Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 28. Number 2

Moscow
2022

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 28. Номер 2

Москва
2022

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2022. Volume 28. Number 2

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the catalogue of Russian Post is ПН145

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com
Website: https://logicalinvestigations.ru

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2022. Том 28. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «09.00.00 – философские науки»)

Подписной индекс каталога Почты России — ПН145

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 426

Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com

Сайт: https://logicalinvestigations.ru

TABLE OF CONTENTS

В НОМЕРЕ

Логические исследования
2022. Т. 28. № 2. С. 9–39
УДК 168.3

Logical Investigations
2022, Vol. 28, No. 2, pp. 9–39
DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-9-39

Философия и логика
Philosophy and logic

В.И. Шалак

Телеология и целенаправленное поведение: логический анализ

Владимир Иванович Шалак
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: shalack@mail.ru

Аннотация: Целенаправленное поведение – телеологическое понятие, наиболее адекватное для описания многих изменений в живой природе, не вписывающихся в доктрину детерминизма. Такого рода поведение обладает уникальными характеристиками. Оно законоподобно, так как характеризуется устойчивостью и повторяемостью при сходных начальных условиях. Оно способно контролировать энтропию, так как в зависимости от цели его результаты имеют меньшую или большую энтропию, чем начальные условия. Также оно обладает свойствами своеобразной обратной причинности, когда будущее целевое состояние через посредство агента поведения вызывает изменения в настоящем.

Элементарные блоки целенаправленного поведения могут быть представлены правилами двух видов – конструирующих *«Если имеет место C, сделай d, чтобы достичь G»* и процессуальных *«Если имеет место C, сделай d, чтобы запустить процесс P, который приведет к искомой цели G»*. Сложное целенаправленное поведение может быть описано как *выполнение набора правил, определяющих, какие и в каком порядке следует производить действия для достижения искомой конечной цели.* Успешные схемы целенаправленного поведения в последующем могут служить образцом для разработки различных технологий.

Анализ целенаправленной деятельности людей при вычислении функций привел А. Тьюринга к построению математической модели, получившей название машины Тьюринга. По ряду причин невозможно создать теорию целенаправленного поведения, сравнимую с теорией эффективной вычислимости, но вполне возможно построить общую модель и логическую теорию такого рода поведения, что и является целью настоящей работы. Для этого был взят язык, содержащий динамические операторы $\langle d \rangle$ и временные операторы $\boldsymbol{U}$ (*Until*) и $\boldsymbol{S}$ (*Since*). В работе определена семантика данного языка и осуществлена его аксиоматизация. В результате была построена минимальная комбинированная логика $\boldsymbol{USD}$, допускающая дальнейшие расширения. Показано, каким образом в этой логике можно определить правила целенаправленного поведения и их разновидности.

Ключевые слова: телеология, цель, целенаправленное поведение, целенаправленная деятельность, логический анализ, временная логика, динамическая логика

Для цитирования: *Шалак В.И.* Телеология и целенаправленное поведение: логический анализ // Логические исследования / Logical Investigations. 2022. Т. 28. № 2. С. 9–39. DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-9-39

Введение

Телеология, учение о целенаправленных, целесообразных изменениях в природе, столь же стара, как и сама философия, поскольку еще со времен античности была одной из ее центральных тем [Евлампиев и др., 2019]. Успехи естественных наук в механистическом объяснении явлений окружающего мира привели к тому, что телеологии было отказано в научности и долгое время к ней обращались лишь философы, которые, не будучи скованы доктринами естественных наук, не могли не видеть, что многие изменения в природе не могут быть объяснены в одних лишь терминах причинности и детерминизма. В «Критике способности суждения» Кант пишет: *«...некоторые продукты материальной природы нельзя рассматривать как возможные только по механическим законам (суждение о них требует совершенно другого закона каузальности, а именно закона конечных причин)»* [Кант, 1994, с. 228]. *«Отвращение людей науки нового времени к спекуляциям религиозной телеологии повело к решительному отказу от всего, что как-то ее напоминало, в том числе и к отказу от целевой причины и постановки вопроса "для чего" даже в тех областях исследования, где он был закономерен. <...> Но посредством простого отлучения и науке невозможно избавиться от многих "проклятых" вопросов в силу их объективного содержания, из-за того, что эти вопросы отражают реальные отношения, возникающие в природе и обществе независимо от намерений, вкусов и воли исследователя. К такого рода вопросам относится и вопрос "для чего", когда речь идет о биологических и социальных явлениях. Неумение правильно поставить и решить этот вопрос не может служить доказательством его ненаучности»* [Украинцев, 1972, с. 95–96]. Сложной проблеме совместимости принципов детерминизма и телеологии при описании живой природы посвящена работа [Фролов, 2019]. Но времена меняются, и в XX в. с появлением кибернетики как учения о самоуправляемых системах многие понятия телеологии стали обретать научный статус [Винер, 1983].

Для определенности предмета нашего исследования сосредоточимся на логическом анализе очевидных примеров целенаправленного поведения людей. Синонимом понимаемого в широком смысле целенаправленного поведения является целенаправленная деятельность, устойчивые схемы которой со временем могут служить образцом для разработки различных технологий.

Целенаправленное проведение обладает рядом удивительных характеристик, которые достойны внимательного изучения.

Прежде всего, *целенаправленное поведение законоподобно.* В законах природы мы фиксируем устойчиво повторяющиеся ряды событий, имеющие место всегда и везде, где имеются соответствующие начальные условия. Общая логическая форма законов имеет вид $\forall x(Ax \supset Bx)$. Но и целенаправленное поведение характеризуется устойчивостью и повторяемостью при соответствующих начальных условиях. В качестве простейших и хорошо известных примеров можно привести заваривание чая, приготовление яичницы на завтрак, дорогу на работу и с работы, измерение температуры тела. Это не природные закономерности в обычном смысле слова, но они обладают требуемыми характеристиками.

Следующая характеристика — это *управление энтропией.* Если законы физики описывают изменения, приводящие к повышению энтропии, то целенаправленное поведение в зависимости от поставленной цели может приводить к ее локальному уменьшению или увеличению. Собирая случайно перемешанный кубик Рубика, нашей целью является привести его к виду, когда каждая грань будет содержать клетки лишь одного цвета, а это состояние наименьшей энтропии. Если мы научились собирать кубик, мы можем делать это регулярно. Но точно так же, чтобы еще раз подтвердить свое умение, мы можем перемешать клетки кубика, максимально увеличив их энтропию. Другой пример — Золушка, перебирающая зернышки. В начальном состоянии зерна ячменя и проса беспорядочно перемешаны в одной куче, имеющей высокую энтропию. По окончании работы перед Золушкой останутся всего две кучки зерен — ячменя и проса, характеризующихся наименьшей энтропией. Но затем Золушка, чтобы было чем заняться от скуки, может заново перемешать их и тем самым увеличить энтропию. Следующий пример из области физики. Любой газ, если наполнить им сосуд, стремится равномерно распределиться по всему объему. Вероятность того, что все молекулы когда-нибудь в результате хаотического движения случайно соберутся в одной половине сосуда, практически равна нулю. Но мы вставляем в сосуд поршень, нажимаем на него и перемещаем все молекулы в одну половину. И это мы умеем делать регулярно. Следующий пример из области математики. Решение задачи нахождения корней уравнения $f(x) = 0$ — это тоже пример целенаправленного поведения с понижением энтропии. Если сначала мы находимся в ситуации полной неопределенности, то после решения задачи неопределенность исчезает — мы находим корни или приходим к заключению, что их нет.

Еще одна удивительная характеристика целенаправленного поведения — это отмечаемая многими *обратная причинность. «Может пока-*

заться, что здесь мы встречаем забавный тип каузальности, в котором причина и следствие перевернуты во времени. Причина — это вещь в будущем, производящая следствие в настоящем или прошлом» [Ruse, 2003, с. 14], цит. по [Евлампиев и др., 2019, с. 27]. Еще не существующее будущее целевое состояние через посредство агента поведения приводит к изменениям уже сегодня. Если вам нужно через неделю сдать статью в редакцию, вы сегодня оставляете все другие дела и начинаете работать над ней. Если кто-нибудь попытается вас отвлечь, вы скажете, что вам некогда, вам нужно работать. Точно так же и будущее состояние кубика Рубика заставляет вас сейчас вращать его слои в разные стороны. Обратная причинность — это вовсе не какая-то экзотика, так как обнаруживается во многих явлениях не только живой, но и неживой природы [Faye, 2021].

Как следует из смысла термина «целенаправленное поведение», оно совершается с какой-то целью. В дальнейшем изложении для обозначения цели мы будем использовать символ G (goal). Цель — это некоторое будущее положение дел, к которому стремится активный субъект (агент) целенаправленного поведения и которое может быть описано предложением языка. В русском языке для описания цели обычно используют придаточные предложения, отделяемые от основной части союзом «чтобы». Субъектами целенаправленного поведения могут быть как отдельные люди, так и группы людей, рабочие коллективы, государственные образования и пр., рассматриваемые как единое целое.

Коль скоро мы говорим о целенаправленном поведении или деятельности, предполагается, что его субъект не является пассивным наблюдателем, а совершает определенные действия для достижения поставленной цели. Такие действия мы будем обозначать символом d. Набор действий, непосредственно совершаемых субъектом, весьма ограничен. Если говорить о людях, то это механические перемещения тела или его частей и приложение усилий к предметам окружающего мира. В нашем арсенале нет действия зажигания спички. Все, что мы можем сделать, — это взять пальцами спичку и провести ею по одной из сторон спичечного коробка. Если коробок и спичка не отсырели, то она загорится. Точно так же в нашем арсенале нет действия включения света в комнате. Все, что мы можем сделать, — это подойти к выключателю и пальцем нажать на него. Если он исправен, если электропроводка и лампочка в сохранности, а сеть под напряжением, в комнате появится свет.

Для совершения того или иного действия требуется выполнение определенных предусловий. Невозможно чиркнуть спичкой по коробку, если у вас нет ни спички, ни коробка. Невозможно приступить к приготовлению яичницы на завтрак, если у вас нет яиц и сковороды. Достаточные условия для совершения действий мы будем обозначать посредством символа C (condition).

Элементарный «кирпичик» целенаправленного поведения может быть описан следующим образом: *«Если имеет место C, сделай d, чтобы достичь G»*. Назовем его элементарным правилом целенаправленного поведения и запишем в виде:

$$C \Rightarrow d : G$$

Очевидно, что далеко не всякая цель достижима в один шаг применением единственного элементарного правила. Достижение удаленной цели G обычно опосредовано целым рядом промежуточных целей с промежуточными действиями для их достижения. Достаточно вспомнить сборку кубика Рубика. Сложное целенаправленное поведение может быть описано как *выполнение набора правил, определяющих, какие и в каком порядке следует производить действия для достижения искомой конечной цели.*

Обучая ребенка переходу через регулируемый перекресток, мы могли бы сказать ему следующее:

1. *Если на светофоре горит красный или желтый свет, то остановись, чтобы дождаться зеленого света.*

2. *Если на светофоре горит зеленый свет, то переходи дорогу, чтобы оказаться на другой ее стороне.*

Такой набор из двух правил достаточно хорошо описывает целенаправленное поведение при пересечении перекрестка.

Обратим внимание, что поведение, описываемое правилами вида «$C \Rightarrow d : G$», свойственно не только людям, но и многим представителям животного мира. Такие правила соответствуют хорошо знакомой схеме стимул–реакция. Услышав писк мыши, кошка бросается, чтобы поймать ее и съесть. Но есть ли какое-то различие между целесообразным поведением людей и целесообразным поведением животных, если на уровне элементарных механических действий они неотличимы? При этом очевидно, что многие животные могут выполнять такие действия гораздо лучше, чем люди, — быстрее перемещаются, превосходят нас силой, способны высоко летать и погружаться глубоко в воду.

Принципиальное отличие целесообразного поведения людей заключается в способности производить действия с отсроченным во времени достижением цели, основанном на знании природных причинных связей.

Представим ситуацию, что у вас болит голова. Желаемая цель — избавление от этой боли. Ваше поведение в такой ситуации вполне целесообразно. Вы знаете, что, *если у человека болит голова, он может проглотить таблетку обезболивающего, чтобы головная боль прошла.* Вы проглатываете таблетку, запиваете водой и ждете. Вы знаете, что непосредственный результат действия проглатывания таблетки не совпадает с желаемым целевым состоянием, но вы также знаете, что он инициирует в организме особые химико-физиологические процессы, которые через некоторое время должны принести облегчение. Совершаемое действие направлено не на непосредственное достижение целевого состояния, а на создание достаточных причинных условий для запуска в организме специальных процессов. Ответ, почему они начнутся, дает наука, изучающая причинные связи в природе и производимые ими эффекты. Подобно этому мы бросаем весной зерна в борозду, чтобы осенью собрать урожай. Действие и целевое состояние разделяет полгода времени. Результат наших непосредственных действий отличен он конечной цели, но эти действия запускают сложные причинные процессы, которыми мы научились пользоваться.

Новый вид правил, свойственных в основном людям, имеет более сложную форму, включающую указание на инициируемые процессы: *«Если имеет место C, сделай d, чтобы запустить процесс P, который приведет к искомой цели G»*. Запишем их в виде:

$$C \Rightarrow d : P : G$$

Правила первого вида будем называть *конструирующими*, а второго — *процессуальными.* Если при выполнении конструирующего правила цель должна быть достигнута сразу, поскольку совпадает с результатом действия, то при выполнении процессуального правила цель достигается не сразу, а по мере протекания причинно инициируемого процесса.

Необходимо отметить, что даже хорошо себя зарекомендовавшие образцы целенаправленного поведения не всегда приводят к достижению поставленных целей. В таких случаях мы обычно говорим, что *все сделали правильно, но не получилось.* Вовремя посеяли зерно, но сильная засуха или обильные осадки привели к гибели урожая.

Активное применение правил второго вида со временем привело к появлению разнообразных технологий, состоящих из запускаемых разнородных, но объединенных в одну цепочку природных процессов. Появился сильный стимул для научных изысканий, приводивших к дальнейшему совершенствованию существующих технологий и появлению новых. Технологические революции в значительной степени были обусловлены открытиями новых причинных связей в природе — от силы пара до внутриатомных превращений.

Развитию новых технологий способствовала также простота механических действий, за рамки которых не могут выходить элементарные действия людей. На заре появления паровых машин их работа требовала участия человека, который, дергая рычаги, поочередно открывал и закрывал клапаны рабочего цилиндра. Ввиду простоты эта работа зачастую поручалась детям. Согласно легенде, однажды смышленому мальчику надоело дергать рычаги, и он ремнями соединил их и рабочие механизмы таким образом, что рычаги стали двигаться сами, открывая и закрывая клапаны. То, что ранее определялось инструкциями по очередности выполняемых действий, было замещено новыми структурными связями частей паровой машины, которые взяли на себя роль управления основными физическими процессами.

В 1936 г. Алан Тьюринг, анализируя целенаправленное поведение человека по вычислению математических функций, построил математическую модель абстрактного вычислительного устройства, названного впоследствии его именем [Turing, 1936]. Все, что может делать человек-вычислитель, — это перемещать фокус внимания по страницам своего блокнота, а также записывать и стирать символы на них. В предложенном Тьюрингом формализме поведение человека описывалось выполнением набора правил вида «$C \Rightarrow d$». Цель в них специально не указывалась, так как предполагалось, что ничто не может помешать успешному их выполнению и непосредственный результат каждого действия совпадает с его целью. Вскоре на основе результатов Тьюринга возникла теория эффективной вычислимости, были построены и получили широкое распространение компьютеры.

