_2 \vee t_2 = t_3)$, а также связное: $\forall t_1 \forall t_2 \exists t_3 (t_3 \leq t_1 \wedge t_3 \leq t_2)$. В некоторых случаях на отношение $<$ накладываются дополнительные ограничения. Так, в семантике переходов, о которой пойдет речь в разделе 2.4., добавляются требования сериальности и наличия точной нижней грани у каждой пары элементов множества T (тогда как свойство связности требует лишь наличия нижней границы).

2.1. Оценка высказываний о будущих событиях в древовидных структурах: пирсеанизм и окказиизм

Прежде чем говорить о логиках индетерминистских модельных структур, нужно ответить на вопрос в том, как приписывать истинностные значения формулам, соответствующим утверждениям о будущих событиях, в таких модельных структурах ([Thomason, 1984, р. 2]). Как известно,

А. Прайор выделял два подхода, *оккамистский* (ockhamist) и *пирсовский* (reigsean), к решению этой задачи [Prior, 1967, ch. VII]. Следует заметить, что отправной точкой для самого Прайора послужил вопрос о том, како-во может быть формальное представление традиционных детерминистских рассуждений и как избежать нежелательных следствий тех или иных постулатов временной логики.

И оккамистский, и пирсовский подходы предполагают учет не только момента времени, но и *истории*, содержащей его, при оценке формул с временными модальностями. Второпорядковая квантификация (явная или неявная) по историям является характерной чертой семантик обоих типов, отличающей (и отдаляющей) их от стандартных крипкевских семантик модальных и временных логик. Формально история h во временной модельной структуре $(T, <)$ есть максимальное линейно упорядоченное подмножество множества T , то есть h не является собственным подмножеством какого-либо другого линейно упорядоченного подмножества множества T . Можно мыслить историю и как бесконечный ряд событий, причем это актуальная бесконечность.

Предварительно заметим, что временные логики, определяемые этими двумя подходами, различаются уже своими языками. Обозначим через $\mathcal{L}_o$ и $\mathcal{L}_p$ языки оккамистской и пирсовской временных логик соответственно. Оба этих языка расширяют язык классической логики высказываний за счет добавления прайоровских временных модальностей F и P , но язык $\mathcal{L}_p$ дополнительно содержит исходную модальность G (неопределимую через F), а язык $\mathcal{L}_o$ содержит модальность $\Diamond$ исторической возможности. В языке $\mathcal{L}_p$ можно ввести по определению модальности g («возможно, всегда будет», $gA \equiv_{df} \neg F \neg A$) и f («возможно, будет», $fA \equiv_{df} \neg G \neg A$). В языке $\mathcal{L}_o$ обычным образом определяются сильные модальности G ($GA \equiv_{df} \neg F \neg A$) и модальность исторической необходимости $\Box$ ($\Box A \equiv_{df} \neg \Diamond \neg A$). Определения формулы в этих языках стандартные.

Итак, при оккамистском подходе любая формула (в частности, и пропозициональная переменная) получает истинностную оценку *в паре* (момент, история), тогда как в пирсовской семантике формула оценивается только в моменте времени. Рассмотрим более детально условия истинности для формул с внешней модальностью F . Пусть $\mathcal{T} = (T, <)$ есть древовидная модельная структура. В оккамистской логике истинность формулы FA в паре (t, h) определяется следующим образом:

$$\mathcal{T}, (t, h) \models FA \iff \exists t' \in h(t < t' \wedge \mathcal{T}, (t', h) \models A).$$

Принадлежность момента t' той же самой истории h , которая содержит t , здесь существенна. Утверждение FA истинно в момент t истории h , если и

только если A осуществляется в той же самой истории. Для «коммуникации» между историями используется модальность $\Diamond$ (или $\Box$). Введем некоторые обозначения: $H(T)$ есть множество всех историй модельной структуры $(T, <)$, H_t есть множество историй из $H(T)$, содержащих (проходящих через) момент времени $t \in T$. Тогда

$$\mathcal{T}, (t, h) \models \Diamond A \Leftrightarrow \exists h' \in H_t(\mathcal{T}, (t, h') \models A).$$

Определения выполнимой и общезначимой формулы в рамках данной семантики, по существу, стандартные, с поправкой на тип объекта, с которым формула находится в отношении «быть истинной».

В оккамистском случае формула A называется выполнимой в модельной структуре $(T, <)$, если она истинна в некоторой паре (t, h) этой модельной структуры (где $t \in T$, $h \in H(T)$) при некоторой оценке пропозициональных переменных. Формула A выполнима, если она выполнима в какой-то модельной структуре. Формула A общезначима в модельной структуре $(T, <)$ (символически $(T, <) \models A$), если $\neg A$ невыполнима в этой модельной структуре. Формула A общезначима (символически $\models A$), если $\neg A$ невыполнима.

Оккамистский вариант семантики логики ветвящегося времени называют в литературе актуалистским [Burgess, 1979], поскольку история h , относительно которой релятивизируется истинность формулы FA , в каком-то смысле представляет *действительную* историю, тогда как другие истории являются ее альтернативами.

Еще один важный аспект, связанный с оценкой формул в оккамистских модельных структурах, состоит в специфике приписывания значений пропозициональным переменным. Коротко говоря, пропозициональная переменная p может полагаться истинной в момент времени t *независимо* от того, какой истории принадлежит t , или же p может быть истинной в некоторой паре (t, h) , но ложной в какой-то другой паре (t, h') . Ряд известных систем логики ветвящегося времени, например **CTL***, используют именно независимую от истории оценку пропозициональных переменных. Заметим, что при таком подходе правило подстановки не сохраняет свойство общезначимости формулы. Так, формула $p \supset \Box p$ является общезначимой (так как если переменная p истинна в какой-то момент времени t , то она истинна во всех историях, содержащих t , то есть истинна формула $\Box p$), но подстановка в нее (например, формулы Fq вместо вхождений переменной p) может дать опровержимую формулу.

Антактуалистский (*antactualist*) [Burgess, 1978] подход реализуется в пирсовской семантике. Здесь условия истинности для формул FA и GA имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}, t \models FA &\Leftrightarrow \forall h \in H_t \exists t' \in h (t < t' \wedge \mathcal{T}, t' \models A), \\ \mathcal{T}, t \models GA &\Leftrightarrow \forall h \in H_t \forall t' \in h (t < t' \Rightarrow \mathcal{T}, t' \models A). \end{aligned}$$

Пирсовский вариант истинности FA в момент t предполагает осуществление события A в каждой истории, содержащей t , то есть при любом возможном развитии событий. Этот вариант семантики отвергает наличие какой бы то ни было действительной истории⁹. При этом FA и GA в пирсовском смысле можно представить, соответственно, как $\Box FA$ и $\Box GA$ в оккамистском языке. В силу этого обстоятельства пирсовский вариант временной логики рассматривается в литературе как менее интересный с чисто логической точки зрения.

Доказательство разрешимости логики индетерминистских модельных структур с пирсовским вариантом оценки [Burgess, 1980] потребовало введения дополнительного технического понятия, оказавшегося в некоторых случаях существенным для определения множества общезначимых (в классе модельных структур) формул. В множестве $H(T)$ всех историй модельной структуры $(T, <)$ берется подмножество $\mathcal{B}$ выделенных или допустимых историй¹⁰. Для множества $\mathcal{B} \subseteq H(T)$ должно выполняться следующее требование: $\forall t \in T \exists h \in \mathcal{B} (t \in h)$, то есть каждый момент времени из T должен встречаться в какой-то истории. Структуру $(T, \mathcal{B}, <)$ называют *деревом с множеством допустимых историй* (bundled tree). В случае, когда $\mathcal{B} = H(T)$, дерево называют *полным*. Условия истинности для формул с временными модальностями в модельной структуре $(T, \mathcal{B}, <)$ в обоих рассматриваемых подходах претерпевают соответствующие изменения:

$$\mathcal{T}, (t, h) \models FA \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{B} \exists t' \in h (t < t' \wedge \mathcal{T}, (t', h) \models A)$$

для оккамистского случая,

$$\mathcal{T}, t \models FA \Leftrightarrow \forall h \in \mathcal{B}_t \exists t' \in h (t < t' \wedge \mathcal{T}, t' \models A)$$

для пирсовского. Здесь $\mathcal{B}_t = \{h \mid h \in \mathcal{B} \subseteq H(T) \wedge t \in h\}$.