Поскольку вычисление математических функций является частным случаем целенаправленного поведения, естественно возникает желание по образцу и подобию теории эффективной вычислимости построить математическую теорию всего целенаправленного поведения. К сожалению, это невозможно и связано с тем, что теория эффективной вычислимости существенным образом использует факт фиксированности алфавита исходных символов и фиксированности набора действий машины Тьюринга. Это позволяет произвести необходимую для развития теории гёделизацию машин Тьюринга. В случае целенаправленного поведения, если мы и можем указать фиксированный набор элементарных действий субъекта, то перечислить все физические процессы, которые уже открыты или еще будут открыты наукой в будущем, не представляется возможным. Язык для описания всех образцов целенаправленного поведения открыт для будущих пополнений. Не следует возлагать излишних надежд и на кибернетику, которая в основном сосредоточена не на общих моделях целенаправленного поведения, а на изучении обратных связей между целью и действиями, предпринимаемыми для ее достижения. Выпущенная в направлении цели ракета с головкой самонаведения периодически корректирует свою траекторию, чтобы точно поразить цель.

Целесообразное поведение в терминах конструирующих и процессуальных правил обладает дополнительным глубинным смыслом. Первая глава первой книги Метафизики Аристотеля начинается словами: *«Все люди от природы стремятся к знанию»*. Дальше он выделяет три вида знаний. Первое — знание, происходящее из чувственных восприятий, второе — искусство (или умения) и третье — мудрость, знание о причинах. Сегодня вместо чувственного восприятия мы бы использовали термин *эмпирическое знание*, вместо искусства и умений — *инженерное знание в широком смысле*, а вместо мудрости — *теоретические науки*. Правила «$C \Rightarrow d : P : G$» имплицитно содержат все три перечисленных вида знаний. Проверка условий C применения правил опирается на эмпирическое знание о текущем положении дел. Инженерное знание — это знание о том, как посредством простых манипуляций d запускать те или иные процессы P. Теоретические науки открывают новые процессы P и описывают их причинные связи.

В предыдущих работах [Шалак, 2021a] и [Шалак, 2021b] на многочисленных содержательных примерах мы уже рассмотрели проявление, структуру и эволюцию целенаправленного поведения в жизни отдельных людей и в функционировании социальных структур. Следующим шагом должен был стать строгий логический анализ и определение семантики. Несмотря на то, что построить математическую теорию целенаправленного поведения по образцу теории вычислимости невозможно, все еще представляется возможным построить общую модель и логическую теорию такого рода поведения. Это и является целью настоящей работы.

1. Комбинированная логика *USD*

Чтобы приступить к решению задачи, выделим общие черты, которыми должен обладать язык логики и его модели.

1. Поскольку цель всегда удалена во времени, нам не обойтись без моделей и языка временной логики.

2. Поскольку субъект для достижения поставленных целей должен совершать те или иные действия, мы должны иметь языковые средства для их представления.

3. Поскольку действия субъекта могут инициировать протяженные во времени процессы, они также должны быть каким-то образом представимы.

1.1. Язык

Возьмем язык пропозициональной логики и добавим к нему два двухместных временных оператора $\boldsymbol{S}$ (Since) и $\boldsymbol{U}$ (Until), которые помимо задания временных отношений позволят нам представлять длящиеся во времени процессы. Такой язык рассмотрел Дж. Камп [Kamp, 1968], применив его для анализа continuous-времен английского языка. Это как раз то, что нам нужно. Также дополним язык множеством элементарных действий Act, которые может выполнять агент.

1. $Prop$ — множество пропозициональных переменных;
2. Act — множество элементарных действий $\{d_1, d_2, \dots\}$;
3. $\neg$, $\wedge$ — логические связки;
4. $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{U}$ — двухместные временные операторы;
5. $)$, $($, $\rangle$, $\langle$ — технические символы.

Понятие формулы определим следующим образом:

$A \;=\; p \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid \boldsymbol{S}(A, B) \mid \boldsymbol{U}(A, B) \mid \langle d \rangle\, A$, где $p \in Prop$, $d \in Act$.

Определение 1. Расширим язык посредством определений:

1. $(A \vee B) \Leftrightarrow_{def} \neg(\neg A \wedge \neg B)$;
2. $(A \supset B) \Leftrightarrow_{def} \neg A \vee B$;
3. $\boldsymbol{t} \Leftrightarrow_{def} p \vee \neg p$ — для фиксированной $p \in Prop$;
4. $\boldsymbol{f} \Leftrightarrow_{def} \neg \boldsymbol{t}$;
5. $\boldsymbol{F} A \Leftrightarrow_{def} U(A, \boldsymbol{t})$;
6. $\boldsymbol{G} A \Leftrightarrow_{def} \neg \boldsymbol{F} \neg A$;
7. $\boldsymbol{P} A \Leftrightarrow_{def} \boldsymbol{S}(A, \boldsymbol{t})$;
8. $\boldsymbol{H} A \Leftrightarrow_{def} \neg \boldsymbol{P} \neg A$;
9. $[d]\, A \Leftrightarrow_{def} \neg \langle d \rangle \neg A$.

Замечание. Для краткого обозначения в метаязыке логических связок и кванторов будем использовать следующие символы:

- «$\sim \ldots$» — «не...»;
- «$\ldots \& \ldots$» — «...и...»;
- «$\cdots \Rightarrow \ldots$» — «если..., то...»;
- «$\cdots \Leftrightarrow \ldots$» — «...если и только если...»;
- «$\exists v \ldots$» — «существует такой v, что...»;
- «$\forall v \ldots$» — «для всякого v имеет место...».

1.2. Модельная структура

Модельной структурой будем называть пару $\langle W, < \rangle$, где

1. W — непустое множество возможных миров;
2. $< \subseteq W \times W$ — временное отношение достижимости на мирах.

В целях максимальной общности мы не налагаем на отношение достижимости никаких ограничений. Если понадобится, это можно будет сделать в будущем.

1.3. Модель

Модель $M = \langle W,\ <,\ I \rangle$ — это тройка, где

1. $\langle W,\ < \rangle$ — модельная структура;
2. I — функция интерпретации дескриптивных терминов языка:
    - $I(p) \subseteq W$;
    - $I(d) \subseteq <$.

Поскольку действия, выполняемые агентом, происходят во времени, они должны подчиняться его порядку. Этим обусловлено требование $I(d) \subseteq <$.

1.4. Истинность в модели

Обозначим посредством $M, w \vDash A$ отношение «*формула* A *истинна в возможном мире* w *модели* $M = \langle W, <, I\rangle$», задав его следующим образом:

1. $M, w \vDash p \Leftrightarrow_{def} w \in I(p)$;
2. $M, w \vDash \neg A \Leftrightarrow_{def} M, w \nvDash A$;
3. $M, w \vDash A \wedge B \Leftrightarrow_{def} M, w \vDash A \;\&\; M, w \vDash B$;
4. $M, w \vDash \boldsymbol{S}(A, B) \Leftrightarrow_{def} \exists v(v < w \;\&\; M, v \vDash A \;\&\; \forall u(v < u < w \Rightarrow M, u \vDash B))$;
5. $M, w \vDash \boldsymbol{U}(A, B) \Leftrightarrow_{def} \exists v(w < v \;\&\; M, v \vDash A \;\&\; \forall u(w < u < v \Rightarrow M, u \vDash B))$;
6. $M, w \vDash \langle d\rangle A \Leftrightarrow_{def} \exists v(\langle w, v\rangle \in I(d) \;\&\; M, v \vDash A)$;

Операторы $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{U}$ можно понимать как ограниченные во времени прайоровские операторы $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{G}$. Если $\boldsymbol{H}A$ интерпретируется как *«всегда было* A*»*, то $\mathbf{S}(B, A)$ понимается как *«с некоторого момента в прошлом, когда было* B*, всегда имело место* A*»*. Аналогично для будущего $\mathbf{U}(B, A)$ — *«до некоторого момента в будущем, когда станет истинно* B*, всегда будет иметь место* A*»*.

Легко проверить, что условия истинности для формул с модальными операторами, которые мы ввели посредством Определения 1, стандартны:

7. $M, w \vDash \boldsymbol{F}A \Leftrightarrow \exists v(w < v \;\&\; M, v \vDash A)$;
8. $M, w \vDash \boldsymbol{G}A \Leftrightarrow \forall v(w < v \Rightarrow M, v \vDash A)$;
9. $M, w \vDash \boldsymbol{H}A \Leftrightarrow \forall v(v < w \Rightarrow M, v \vDash A)$;
10. $M, w \vDash \boldsymbol{P}A \Leftrightarrow \exists v(v < w \;\&\; M, v \vDash A)$;
11. $M, w \vDash [d]A \Leftrightarrow \forall v(\langle w, v\rangle \in I(d) \Rightarrow M, v \vDash A)$.

Также зададим следующие отношения:

- $M \vDash A \Leftrightarrow_{def} \forall w(M, w \vDash A)$ — A истинна в модели M;
- $\vDash A \Leftrightarrow_{def} \forall M(M \vDash A)$ — A общезначима;
- $\exists M \exists w(M, w \vDash A)$ — A выполнима.

1.5. Аксиомы и правила вывода

Ax.0 *Аксиомы логики высказываний*

Ax.1 $\boldsymbol{G}(A \supset B) \supset (\boldsymbol{U}(C, A) \supset \boldsymbol{U}(C, B)) \wedge (\boldsymbol{U}(A, C) \supset \boldsymbol{U}(B, C))$

Ax.2 $\boldsymbol{H}(A \supset B) \supset (\boldsymbol{S}(C, A) \supset \boldsymbol{S}(C, B)) \wedge (\boldsymbol{S}(A, C) \supset \boldsymbol{S}(B, C))$

Ax.3 $A \wedge \boldsymbol{U}(B, C) \supset \boldsymbol{U}(B \wedge \boldsymbol{S}(A, C),\ C)$

Ax.4 $A \wedge \boldsymbol{S}(B, C) \supset \boldsymbol{S}(B \wedge \boldsymbol{U}(A, C),\ C)$

Ax.5 $[d](A \supset B) \supset ([d]\, A \supset [d]\, B)$

Ax.6 $\langle d \rangle\, A \supset \boldsymbol{F}A$

Четыре правила вывода:

1. *Modus ponens*;
2. $\vdash A \Rightarrow \vdash \boldsymbol{G}A$;
3. $\vdash A \Rightarrow \vdash \boldsymbol{H}A$;
4. $\vdash A \Rightarrow \vdash [d]\, A$.

Определения отношения выводимости и доказуемости стандартные.

2. Непротиворечивость и полнота логики *USD*

Из-за наличия нестандартных операторов $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{U}$ доказательство полноты несколько сложнее, чем аналогичное для временной логики с прайоровскими операторами. В общих чертах оно будет следовать доказательству С. Мина [Ming, 1988], но более подробно и с дополнительными отличиями из-за наличия динамических операторов.

Лемма 1. *Логика* ***USD*** *непротиворечива относительно предложенной семантики.*

Доказательство леммы опускаем, так как оно не представляет особой сложности и сводится к простой проверке аксиом и правил вывода.

Определение 2. Еще раз напомним определения максимально непротиворечивых и дедуктивно замкнутых множеств.

1. $\boldsymbol{MCS} =_{def} \{w : {\sim}(w \vdash \boldsymbol{f})\ \&\ \forall A(A \notin w \Rightarrow w \cup \{A\} \vdash \boldsymbol{f})\}$ — семейство всех максимально непротиворечивых множеств формул.

2. $\boldsymbol{DCS} =_{def} \{w : \forall A(w \vdash A \Rightarrow A \in w)\}$ — семейство всех дедуктивно замкнутых множеств формул.

Необходимо дать комментарий к пониманию отношения выводимости «$\vdash$» в выражениях вида $w \vdash A$, где w — некоторое, возможно, пустое, множество формул. Пусть Th — множество всех теорем логики $\boldsymbol{USD}$. Тогда отношение выводимости $w \vdash A$ означает то же самое, что и классическая выводимость $Th \cup w \vdash A$.

Лемма 2. *Логика* $\boldsymbol{USD}$ *обладает следующими свойствами:*

1. $\vdash \neg B \Rightarrow \vdash \neg \boldsymbol{U}(B, A)$
2. $\vdash \neg B \Rightarrow \vdash \neg \boldsymbol{S}(B, A)$
3. $\vdash B \equiv C \Rightarrow \vdash A\,[B/p] \equiv A\,[C/p]$
4. $\vdash A_1 \supset A_2,\ \vdash B_1 \supset B_2 \Rightarrow \vdash \boldsymbol{U}(A_1, B_1) \supset \boldsymbol{U}(A_2, B_2),\ \vdash \boldsymbol{S}(A_1, B_1) \supset \boldsymbol{S}(A_2, B_2)$
5. $\vdash A \supset \boldsymbol{GP}A$
6. $\vdash A \supset \boldsymbol{HF}A$
7. $\vdash \boldsymbol{G}(A \supset B) \supset (\boldsymbol{G}A \supset \boldsymbol{G}B)$
8. $\vdash \boldsymbol{H}(A \supset B) \supset (\boldsymbol{H}A \supset \boldsymbol{H}B)$
9. $\vdash A \wedge \boldsymbol{U}(B, C) \supset \boldsymbol{U}(B, C \wedge \boldsymbol{P}A)$
10. $\vdash A \wedge \boldsymbol{S}(B, C) \supset \boldsymbol{S}(B, C \wedge \boldsymbol{F}A)$

Доказательство.

(1) $\vdash \neg B \Rightarrow \vdash \neg \boldsymbol{U}(B, A)$.

$+1. \vdash \neg B$	— доп.
$2. \vdash \boldsymbol{G}\neg B$	— из 1
$3. \vdash \neg \boldsymbol{F}B$	— из 2 по Опр. 1.6
$4. \vdash \neg \boldsymbol{U}(B, \boldsymbol{t})$	— из 3 по Опр. 1.5
$5. \vdash \boldsymbol{G}(A \supset \boldsymbol{t}) \supset (\boldsymbol{U}(B, A) \supset \boldsymbol{U}(B, \boldsymbol{t}))$	— Ax.1
$6. \vdash \boldsymbol{G}(A \supset \boldsymbol{t}) \supset (\neg \boldsymbol{U}(B, \boldsymbol{t}) \supset \neg \boldsymbol{U}(B, A))$	— из 5 по ЛВ
$7. \vdash A \supset t$	— теорема ЛВ
$8. \vdash \boldsymbol{G}(A \supset t)$	— из 7
$9. \vdash \neg \boldsymbol{U}(B, A)$	— из 4, 6, 8

(2) $\vdash \neg B \Rightarrow \vdash \neg \boldsymbol{S}(B, A)$.

Аналогично (1)

(3) $\vdash B \equiv C \Rightarrow \vdash A\,[B/p] \equiv A\,[C/p]$.

Это стандартная теорема о подстановке, которая доказывается структурной индукцией по A. Для случая, когда главным знаком A является $\boldsymbol{U}$ или $\boldsymbol{S}$, применяем аксиомы Ax.1 или Ax.2.

(4) $\vdash A_1 \supset A_2,\ \vdash B_1 \supset B_2 \Rightarrow \vdash \boldsymbol{U}(A_1, B_1) \supset \boldsymbol{U}(A_2, B_2),\ \vdash \boldsymbol{S}(A_1, B_1) \supset \boldsymbol{S}(A_2, B_2)$.