Как показано в статье [Ibid.], в пирсовском случае множество общезначимых формул не изменяется, если вместо класса «обычных» древовидных модельных структур рассматривать деревья с множеством допустимых историй. Однако в оккамистской семантике можно привести примеры формул, которые общезначимы в классе древовидных модельных структур, но

⁹Заметим, что А. Прайор был приверженцем именно такого подхода. Дискуссии по поводу обоснованности и целесообразности выделения *актуальной*, или *действительной*, истории (также употребляется англоязычный термин *thin red line*) время от времени возобновляются в литературе, см., например, [Belnap, Green, 1994; Wawer, 2014; Belnap et al., 2001, ch. 6].

¹⁰В англоязычной литературе используется термин *bundle*, что можно перевести как «пучок» или «связка». Общепринятого русскоязычного термина в настоящий момент, по-видимому, нет.

опровержимы в деревьях с множествами допустимых историй. Например, в [Burgess, 1979] доказывается, что формула $\Box G \Diamond F \Box p \supset \Diamond G F p$ общезначима в классе всех деревьев, но опровержима в некотором дереве с множеством допустимых историй.

Технические результаты

Основные результаты, связанные с пирсовской логикой индетерминистских модельных структур, были получены в работе [Burgess, 1980]. В частности, в этой статье была предложена конечная аксиоматизация пирсовской логики класса деревьев с множествами допустимых историй, доказаны теоремы о полноте и непротиворечивости, разрешимость множества общезначимых в этом классе формул. Там же было показано, что для классов деревьев и деревьев с множеством допустимых историй множество общезначимых формул одно и то же. Особенность конечной аксиоматизации состоит в том, что она содержит правило иррефлексивности Габбая [Gabbay, 1981], часто встречающееся в аксиоматизациях систем временной логики:

$$\frac{\neg q \wedge Hq \supset A}{A}, \quad \text{где } q \text{ есть пропозициональная переменная, не встречающаяся в формуле } A.$$

В работе [Zanardo, 1990] показано, что возможна аксиоматизация пирсовской временной логики без правила иррефлексивности, но с бесконечным множеством аксиом.

Для оккамистской логики ветвящегося времени, как уже отмечалось, различие между деревьями с множествами допустимых историй и деревьями без таковых является существенным. Конечная аксиоматизация логики класса деревьев с множествами допустимых историй была получена в работе [Zanardo, 1985], другая аксиоматизация с правилом иррефлексивности Габбая содержится в монографии [Gabbay et al., 1994, ch. 7.7]. Заметим, что для доказательств полноты в обеих этих работах используются особые семантические структуры — оккамистские шкалы, предложенные в [Zanardo, 1985] (хотя, по существу, уже неявно описанные в [Burgess, 1979]). Что касается оккамистской логики деревьев без множеств допустимых историй, то первый крупный результат — это доказательство разрешимости множества общезначимых в классе таких деревьев формул, предложенное в работе [Gurevich, Shelah, 1985]. Существенно, что в указанной статье используется независимая от истории оценка переменных. Проблема аксиоматизации данной логики долгое время была открытой, ее решение было заявлено в ряде работ австралийского логика М. Рейнолдса [Reynolds, 2002; Reynolds, 2003], однако детальное доказательство в указанных публикациях не приводится. Проблема аксиоматизации оккамистской логики

деревьев (в том числе и с произвольной оценкой в множестве пар вида (t, h)) остается, по-видимому, открытой [Rumberg, 2019].

2.2. Шкалы Кампа и оккамистские шкалы: представления деревьев

Древовидные модельные структуры, используемые для оценки формул языка как пирсовского, так и оккамистского вариантов временной логики, имеют очевидный недостаток, состоящий во второпорядковой квантификации по множеству историй. Деревья с выделенными множествами историй содержат сами истории как исходные сущности, что характеризуется в работе [Zanardo, 2003, с. 9] как «переход от второпорядковой к первопорядковой логике».

В работе [Zanardo, 1985] были определены первопорядковые реляционные структуры, *оккамистские шкалы*, особым образом представляющие информацию, содержащуюся в деревьях¹¹. Несколько ранее, в главе [Thomason, 1984], были описаны семантические структуры, очень похожие на оккамистские шкалы, которые называются *шкалами Кампа*, поскольку впервые они появились в неопубликованной статье Х. Кампа 1979 года. Рассмотрим шкалы Кампа более детально.

Общая идея, лежащая в основе этой конструкции, — «сделать достаточно копий каждой точки дерева и разделить различные его истории» [Reynolds, 2003]. Дерево как бы расслаивается в совокупность параллельных линейных порядков. При этом исходные сущности в шкале Кампа — возможные миры, с которыми истории ассоциируются.

Формально шкала Кампа $\mathcal{K}$ представляет собой тройку $(\mathcal{T}, W, \approx)$, где W есть непустое множество возможных миров, каждому из которых функция $\mathcal{T}$ ставит в соответствие иррефлексивный линейный порядок $\mathcal{T}(w) = (T_w, <_w)$; $\approx$ есть функция, которая каждому $t \in \bigcup_{w \in W} T_w$ ставит в соответствие отношение эквивалентности $\approx_t$ на множестве $W_t = \{w \in W \mid t \in T_w\}$ такое, что а) если $w \approx_t w'$, то $\{t' \in T_w \mid t' <_w t\} = \{t' \in T_{w'} \mid t' <_{w'} t\}$, б) если $w \approx_t w'$ и $t' <_w t$, то $w \approx_{t'} w'$ [Thomason, 1984; Zanardo, 2003].

Формулы языка оккамистской временной логики получают истинностную оценку в парах вида (t, w) , где $t \in T_w$. Условия истинности для формул с модальностями определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}, (t, w) \models FA &\Leftrightarrow \exists t'(t <_w t' \wedge \mathcal{K}, (t', w) \models A), \\ \mathcal{K}, (t, w) \models PA &\Leftrightarrow \exists t'(t' <_w t \wedge \mathcal{K}, (t', w) \models A), \\ \mathcal{K}, (t, w) \models \Diamond A &\Leftrightarrow \exists w' \approx_t w (\mathcal{K}, (t, w') \models A). \end{aligned}$$

¹¹Хотя, как отмечает сам автор, неявным образом эти структуры уже содержались в статье [Burgess, 1979].

Наиболее интересный технический аспект шкал Кампа состоит в представлении структуры деревьев. Для осуществления этого представления определим для каждого w и каждого $t \in T_w$ шкалы $\mathcal{K}$ класс эквивалентности $[(t, w)] = \{(t, w') \mid w \approx_t w'\}$. Множество всех классов эквивалентности шкалы $\mathcal{K}$ обозначим как $T_{\mathcal{K}}$. Далее определим отношение $\triangleleft_{\mathcal{K}}$ на множестве $T_{\mathcal{K}}$:

$$[(t, w)] \triangleleft_{\mathcal{K}} [(t', w')] \Leftrightarrow w \approx_t w' \wedge t <_{w'} t'.$$

Пара $(T_{\mathcal{K}}, \triangleleft_{\mathcal{K}})$ есть дерево. Обратно, по любому дереву $(T, <)$ можно построить шкалу Кампа $\mathcal{K}_T$, положив $W = H(T)$, $T_w = w$ (то есть возможный мир и соответствующий ему порядок фактически совпадают), $<_w$ есть ограничение отношения $<$ на w , наконец, $w \approx_t w'$, если и только если оба порядка, w и w' , содержат элемент t .

Если по дереву T построить шкалу $\mathcal{K}_T$, то, конечно, можно получить дальше дерево $T_{\mathcal{K}_T}$. Оказывается, деревья T и $T_{\mathcal{K}_T}$ будут изоморфны. Можно ожидать аналогичного результата и для пары $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_{T_{\mathcal{K}}}$. Однако в этом случае изоморфизма нет.