Это свойство монотонности операторов $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{S}$, которое доказывается применением аксиом Ax.1 и Ax.2.

(5) $\vdash\ A \supset \boldsymbol{GP}A$.

$+1.\ A$	— доп.
$\lceil +2.\ \neg \boldsymbol{GP}A$	— доп.
$\vert 3.\ \boldsymbol{F}\neg \boldsymbol{P}A$	— из 2 по Опр. 1.6
$\vert 4.\ \boldsymbol{U}(\neg \boldsymbol{P}A, \boldsymbol{t})$	— из 3 по Опр. 1.5
$\vert 5.\ A \wedge \boldsymbol{U}(\neg \boldsymbol{P}A, \boldsymbol{t}) \supset \boldsymbol{U}(\neg \boldsymbol{P}A \wedge \boldsymbol{S}(A, \boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})$	— Ax.3
$\vert 6.\ \boldsymbol{U}(\neg \boldsymbol{P}A \wedge \boldsymbol{S}(A, \boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})$	— из 1, 4, 5
$\vert 7.\ \boldsymbol{U}(\neg \boldsymbol{P}A \wedge \boldsymbol{P}A, \boldsymbol{t})$	— из 6 по Опр. 1.7
$\vert 8. \vdash \neg(\neg \boldsymbol{P}A \wedge \boldsymbol{P}A)$	— теорема ЛВ
$\vert 9. \vdash \neg \boldsymbol{U}(\neg \boldsymbol{P}A \wedge \boldsymbol{P}A, \boldsymbol{t})$	— из 8 по (1)
$\lfloor 10.$ *противоречие*	— 7, 9
$11.\ \boldsymbol{GP}A$	— из 2–10
$12. \vdash A \supset \boldsymbol{GP}A$	— из 1–11

(6) $\vdash\ A \supset \boldsymbol{HF}A$.

Доказательство аналогично (5).

(7) $\vdash\ \boldsymbol{G}(A \supset B) \supset (\boldsymbol{G}A \supset \boldsymbol{G}B)$.

$+1.\ \boldsymbol{G}(A \supset B)$	— доп.
$+2.\ \boldsymbol{G}A$	— доп.
$\lceil +3.\ \neg \boldsymbol{GB}$	— доп.
$\vert 4.\ \boldsymbol{F}\neg B$	— из 3 по Опр. 1.6
$\vert 5.\ \boldsymbol{U}(\neg B, \boldsymbol{t})$	— из 4 по Опр. 1.5
$\vert 6.\ \boldsymbol{U}(\neg B \wedge \boldsymbol{S}(\boldsymbol{G}A, \boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})$	— из 2, 5 по Ax.3
$\vert 7.\ \boldsymbol{U}(\neg B \wedge \boldsymbol{PG}A, \boldsymbol{t})$	— из 6 по Опр. 1.7
$\vert 8. \vdash \boldsymbol{PG}A \supset A$	— из (6)

$\vert 9.\ \boldsymbol{U}(\neg B \wedge A, \boldsymbol{t})$	— из 7, 8, (4)
$\vert 10.\ \boldsymbol{U}(\neg(A \supset B), \boldsymbol{t})$	— из 9 по (3)
$\vert 11.\ \boldsymbol{F}\neg(A \supset B)$	— из 10 по Опр. 1.5
$\vert 12.\ \neg\boldsymbol{G}(A \supset B)$	— из 11 по Опр. 1.6
$\lfloor 13.$ *противоречие*	— 1, 12
14. $\boldsymbol{G}B$	— из 3–13
15. $\vdash \boldsymbol{G}(A \supset B) \supset (\boldsymbol{G}A \supset \boldsymbol{G}B)$	— из 1, 2–14

(8) $\vdash\ \boldsymbol{H}(A \supset B) \supset (\boldsymbol{H}A \supset \boldsymbol{H}B)$.

Доказательство аналогично (7).

(9) $\vdash\ A \wedge \boldsymbol{U}(B, C) \supset \boldsymbol{U}(B, C \wedge \boldsymbol{P}A)$.

+1. $A \wedge \boldsymbol{U}(B, C)$	— доп.
2. $\boldsymbol{GP}A$	— из 1 по (5)
3. $\vdash \boldsymbol{P}A \supset (C \supset C \wedge \boldsymbol{P}A)$	— теорема ЛВ
4. $\vdash \boldsymbol{G}(\boldsymbol{P}A \supset (C \supset C \wedge \boldsymbol{P}A))$	— из 3
5. $\vdash \boldsymbol{GP}A \supset \boldsymbol{G}(C \supset C \wedge \boldsymbol{P}A)$	— из 4, по (7)
6. $\boldsymbol{G}(C \supset C \wedge \boldsymbol{P}A)$	— из 2, 5
7. $\vdash \boldsymbol{G}(C \supset C \wedge \boldsymbol{P}A) \supset (\boldsymbol{U}(B, C) \supset \boldsymbol{U}(B, C \wedge \boldsymbol{P}A))$	— Ax.1
8. $\boldsymbol{U}(B, C) \supset \boldsymbol{U}(B, C \wedge \boldsymbol{P}A)$	— из 6, 7
9. $\boldsymbol{U}(B, C \wedge \boldsymbol{P}A)$	— из 1, 8
10. $\vdash A \wedge \boldsymbol{U}(B, C) \supset \boldsymbol{U}(B, C \wedge \boldsymbol{P}A)$	— из 1–9

(10) $\vdash\ A \wedge \boldsymbol{S}(B, C) \supset \boldsymbol{S}(B, C \wedge \boldsymbol{F}A)$.

Доказательство аналогично (9). ■

Лемма 3. *Для любых* $w, v \in \boldsymbol{MCS}$ *и любой формулы* A *следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\forall B(B \in v \Rightarrow \boldsymbol{U}(B, A) \in w)$
2. $\forall B(B \in w \Rightarrow \boldsymbol{S}(B, A) \in v)$

Доказательство.

$(1 \Rightarrow 2)$

+1. $\forall B(B \in v \Rightarrow \boldsymbol{U}(B, A) \in w)$	— доп.
+2. $B \in w$	— доп.
$\lceil$+3. $\boldsymbol{S}(B, A) \notin v$	— доп.

$\vert 4.\ \neg\boldsymbol{S}(B,A) \in v$	— из 3
$\vert 5.\ \boldsymbol{U}(\neg\boldsymbol{S}(B,A),A) \in w$	— из 1, 4
$\vert 6.\ B \wedge \boldsymbol{U}(\neg\boldsymbol{S}(B,A),A) \supset \boldsymbol{U}(\neg\boldsymbol{S}(B,A) \wedge \boldsymbol{S}(B,A),A)$	— Ax.3
$\vert 7.\ \boldsymbol{U}(\neg\boldsymbol{S}(B,A) \wedge \boldsymbol{S}(B,A),A) \in w$	— из 2, 5, 6
$\vert 8.\ \vdash \neg(\neg\boldsymbol{S}(B,A) \wedge \boldsymbol{S}(B,A))$	— теорема ЛВ
$\vert 9.\ \vdash \neg\boldsymbol{U}(\neg\boldsymbol{S}(B,A) \wedge \boldsymbol{S}(B,A),A)$	— из 8 по Лемме 2.1
$\vert 10.\ \neg\boldsymbol{U}(\neg\boldsymbol{S}(B,A) \wedge \boldsymbol{S}(B,A),A) \in w$	— из 9
$\lfloor 11.$ *противоречие*	— 7, 10
12. $\boldsymbol{S}(B,A) \in v$	— из 3, 11
13. $\forall B(B \in w \Rightarrow \boldsymbol{S}(B,A) \in v)$	— из 2–12

$(2 \Rightarrow 1)$

$+1.\ \forall B(B \in w \Rightarrow \boldsymbol{S}(B,A) \in v)$	— доп.
$+2.\ B \in v$	— доп.
$\lceil +3.\ \boldsymbol{U}(B,A) \notin w$	— доп.
$\vert 4.\ \neg\boldsymbol{U}(B,A) \in w$	— из 3
$\vert 5.\ \boldsymbol{S}(\neg\boldsymbol{U}(B,A),A) \in v$	— из 1, 4
$\vert 6.\ B \wedge \boldsymbol{S}(\neg\boldsymbol{U}(B,A),A) \supset \boldsymbol{S}(\neg\boldsymbol{U}(B,A) \wedge \boldsymbol{U}(B,A),A)$	— Ax.4
$\vert 7.\ \boldsymbol{S}(\neg\boldsymbol{U}(B,A) \wedge \boldsymbol{U}(B,A),A) \in v$	— из 2, 5, 6
$\vert 8.\ \vdash \neg(\neg\boldsymbol{U}(B,A) \wedge \boldsymbol{U}(B,A))$	— теорема ЛВ
$\vert 9.\ \vdash \neg\boldsymbol{S}(\neg\boldsymbol{U}(B,A) \wedge \boldsymbol{U}(B,A),A)$	— из 8 по Лемме 2.2
$\vert 10.\ \neg\boldsymbol{S}(\neg\boldsymbol{U}(B,A) \wedge \boldsymbol{U}(B,A),A) \in v$	— из 9
$\lfloor 11.$ *противоречие*	— 7, 10
12. $\boldsymbol{U}(B,A) \in w$	— из 3, 11
13. $\forall B(B \in v \Rightarrow \boldsymbol{U}(B,A) \in w)$	— из 2–12

■

Определение 3. *Для любых* $w, v \in \boldsymbol{MCS}$

1. $r(w,A,v) \Leftrightarrow_{def} \forall B(B \in v \Rightarrow \boldsymbol{U}(B,A) \in w)$;
2. $\hat{r}(w,x,v) \Leftrightarrow_{def} x \in \boldsymbol{DCS}\ \&\ \forall A(A \in x \Rightarrow r(w,A,v))$;
3. $R(w,x,v) \Leftrightarrow_{def} \hat{r}(w,x,v)\ \&\ \forall y(\hat{r}(w,y,v)\ \&\ x \subseteq y \Rightarrow x = y)$.

Смысл отношения $R(w,x,v)$ заключается в том, что если w и v понимать как полные описания положения дел в двух возможных мирах, то x — это множество всех предложений, которые сохраняют истинность в промежуточных возможных мирах при переходе от w к v.

Лемма 4. *Для любых* $w, v \in \boldsymbol{MCS}$

1. $r(w, A, v) \Rightarrow \exists x(\hat{r}(w, x, v) \,\&\, A \in x)$;
2. $\hat{r}(w, x, v) \Rightarrow \exists y(R(w, y, v) \,\&\, x \subseteq y)$;
3. $R(w, x, v) \,\&\, A \notin x \Rightarrow \exists B(B \in x \,\&\, {\sim} r(w, A \wedge B, v))$;
4. $\boldsymbol{U}(A, B) \in w \Rightarrow \exists x \exists v(R(w, x, v) \,\&\, B \in x \,\&\, A \in v)$;
5. $\boldsymbol{S}(A, B) \in v \Rightarrow \exists w \exists x(R(w, x, v) \,\&\, A \in w \,\&\, B \in x)$.

Доказательство.

(1) $r(w, A, v) \Rightarrow \exists x(\hat{r}(w, x, v) \,\&\, A \in x)$

$+1.\ r(w, A, v)$	— доп.
$2.\ x =_{def} \{B : A \vdash B\}$	— x дедуктивное замыкание $\{A\}$
$3.\ A \in x$	— из 2, т.к. $A \vdash A$
$\lceil +4.\ x \vdash C$	— доп.
$\vert 5.\ A \vdash C$	— из 2, 4 по свойствам $\vdash$
$\lfloor 6.\ C \in x$	— из 2, 5
$7.\ x \in \boldsymbol{DCS}$	— из 4–6, по Опр. 2.2
$\lceil +8.\ B \in x$	— доп.
$\vert 9.\ A \vdash B$	— из 2, 8
$\vert 10.\ \vdash A \supset B$	— из 9 теореме дедукции
$\vert 11.\ \forall C(C \in v \Rightarrow \boldsymbol{U}(C, A) \in w)$	— из 1 по Опр.3
$\vert 12.\ \forall C(C \in v \Rightarrow \boldsymbol{U}(C, B) \in w)$	— из 10, 11, Лемме 2.4
$\lfloor 13.\ r(w, B, v)$	— из 12, по Опр. 3.1
$14.\ \forall B(B \in x \Rightarrow r(w, B, v))$	— из 8–13
$15.\ \hat{r}(w, x, v)$	— из 7, 14 по Опр. 3.2
$16.\ \exists x(\hat{r}(w, x, v) \,\&\, A \in x)$	— из 3, 15

(2) $\hat{r}(w, x, v) \Rightarrow \exists y(R(w, y, v) \,\&\, x \subseteq y)$

Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — пересчет всех формул языка. Определим последовательность $\boldsymbol{DCS}$-множеств $x_0, \ldots, x_{n+1}, \ldots$.

$x_0 = x$

$$x_{n+1} = \begin{cases} z, & \text{если } z = \{B : x_n \cup \{A_n\} \vdash B\},\ \hat{r}(w, z, v); \\ x_n, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$y =_{def} \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} x_i$

(3) $R(w,x,v)$ & $A \notin x \Rightarrow \exists B(B \in x$ & $\sim r(w, A \wedge B, v))$

+1. $R(w,x,v)$ & $A \notin x$	— доп.
2. $\hat{r}(w,x,v)$ & $\forall y(\hat{r}(w,y,v)$ & $x \subseteq y \Rightarrow x = y)$	— из 1 по Опр. 3.3
3. $\forall y(x \subset y \Rightarrow \ \sim\hat{r}(w,y,v))$	— из 2
4. $y =_{def} \{C : x \cup \{A\} \vdash C\}$	— зададим y
5. $x \subset y$	— из 1, 4
6. $\sim\hat{r}(w,y,v)$	— из 3, 5
7. $\exists C(C \in y$ & $\sim r(w,C,v))$	— из 6 по Опр. 3.2
8. $C \in y$ & $\sim r(w,C,v)$	— из 7 для некот. C
9. $x \cup \{A\} \vdash C$	— из 4, 8
10. $B \wedge A \vdash C$	— из 9 для некот. $B \in x$
11. $\vdash B \wedge A \supset C$	— из 10
$\lceil$ +12. $r(w, A \wedge B, v)$	— доп.
$\vert$13. $\forall D(D \in v \Rightarrow \boldsymbol{U}(D, A \wedge B) \in w)$	— из 12 по Опр. 3.1
$\vert$14. $\forall D(D \in v \Rightarrow U(D,C) \in w)$	— из 11, 13, Лемма 2.4
$\vert$15. $r(w,C,v)$	— из 14 по Опр. 3.2
$\lfloor$16. *противоречие*	— 8, 15
17. $\sim r(w, A \wedge B, v)$	— из 12–16
18. $B \in x$ & $\sim r(w, A \wedge B, v)$	— из 10, 17
19. $\exists B(B \in x$ & $\sim r(w, A \wedge B, v))$	— из 18

(4) $\boldsymbol{U}(A,B) \in w \Rightarrow \exists x \exists v(R(w,x,v)$ & $B \in x$ & $A \in v)$

+1. $\boldsymbol{U}(A,B) \in w$	— доп.
2. $v_0 =_{def} \{A\} \cup \{\boldsymbol{S}(C,B) : C \in w\}$	— определим мн-во v_0
$\lceil$+3. $v_0 \vdash \boldsymbol{f}$	— доп.
$\vert$4. $A \wedge \boldsymbol{S}(C_1,B) \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{S}(C_n,B) \vdash \boldsymbol{f}$	— из 3
$\vert$5. $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n \in w$	— из 2, 4
$\vert$6. $\boldsymbol{S}(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n, B) \in v_0$	— из 2, 5
$\vert$7. $\vdash \boldsymbol{S}(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n, B) \supset \boldsymbol{S}(C_1,B) \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{S}(C_n,B)$	— теорема ***USD***
$\vert$8. $A \wedge \boldsymbol{S}(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n, B) \vdash \boldsymbol{f}$	— из 4, 7
$\vert$9. $\boldsymbol{U}(A \wedge \boldsymbol{S}(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n, B), B) \in w$	— из 1, 5 по Ax.3
$\vert$10. $\sim [\boldsymbol{U}(A \wedge \boldsymbol{S}(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n, B), B) \vdash \boldsymbol{f}]$	— из 9
$\vert$11. $\sim \vdash \neg \boldsymbol{U}(A \wedge \boldsymbol{S}(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n, B), B)$	— из 10
$\vert$12. $\sim \vdash \neg(A \wedge \boldsymbol{S}(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n, B))$	— из 11 по Лемме 2.1
$\vert$13. $\sim [A \wedge \boldsymbol{S}(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n, B) \vdash \boldsymbol{f}]$	— из 12
$\lfloor$14. *противоречие*	— из 4, 13
15. $\sim [v_0 \vdash \boldsymbol{f}]$	— из 3–14
16. $v_0 \subseteq v$ & $v \in \boldsymbol{MCS}$	— из 15 для некот. v

17. $\forall C(C \in w \Rightarrow \boldsymbol{S}(C,B) \in v)$ — из 2, 16
18. $r(w,B,v)$ — из 17 по Лемме 3 и Опр. 3.1
19. $\exists x \in \boldsymbol{DCS}(\hat{r}(w,x,v) \mathbin{\&} B \in x)$ — из 18 по (1)
20. $\hat{r}(w,x,v) \mathbin{\&} B \in x$ — из 19 для некот. x
21. $\exists y \in \boldsymbol{DCS}(R(w,y,v) \mathbin{\&} x \subseteq y)$ — из 20 по (2)
22. $\exists y \in \boldsymbol{DCS}(R(w,y,v) \mathbin{\&} B \in y)$ — из 20, 21
23. $\exists y(R(w,y,v) \mathbin{\&} B \in y \mathbin{\&} A \in v)$ — из 2, 16, 22
24. $\exists x \exists v(R(w,x,v) \mathbin{\&} B \in x \mathbin{\&} A \in v)$ — из 23

(5) $\boldsymbol{S}(A,B) \in v \Rightarrow \exists w \exists x(R(w,x,v) \mathbin{\&} A \in w \mathbin{\&} B \in x)$

Аналогично (4).

■

Лемма 5. *Имеют место следующие утверждения:*

1. $R(w,x,v) \Rightarrow \forall A(A \in w \Rightarrow \boldsymbol{S}(A,\boldsymbol{t}) \in x)$
2. $R(w,x,v) \Rightarrow \forall A(A \in v \Rightarrow \boldsymbol{U}(A,\boldsymbol{t}) \in x)$

Доказательство.

(1) $R(w,x,v) \Rightarrow \forall A(A \in w \Rightarrow \boldsymbol{S}(A,\boldsymbol{t}) \in x)$

+1. $R(w,x,v)$ — доп.
+2. $A \notin w$ — доп.
⌈+3. $\boldsymbol{S}(A,\boldsymbol{t}) \notin x$ — доп.
|4. $\boldsymbol{S}(A,\boldsymbol{t}) \notin x \Rightarrow \exists B(B \in x \mathbin{\&} {\sim} r(w, \boldsymbol{S}(A,\boldsymbol{t}) \wedge B, v))$ — по Лемме 4.3
|5. $\exists B(B \in x \mathbin{\&} {\sim} r(w, \boldsymbol{S}(A,\boldsymbol{t}) \wedge B, v))$ — из 3, 4
|6. $B \in x \mathbin{\&} {\sim} r(w, \boldsymbol{S}(A,\boldsymbol{t}) \wedge B, v)$ — из 5 для некот. B
|7. $\exists C(C \in v \mathbin{\&} \boldsymbol{U}(C, \boldsymbol{S}(A,\boldsymbol{t}) \wedge B) \notin w)$ — из 6 по Опр. 2.1
|8. $C \in v \mathbin{\&} \boldsymbol{U}(C, \boldsymbol{S}(A,t) \wedge B) \notin w$ — из 7 для некот. C
|9. $\hat{r}(w,x,v) \mathbin{\&} \forall y(\hat{r}(w,y,v) \mathbin{\&} x \subseteq y \Rightarrow x = y)$ — из 1 по Опр.3.3
|10. $x \in \boldsymbol{DCS} \mathbin{\&} \forall A(A \in x \Rightarrow r(w,A,v))$ — из 9 по Опр. 3.2
|11. $B \in x \Rightarrow r(w,B,v)$ — из 10
|12. $r(w,B,v)$ — из 6, 11
|13. $\forall C(C \in v \Rightarrow \boldsymbol{U}(C,B) \in w)$ — из 12 по Опр. 3.1
|14. $C \in v \Rightarrow \boldsymbol{U}(C,B) \in w$ — из 13
|15. $\boldsymbol{U}(C,B) \in w$ — из 8, 14
|16. $\vdash A \wedge \boldsymbol{U}(C,B) \Rightarrow \boldsymbol{U}(C, B \wedge \boldsymbol{P}A)$ — Лемма 2.9
|17. $\boldsymbol{U}(C, B \wedge \boldsymbol{P}A) \in w$ — из 2, 15, 16
|18. $\boldsymbol{U}(C, B \wedge \boldsymbol{S}(A,\boldsymbol{t})) \in w$ — из 17 по Опр. 1.7

$\lfloor$19. *противоречие* — 8, 18
13. $\boldsymbol{S}(A,\boldsymbol{t})\in x$ — из 3–19

$$(2) R(w,x,v)\Rightarrow\forall A(A\in v\Rightarrow\boldsymbol{U}(A,\boldsymbol{t})\in x)$$

Аналогично (1) ■

Лемма 6. *Для любых* $w,v\in\boldsymbol{MCS}$ *имеет место*

$$\hat{r}(w,x,v)\ \&\ \neg\,\boldsymbol{U}(A,B)\in w\ \&\ A\in v\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\exists u\exists x_1\exists x_2\,[R(w,x_1,u)\ \&\ R(u,x_2,v)\ \&\ x\subseteq u\ \&\ \neg B\in u]$$

Доказательство.

+1. $\hat{r}(w,x,v)\ \&\ \neg\,\boldsymbol{U}(A,B)\in w\ \&\ A\in v$ — доп.
2. $\exists z(R(w,z,v)\ \&\ x\subseteq z)$ — из 1 по Лемме 4.2
3. $R(w,z,v)\ \&\ x\subseteq z$ — из 2 для некот. z
4. $\hat{r}(w,z,v)\ \&\ \forall y(\hat{r}(w,y,v)\ \&\ z\subseteq y\Rightarrow z=y)$ — из 3 по Опр. 3.3
5. $z\in\boldsymbol{DCS}\ \&\ \forall A(A\in z\Rightarrow r(w,A,v))$ — из 4 по Опр. 3.2
$\lceil$+6. $B\in z$ — доп.
|7. $B\in z\Rightarrow r(w,B,v))$ — из 5
|8. $r(w,B,v)$ — из 6, 7
|9. $\forall C(C\in v\Rightarrow\boldsymbol{U}(C,B)\in w)$ — из 8 по Опр. 3.1
|10. $A\in v\Rightarrow\boldsymbol{U}(A,B)\in w$ — из 9
|11. $\boldsymbol{U}(A,B)\in w$ — из 1, 10
$\lfloor$12. *противоречие* — из 1, 11
13. $B\notin z$ — из 6–12
14. $\sim[\{\neg B\}\cup z\vdash\boldsymbol{f}]$ — из 13
15. $u=_{def}\boldsymbol{MCS}$ – *расширение*$\{\neg B\}\cup z$ — на основании 14
16. $\forall C(C\in w\Rightarrow\boldsymbol{S}(C,\boldsymbol{t})\in z)$ — из 3 по Лемме 5.1
17. $\forall C(C\in w\Rightarrow\boldsymbol{S}(C,\boldsymbol{t})\in u)$ — из 15, 16
18. $r(w,\boldsymbol{t},u)$ — из 17 по Лемме 3 и Опр. 3.1
19. $\forall C(C\in v\Rightarrow\boldsymbol{U}(C,\boldsymbol{t})\in z)$ — из 3 по Лемме 5 (2)
20. $\forall C(C\in v\Rightarrow\boldsymbol{U}(C,\boldsymbol{t})\in u)$ — из 15, 19
21. $r(u,\boldsymbol{t},v)$ — из 20 по Опр. 3.1
22. $\exists x_1\exists x_2(R(w,x_1,u)\ \&\ R(u,x_2,v))$ — из 18, 21 по Лемме 4.1, 4.2
23. $\neg B\in u$ — из 15
24. $x\subseteq u$ — из 3, 15
25. $\exists u\exists x_1\exists x_2\,[R(w,x_1,u)\ \&\ R(u,x_2,v)\ \&\ x\subseteq u\ \&\ \neg B\in u]$ — из 22, 23, 24

■

Лемма 7. *Имеет место следующее утверждение:*

$$\langle d\rangle\, A \in w \Rightarrow \exists v \exists x (R(w,x,v)\ \&\ A \in v\ \&\ \forall B([d]\, B \in w \Rightarrow B \in v))$$

Доказательство.

$+1.\ \langle d\rangle\, A \in w$	— доп.
$2.\ u =_{def} \{A\} \cup \{B : [d]B \in w\} \cup \{C : \boldsymbol{G}C \in w\}$	— определим мн-во u
$3.\ \vdash \boldsymbol{G}C \supset [d]C$	— из Ax.6
$4.\ \{C : \boldsymbol{G}C \in w\} \subseteq \{B : [d]B \in w\}$	— из 3
$\lceil +5.\ u \vdash f$	— доп.
$\vert 6.\ B_1, \ldots, B_n, A \vdash \boldsymbol{f}$	— из 2, 4, 5
$\vert 7.\ \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \supset \neg A$	— из 6
$\vert 8.\ \vdash [d]B_1 \wedge \ldots \wedge [d]B_n \supset [d]\neg A$	— из 7
$\vert 9.\ [d]\neg A \in w$	— из 2, 8
$\vert 10.\ \neg \langle d\rangle\, A \in w$	— из 9 по Опр. 1.9
$\lfloor 11.$ *противоречие*	— из 1, 10
$12.\ \sim[u \vdash \boldsymbol{f}]$	— из 5–11
$13.\ v =_{def}$ ***MCS****-расширение* u	— на основании 12
$14.\ \forall C(\boldsymbol{G}C \in w \Rightarrow C \in v)$	— из 2, 13
$\lceil +15.\ D \in v$	— доп.
$\vert 16.\ \neg D \notin v$	— из 15
$\vert 17.\ \boldsymbol{G}\neg D \notin w$	— из 14, 16
$\vert 18.\ \neg \boldsymbol{G}\neg D \in w$	— из 17
$\lfloor 19.\ \boldsymbol{F}D \in w$	— из 18 по Опр. 1.6
$20.\ D \in v \Rightarrow \boldsymbol{F}D \in w$	— из 15–19
$21.\ \forall D(D \in v \Rightarrow \boldsymbol{F}D \in w)$	— из 20
$22.\ \forall D(D \in v \Rightarrow \boldsymbol{U}(D, \boldsymbol{t}) \in w)$	— из 21 по Опр. 1.5
$23.\ r(w, \boldsymbol{t}, v)$	— из 22 по Опр. 3.1
$24.\ R(w,x,v)\ \&\ \boldsymbol{t} \in x$	— из 23 по Лемме 4.1, 4.2
$25.\ A \in v$	— из 2, 13
$\lceil +26.\ [d]B \in \mathrm{w}$	— доп.
$\lfloor 27.\ B \in v$	— из 2, 13
$28.\ [d]B \in w \Rightarrow B \in v$	— из 26–27
$29.\ \forall B([d]B \in w \Rightarrow B \in v)$	— из 28
$30.\ R(w,x,v)\ \&\ A \in v\ \&\ \forall B([d]B \in w \Rightarrow B \in v)$	— из 24, 25, 29
$31.\ \exists v \exists x(R(w,x,v)\ \&\ A \in v\ \&\ \forall B([d]B \in w \Rightarrow B \in v))$	— из 30

■

Чтобы завершить доказательство полноты, нам необходимо определить понятия канонической модельной структуры и канонической модели.

Определение 4. Пусть T^* некоторое бесконечное счетное множество. Определим K как множество всех четверок вида $\langle T, <, f, g\rangle$, где

C0 $T \subseteq T^*$ и T конечно;

C1 $< \subseteq T \times T$ и удовлетворяет условию $\forall x \forall y {\sim} (x < y \ \& \ y < x)$;

C2 $f : T \to \boldsymbol{MCS}, g :<\to \boldsymbol{DCS}$;

C3 $\forall t_1 \forall t_2 \, [t_1 < t_2 \Rightarrow \hat{r}(f(t_1), g(t_1, t_2), f(t_2))]$;

C4 $\forall t_1 \forall t_2 \forall t_3 \, [t_1 < t_3 < t_2 \Rightarrow g(t_1, t_2) \subseteq f(t_3)]$.

Условия, которым могут не удовлетворять четверки $\langle T, <, f, g\rangle$:

C5u $\forall t_1 \forall t_2 [t_1 < t_2 \ \& \ \neg \boldsymbol{U}(A, B) \in f(t_1) \ \& \ A \in f(t_2) \Rightarrow$
$\exists t_3 (t_1 < t_3 < t_2 \ \& \ \neg B \in f(t_3))]$;

C6u $\forall t_1 \, [\boldsymbol{U}(A, B) \in f(t_1) \Rightarrow \exists t_2 (t_1 < t_2 \ \& \ A \in f(t_2) \ \& \ B \in g(t_1, t_2))]$;

C5s $\forall t_1 \forall t_2 [t_2 < t_1 \ \& \ \neg \boldsymbol{S}(A, B) \in f(t_1) \ \& \ A \in f(t_2) \Rightarrow$
$\exists t_3 (t_2 < t_3 < t_1 \ \& \ \neg B \in f(t_3))]$;

C6s $\forall t_1 \, [\boldsymbol{S}(A, B) \in f(t_1) \Rightarrow \exists t_2 (t_2 < t_1 \ \& \ A \in f(t_2) \ \& \ B \in g(t_1, t_2))]$;

C7 $\forall t_1 [\langle d\rangle \, A \in f(t_1) \Rightarrow \exists t_2 (t_1 < t_2 \ \& \ A \in f(t_2) \ \& \ \forall B ([d] B \in f(t_1) \Rightarrow$
$B \in f(t_2)))]$.

Выполнение условий C5u–C7 необходимо для требуемой интерпретации временных и динамических модальных операторов в будущей канонической модели. Покажем, что существуют четверки $\langle T, <, f, g\rangle$, которые удовлетворяют всем условиям *C0–C7*.