Глубинная причина в возможном нарушении изоморфизма состоит в том, что шкала Кампа не представляет (и не должна представлять) все истории, содержащиеся в соответствующем ей дереве. То есть дерево $T_{\mathcal{K}}$, построенное по шкале $\mathcal{K}$, может содержать истории, которым не соответствует какое-либо множество $\{[(t, w)] \mid t \in T_w\}$.

Однако если принимать во внимание только деревья с множествами допустимых историй, полагая, что при перестройке такого дерева $(T, \mathcal{B}, <)$ в шкалу Кампа $W = \mathcal{B}$, а $<_w$ и $\approx_t$ задаются так же, как описано выше, то сохранить изоморфизм между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_{T_{\mathcal{K}}}$ можно. Для этого нужно предварительно исключить ситуацию, когда шкала Кампа содержит неразличимые миры, что само по себе тоже может быть причиной нарушения изоморфизма: $\forall w \neq w' \in W \exists t \in T_w (w \not\approx_t w')$. Теперь заметим, что с каждым миром w шкалы Кампа можно связать историю $h_w = \{[(t, w)] \mid t \in T_w\}$. Можно показать, что $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = \{h_w \mid w \in W\}$ образует множество допустимых историй в дереве $T_{\mathcal{K}}$. Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = (T_{\mathcal{K}}, \mathcal{B}_{\mathcal{K}})$ полученное дерево с множеством допустимых историй. Теперь $\mathcal{K}$ изоморфно $\mathcal{K}_{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}}$ и $\mathcal{T}$ изоморфно $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{T}}}$ [Zanardo, 2003].

Как отмечается в статьях [Zanardo, 1996; Zanardo, 2003], шкалы Кампа онтологически «сложнее» деревьев, поскольку предполагают онтологические допущения относительно существования возможных миров как особого рода примитивных (то есть исходных) сущностей. Деревья предполагают лишь существование моментов времени и отношения между ними.

Тем не менее с логической точки зрения шкалы Кампа оказываются проще деревьев, поскольку оценка формул не требует явной второпорядковой квантификации по историям.

Шкалы Кампа играют существенную роль в наброске доказательства полноты для оккамистской временной логики в [Reynolds, 2003]. В отличие от деревьев, эти шкалы позволяют использовать step-by-step-метод из доказательств полноты и разрешимости логик линейного времени¹².

В статьях [Zanardo, 1985; Zanardo, 1996] для представления деревьев были предложены реляционные структуры крипкевского типа, имеющие вид $(W, <, \sim)$, называемые *оккамистскими шкалами*. В целом эти шкалы по своему устройству близки к шкалам Кампа, но теперь W есть множество, на котором заданы два непересекающихся отношения: $<$ — объединение всех иррефлексивных линейных порядков, заданных на множестве W , а $\sim$ — отношение эквивалентности, репрезентирующее «общую часть» линейных порядков, то есть если $t \sim s$, то ограничение $\sim$ на $\{t' \mid t' < t\} \times \{s' \mid s' < s\}$ есть порядковый изоморфизм, а, кроме того, линейные порядки должны различаться: для всяких t и s найдется такой $t' \geq t$, что для любого $s' \geq s$ верно, что $t' \not\sim s'$. Оккамистские шкалы также представляют собой средство для представления информации, содержащейся в древовидной шкале, процесс перестройки шкалы одного типа в шкалу другого типа схож с описанным выше для случая шкал Кампа. При этом если $\mathcal{O}$ — некоторая оккамистская шкала, $T_{\mathcal{O}}$ — дерево, построенное по этой шкале, то изоморфизм между $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_{T_{\mathcal{O}}}$ имеет место в том случае, когда принимаются во внимание только деревья с множествами допустимых историй [Zanardo, 1996].

2.3. Неразделимость и неразличимость историй

От шкал Кампа и оккамистских шкал вновь вернемся к деревьям и рассмотрим некоторые понятия, существенно обогатившие данные семантические конструкции.

Отношение неразделимости (undividedness) историй пришло из семантики для логик, описывающих поведение рациональных объектов во временном потоке (см., например, [Belnap, 1991]). В контексте изучения семантических структур, репрезентирующих ветвящееся время, данное отношение оказалось весьма полезным и привело фактически к появлению

¹²Подобная конструкция была применена тем же автором для доказательства разрешимости временной логики параллельных линейных потоков времени в [Reynolds, 1997], родственной оккамистской временной логике. Для общего знакомства с данным методом см. [Blackburn et al., 2002, ch. 4.6].

структур нового типа. В статье [Zanardo, 1998] подробно изучаются свойства модельных структур с отношением неразделимости, а также более общим отношением *неразличимости* на множестве историй.

Две истории h_1 и h_2 могут содержать общий элемент t , то есть $t \in h_1 \cap h_2$, но для того, чтобы они были *неразделимы* в этом моменте t , требуется наличие такого t' , что $t < t'$ и $t < t'$. Отношение неразделимости на множестве историй, проходящих через момент t (то есть на множестве H_t), является отношением эквивалентности и задает разбиение H_t на классы эквивалентности. Обозначим через $[h]_t$ множество всех историй, находящихся в отношении эквивалентности с историей h (то есть класс эквивалентности по h), а через Π_t — разбиение множества H_t по указанному отношению эквивалентности. Элементы множества Π_t называются *непосредственными возможностями* в момент t . Квантификация по историям в оккамистском языке, осуществляемая за счет модальности $\Diamond$, может быть сужена на истории, лежащие в рамках одной непосредственной возможности. В работе [Ibid.] язык оккамистской временной логики $\mathcal{L}_o$ расширяется модальным оператором $\Diamond^u$ (обозначим расширенный язык как $\mathcal{L}_o^+$). Условие истинности для этого оператора похоже на то, которое ранее было дано для $\Diamond$ в языке $\mathcal{L}_o$:

$$\mathcal{T}, (t, h) \models \Diamond^u A \Leftrightarrow \exists h' \in [h]_t \in H_t(\mathcal{T}, (t, h') \models A),$$

с той лишь разницей, что теперь квантификация производится по множеству $[h]_t$. Язык $\mathcal{L}_o^+$ оказывается богаче по своим выразительным возможностям, чем $\mathcal{L}_o$, в [Ibid., р. 303] доказывалось утверждение, что не существует формулы A такой, что общезначима формула¹³ $\Diamond^u Gr \equiv A$, то есть оператор $\Diamond^u$ неопределим в $\mathcal{L}_o$. Также неопределимой в $\mathcal{L}_o$ является комбинация модальностей $\Box \Diamond^u Gr$.

Язык пирсовской временной логики $\mathcal{L}_p$ расширяется до языка $\mathcal{L}_p^+$ за счет добавления составных модальных операторов. Например, модальность $[\Diamond^U F]$ читается как «в некоторой непосредственной возможности будет так, что». Здесь выражение «будет так, что» имеет пирсовский смысл. Это значит, что $[\Diamond^U F]A$ истинно в момент времени t , если существует непосредственная такая возможность $[h]_t$, что в *каждой* истории $h' \in [h]_t$ найдется такое t' , что $t < t'$ и в t' истинна A . Обратим внимание на то, что дуальным оператором для $[\Diamond^U F]$ является модальность $\neg[\Diamond^U F]\neg$, которая обозначается как $\Box^U g$ и содержательно читается как «каждая непосредственная возможность содержит историю, в которой всегда будет...». Имеется доказательство утверждения, что в языке $\mathcal{L}_p$ не существует такой

¹³Здесь и далее связка $\equiv$ есть материальная эквиваленция.

формулы A , что общезначимой является формула $[\Box^U g]p \equiv A$ [Zanardo, 1998, p. 308–310].

Рассмотрим далее обобщение отношения неразделимости. Получается оно за счет сопоставления каждому моменту времени t абстрактного отношения эквивалентности на множестве H_t . В частности, это может быть и разбиение, индуцируемое отношением неразличимости. Для этих целей вводится понятие I -дерева [Zanardo, 1998]. I -дерево — это пара $(\mathcal{T}, I)$, где $\mathcal{T}$ есть дерево, а I есть функция, которая каждому $t \in T$ ставит в соответствие отношение эквивалентности на H_t (обозначаемое как I_t) такое, что

$$\forall t' \forall h \forall h' (t' < t \wedge I_t(h, h') \Rightarrow I_{t'}(h, h')).$$

Функцию I называют *функцией неразличимости*, а отношение I_t — *отношением неразличимости*.

I -деревья могут быть использованы в качестве обобщенных семантических структур логики ветвящегося времени, а оккамистский и пирсовский подходы оказываются частными (предельными) случаями такой семантики.

Язык временной логики I -деревьев расширяет язык классической логики высказываний за счет добавления модальностей P , F и G пирсовского типа и оккамистской модальности $\Diamond$. Функция оценки ставит в соответствие каждой пропозициональной переменной множество пар вида (t, X) , где $t \in T$, а X есть непосредственная возможность в момент t . Приведем условия истинности для некоторых модальных операторов:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}, (t, [h]_t) \models FA &\Leftrightarrow \forall h' \in [h]_t \exists t' \in h' (t < t' \wedge \mathcal{T}, (t', [h']_{t'}) \models A), \\ \mathcal{T}, (t, [h]_t) \models GA &\Leftrightarrow \forall h' \in [h]_t \forall t' \in h' (t < t' \Rightarrow \mathcal{T}, (t', [h']_{t'}) \models A), \\ \mathcal{T}, (t, [h]_t) \models \Diamond A &\Leftrightarrow \exists h' \in H_t (\mathcal{T}, (t, [h']_t) \models A). \end{aligned}$$

I -дерево $(\mathcal{T}, I)$ называется *оккамистским*, если для всякого $t \in T$ верно, что $I_t = \{(h, h) \mid h \in H_t\}$; I -дерево называется *пирсовским*, если $I_t = H_t \times H_t$.

Имеется следующая характеристика I -деревьев указанных выше типов чрез общезначимость формул: I -дерево $(\mathcal{T}, I)$ является оккамистским, если и только если $(\mathcal{T}, I) \models Gp \equiv \neg F\neg p$; I -дерево $(\mathcal{T}, I)$ является пирсовским, если и только если $(\mathcal{T}, I) \models \Diamond p \equiv p$.

2.4. Семантика переходов

Польза от введенного ранее определения неразделимости историй не исчерпывается лишь I -деревьями. Не менее интересный подход представляет собой *семантика переходов* (transition semantics), предложенная в работе [Rumberg, 2016a], основанная на идеях более ранних статей [Belnap, 2005; Müller, 2014].

Наряду с отношением неразделимости историй в момент t и задаваемого им разбиения Π_t множества H_t , исходным для всей конструкции являются понятия точки ветвления и перехода. Момент времени t называется *точкой ветвления*, если он является наибольшим элементом в множестве $h \cap h'$ для некоторых историй h и h' ¹⁴. *Переходом* называется пара $(t \mapsto H)$, где t есть точка ветвления, $H \in \Pi_t$ (то есть класс эквивалентности по отношению неразделимости). Множество всех переходов модельной структуры $\mathcal{T} = (T, <)$ обозначается как $trans(\mathcal{T})$.

Если выбрать произвольное множество переходов T структуры $\mathcal{T}$ и взять пересечение их вторых компонент (то есть классов эквивалентности), то те истории, которые в этом пересечении окажутся, называются *допустимыми* для T . Если множество $H(T)$ допустимых историй для T непусто, то T называют *совместным* (и *несовместным* в противном случае).

На множестве переходов задается отношение предшествования $\prec$: $(t \mapsto H) \prec (t' \mapsto H')$, если $H' \subset H$. Заметим, что $H' \subset H$, если и только если $t < t'$ и $H \cap H' \neq \emptyset$. Отношение $\prec$ на множестве $trans(\mathcal{T})$ произвольной модельной структуры $\mathcal{T}$ линейно влево (см. с. 162). Более того, $H(T) \neq \emptyset$, если и только если T линейно упорядочено отношением $\prec$.

Для того чтобы определить оценку формул в структурах с множеством переходов, потребуется ввести ряд дополнительных технических понятий.

Множество переходов T называется *замкнутым*¹⁵, если

$$\forall \tau \in trans(\mathcal{T}) \forall \tau' \in trans(\mathcal{T}) ((\tau \in T \wedge \tau' \prec \tau) \Rightarrow \tau' \in T).$$

Пополнением множества переходов T модельной структуры $\mathcal{T}$ называется множество $dc(T) = \{\tau \in trans(\mathcal{T}) \mid \exists \tau' \in T (\tau = \tau' \vee \tau \prec \tau')\}$. Пусть $\mathcal{T} = (T, <)$ — модельная структура. Тогда $dcts(\mathcal{T})$ обозначает множество всех совместных замкнутых множеств переходов модельной структуры $\mathcal{T}$, содержащее также пустое множество переходов $\emptyset_{tr}$. Другими словами, $dcts(\mathcal{T})$ таково, что наряду со всяким совместным множеством $T \subseteq trans(\mathcal{T})$ оно содержит и его пополнение $dc(T)$. Замкнутые множества переходов, как и истории, линейно упорядочены влево. В отличие от «обычных» историй, они могут представлять незавершенные линии развития событий, незавершенные истории, открытые для продолжения в будущее. При этом продолжение какого-то (совместного) множества переходов

¹⁴В рамках данной семантики стандартное определение дерева модифицируется усилением связности влево: любая пара элементов t, t' дерева $\mathcal{T}$ не только обладает нижней границей, но и точной нижней гранью, инфимумом. Кроме того, постулируется сериальность. В данном разделе речь будет идти именно о таких модельных структурах.

¹⁵Соответствующий англоязычный термин — *downward closed*, то есть замкнутое в сторону «уменьшения» по отношению порядка. Для краткости будем говорить просто *замкнутый*. То же самое относится и к термину *пополнение* (*downward completion*).

T по отношению $\prec$ исключает некоторые истории, сужает множество $H(T)$. Максимальное непротиворечивое множество переходов допускает ровно одну историю.

Язык временной логики рассматриваемых семантических структур отличается от языка логики I -деревьев наличием еще одного одноместного оператора S , оператора стабильности.

Истинностная оценка формулы в модельной структуре $\mathcal{T}$ дается в паре, состоящей из момента времени t и замкнутого множества переходов $T \in \text{dcts}(\mathcal{T})$. Естественно потребовать, чтобы это множество переходов T и момент времени t были совместимы в том смысле, что $H(T) \cap H_t \neq \emptyset$. Далее для истинностной оценки формул будут использоваться именно такие пары. Таким образом, функция оценки пропозициональных переменных ставит в соответствие каждой переменной множество пар вида (t, T) . Приведем условия истинности для формул с модальными операторами в паре (t, T) модельной структуры $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}, (t, T) \models FA &\Leftrightarrow \forall T' \supseteq T (H(T') \cap H_t \neq \emptyset \Rightarrow \\ &\quad \exists t' (t < t' \wedge H(T') \cap H_{t'} \neq \emptyset \wedge \mathcal{T}, (t', T) \models A)), \\ \mathcal{T}, (t, T) \models PA &\Leftrightarrow \exists t' (t' < t \wedge \mathcal{T}, (t', T) \models A), \\ \mathcal{T}, (t, T) \models \Diamond A &\Leftrightarrow \exists T' \in \text{dcts}(\mathcal{T}) \wedge H(T') \cap H_t \neq \emptyset \wedge \mathcal{T}, (t, T') \models A. \end{aligned}$$

Заметим, однако, что условие истинности для формулы с оператором F может быть эквивалентным образом сформулировано и без квантификации по возможным расширениям множества переходов. Вместо этого можно использовать квантификацию по множеству историй, допустимых данным множеством переходов T :

$$\mathcal{T}, (t, T) \models FA \Leftrightarrow \forall h \in H(T) \cap H_t \exists t' (t < t' \wedge \mathcal{T}, (t', T) \models A).$$

Оператор стабильности S является специфическим для данной семантики, поскольку множество переходов может представлять незавершенные истории и истинностное значение формулы в определенный момент времени может меняться при расширении второй компоненты пары, множества переходов. Данный оператор особенно интересен в контексте рассуждений о будущих случайных событиях. Случайно истинные или случайно ложные в определенный момент времени высказывания могут становиться устойчиво истинными или устойчиво ложными по мере продолжения в будущее множества переходов:

$$\mathcal{T}, (t, T) \models SA \Leftrightarrow \forall T' \supseteq T (H(T') \cap H_t \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{T}, (t, T') \models A).$$

Как видно из условия истинности, S действует как квантор общности по возможным расширениям множества переходов. По определению можно ввести дуал этого оператора, $\neg S \neg$. Оператор стабильности является

$S4$ -модальностью, в отличие от $\Diamond$ и $\Box$, которые характеризуются свойствами $S5$ -модальности. Область квантификации в определении условия истинности для S — множество совместимых с t расширений в будущее множества T . Область квантификации для модальностей $\Diamond$ и $\Box$ более широкая все совместимые с t множества переходов. Поэтому все, что необходимо в смысле модальности $\Box$, стабильно, но не наоборот.