Определение 5. Пусть $k = \langle T, <, f, g\rangle$ и $k' = \langle T', <', f', g'\rangle$. k' есть расширение $k (k \leq k')$, если

1. $T \subseteq T'$;
2. $< = <' \cap (T \times T)$;
3. $f \subseteq f'$;
4. $g \subseteq g'$.

Лемма 8. *Пусть* $k = \langle T, <, f, g\rangle \in K$ *и* $t_1,\ t_2,\ A,\ B$ *образуют контрпример для C5u, т.е.* $t_1 < t_2$ & $\neg\boldsymbol{U}(A,B) \in f(t_1),\ A \in f(t_2)$ *и* $\sim\exists t_3(t_1 < t_3 < t_2$ & $\neg B \in f(t_3))$*. Тогда для* k *существует расширение* $k' = \langle T', <', f', g'\rangle$*, в котором* $t_1,\ t_2,\ A,\ B$ *уже не образуют контрпример для C5u.*

Доказательство. Пусть $w = f(t_1),\ x = g(t_1, t_2),\ v = f(t_2)$. По Лемме 6 существуют такие $u \in \boldsymbol{MCS}$ и $x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{DCS}$, что $R(w, x_1, u),\ R(u, x_2, v)$, $x \subseteq u$ и $\neg B \in u$.

Пусть $t_3 \in T^* \setminus T$. Определим $k' = \langle T', <', f', g'\rangle$ следующим образом:

a) $T' = T \cup \{t_3\}$;

b) $<' = < \cup \{\langle t_1, t_3\rangle, \langle t_3, t_2\rangle\}$;

c) $f' = f \cup \{\langle t_3, u\rangle\}$;

d) $g' = g \cup \{\langle\langle t_1, t_3\rangle, x_1\rangle, \langle\langle t_3, t_2\rangle, x_2\rangle\}$.

■

Лемма 9. *Пусть* $k = \langle T, <, f, g\rangle \in K$ *и* $t_1,\ \boldsymbol{U}(A,B)$ *образуют контрпример для C6u, т.е.* $\boldsymbol{U}(A,B) \in f(t_1)$ *и* $\sim\exists t_2(t_1 < t_2$ & $A \in f(t_2)$ & $B \in g(t_1, t_2))$*. Тогда для* k *существует расширение* $k' = \langle T', <', f', g'\rangle$*, в котором* $t_1,\ \boldsymbol{U}(A,B)$ *уже не образуют контрпример для C6u.*

Доказательство. Пусть $w = f(t_1)$. Тогда по Лемме 4.4 существуют такие $v \in \boldsymbol{MCS}$ и $x \in \boldsymbol{DCS}$, что $R(w, x, v),\ A \in v$ и $B \in x$.

Пусть $t_2 \in T^* \setminus T$. Определим $k' = \langle T', <', f', g'\rangle$ следующим образом:

a) $T' = T \cup \{t_2\}$;

b) $<' = < \cup \{\langle t_1, t_2\rangle\}$;

c) $f' = f \cup \{\langle t_2, v\rangle\}$;

d) $g' = g \cup \{\langle\langle t_1, t_2\rangle, x\rangle\}$.

■

Для условий C5s и C6s доказательство аналогично Леммам 8 и 9.

Лемма 10. *Пусть* $k = \langle T, <, f, g\rangle \in K,\ t_1$ *и* $\langle d\rangle\, A$ *образуют контрпример для C7, т.е.* $\langle d\rangle\, A \in f(t_1)$ *и* $\sim\exists t_2(t_1 < t_2$ & $A \in f(t_2)$ & $\forall B([d]B \in f(t_1) \Rightarrow B \in f(t2)))$*. Тогда для* k *существует расширение* $k' = \langle T', <', f', g'\rangle$*, в котором* t_1 *и* $\langle d\rangle\, A$ *уже не образуют контрпример для C7.*

Доказательство. Пусть $w = f(t_1)$. По Лемме 7 существуют такие $v \in \boldsymbol{MCS}$ и $x \in \boldsymbol{DCS}$, что $A \in v$ и $\forall B([d]B \in w \Rightarrow B \in v)$.

Пусть $t_2 \in T^* \setminus T$. Определим $k' = \langle T', <', f', g' \rangle$ следующим образом:

a) $T' = T \cup \{t_2\}$;

b) $<' = < \cup \{\langle t_1, t_2 \rangle\}$;

c) $f' = f \cup \{\langle t_2, v \rangle\}$;

d) $g' = g \cup \{\langle \langle t_1, t_2 \rangle, x \rangle\}$.

■

Лемма 11. $\vDash A \Rightarrow \vdash A$.

Доказательство. Рассуждаем от противного. Допустим, формула A не доказуема. Тогда формула $\neg A$ непротиворечива, т.е. $\sim[\neg A \vdash \boldsymbol{f}]$. Пусть $w_0 \in \boldsymbol{MCS}$ и $\neg A \in w_0$. Выберем $t_0 \in T^*$ и определим $k_0 = \langle T_0, <_0, f_0, g_0 \rangle$ следующим образом:

a) $T_0 = \{t_0\}$;

b) $<_0 = \varnothing$;

c) $f_0 = \{\langle t_0, w_0 \rangle\}$;

d) $g_0 = \varnothing$.

Повторным применением Лемм 8, 9 и 10 образуем последовательность $\{k_n\}$ элементов K таким образом, что $k_n \leq k_{n+1}$. Для любого контрпримера $C5$, $C6$ и $C7$ в $\{k_n\}$ существует такой m, что $k_n \leq k_m$ и k_m уже не является для него контрпримером.

Пусть

a) $T = \cup_n T_n$;

b) $< = \cup_n <_n$;

c) $f = \cup_n f_n$;

d) $g = \cup_n g_n$.

Четверка $k = \langle T, <, f, g\rangle$ удовлетворяет условиям *C1–C7.*

Пусть моделью будет тройка $M = \langle T, <, I\rangle$, где $I : Prop \to 2^T$ — функция интерпретации, сопоставляющая каждой пропозициональной переменной p такое множество $I(p) \subseteq T$, что $t \in I(p) \Leftrightarrow p \in f(t)$.

Интерпретацию элементарных действий определим следующим образом:

$I(d) = \{\langle t, t_1\rangle \,|t < t_1 \;\&\; \forall A([d]A \in f(t) \Rightarrow A \in f(t_1))\} =$

$\{\langle t, t_1\rangle \,|t < t_1 \;\&\; \forall A(A \in f(t_1) \Rightarrow \langle d\rangle\, A \in f(t))\}$.

Докажем по индукции, что для любой формулы A в модели M имеет место $M, t \vDash A \Leftrightarrow A \in f(t)$.

Базисный случай и случаи для классических связок доказываются стандартно.

(1) $M, t \vDash p \Leftrightarrow t \in I(p) \Leftrightarrow p \in f(t)$.

(2) $M, t \vDash \neg A \Leftrightarrow M, t \nvDash A \Leftrightarrow A \notin f(t)$.

(3) $M, t \vDash A \wedge B \Leftrightarrow [M, t \vDash A,\ M, t \vDash B] \Leftrightarrow A \in f(t),\ B \in f(t) \Leftrightarrow A \wedge B \in f(t)$.

(4) $M, t \vDash \boldsymbol{U}(A, B) \Leftrightarrow \boldsymbol{U}(A, B) \in f(t)$

$(\Rightarrow)$

$+1.\ M, t \vDash \boldsymbol{U}(A, B)$	— доп.
$2.\ \exists t_1(t < t_1 \;\&\; M, t_1 \vDash A \;\&\; \forall t_2(t < t_2 < t_1 \Rightarrow M, t_2 \vDash B))$	— из 1 по опр.
$3.\ t < t1 \;\&\; M, t_1 \vDash A \;\&\; \forall t_2(t < t_2 < t_1 \Rightarrow M, t_2 \vDash B)$	— из 2 для некот. t_1
$4.\ A \in f(t_1)$	— из 3 по инд. доп.
$5.\ \forall t_2(t < t_2 < t_1 \Rightarrow B \in f(t_2))$	— из 3 по инд. доп.
$\lceil +6.\ \boldsymbol{U}(A, B) \notin f(t)$	— доп.
$\mid 7.\ \neg \boldsymbol{U}(A, B) \in f(t)$	— из 6
$\mid 8.\ t < t1 \;\&\; \neg\ \boldsymbol{U}(A, B) \in f(t) \;\&\; A \in f(t_1)$	— из 3, 4, 7
$\mid 9.\ \exists t_2(t < t_2 < t_1 \;\&\; \neg B \in f(t_2))$	— из 8 по C5u
$\lfloor 10.$ *противоречие*	— 5, 9
$11.\ \boldsymbol{U}(A, B) \in f(t)$	— из 6–10

$(\Leftarrow)$

$+1.\ \boldsymbol{U}(A, B) \in f(t)$	— доп.
$2.\ \exists t_1(t < t_1 \;\&\; A \in f(t_1) \;\&\; B \in g(t, t_1))$	— из 1 по C6u
$3.\ t < t_1 \;\&\; A \in f(t_1) \;\&\; B \in g(t, t_1)$	— из 2 для некот. t_1
$4.\ \forall t_2\, [t < t_2 < t_1 \Rightarrow g(t, t_1) \subseteq f(t_2)]$	— C4
$5.\ \forall t_2\, [t < t_2 < t_1 \Rightarrow B \in f(t_2)]$	— из 3, 4
$6.\ t < t_1 \;\&\; M, t_1 \vDash A$	— из 3 по инд. доп.
$7.\ \forall t_2\, [t < t_2 < t_1 \Rightarrow M, t_2 \vDash B]$	— из 5 по инд. доп.

8. $\exists t_1(t < t_1 \ \& \ M, t_1 \vDash A \ \& \ \forall t_2(t < t_2 < t_1 \Rightarrow M, t_2 \vDash B))$ — из 6, 7
9. $M, t \vDash \boldsymbol{U}(A, B)$ — из 8 по опр.

(5) $M, t \vDash \boldsymbol{S}(A, B) \Leftrightarrow \boldsymbol{S}(A, B) \in f(t)$

Доказывается аналогично (4).

(6) $M, t \vDash \langle d \rangle A \Leftrightarrow \langle d \rangle A \in f(t)$

($\Rightarrow$)

+1. $M, t \vDash \langle d \rangle A$ — доп.
2. $\exists t_1(\langle t, t_1 \rangle \in I(d) \ \& \ M, t_1 \vDash A)$ — из 1 по опр.
3. $\exists t_1(\langle t, t_1 \rangle \in I(d) \ \& \ A \in f(t_1))$ — из 2 инд. доп.
4. $\exists t_1(t < t_1 \ \& \ A \in f(t_1) \ \& \ \forall B([d] B \in f(t) \Rightarrow B \in f(t_1)))$ — из 3 по опр. I(d)
5. $t < t_1 \ \& \ A \in f(t_1) \ \& \ \forall B([d] B \in f(t) \Rightarrow B \in f(t_1))$ — из 4 для некот. t_1
⌈+6. $\langle d \rangle A \notin f(t)$ — доп.
|7. $\neg \langle d \rangle A \in f(t)$ — из 6
|8. $[d] \neg A \in f(t)$ — из 7 по Опр. 1.9
|9. $\neg A \in f(t_1)$ — из 5, 8
⌊10. *противоречие* — из 5, 9
11. $\langle d \rangle A \in f(t)$ — из 6–10

($\Leftarrow$)

+1. $\langle d \rangle A \in f(t)$ — доп.
2. $\exists t_1(t < t_1 \ \& \ A \in f(t_1) \ \& \ \forall B([d] B \in f(t) \Rightarrow B \in f(t_1)))$ — из 1 по $C7$
3. $\exists t_1(\langle t, t_1 \rangle \in I(d) \ \& \ A \in f(t_1))$ — из 2 по опр. $I(d)$
4. $\exists t_1(\langle t, t_1 \rangle \in I(d) \ \& \ M, t_1 \vDash A)$ — из 3 по инд. доп.
5. $M, t \vDash \langle d \rangle A$ — из 4 по опр.

По построению $k = \langle T, <, f, g \rangle$ имеет место $\neg A \in f(t_0)$. Отсюда получаем $M, t_0 \vDash \neg A$ и $M, t_0 \nvDash A$. Следовательно, $\nvDash A$, что и завершает доказательство леммы.

■

3. Целенаправленное поведение

Как было сказано ранее, элементарные правила целенаправленного поведения делятся на два вида — *конструирующие* и *процессуальные.*

В языке логики $\boldsymbol{USD}$ элементарные конструирующие операторы можно определить контекстуально следующим образом:

Определение 6. $\langle C \Rightarrow d : G\rangle\, A =_{def} C \wedge \langle d\rangle\, A$ — «После некоторого выполнения правила “$C \Rightarrow d : G$” имеет место A».

Обращаем внимание на то, что в правой части определения цель G выполнения правила никак не фигурирует. Это связано с тем, что цель — это субъективная установка агента действия, а не логическая составляющая. Тем не менее мы можем ее использовать, чтобы выразить, например, следующие утверждения:

- $\langle C \Rightarrow d : G\rangle\, (G \wedge A)$ — «После некоторого успешного выполнения правила “$C \Rightarrow d : G$” имеет место A»;
- $\neg \langle C \Rightarrow d : G\rangle\, G$ — «Ни одно выполнение правила “$C \Rightarrow d : G$” не приводит к искомой цели G»

В этих утверждениях цель правила позволяет выразить точку зрения агента на успешность или неуспешность его выполнения.

Элементарные процессуальные операторы определим контекстуально следующим образом:

Определение 7. $\langle C \Rightarrow d : P : G\rangle\, A =_{def} C \wedge \langle d\rangle\, \boldsymbol{U}(A, P)$ — «После некоторого выполнения правила “$C \Rightarrow d : P : G$” имеет место A».

С их помощью мы можем дополнительно выразить, например, такие утверждения:

- $\langle C \Rightarrow d : P : G\rangle\, (G \wedge A)$ — «В результате некоторого успешного выполнения правила “$C \Rightarrow d : P : G$” имеет место A»;
- $\neg \langle C \Rightarrow d : P : G\rangle\, G$ — «Ни одно выполнение правила “$C \Rightarrow d : P : G$” не приводит к достижению искомой цели G»;
- $\langle C \Rightarrow d : P : G\rangle\, (\neg P \wedge A)$ — «После некоторого выполнения правила “$C \Rightarrow d : P : G$” процесс P завершается и имеет место A»;
- $\langle C \Rightarrow d : P : G\rangle\, (G \wedge P)$ — «В ходе некоторого выполнения правила “$C \Rightarrow d : P : G$” достигается искомая цель G, но процесс P продолжается»
- $\langle C \Rightarrow d : (P \wedge \neg G) : G\rangle\, (G \wedge A)$ — «В ходе некоторого выполнения правила “$C \Rightarrow d : P : G$” при первом достижении цели G имеет место A».

4. Заключение

В заключении необходимо вернуться к трем удивительным характеристикам целенаправленного поведения и посмотреть, как они эксплицируются в формализме логики ***USD***.

Законоподобность. Элементарные правила целенаправленного поведения $C \Rightarrow d : G$ или $C \Rightarrow d : P : G$ имеют вид, сходный с видом законов $\forall x(Ax \supset Bx)$. Как и последние, они содержат указание на условия применения и конечный результат, но если в случае законов природы результат следует в силу объективно существующих причинных связей, то в случае целенаправленного поведения он опосредован действиями агента, которые необходимо совершить. То есть наряду со сходством имеются и очевидные различия, но они и должны быть, так как мы имеем дело с законоподобными связями, отличными от природных.

Управление энтропией. В точки зрения временной логики в каждый момент времени имеется целый набор альтернативных путей дальнейшего развития. Законы природы позволяют приписать им различную вероятность быть реализованными. Природа отдает предпочтение тем, которые характеризуются возрастанием энтропии. Другие варианты практически не имеют шансов реализоваться и потому могут считаться лишь логически возможными. Но агент целенаправленного поведения не связан требованиями возрастания энтропии. Своими действиями он сам выбирает путь дальнейшего развития, который может быть отличен от предпочитаемого природой и приводить к уменьшению энтропии.

Обратная причинность. Будущее целевое состояние не является семантически значимой компонентой правил целенаправленного поведения, а существует лишь в представлении агента. Именно поэтому в определениях модальных операторов целенаправленного поведения цель никак не фигурирует в определяющей части, но может быть использована для последующих внешних оценок выполнения правил, поскольку действия агента объективно направлены на ее достижение и предшествуют ей во времени. При этом если следствия прямой причинной связи детерминированы, то изменения, вызываемые обратной причинной связью, таковыми не являются. Агент сам решает, бросить камень или выстрелить из лука, чтобы поразить цель.

В будущем предполагается продолжить исследования целенаправленного поведения, рассмотрев логики ветвящегося времени со сложными операторами действий, а также альтернативные варианты логических формализмов.

Литература

Винер, 1983 – *Винер Н.* Поведение, целесообразность и телеология // Винер Н. Кибернетика. М.: Наука, 1983. С. 297–307.

Евлампиев и др., 2019 – *Евлампиев И.И., Куприянов В.А.* Телеология в классической и неклассической философии. СПб.: РХГА, 2019. 308 с.

Кант, 1994 – *Кант И.* Соч.: В 8 т. Т. 5. М.: Чоро, 1994. 416 с.

Украинцев, 1972 – *Украинцев Б.С.* Самоуправляемые системы и причинность. М.: Мысль, 1972. 256 с.

Фролов, 2019 – *Фролов И.Т.* Детерминизм и телеология. М.: Либроком, 2019. 272 с.

Шалак, 2021a – *Шалак В.И.* Алгоритмическая модель социальных процессов // Философские проблемы информационных технологий и киберпространства. 2021. No. 1. С. 46–62. URL: https://cyberspace.pgu.ru/jour/article/view/220/220 (дата обращения: 01.05.2022).

Шалак, 2021b – *Шалак В.И.* Алгоритмическое поведение и самоубийство Homo sapiens // Ученые записки Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского. Философия. Политология. Культурология. 2021. Т. 7 (73). No. 4. С. 147–158. URL: http://sn-philcultpol.cfuv.ru/wp-content/uploads/2022/03/V.I-SHalak.-Algoritmicheskoe-povedenie-i-samoubiystvo-homo-sapiens.pdf (дата обращения: 01.05.2022).

Faye, 2021 – *Faye J.* Backward Causation, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.). URL: https://plato.stanford.edu/archives/spr2021/entries/causation-backwards/ (дата обращения: 01.05.2022).

Kamp, 1968 – *Kamp J.A.W.* Tense Logic and the Theory of Linear Order, doctoral dissertation, University of California at Los Angelis, 1968.

Ming, 1988 – *Ming Xu* On some U,S-tense Logics// Journal of Philosophical Logic. 1988. 17 (2). P. 181–202.

Ruse, 2003 – *Ruse M.* Darwin and design: does evolution have a purpose? Cambridge, Massachusetts and London, England, 2003.

Turing, 1936 – *Turing A.M.* On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem // Proceedings of the London Mathematical Society. 1936–1937. Vol. 42. P. 230–265.

Vladimir I. Shalack

Teleology and goal-directed behavior: a logical analysis

Vladimir I. Shalack
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: `shalack@mail.ru`

Abstract: Goal-directed behavior is a teleological concept that is most adequate for describing many changes in living nature that do not fit into the doctrine of determinism. This kind of behavior has unique characteristics. It is law-like, as it is characterized by stability and repeatability under similar initial conditions. It controls entropy because, depending on the goal, its results have less entropy or more entropy than the initial conditions. It also has the properties of a kind of reverse causality, when the future goal-state through the agent of behavior leads to changes in the present. The elementary blocks of goal-directed behavior can be represented by two types of rules – constructive "If C occurs, do d to achieve G" and procedural "If C occurs, do d to start process P, which will lead to the desired goal G". Complex goal-directed behavior can be defined as the execution of a set of rules that determine what actions should be performed and in what order to achieve the desired end goal. Successful schemes of goal-directed behavior have served as the basis for the emergence of various technologies. An analysis of the goal-directed activity of people during the calculation of functions led A. Turing to the construction of a mathematical model, called the Turing machine. For a number of reasons, it is impossible to create a theory of goal-directed behavior comparable to the theory of effective computability, but it is quite possible to construct a logical theory of this kind of behavior, which is the goal of this work. For this, we took a language containing that contains dynamic operators <d> and temporary operators U (Until) and S (Since). The paper presents the semantics of this language and its axiomatization. The constructed minimal logic allows further extensions. It is shown how in this logic it is possible to determine the elementary rules of purposeful behavior and their varieties.

Keywords: teleology, goal, goal-directed behavior, goal-directed activity, logical analysis, temporal logic, dynamic logic

For citation: Shalack V.I. "Teleologiya i tselenapravlennoye povedeniye: logicheskiy analiz" [Teleology and goal-directed behavior: a logical analysis], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2022, Vol. 28, No. 2, pp. 9–39. DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-9-39 (In Russian)

References

Evlampiyev, 2019 – Evlampiyev, I.I., Kupriyanov, V.A. *Teleologiya v klassicheskoy i neklassicheskoy filosofii* [Teleology in Classical and non-classical philosophy]. SPb.: RKhGA, 2019. 308 pp. (In Russian).

Faye, 2021 – Faye, J. Backward Causation, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.) [https://plato.stanford.edu/archives/spr2021/entries/causation-backwards/, accessed on 01.05.2022]

Frolov, 2019 – Frolov, I.T. *Determinizm i teleologiya* [Determinism and Teleology]. M.: Librokom, 2019. 272 pp. (In Russian).

Kamp, 1968 – Kamp, J.A.W. *Tense Logic and the Theory of Linear Order*, doctoral dissertation, University of California at Los Angelis, 1968.

Kant, 1994 – Kant, I. *Sochineniya v 8-mi tomakh*[Essays in 8 volumes]. Vol. 5. M.: Choro, 1994. 416 pp. (In Russian)

Ming, 1988 – Ming, Xu "On some U,S-tense Logics", *Journal of Philosophical Logic*, 1988, Vol. 17, No. 2, pp. 181–202.

Ruse, 2003 – Ruse, M. *Darwin and design: does evolution have a purpose?"* Cambridge, Massachusetts and London, England, 2003.

Shalack, 2021a – Shalack, V.I. "Algoritmicheskaya model' sotsial'nykh protsessov" [Algorithmic model of social processes], *Filosofskiye problemy informatsionnykh tekhnologiy i kiberprostranstva*, 2021, No. 1, pp. 46–62. [https://cyberspace.pgu.ru/jour/article/view/220/220, accessed on 01.05.2022] (In Russian)

Shalack, 2021b – Shalack, V.I. "Algoritmicheskoye povedeniye i samoubiystvo Homo sapiens" [Algorithmic behavior and Homo sapiens suicide], *Uchenyye zapiski Krymskogo federal'nogo universiteta imeni V.I. Vernadskogo. Filosofiya. Politologiya. Kul'turologiya.* 2021, Vol. 7 (73), No. 4, pp. 147–158. [http://sn-philcultpol.cfuv.ru/wp-content/uploads/2022/03/V.I-SHalak.-Algoritmicheskoe-povedenie-i-samoubiystvo-homo-sapiens.pdf, accessed on 01.05.2022] (In Russian)

Turing, 1936 – Turing, A.M. "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1936–1937, Vol. 42, pp. 230–265.

Ukraintsev, 1972 – Ukraintsev, B.S. *Samoupravlyayemyye sistemy i prichinnost* [Self-managed systems and causality]. M.: Mysl, 1972. 256 pp. (In Russian).

Wiener, 1983 – Wiener, N. "Povedeniye, tselesoobraznost' i teleologiya" [Behavior, expediency and teleology], *Kibernetika.* M.: Nauka, 1983. S. 297–307. (In Russian)

Логические исследования
2022. Т. 28. № 2. С. 40–65
УДК 16+519.716.3

Logical Investigations
2022, Vol. 28, No. 2, pp. 40–65
DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-40-65

Неклассическая логика
Non-classical Logic

Л.Ю. Девяткин

Неклассический взгляд на природу значений истинности

Леонид Юрьевич Девяткин
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Аннотация:

Работа посвящена семантике многозначных логик и касается проблемы содержательной интерпретации значений в логических матрицах. Отправной точкой исследования служит тезис Р. Сушко, согласно которому каждая многозначная логика является логически двухзначной, а также анализ этого тезиса в последующей литературе. Как показал Сушко, любая многозначная матричная семантика может быть редуцирована к двум значениями. Это поставило вопрос о том, возможны ли в принципе многозначные логики. Положительный ответ был дан Г. Малиновским на основе предложенной им концепции инференциальной многозначности. Фундамент данной концепции составляют обобщения понятий логической матрицы и отношения следования, где наряду с классом выделенных значений задействованы другие подмножества универсума матрицы, рассматриваемые в качестве логических значений. Это позволяет Малиновскому привести примеры многозначных семантик, которые нельзя редуцировать к двум значениям, используя метод Сушко. Опираясь на результаты Малиновского и других авторов, разрабатывавших данную тему, мы предлагаем собственные обобщения понятий логической матрицы и следования. В качестве логических значений рассматриваются не подмножества универсума матрицы, а отношения, то есть подмножества декартовых степеней универсума. Такое обобщение делает возможным построение бивалентных инстинносто-функциональных семантик для логик, которые, как вытекает из известных в литературе результатов, не имеют двухзначной семантики в стиле Сушко.

Ключевые слова: многозначные логики, истинностные значения, логическая семантика, Тезис Сушко, логические матрицы, отношение следования

Для цитирования: *Девяткин Л.Ю.* Неклассический взгляд на природу значений истинности // Логические исследования / Logical Investigations. 2022. Т. 28. № 2. С. 40–65. DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-40-65

Введение

Целью настоящей работы является обоснование точки зрения, согласно которой существуют две равноправные трактовки понятия истинностного значения: истинностные значения как абстрактные объекты, служащие референтами предложений, и истинностные значения как свойства или отношения, определенные на множестве таких объектов.

В классическом понимании значений истинности, опирающемся на идеи Г. Фреге[1], две указанные трактовки эквивалетны, поэтому не разделяются. Существует ровно два референциальных объекта: 1 и 0, — а также ровно два свойства, которые могут быть присущи этим объектам: «быть истиной» и «быть ложью». Причем каждым из свойств обладает ровно один объект, поэтому указание на объект и указание на свойство оказываются синонимичны. Однако необходимость различать референты и их свойства ярко проявилась с появлением многозначных логик, направления исследований в области неклассических логик, остающегося одним из важнейших по сей день.

В многозначных логических матрицах, предложенных Лукасевичем и Тарским, происходит увеличение числа референциальных объектов [Łukasiewicz, Tarski, 1956]. Однако все значения по-прежнему имеют только две содержательные интерпретации: «истина» и «ложь». Интерпретация отдельного референта зависит от его принадлежности классу выделенных значений в матрице. Как и в классическом случае, семантическое определение логического следования требует сохранения «истины» от посылок к заключениям. Отличие от двухзначного случая лишь в том, что в качестве «истины» (и «лжи») могут рассматриваться несколько референтов одновременно.

На этом основании Р. Сушко заключил, что многозначные логики, задаваемые логическими матрицами, являются логически двухзначными, а увеличение числа референциальных объектов представляет собой алгебраическую абстракцию, не имеющую логического смысла [Suszko, 1977]. Данный вывод подкрепляется тем, что отождествление всех выделенных значений с 1 и всех невыделенных с 0 позволяет сопоставить любой матричной семантике эквивалентную ей двухзначную семантику. В дальнейшем будем называть такую процедуру сопоставления Редукцией Сушко.

Принимая идею Сушко о том, что подлинно логическими значениями в матрицах Лукасевича–Тарского являются только «истина» и «ложь», а не алгебраические значения сами по себе, Г. Малиновский и С. Франковский предложили собственные модификации определений логической матрицы

[1] См. обзор в [Shramko, Wansing, 2011, Ch. 1].

и матричного следования, призванные сделать возможным построение многозначных логик, которые являются логически многозначными, то есть их матричные семантики не допускают применение Редукции Сушко.

Г. Малиновский строит логические матрицы, в которых значения относятся к трем не пересекающимся множествам: множеству «выделенных» значений (аналог классической «истины»), множеству «отвергаемых» значений (аналог классической «лжи»), множеству значений, не являющихся ни «выделенными», «ни отвергаемыми» (новое значение, не имеющее классического аналога) [Malinowski, 1990].

С. Франковский предложил альтернативное обобщение понятия логической матрицы, в котором также задействованы три множества, но два из них всегда имеют по меньшей мере один общий элемент. Это множество «абсолютно истинных» значений (аналог классической «истины»), множество «вероятных» значений, которое представляет собой надмножество первого множества (новое, неклассическое значение), а также множество значений, не являющихся «вероятными» (аналог классической «лжи») [Frankowski, 2004].

В обоих случаях были найдены примеры логик, к которым Редукция Сушко в своем первоначальном виде не применима. Однако, как было показано авторами, и в построениях Малиновского, и в построениях Франковского можно редуцировать семантику к трем значениями, используя модифицированную версию Редукции Сушко.

Дальнейшее развитие данная тема получила в работе [Blasio et al., 2017]. Здесь рассматриваются логические матрицы с четырьмя типами значений: «выделенными» значениями (аналог классической «истины»), «антивыделенными» значениями (аналог классической «лжи»), значениями, которые являются «выделенными» и «антивыделенными» одновременно (первое неклассическое значение), а также значениями, не являющимися ни «выделенными», ни «антивыделенными» (второе неклассическое значение). Здесь, в общем случае, оказывается невозможна не только обычная Редукция Сушко, но и ее трехзначная модификация. Однако число референциальных объектов в рассматриваемых конструкциях всегда можно свести к четырем.

Резюмируя изложенные результаты, можно отметить, что неклассический взгляд на природу истинностных значений, развивающийся в ходе исследования многозначности, отличается тем, что проводится разделение между значениями как референциальными объектами и значениями как особого рода классами референциальных объектов, причем второй трактовке отводится приоритетное значение. Классы репрезентируют подлинно логические значения истинности, а роль референтов сводится к тому, чтобы обеспечить возможность задания необходимого числа классов.