Как и в случае с I -деревьями, оккамистский и пирсовский варианты семантики логики ветвящегося времени оказываются предельными случаями семантики переходов в следующем смысле. Если ограничиться только пустым множеством переходов $\emptyset_{tr}$ в модельной структуре $\mathcal{T}$, то допустимым является все множество историй $H(\mathcal{T})$, что приводит к пирсовскому варианту. Если же множество переходов, используемое для оценки формул, является максимальным совместным множеством, то оно допускает ровно одну историю, что дает оккамистский случай. Эти наблюдения приводят к следующему определению *структуры переходов* (*transition structure*).

Структура переходов есть тройка $\mathcal{T}^{tr} = (T, <, ts)$, в которой $\mathcal{T} = (T, <)$ есть модельная структура в обычном понимании (для данного раздела), а $ts \subseteq \text{dcts}(\mathcal{T})$ есть такое непустое множество множеств переходов, что для каждого момента времени $t \in T$ существует множество переходов $T \in ts$ такое, что $H(T) \cap H_t \neq \emptyset$ ¹⁶. Функция оценки пропозициональных переменных, как и раньше, ставит в соответствие каждой переменной множество пар, но только таких, в которых вторая компонента лежит в множестве ts . Условия истинности для временных модальностей F и P не претерпевают изменений, тогда как для $\Diamond$, $\Box$ и S квантификация ограничивается на множество переходов, принадлежащих ts . Например, условие истинности для формулы $\Box A$ выглядит следующим образом:

$$\mathcal{T}^{tr}, (t, T) \models \Box A \Leftrightarrow \forall T' \in ts(H(T') \cap H_t \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{T}^{tr}, (t, T') \models A).$$

Подобно тому как оккамистские шкалы являются первопорядково определимым аналогом шкал Кампа и деревьев с допустимыми историями, *индексные структуры* представляют собой первопорядково определимый вариант структур переходов. Эта конструкция была предложена в работе [Rumberg, 2019], основной результат которой состоит в аксиоматизируемости фрагмента логики структур переходов, язык которого не содержит оператор F . Однако сама система аксиом на сегодняшний день еще не найдена.

¹⁶Отметим здесь аналогию с деревьями с множествами допустимых историй, в которых также каждый момент времени должен принадлежать какой-то допустимой истории.

Заключение

За пределами данного обзора остались интереснейшие топологический (см. работы [Zanardo, 2003; Zanardo, 2006a]) и геометрический (см. статью [Zanardo, 2003] и содержащуюся в ней библиографию) подходы к построению семантики логики ветвящегося времени.

Логика времени не останавливается в своем развитии. Традиционная философская дихотомия — детерминизм/индетерминизм (фатализм / свобода воли) — по-прежнему продолжает работать как один из мощных стимулов развития этой области логического знания. За последние годы появилось немало работ, в которых технические аспекты построения логик ветвящегося времени очень тонко увязаны с философским анализом проблемы индетерминизма (см., например, сборники [Correia, Iacona, 2013; Hasle et al., 2017; Blackburn et al., 2019], статьи [Müller, 2010; Rumberg, 2016a; Belnap et al., 2021] и имеющуюся там библиографию). Кроме того, временная логика остается значимым логическим формализмом в теоретической информатике (см. [Demri et al., 2016]), а также в разработках в сфере логически ориентированного (logical AI) искусственного интеллекта (см. [Fisher et al., 2005; Thomason, 2020]).

Логика времени дает один из наиболее ярких примеров того, как логические формализмы, логико-математические конструкции могут служить для анализа и уточнения различных аспектов глубоких и непреходящих философских проблем, таких как проблема фатализма и свободы воли, детерминизма (в разных его проявлениях) и случайных событий.

Литература

- Allen, 1984 – *Allen J.F.* Towards a General Theory of Action and Time // Artificial Intelligence. 1984. Vol. 23. P. 123–154.
- Allen, Ferguson, 1994 – *Allen, J.F., Ferguson G.* Actions and Events in Interval Temporal Logic // Journal of Logic and Computation. 1994. Vol. 4. No. 5. P. 531–579.
- van Benthem, 1983 – *van Benthem J.* The Logic of Time. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1983.
- van Benthem, 1995 – *van Benthem J.* Temporal logic // D.M. Gabbay, C.J. Hogger, and J.A. Robinson (eds.). Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming: Epistemic and Temporal Reasoning. Vol. 4. Oxford: Oxford University Press, 1995. P. 241–351.
- Belnap, 1991 – *Belnap N.* Before refraining: Concepts for agency // Erkenntnis. 1991. Vol. 34. P. 137–169.
- Belnap, Green, 1994 – *Belnap N., Green M.* Indeterminism and the thin red line // Philosophical Perspectives. 1994. Vol. 8. P. 365–388.

- Belnap et al., 2001 – *Belnap N., Perloff M., Xu M.* Facing the future: Agents and choices in our indeterministic world. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- Belnap, 2005 – *Belnap N.* A theory of causation: Causae causantes (originating causes) as inus conditions in branching space-times // *British Journal for the Philosophy of Science*. 2005. Vol. 56. No. 2. P. 221–253.
- Belnap et al., 2021 – *Belnap N., Müller T., Placek T.* New Foundations for Branching Space-Times // *Studia Logica*. 2021. Vol. 109. P. 239–284.
- Blackburn et al., 2006 – *Blackburn P., van Benthem J., Wolter F.* Handbook of Modal Logics. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- Blackburn et al., 2002 – *Blackburn P., de Rijke M., Venema Y.* Modal Logic. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- Blackburn et al., 2019 – *Blackburn P., Hasle P., Øhrstrøm P.* (eds.). Logic and Philosophy of Time: Further Themes from Prior. Vol. 2. Aalborg: Aalborg Universitetsforlag, 2019. 230 p.
- Burgess, 1978 – *Burgess J.* The Unreal Future // *Theoria*. 1978. Vol. 44. No. 3. P. 157–179.
- Burgess, 1979 – *Burgess J.* Logic and Time // *Journal of Symbolic Logic*. 1979. Vol. 44. P. 566–582.
- Burgess, 1980 – *Burgess J.* Decidability for Branching Time // *Studia Logica*. 1980. Vol. 39. P. 203–218.
- Burgess, 1982 – *Burgess J.* Axioms for Tense Logic I: ‘Since’ and ‘Until’ // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 1982. Vol. 23. P. 367–374.
- Burgess, 2002 – *Burgess J.* Basic Tense Logic // D.M. Gabbay and F. Guenther (eds.). *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 7. Springer, 2002. P. 1–42.
- Correia, Iacona, 2013 – *Correia F., Iacona F.* (eds.) Around the Tree: Semantic and Metaphysical Issues Concerning Branching and the Open Future. Synthese Library. Vol. 361. Dordrecht: Springer, 2013.
- Demri et al., 2016 – *Demri S., Goranko V., Lange M.* Temporal Logics in Computer Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- Emerson, 1990 – *Emerson E.* Temporal and modal logics // J. van Leeuwen (ed.). *Handbook of Theoretical Computer Science*. Amsterdam: Elsevier, 1990. P. 995–1072.
- Fisher et al., 2005 – *Fisher M., Gabbay D., Vila L.* Handbook of Temporal Reasoning in Artificial Intelligence. Amsterdam: Elsevier, 2005.
- Gabbay et al., 1980 – *Gabbay D., Pnueli A., Shelah S., Stavi J.* On the temporal analysis of fairness // *Proceedings of the 7th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages (POPL ’80)*. Association for Computing Machinery. New York, 1980. P. 163–173.
- Gabbay, 1981 – *Gabbay D.* An irreflexivity lemma with applications to axiomatizations of conditions on tense frames // U. Mönnich (ed.). *Aspects of Philosophical Logic*. Reidel; Dordrecht, 1981. P. 67–89.