Новизна результатов, представленных в настоящей работе, состоит в следующем. Во-первых, явным образом дается интерпретация классов референциальных объектов как экстенсионалов соответствующих предикатов, присутствующая в предшествующей литературе лишь имплицитно. Иными словами, классы объектов, выступающие в литературе как логические значения, обозначают свойства данных объектов. Во-вторых, наряду с одноместными предикатами, рассматриваемыми как значения истинности, мы вводим предикаты большей местности и показываем, что они могут выступать в аналогичной роли. В-третьих, мы используем бинарные отношения между референциальными объектами, чтобы построить семантики, использующие только два референциальных объекта, для системы, являющейся логически четырехзначной, согласно критериям, применяющимся в литературе по рассматриваемой теме. Последний результат демонстрирует, что две трактовки понятия значения истинности независимы друг от друга, поэтому имеет смысл рассматривать их равноправно.

Дальнейшая структура работы такова. Основная часть состоит из двух разделов. Первый раздел носит обзорный характер. В нем мы излагаем известные в литературе основные идеи и результаты, касающиеся рассматриваемой темы. Второй раздел посвящен собственному вкладу автора, о котором идет речь в предыдущем абзаце. В Заключении мы делаем из полученных результатов несколько выводов общего характера.

1. Редукция Сушко, а также ее трехзначные и четырехзначные варианты

В этом разделе мы даем изложение тезиса Сушко о логической двухзначности многозначных логик и формального обоснования этого тезиса в виде Редукции Сушко, трех подходов к построению многозначных логик, для кототорых двухзначная Редукция Сушко невозможна, а также существующих в литературе результатов общего характера, касающихся необходимых и достаточных условий, при которых многозначные системы оказываются логически двух-, трех- или четырехзначными. Начнем с необходимых определений.

1.1. Базовые определения

Типом подобия (или *сигнатурой*) алгебр τ называем последовательность $(n_0, n_1, \dots, n_k, \dots)$ неотрицательных переменных, $k < o(\tau)$, где $o(\tau)$ — ординал, называемый *порядком* τ. Каждому n_k ($k < o(\tau)$) сопоставляется символ f_k, обозначающий n_k-местную операцию. *Алгебра* $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$

типа τ — это такая пара, что A — непустое множество, и для каждого $k < o(\tau)$ мы интерпретируем f_k как n_k-местную операцию $(f_k)_{\mathcal{A}}$ на A, то есть $F = \langle (f_0)_{\mathcal{A}}, (f_1)_{\mathcal{A}}, \dots, (f_k)_{\mathcal{A}}, \dots \rangle$. Алгебры, относящиеся к одному и тому же типу, будем называть *подобными*.

Если $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ — алгебра, называем A *универсумом* $\mathcal{A}$, а элементы F — *базовыми операциями* $\mathcal{A}$. *Подуниверсум* $\mathcal{A}$ — это подмножество B множества A, замкнутое относительно базовых операций A, то есть для каждой $(f_k)_{\mathcal{A}}$ из F верно, что $(f_k)_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{n_k}) \in B$, коль скоро $(a_1, \dots, a_{n_k}) \in B^{n_k}$. Если дана алгебра $\mathcal{A}$, определим для каждого $X \subseteq A$:

$$Sg(X) = \bigcap \{B : X \subseteq B, \text{ и } B \text{ — подуниверсум } \mathcal{A}\}$$

Читаем $Sg(X)$ как «подуниверсум, порожденный X». Если $X \subseteq A$ и $Sg(X) = A$, говорим, что X *порождает* $\mathcal{A}$, или что X — *множество порождающих* $\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *свободной в классе алгебр* K, если ее порождает такое множество X, что каждое отображение X в любую алгебру A' из K может быть расширено до гомоморфизма из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$. Алгебру, свободную в классе всех алгебр подобных ей, называем *абсолютно свободной*.

Называем *пропозициональным языком* абсолютно свободную алгебру формул $\mathcal{L} = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \S_1, \S_2, \dots \rangle$, порожденную множеством своих пропозициональных переменных. Под *отношением следования* $\vdash$ на $\mathcal{L}$ понимаем подмножество $2^{\mathcal{L}} \times \mathcal{L}$. Условимся писать $X \vdash \alpha$ вместо $(X, \alpha) \in \vdash$.

Говорим, что $\vdash$ — *отношение следования по Тарскому* на $\mathcal{L}$, когда для всех $X, Y \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$, $\alpha, \beta \in Fm_{\mathcal{L}}$ выполняются следующие условия:

- Если $\alpha \in X$ то $X \vdash \alpha$ (рефлексивность);
- Если $X \vdash \alpha$, то $X \cup Y \vdash \alpha$ (монотонность);
- Если $X \vdash \alpha$ для всех $\alpha \in Y$, и $X \cup Y \vdash \beta$, то $X \vdash \beta$ (транзитивность).

Если вдобавок верно, что $X \vdash \alpha \Longrightarrow \varepsilon(X) \vdash \varepsilon(\alpha)$ для каждого эндоморфизма ε языка $\mathcal{L}$, называем отношение следования $\vdash$ *структурным*. Если $\mathcal{L}$ — пропозициональный язык и $\vdash$ — структурное отношение следования по Тарскому на $\mathcal{L}$, говорим, что $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — *структурная логика по Тарскому*.

Логическая матрица — это структура $M = \langle A, f_1, f_2, \dots, D \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, f_1, f_2, \dots \rangle$ — алгебра, а D — подмножество A. Если алгебры $\mathcal{L} = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \S_1, \S_2, \dots \rangle$ и $\mathcal{A} = \langle A, f_1, f_2, \dots \rangle$ подобны, говорим, что M — *матрица для* $\mathcal{L}$. Гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой* $\mathcal{L}$ в M. Обозначаем как $Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ множество всех таких оценок. Определяем *отношение следования* $\vDash_M$*, порождаемое матрицей* M, следующим образом: $X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в M верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \subseteq D$. Называем M *характеристической матрицей* для $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, е.т.е. $\vdash = \models_M$. Говорим, что класс матриц K характеризует $\mathbf{L}$, е.т.е. $\vdash = \bigcap\{\models_M |M \in K\}$.

1.2. Тезис Сушко

Рассмотрим рассуждение Р. Сушко, приведенное в [Suszko, 1977]. Формализованный язык $\mathcal{L}$ представляет собой абсолютно свободную алгебру и поэтому порождает целый класс $K(\mathcal{L})$ алгебраических структур, подобных $\mathcal{L}$. Язык $\mathcal{L}$ может быть связан с любой структурой $\mathcal{A}$ из $K(\mathcal{L})$ посредством гомоморфизмов. Гомоморфизмы представляют собой *алгебраические оценки*, допустимые приписывания формулам $\mathcal{L}$ референтов из $\mathcal{A}$. В частности, формулы могут иметь много алгебраических значений (допустимых референтов). Снабжение алгебраических структур из $K(\mathcal{L})$ классами «выделенных» значений позволяет использовать алгебраические оценки, чтобы определить логические понятия выполнимости, истинности и следования применительно к формулам языка $\mathcal{L}$. В то же время Тарским была создана теория отношений выводимости на множестве всех формул. Если логика определяется посредством отношения выводимости, всегда можно найти множество V функций, имеющих область значений $\{0, 1\}$, которые Сушко называет *логическими оценками*, со следующим свойством: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$, е.т.е. для всех t из TV верно, что $t(\alpha_1) = \cdots = t(\alpha_n) = 1$ влечет $t(\beta) = 1$. В отличие от алгебраических оценок, логические оценки являются гомоморфизмами только в исключительных случаях. Логические и алгебраические оценки представляют собой функции различной концептуальной природы. Первые связаны с понятиями «истины» и «лжи», вторые — с приписываниями референтов. Поэтому каждая логика *логически* двузначна. Данное заключение получило в литературе название «тезис Сушко».

Формальным обоснованием тезиса Сушко выступает Редукция Сушко. Описание этой процедуры, приведенное ниже, заимствуем из [Malinowski, 1993, § 10.1]. Пусть $\mathcal{L}$ — пропозициональный язык, и $M = \{\mathcal{A}, D\}$ — логическая матрица для $\mathcal{L}$. Определим множество TV_M:

$$TV_M = \{t_h | t_h \in Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})\}, \text{ где}$$
$$t_h(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } h(\alpha) \in D \\ 0, \text{ если } h(\alpha) \notin D. \end{cases}$$

$X \models_M \alpha$, е.т.е. для каждого $t \in TV_M$ верно, что $t(\alpha) = 1$, коль скоро $t(X) \subseteq \{1\}$. Каждая структурная логика по Тарскому характеризуется классом логических матриц с не более чем счетным числом значений [Wójcicki, 1970]. Поскольку каждая структурная логика по Тарскому характеризуется классом логических матриц с не более чем счетным числом значений, каждая такая логика характеризуется и классом структур вида $\langle\{0,1\}, TV_M\rangle$. Условимся в дальнейшем называть такие структуры *s-интерпретациями.*

1.3. Инференциально трехзначные логики: q-следование

Важную роль в рассматриваемой теме играет роль концепция *инференциальной многозначности*, принадлежащая Г. Малиновскому [Malinowski, 1990; Malinowski, 1994; Malinowski, 2009]. Малиновский рассуждает следующим образом. Логическая двузначность по Сушко связана с разделением универсума интерпретации на два подмножества элементов: выделенные и все остальные. Можно также сказать, что структурное следование по Тарскому носит бивалентный характер, так как его всегда можно задать при помощи класса логических матриц с двухчастным разбиением универсума. Матрицы, характеризующие некоторую логику, могут нести в себе много допустимых референтов для формул языка этой логики, и с этой точки зрения можно назвать такую логику *референциально* многозначной. Однако, если следование в данной логике — это стуруктурное следование по Тарскому, такое следование имеет двухзначную природу, и с этой точки зрения рассматривая логика *инференциально*[2] двухзначна. Поэтому возникает вопрос, возможна ли в принципе логическая, то есть инференциальная, многозначность?

Малиновский дает положительный ответ, приводя в качестве примера формальную систему рассуждения, где умозаключения ведут от не отвергаемых (*non-rejected*) посылок к принимаемым (*accepted*) заключениям. Чтобы построить такую систему, автор сопоставляет обычным понятиям следования и логической матрицы их модифицированные аналоги: q-следование и q-матрица.

Говорим, что $\vdash$ — *q-следование* на $\mathcal{L}$, когда для всех $X \subseteq Fm(\mathcal{L})$, $\alpha, \beta \in Fm(\mathcal{L})$:

- Если $X \vdash \alpha$, то $X \cup Y \vdash \alpha$ (монотонность);
- Если $X \cup \{\alpha | X \vdash \alpha\} \vdash \beta$, то $X, Y \vdash \beta$ (квазитранзитивность).

Если $\vdash$ — структурное q-следование, называем $\mathbf{L} = \langle\mathcal{L}, \vdash\rangle$ *структурной q-логикой.*

Называем *q-матрицей* структура вида $M = \langle\mathcal{A}, \overline{D}, D\rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, f_1, \ldots, f_n\rangle$ — алгебра, $\overline{D}, D \subseteq A$, и $\overline{D} \cap D = \varnothing$. Следование, порождаемое q-матрицей M, определяем так:

[2] От англ. *inference*, что в данном случае обозначает «логический вывод».

$$X \models_M \alpha, \text{ е.т.е. для любой оценки } h \text{ в } M \text{ верно, что } h(\alpha) \in D, \text{ коль скоро } h(X) \cap \overline{D} = \varnothing.$$

Когда $\overline{D} \cup D = A$, q-следование совпадает с обычным следованием. Когда $\overline{D} \cup D \neq A$, Редукция Сушко для соответствующей матрицы невозможна. Однако можно построить ее трехзначный аналог [Malinowski, 1990]:

$$QV_M = \{q_h | q_h \in Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})\}, \text{ где}$$
$$q_h(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } h(\alpha) \in D \\ 1/2, h(\alpha) \in A \setminus \overline{D} \cup D \\ 0, \text{ если } h(\alpha) \in \overline{D}. \end{cases}$$

$X \models_M \alpha$, е.т.е. для каждого $q \in QV_M$ верно, что $q(\alpha) = 1$, коль скоро $q(X) \subseteq \{1/2, 1\}$. Каждая структурная q-логика характеризуется классом q-матриц с не более чем счетным числом значений [Malinowski, 1990a]. Поэтому каждая такая логика характеризуется и классом структур вида $\langle\{0, 1/2, 1\}, QV_M\rangle$. Условимся в дальнейшем называть такие структуры *q-интерпретациями.*

Как подчеркивает Малиновский, инференциальная трехзначность q-следования ясно отражена в конструкции q-матриц — множество истинностных значений в q-матрице всегда разделено на три подмножества, а не на два, как в обычном случае [Malinowski, 1990].

1.4. Инференциально трехзначные логики: p-следование

Еще один пример инференциально трехзначной логики можно найти в работах С. Франковского, посвященных формализации правдоподобных рассуждений [Frankowski, 2004; Frankowski, 2004a; Frankowski, 2008]. Как пишет автор, основная интуция, на которую опирается концепция правдоподобия (*plausibility*), состоит в том, что допускаются рассуждения, где наша уверенность в истинности заключения может быть ниже уверенности в истинности посылок. Опираясь на эту интуицию, Франковский вводит понятие p-следования, отличительной особенностью которого является отказ от принципа транзитивности.

Говорим, что $\vdash$ — *p-следование* на $\mathcal{L}$, когда для всех $X \subseteq Fm(\mathcal{L})$, $\alpha \in Fm(\mathcal{L})$:

- Если $\alpha \in X$ то $X \vdash \alpha$ (рефлексивность);
- Если $X \vdash \alpha$, то $X \cup Y \vdash \alpha$ (монотонность).

Если $\vdash$ — структурное p-следование, называем $\mathbf{L} = \langle\mathcal{L}, \vdash\rangle$ *структурной p-логикой.*

Как и в случае q-следования, для p-следования оказывается возможным построить матричную семанику, модифицировав стандартное определение логической матрицы. На этот раз используются два класса выделенных значений, причем один из них представляет собой подмножество другого. Меньший из классов, D_1 — это класс значений, интерпретируемых как «абсолютная истина», он соответствует классу выделенных значений в обычной логической матрице. Второй класс, D_*, содержит значения, которые трактуются как «правдоподобные».

Таким образом, *p-матрица* — это структура вида $M = \langle \mathcal{A}, D_1, D_* \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, f_1, \ldots, f_n \rangle$ — алгебра, и $D_1 \subseteq D_* \subseteq A$. Следование, порождаемое p-матрицей M, определяем так:

$$X \vDash_M \alpha, \text{ е.т.е. для любой оценки } h \text{ в } M \text{ верно, что } h(\alpha) \in D_*, \text{ коль скоро } h(X) \subseteq D_1.$$

Обратим внимание, что здесь, в отличие от q-матриц, одно референциальное значение может относиться одновременно к двум классам, поскольку $D_1 \subseteq D_*$. Одновременно в p-матрицах опять видим трехчастное разбиение множества допустимых референтов: D_1 — «абсолютно истинные» значения, $D_* \setminus D_1$ — «правдоподобные» значения, не являющиеся «абсолютно истинными», $A \setminus D_*$ — прочие значения.

Когда $D_1 = D_*$, p-следование совпадает с обычным следованием. Когда $D_1 \neq D_*$, Редукция Сушко для соответствующей матрицы невозможна. Однако можно построить ее трехзначный аналог [Frankowski, 2008]:

$$PV_M = \{p_h | p_h \in Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})\}, \text{ где}$$
$$p_h(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } h(\alpha) \in D_1 \\ 1/2, h(\alpha) \in D_* \setminus D_1 \\ 0, \text{ если } h(\alpha) \in A \setminus D_*. \end{cases}$$

$X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для каждого $p \in PV_M$ верно, что $p(\alpha) \in \{1/2, 1\}$, коль скоро $p(X) \subseteq \{1\}$. Каждая структурная p-логика характеризуется классом p-матриц с не более чем счетным числом значений [Frankowski, 2004]. Поэтому каждая такая логика характеризуется и классом структур вида $\langle \{0, 1/2, 1\}, PV_M \rangle$. Условимся в дальнейшем называть такие структуры *p-интерпретациями*.