- Gabbay et al., 1994 – *Gabbay D., Hodkinson I., Reynolds M.* Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects. Vol. 1. Oxford: Clarendon Press, 1994.
- Galton, 1987 – *Galton A.P.* Temporal Logics and their Applications. London: Academic Press, 1987.
- Goldblatt, 1992 – *Goldblatt R.* Logics of Time and Computation. (CSLI Lecture Notes 7.) Second Edition. Stanford: CSLI Publications, 1992.
- Goranko, Rumberg, 2020 – *Goranko V., Rumberg A.* Temporal Logic // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2020 Edition). E.N. Zalta (ed.). <https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/logic-temporal/>
- Gurevich, Shelah, 1985 – *Gurevich Y., Shelah S.* The Decision Problem for Branching Time Logic // Journal of Symbolic Logic. 1985. Vol. 50. P. 668–681.
- Hajnicz, 1996 – *Hajnicz E.* Time Structures. Lecture Notes in Computer Science (Lecture Notes in Artificial Intelligence). Vol. 1047. Springer, 1996.
- Hasle et al., 2017 – *Hasle P., Blackburn P.R., Øhrstrøm P.* (eds.). Logic and Philosophy of Time: Themes from Prior. Vol. 1. Aalborg: Aalborg Universitetsforlag, 2017.
- Kröger, Merz, 2008 – *Kröger F., Merz S.* Temporal Logic and State Systems. Texts in Theoretical Computer Science (An EATCS Series). Springer, 2008.
- Lichtenstein et al., 1985 – *Lichtenstein O., Pnueli A., Zuck L.D.* The glory of the past // Proceedings the Conference on Logic of Programs. London: Springer-Verlag, 1985. P. 196–218.
- Kamp, 1968 – *Kamp H.* Tense Logic and the Theory of Linear Order. PhD Thesis. Los Angeles: University of California, 1968.
- McArthur, 1976 – *McArthur R.* Tense Logic. Springer, Synthese Library, 1976. 91 p.
- Müller, 2010 – *Müller T.* Towards a theory of limited indeterminism in branching space-times // Journal of Philosophical Logic. 2010. Vol. 39. P. 395–423.
- Müller, 2014 – *Müller T.* Alternatives to histories? Employing a local notion of modal consistency in branching theories // Erkenntnis. 2014. No. 79. P. 343–364.
- Øhrstrøm, 2009 – *Øhrstrøm P.* In Defence of the Thin Red Line: A Case for Ockhamism // Humana.mente. 2009. No. 8. P. 17–32.
- Øhrstrøm, 1995 – *Øhrstrøm P., Hasle P.* Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
- Øhrstrøm, 2006 – *Øhrstrøm P., Hasle P.* Modern Temporal Logic: The Philosophical Background // Handbook of the History of Logic. Vol. 7. 2006. P. 447–498.
- Pnueli, 1977 – *Pnueli A.* The Temporal Logic of Programs // Proceedings of the 18th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 1977. P. 46–67.
- Prior, 1957 – *Prior A.* Time and Modality. Oxford: Oxford University Press, 1957.
- Prior, 1967 – *Prior A.N.* Past, Present and Future. Oxford: Oxford University Press, 1967.
- Rescher, 1971 – *Rescher N., Urquhart A.* Temporal Logic. Berlin: Springer, 1971.

- Reynolds, 1992 – *Reynolds M.* An axiomatization for Until and Since over the reals without the IRR rule // *Studia Logica*. 1992. Vol. 51. P. 165–193.
- Reynolds, 1994 – *Reynolds M.* Axiomatizing U and S over Integer Time // D. Gabbay, H. Ohlbach (eds.). *Temporal Logic. Proceedings of the First International Conference ICTL*. (Lecture Notes in Artificial Intelligence: Vol. 828.) Berlin; Heidelberg: Springer, 1994. P. 117–132.
- Reynolds, 1997 – *Reynolds M.* A Decidable Temporal Logic of Parallelism // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 1997. Vol. 38. No. 3. P. 419–436.
- Reynolds, 2001 – *Reynolds M.* An Axiomatization of Full Computation Tree Logic // *Journal of Symbolic Logic*. 2001. Vol. 66. P. 1011–1057.
- Reynolds, 2002 – *Reynolds M.* Axioms for Branching Time // *Journal of Logic and Computation*. 2002. Vol. 12. No. 4. P. 679–697.
- Reynolds, 2003 – *Reynolds M.* An Axiomatization of Prior’s Ockhamist Logic of Historical Necessity // Balbiani et al. (eds.) *Advances in Modal Logic*. Vol. 4. London: College Publications, 2003. P. 355–370.
- Rumberg, 2016a – *Rumberg A.* Transition Semantics for Branching Time // *Journal of Logic Language and Information*. 2016. Vol. 25. P. 77–108.
- Rumberg, 2019 – *Rumberg A., Zanardo A.* First-Order Definability of Transition Structures // *Journal of Logic, Language and Information*. 2019. Vol. 28. No. 3. P. 459–488.
- Tarski, 1935 – *Tarski A.* Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. // *Studia Philosophica*. 1935. Vol. 1. P. 261–405. (English translation: *Tarski A.* The Concept of Truth in Formalized Languages // *Logic, Semantics, Metamathematics*. Ed. by J. Corcoran. Second edition. Indianapolis: Hackett, 1983.)
- Thomason, 1970 – *Thomason R.H.* Indeterminist Time and Truth-Value Gaps // *Theoria*. 1970. Vol. 36. No. 3. P. 264–281.
- Thomason, 1984 – *Thomason R.H.* Combinations of Tense and Modality // D. Gabbay, F. Guenther (eds.). *Handbook of Philosophical Logic (Extensions of Classical Logic: Volume 2)*. Dordrecht: Reidel, 1984. P. 135–165.
- Thomason, 2020 – *Thomason R.H.* Logic and Artificial Intelligence // *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2020 Edition). E.N. Zalta (ed.). <https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/logic-ai/>
- Venema, 1993 – *Venema Y.* Completeness via Completeness: Since and Until // M. de Rijke (ed.). *Diamonds and Defaults*. Dordrecht: Kluwer, 1993. P. 279–286.
- Wawer, 2014 – *Wawer J.* The Truth About the Future // *Erkenntnis*. 2014. Vol. 79. P. 365–401.
- Xu, 1988 – *Xu M.* On some U, S-Tense Logics // *Journal of Philosophical Logic*. 1988. Vol. 17. P. 181–202.
- Zanardo, 1985 – *Zanardo A.* A finite axiomatization of the set of strongly valid Ockhamist formulas // *Journal of Philosophical Logic*. 1985. Vol. 14. P. 447–468.
- Zanardo, 1990 – *Zanardo A.* Axiomatization of ‘Peircean’ branching-time logic // *Studia Logica*. 1990. Vol. 49. No. 2. P. 183–195.

- Zanardo, 1996 – *Zanardo A.* Branching-time logic with quantification over branches: The point of view of modal logic // *The Journal of Symbolic Logic*. 1996. Vol. 61. No. 1. P. 1–39.
- Zanardo, 1998 – *Zanardo A.* Undivided and Indistinguishable Histories in Branching-Time Logics // *Journal of Logic, Language and Information*. 1998. Vol. 7. P. 297–315.
- Zanardo, 2003 – *Zanardo A.* First-Order and Second-Order Aspects of Branching-Time Semantics. Preprint Dipartimento di Matematica Università di Padova. No. 3, 17 febbraio 2003.
- Zanardo, 2006a – *Zanardo A.* Moment/history duality in Prior's logics of branching time // *Synthese*. 2006. Vol. 150. No. 3. P. 483–507.
- Zanardo, 2006b – *Zanardo A.* Quantification over sets of possible worlds in branching-time semantics // *Studia Logica*. 2006. Vol. 82. No. 3. P. 379–400.

OLEG M. GRIGORIEV

Systems of temporal logic: moments, histories, trees

Oleg M. Grigoriev

Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: grig@philos.msu.ru

Abstract: The article is intended to give a review of semantic structures and formalized languages of some propositional logics of linear and branching time, links for the relevant technical results concerning formalizations of these logics (as Hilbert-style axiomatic calculi) are given. Model structures under considerations presuppose moment-based ontologies and, in some cases, histories as additional primitive entities. The languages of described systems extend the standard language of classical propositional logic with Priorian tense modalities and special modalities acting like quantifier over a set of histories. Languages of some linear time temporal logics can include operators like Until, Since and NextTime.

Keywords: logic of time, linear time, branching time, indeterminism, future contingents

For citation: Grigoriev O.M. “Sistemy vremennoi logiki I: momenty, istorii, derev’ya” [Systems of temporal logic: moments, histories, trees], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 153–184. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-153-184 (In Russian)

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR, project number 20-011-00698a.

References

- Allen, 1984 – Allen, J.F. “Towards a General Theory of Action and Time”, *Artificial Intelligence*, 1984, Vol. 23, pp. 123–154.
- Allen, Ferguson, 1994 – Allen, J.F., Ferguson G. “Actions and Events in Interval Temporal Logic”, *Journal of Logic and Computation*, 1994, Vol. 4, No. 5, pp. 531–579.
- van Benthem, 1983 – van Benthem, J. *The Logic of Time*. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1983.
- van Benthem, 1995 – van Benthem, J. “Temporal logic”, in: D.M. Gabbay, C.J. Hogger, J.A. Robinson (eds.). *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming: Epistemic and Temporal Reasoning*. Vol. 4. Oxford: Oxford University Press, 1995, pp. 241–351.
- Belnap, 1991 – Belnap, N., “Before refraining: Concepts for agency”, *Erkenntnis*, 1991, Vol. 34, pp. 137–169.
- Belnap, Green, 1994 – Belnap, N., Green, M. “Indeterminism and the thin red line”, *Philosophical Perspectives*, 1994, Vol. 8, p. 365.

- Belnap et al., 2001 – Belnap, N., Perloff, M., Xu, M. *Facing the future: Agents and choices in our indeterministic world*. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- Belnap, 2005 – Belnap, N. “A theory of causation: Causae causantes (originating causes) as inus conditions in branching space-times”, *British Journal for the Philosophy of Science*, 2005, Vol. 56, No. 2, pp. 221–253.
- Belnap et al., 2021 – Belnap, N., Müller, T., Placek, T. “New Foundations for Branching Space-Times”, *Studia Logica*, 2021, Vol. 109, pp. 239–284.
- Blackburn et al., 2006 – Blackburn, P., van Benthem, J. Wolter, F. (eds.), *Handbook of Modal Logics*. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- Blackburn et al., 2002 – Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y. *Modal Logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- Blackburn et al., 2019 – Blackburn, P.R., Hasle, P., Øhrstrøm, P. (eds.), *Logic and Philosophy of Time: Further Themes from Prior*, Vol. 2. Aalborg: Aalborg Universitetsforlag, 2019. 230 pp.
- Burgess, 1978 – Burgess, J. “The Unreal Future”, *Theoria*, 1978, Vol. 44, No. 3, pp. 157–179.
- Burgess, 1979 – Burgess, J. “Logic and Time”, *Journal of Symbolic Logic*, 1979, Vol. 44, pp. 566–582.
- Burgess, 1980 – Burgess, J. “Decidability for Branching Time”, *Studia Logica*, 1980, Vol. 39, pp. 203–218.
- Burgess, 1982 – Burgess, J. “Axioms for Tense Logic I: ‘Since’ and ‘Until’”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1982, Vol. 23, pp. 367–374.
- Burgess, 2002 – Burgess, J., “Basic Tense Logic”, in: D.M. Gabbay, and F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 7. Springer, 2002, pp. 1–42.
- Correia et al., 2013 – Correia, F., Iacona, F. (eds.), *Around the Tree: Semantic and Metaphysical Issues Concerning Branching and the Open Future* (Synthese Library: Volume 361). Dordrecht: Springer, 2013.
- Demri et al., 2016 – Demri, S., Goranko, V., Lange, M. *Temporal Logics in Computer Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- Emerson, 1990 – Emerson, E. “Temporal and modal logics”, in: J. van Leeuwen (ed.), *Handbook of Theoretical Computer Science*. Amsterdam: Elsevier, 1990, pp. 995–1072.
- Fisher et al., 2005 – Fisher, M., Gabbay, D.M., Vila, L. *Handbook of Temporal Reasoning in Artificial Intelligence*. Amsterdam: Elsevier, 2005.
- Gabbay, 1980 – Gabbay, D. “An irreflexivity lemma with applications to axiomatizations of conditions on tense frames”, in: U. Mönnich (ed.), *Aspects of Philosophical Logic*. Reidel; Dordrecht, 1980, pp. 67–89.
- Gabbay et al., 1980 – Gabbay, D., Pnueli, A., Shelah, S., Stavi J. “On the temporal analysis of fairness”, in: *Proceedings of the 7th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages (POPL ’80)*. Association for Computing Machinery. New York, 1980, pp. 163–173.

- Gabbay et al., 1994 – Gabbay, D.M., Hodkinson I., Reynolds M. *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, Vol. 1. Oxford: Clarendon Press, 1994.
- Galton, 1987 – Galton, A.P. *Temporal Logics and their Applications*. London: Academic Press, 1987.
- Goldblatt, 1992 – Goldblatt, R. *Logics of Time and Computation* (CSLI Lecture Notes 7), Second Edition. Stanford: CSLI Publications, 1992.
- Goranko, Rumberg, 2020 – Goranko, V. Rumberg, A. “Temporal Logic”, E.N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2020 Edition)*, <https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/logic-temporal/>.
- Gurevich, Shelah, 1985 – Gurevich, Y., Shelah, S. “The Decision Problem for Branching Time Logic”, *Journal of Symbolic Logic*, 1985, Vol. 50, pp. 668–681.
- Hajnicz, 1996 – Hajnicz, E. (eds.) *Time Structures*. Lecture Notes in Computer Science (Lecture Notes in Artificial Intelligence), Vol. 1047. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.
- Hasle et al., 2017 – Hasle, P., Blackburn, P.R., Øhrstrøm, P. (eds.), *Logic and Philosophy of Time: Themes from Prior*, Vol. 1. Aalborg: Aalborg Universitetsforlag, 2017.
- Kröger, Merz, 2008 – Kröger F., Merz, S. *Temporal Logic and State Systems. Texts in Theoretical Computer Science* (An EATCS Series). Springer; Berlin; Heidelberg, 2008.
- Lichtenstein et al., 1985 – Lichtenstein, O., Pnueli, A., Zuck, L.D. “The glory of the past”, in: *Proceedings the Conference on Logic of Programs*. London: Springer-Verlag, 1985, pp. 196–218.
- Kamp, 1968 – Kamp, H., *Tense Logic and the Theory of Linear Order*, PhD Thesis. Los Angeles: University of California, 1968.
- McArthur, 1976 – McArthur, R. *Tense Logic*. Springer, Synthese Library, 1976. 91 pp.
- Müller, 2010 – Müller, T. “Towards a theory of limited indeterminism in branching space-times”, *Journal of Philosophical Logic*, 2010, Vol. 39, pp. 395–423.
- Müller, 2014 – Müller, T. “Alternatives to histories? Employing a local notion of modal consistency in branching theories”, *Erkenntnis*, 2014, Vol. 79, pp. 343–364.
- Øhrstrøm, 2009 – Øhrstrøm, P. “In Defence of the Thin Red Line: A Case for Ockhamism”, *Humana.mente*, 2009, Vol. 8, pp. 17–32.
- Øhrstrøm, Hasle, 1995 – Øhrstrøm, P., Hasle, P. *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
- Øhrstrøm, Hasle, 2006 – Øhrstrøm, P., Hasle, P. “Modern Temporal Logic: The Philosophical Background”, in: *Handbook of the History of Logic* Vol. 7. 2006, pp. 447–498.
- Pnueli, 1977 – Pnueli, A. “The Temporal Logic of Programs”, in: *Proceedings of the 18th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 1977, pp. 46–67.
- Prior, 1957 – Prior, A. *Time and Modality*. Oxford: Oxford University Press, 1957.

- Rescher, Urquhart 1971 – Rescher, N., Urquhart, A. *Temporal Logic*. Berlin: Springer, 1971.
- Prior, 1967 – Prior, A.N. *Past, Present and Future*. Oxford: Oxford University Press, 1967.
- Reynolds, 1992 – Reynolds, M. “An axiomatization for Until and Since over the reals without the IRR rule”, *Studia Logica*, 1992, Vol. 51, pp. 165–193.
- Reynolds, 1994 – Reynolds, M. “Axiomatizing U and S over Integer Time”, in: D.M. Gabbay, H.J. Ohlbach (eds.), *Temporal Logic, Proceedings of the First International Conference ICTL 1994 (Lecture Notes in Artificial Intelligence. Vol. 828)*. Berlin; Heidelberg: Springer, 1994, pp. 117–132.
- Reynolds, 1997 – Reynolds, M. “A Decidable Temporal Logic of Parallelism”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1997, Vol. 38, No. 3, pp. 419–436.
- Reynolds, 2001 – Reynolds, M. “An Axiomatization of Full Computation Tree Logic”, *Journal of Symbolic Logic*, 2001, Vol. 66, pp. 1011–1057.
- Reynolds, 2002 – Reynolds, M. “Axioms for Branching Time”, *Journal of Logic and Computation*, 2002, Vol. 12, No. 4, pp. 679–697.
- Reynolds, 2003 – Reynolds, M. “An Axiomatization of Prior’s Ockhamist Logic of Historical Necessity”, in: Balbiani et al. (eds.), *Advances in Modal Logic*. Vol. 4. London: College Publications, 2003, pp. 355–370.
- Rumberg, 2016a – Rumberg, A. “Transition Semantics for Branching Time”, *Journal of Logic Language and Information*, 2016, Vol. 25, pp. 77–108.
- Rumberg, Zanardo 2019 – Rumberg, A., Zanardo A. “First-Order Definability of Transition Structures”, *Journal of Logic, Language and Information*, 2019, Vol. 28, No. 3, pp. 459–488.
- Tarski, 1935 – Tarski, A. “Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen”, *Studia Philosophica*, 1935, Vol. 1, pp. 261–405. (English translation: Tarski, A. “The Concept of Truth in Formalized Languages”, in: *Logic, Semantics, Metamathematics*, ed. by J. Corcoran. Second edition. Indianapolis: Hackett, 1983.)
- Thomason, 1970 – Thomason, R.H. “Indeterminist Time and Truth-Value Gaps”, *Theoria*, 1970, Vol. 36, No. 3, pp. 264–281.
- Thomason, 1984 – Thomason, R.H. “Combinations of Tense and Modality”, in: D.M. Gabbay, F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic (Extensions of Classical Logic: Vol. 2)*. Dordrecht: Reidel, 1984, pp. 135–165.
- Thomason, 2020 – Thomason R.H. “Logic and Artificial Intelligence”, in: E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2020 Edition)*, <https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/logic-ai/>
- Venema, 1993 – Venema Y. “Completeness via Completeness: Since and Until”, in: M. de Rijke (ed.), *Diamonds and Defaults*. Dordrecht: Kluwer, 1993, pp. 279–286.
- Wawer, 2014 – Wawer, J. “The Truth About the Future”, *Erkenntnis*, 2014, Vol. 79, pp. 365–401.
- Xu, 1988 – Xu, M. “On some U,S-Tense Logics”, *Journal of Philosophical Logic*, 1988, Vol. 17, pp. 181–202.

- Zanardo, 1985 – Zanardo, A. “A finite axiomatization of the set of strongly valid Ockhamist formulas”, *Journal of Philosophical Logic*, 1984, Vol. 14, pp. 447–468.
- Zanardo, 1990 – Zanardo, A. “Axiomatization of ‘Peircean’ branching-time logic”, *Studia Logica*, 1990, Vol. 49, No. 2, pp. 183–195.
- Zanardo, 1996 – Zanardo, A. “Branching-time logic with quantification over branches: The point of view of modal logic”, *Journal of Symbolic Logic*, 1996, Vol. 61, No. 1, pp. 1–39.
- Zanardo, 1998 – Zanardo, A. “Undivided and Indistinguishable Histories in Branching-Time Logics”, *Journal of Logic, Language and Information*, 1998, Vol. 7, pp. 297–315.
- Zanardo, 2003 – Zanardo, A. “First-Order and Second-Order Aspects of Branching-Time Semantics”, *Preprint Dipartimento di Matematica Università di Padova*, N. 3, 17 febbraio 2003. Presented at HPLMC-02, Second International Workshop on the History and Philosophy of Logic, Mathematics and Computation (Donostia-San Sebastian, Spain, 7–9 November 2002).
- Zanardo, 2006a – Zanardo, A. “Moment/history duality in Prior’s logics of branching time”, *Synthese*, 2006, Vol. 150, No. 3, pp. 483–507.
- Zanardo, 2006b – Zanardo, A. “Quantification over sets of possible worlds in branching-time semantics”, *Studia Logica*, 2006, Vol. 82, No. 3, pp. 379–400.

Информация для авторов

- Журнал «Логические исследования» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики см. на сайте журнала <http://logicalinvestigations.ru>)
- Все статьи, планируемые к публикации в журнале «Логические исследования», проходят процедуру анонимного рецензирования.
- Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.
- Плата за опубликование рукописей не взимается.
- Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате L^AT_EX 2_ε (по согласованию с редколлегией — в MS Word с обязательным предоставлением pdf-файла).
- При подготовке рукописи в L^AT_EX 2_ε необходимо использовать стилевой класс `LIarticle.cls` и шаблон `LI_template.tex` (если рукопись на русском языке) или `LI_template_eng.tex` (если рукопись на английском языке), которые размещены в правилах предоставления рукописей на сайте <http://logicalinvestigations.ru>. Здесь же размещены подробные рекомендации по подготовке рукописи.
- Объем рукописи не должен превышать 25 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, списки литературы, аннотации (на русском и английском языках).

Статьи следует направлять в электронном виде в редакцию через сайт
<http://logicalinvestigations.ru>

Information for authors

- *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: <http://logicalinvestigations.ru>)
- All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process.
- The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.
- Authors are not charged for the publication.
- Papers should be submitted electronically in the L^AT_EX 2_ε format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format).
- While typesetting a paper, the class file `LIarticle.cls` and the template `LI_template_eng.tex` should be used; both files can be accessed at <http://logicalinvestigations.ru>. Here you can also find detailed guidelines for preparing your paper.
- Papers should not exceed 25 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

Submissions should be sent in electronic form through the website:

<http://logicalinvestigations.ru>

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations

2021. Том 27. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.

Главный редактор: *В.И. Шалак*

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технический редактор: *Е.А. Морозова*

Художники: *Н.Н. Попов, С.Ю. Растегина*

Подписано в печать с оригинал-макета 01.11.2021.

Формат 70 x 100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.

Для набора греческого текста использован пакет Teubner.

Усл. печ. л. 13,57. Уч.-изд. л. 10,03. Тираж 1 000 экз. Заказ № 19.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Разработка L^AT_EX-класса стилового оформления оригинал-макета: *А.Е. Коньков*

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН

109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:

<http://logicalinvestigations.ru>