1.5. Инференциально четырехзначные логики: b-следование

Выше мы рассмотрели два подхода к построению инференциально трехзначных логик. В этом разделе мы обращаемся к обобщению, которое вытекает из интересной связи между этими двумя подходами.

Можно определить q-следование в терминах правдоподобных значений. Пусть $M = \langle \mathcal{A}, \overline{D}, D \rangle$ — q-матрица. Рассмотрим p-матрицу $M' = \langle \mathcal{A}, D_1, D_* \rangle$, где $D_1 = D$, $D_* = A \setminus \overline{D}$. Определим следования в M и M' следующим образом:

$X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в M верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \cap \overline{D} = \varnothing$.

$X \vDash_{M'} \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в M' верно, что $h(\alpha) \in D_1$, коль скоро $h(X) \subseteq D_*$.

По построению, $X \vDash_M \alpha$, е.т.е. $X \vDash_{M'} \alpha$

Можно также определить p-следование, используя отвергаемые значения вместо правдоподобных. Пусть $M = \langle \mathcal{A}, \overline{D}, D \rangle$. Рассмотрим матрицу $M' = \langle \mathcal{A}, \overline{D}, D \rangle$, где $\overline{D} = A \setminus D_1$, $D = D_*$. Определим следования в M и M' следующим образом:

$X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в M верно, что $h(\alpha) \in D_*$, коль скоро $h(X) \subseteq D_1$.

$X \vDash_{M'} \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в M' верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \cap \overline{D} = \varnothing$.

Снова получаем $X \vDash_M \alpha$, е.т.е. $X \vDash_{M'} \alpha$.

Обратим внимание, что рассмотренная матрица не является q-матрицей по Малиновскому, так как в ней нарушается условие $D \cap \overline{D} = \varnothing$. В результате, хотя имеет место $D \cup \overline{D} = A$, в рассматриваемой матрице, в отличие от q-матриц, это не ведет к совпадению матричного следования с таковым для обычной логической матрицы.

Итак, получаем два вида логических матриц для инференциально трехзначных логик, в которых используется класс отвергаемых значений. Первый вид — q-матрицы Малиновского, где $D \cap \overline{D} = \varnothing$, $D \cup \overline{D} \neq A$. Второй вид — аналог q-матриц для следования Франковского, где $D \cap \overline{D} \neq \varnothing$, $D \cup \overline{D} = A$.

К. Бласио и соавторы осуществляют синтез этих двух видов, вводя понятия b-следования и b-матрицы, служащие инструментами построения инференциально многозначных логик, которые оказываются уже не трехзначными, а четырехзначными [Blasio et al., 2017]. Если в определении q-следования Малиновский отказывается от рефлексивности, а в определении p-следования Франковский отказывается от транзитивности, то в определении b-следования происходит отказ от обоих этих свойств. Говорим, что $\vdash$ — b-*следование* на $\mathcal{L}$, когда для всех $X \subseteq Fm(\mathcal{L})$, $\alpha \in Fm(\mathcal{L})$:

- Если $X \vdash \alpha$, то $X \cup Y \vdash \alpha$ (монотонность).

Если $\vdash$ — структурное b-следование, называем $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *структурной b-логикой.*

Называем b-матрицей структуру $M = \langle \mathcal{A}, \overline{D}, D \rangle$, $\overline{D} \cap D \neq \varnothing$, $\overline{D} \cup D \neq A$. Следование, порождаемое M, определяем также, как делали это в случае q-следования:

$X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в M верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \cap \overline{D} = \varnothing$.

В отличие от q-матриц и p-матриц, здесь мы имеем дело с четырехчастным разбиением множества допустимых референтов: «только выделенные значения», «только отвергаемые значения», «значения, которые являются одновременно выделенными и отвергаемыми», «значения, не являющиеся ни выделенными, ни отвергаемыми». В общем случае, для b-логик невозможны ни Редукция Сушко, ни ее трехзначные аналоги. Однако можно построить четырехзначный вариант такой редукции (см. процитированную выше работу):

$$BV_M = \{b_h | b_h \in Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})\}, \text{ где}$$

$$b_h(a) = \begin{cases} \mathbf{t}, \text{ если } h(\alpha) \in D \setminus \overline{D} \\ \mathbf{b}, h(\alpha) \in D \cap \overline{D} \\ \mathbf{n}, \text{ если } h(\alpha) \in A \setminus (D \cup \overline{D}) \\ \mathbf{f}, \text{ если } h(\alpha) \in \overline{D} \setminus D. \end{cases}$$

$X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для каждого $b \in BV_M$ верно, что $p(\alpha) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$, коль скоро $p(X) \subseteq \{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$. Каждая структурная b-логика характеризуется классом b-матриц с не более чем счетным числом значений. Поэтому каждая такая логика характеризуется и классом структур вида $\langle \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}, BV_M \rangle$. Условимся в дальнейшем называть такие структуры *b-интерпретациями.*

В современной литературе известен следующий общий результат, касающийся наличия у логики двух-, трех- или четырехзначной характеризации в описанном выше смысле.

Теорема 1 ([French, Ripley, 2019; Chemlá, Egré, 2019]). *Пусть $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — логика. Имеет место следующее: (1) $\mathbf{L}$ характеризуется классом s-интерпретаций, е.т.е. $\vdash$ рефлексивно, монотонно и транзитивно. (2) $\mathbf{L}$ характеризуется классом q-интерпретаций, е.т.е. $\vdash$ монотонно и транзитивно. (3) $\mathbf{L}$ характеризуется классом p-интерпретаций, е.т.е. $\vdash$ рефлексивно и монотонно. (4) $\mathbf{L}$ характеризуется классом b-интерпретаций, е.т.е. $\vdash$ монотонно.*

В завершение раздела сделаем небольшое отступление и отметим, что использование антивыделенных значений наряду с выделенными открывает новые возможности не только для определения следования, но и для определения пропозициональных связок. Пример такого применения антивыделенных значений можно найти в [Belikov, 2021]. При классическом подходе формула $\alpha \vee \beta$ принимает невыделенное значение, коль скоро оба дизъюнкта принимают невыделенное значение. Одна из возможных альтернатив такова: $\alpha \vee \beta$ принимает антивыделенное значение, коль скоро один из дизъюнктов принимает антивыделенное значение, а второй не принимает выделенное.

2. Отношения между референциальными объектами как инференциальные значения

В рассмотренных выше работах понятие инференциальной или, что синонимично, логической многозначности связывается с числом классов, на которые разбивается множество-носитель матрицы. Однако нет полной ясности, что именно представляют собой иференциальные (логические) значения в рамках этого подхода. Ниже мы приводим аргументы в пользу того, что под инференциальными значениями нужно понимать предикаты, определенные на множестве референциальных значений. Опираясь на эту трактовку, мы рассматриваем как инференциальные значения не только классы значений, но и отношения между значениями, такие как, например, отношение частичного порядка. Это позволяет получить главный результат раздела: референциально двухзначные истинностно-функциональные семантики для логик, которые, согласно Теореме 1, не могут быть охарактеризованы классом s-интерпретаций, а в некоторых случаях не могут быть охарактеризованы также ни классом q-интерепретаций, ни классом p-интерпретаций.

2.1. Что такое инференциальное значение?

Как отмечают Х. Ванзинг и Я. Шрамко [Wansing, Shramko, 2008], Сушко не определяет понятие логического значения, ограничиваясь указанием на то, что «истина» и «ложь» являются единственными логическими значениями. Г. Малиновский вводит понятие инференциальной многозначности, которое для него выступает синонимом логической многозначности. Однако он также не объясняет явным образом, что из себя представляют инференциальные значения. Понятие инференциальной многозначности Малиновский связывает с тем, что, в отличие от следования по Тарскому, q-следование, в общем случае, не имеет двухзначной семантики в стиле Сушко. При этом различия между двумя следованиями связаны с тем, что в обычной логической матрице универсум разбивается на два подмножества, а в q-матрицах на три: выделенные значения (класс D), отвергаемые значения (класс $\overline{D}$), все остальные значения ($A \setminus \overline{D} \cup D$). Как пишет Малиновский, «разбиения [универсума матрицы] напрямую соответствуют логическим значениям» [Malinowski, 2009]. Подчеркнем, что речь идет именно о том, что между логическими значениями и разбиениями множества референтов имеется некое соответствие (*correspondence*), а не о том, что разбиения представляют собой инференциальные значения.

В отличие от Малиновского, Ванзинг и Шрамко в процитированной выше работе прямо определяют логические значения как подмножества множества алгебраических значений, которые используются в семантическом определении следования. В классическом случае следование определяется так: если все посылки принимают значение «истина», то и заключение принимает значение «истина», или, что эквивалентно, если заключение принимает значение «ложь», то по меньшей мере одна из посылок принимает значение «ложь». Здесь «истина» — это одновременно указание на определенный референциальный объект и указание на принадлежность этого объекта выделенному подмножеству универсума референтов. Аналогичным образом, «ложь» указывает на объект и одновременно на то, что этот объект лежит вне выделенного множества референтов. Когда допустимых референтов становится больше двух, указание на референт, в общем случае, перестает однозначно указывать на то, какому из заданных подмножеств универсума он принадлежит. Поэтому в определении следования эти подмножества фигурируют в явной форме.

Ванзинг и Шрамко пишут: «Если логика понимается как теория правильных рассуждений, то *логическое значение* можно рассматривать как значение, которое используется, чтобы определить каноническим образом отношение следования на множестве формул. Под каноническим определеним следования мы понимаем определение следования как отношения, которое... сохраняет членство в определенном множестве алгебраических значений либо от посылок к заключениям рассуждений, либо от заключения к посылкам... Два логических значения независимы друг от друга, е.т.е. канонически определенные отношения следования, ассоциированные с этими значениями, различны».

Как отмечают авторы, такая трактовка расходится с подходом Малиновского, так как q-следование не определяется «канонически» в указанном выше смысле, однако и в случае q-следования логические значения интепретируются как подмножества множества допустимых референтов.

Отождествление логических значений с множествами референтов — это определение, которое носит формальный характер. Множество формул отображается в множество допустимых референтов. В множестве референтов выделяются некие подмножества. На основе этих подмножеств дается семантическое определение следования. Задействованные в определении подмножества называются инференциальными значениями — именно на том основании, что они задействованы в определении следования. Однако рассматриваемые подмножества — это просто часть математической структуры, использованной для построения формальной семантики некоторого исчисления. Они лишь репрезентируют инференциальные значения в рамках определенного формализма. Такая репрезентация сама по себе не раскрывает природу инференциальных значений. Чтобы дать содержательное определение инференциального значения, выделенным подмножествам референтов нужно сопоставить содержательную интерпретацию.

С нашей точки зрения, такая интерпретация состоит в том, что выделенные множества значений, о которых идет речь, представляют собой экстенсионалы предикатов, определенных на множестве допустимых референтов. Ванзинг и Шрамко в работе [Wansing, Shramko, 2008] также употребляют термины «свойство» и «предикат» применительно к логическим значениям. Однако не развивают эту линию рассуждения. В то же время, с нашей точки зрения, именно понятие предиката играет ключевую роль.

При выявлении логической формы высказываний предикаты используются для обозначения терминов, представляющих свойства индивидов или отношения между ними [Kleene, 2002, p. 74]. А.И. Мальцев определяет *n-местный предикат* на множестве A как функцию f от n аргументов, определенную на A, областью значений является двухэлементное множество, один из элементов которого имеет обозначение *истина*, а второй — *ложь*. Совокупность тех наборов из A^n, для которых $f(a_1, \ldots, a_n) =$ *истина* называется *n-местным отношением на A*, отвечающим предикату f [Мальцев, 1970, с. 44]. Следуя Клини [Kleene, 2002, p. 137], будем также называть отношение, отвечающее определенному предикату, *экстенсионалом* данного предиката.

Алгебраическая система — это тройка $\langle A, F, R\rangle$, где A — непустое множество, F — некоторое множество функций на A, R — некоторое множество отношений на A. Как отмечает Р. Вуйцицкий: «С точки зрения универсальной алгебры, логические матрицы являются структурами некоторого определенного рода, и поэтому понятия, приемы и результаты, которые предлагает универсальная алгебра, касающиеся структур, могут быть применены для их изучения» [Wójcicki, 1988, §3.3.1]. Структуры, о которых идет речь, — это алгебраические системы, определенные выше. Действительно, если $R = \{D\}$ и $D \subseteq A$, получаем обычную логическую матрицу. Но тогда D — это экстенсионал одноместного предиката f_D, представляющего свойство, которым могут обладать объекты из A. Аналогично q-матрицы, p-матрицы и b-матрицы также оказываются алгебраическими системами.

Таким образом, содержательная интерпретация понятия инференциального значения состоит в том, что такие значения представляют собой свойства допустимых референтов.

- *Референциальные значения* — это объекты, выступающие денотатами предложений.

- *Инференциальные значения* — это свойства объектов, выступающих денотатами предложений.

Анализируя тезис Сушко и Редукцию Сушко, А. Стролло приходит к схожим выводам [Strollo, 2022]. Он усматривает в рассуждении Сушко отождествление выделенности референциального значения с семантическим значением предложения, «свойством истины» (*property of truth*). Однако такое отождествление с точки зрения Стролло некорректно, поскольку семантики, полученные в результате Редукции Сушко, в общем случае, не являются истинностно-функциональными и нарушают принцип композициональности. Свойство «быть выделенным значением» и свойство «быть истиной» — это два разных свойства, которые лишь иногда оказываются коэкстенсиональны. Отличие нашей трактовки от трактовки Стролло в том, что он трактует логические значения (в первую очередь «истину» и «ложь») как семантические свойства предложений, а мы — как свойства референтов предложений.

Еще один пример содержательной интерпретации понятия логического значения, перекликающейся с нашей, можно найти в работе [Font, 2009]. Как пишет автор, в классическом семантическом определении следования класс выделенных значений D играет роль предиката истинности (*truth predicate*). Далее, в статье предлагается интерпретация различных подмножеств универсума референтов как обозначений для «степеней истинности», где степень истинности представляет собой свойство «быть более истинным, чем некоторое фиксированное значение». Отличие нашего подхода в большей обобщенности. Мы еще вернемся к работе Фонта в следующем разделе.

2.2. Следование, сохраняющее отношения

«Один естественный вопрос возникает в связи с разделением между алгебраическими и логическими значениями: является ли каждое непустое подмножество заданного множества алгебраических значений логическим значением?» — пишут Г. Ванзинг и Я. Шрамко [Wansing, Shramko, 2008].

В свете нашего анализа, представленного выше, этот вопрос можно переформулировать следующим образом: каждый ли предикат, определенный на множестве референциальных значений, может быть инференциальным значением? Существенно, что в данном случае речь идет не только об унарных предикатах, но и о предикатах большей местности.

Пример использования бинарного предиката вместо класса выделенных значений для семантического определения следования известен в литературе. Это логики, сохраняющие степени истинности, предложенные М. Новаком [Nowak, 1990]. Как пишет Новак, базовой интуицией, лежащей в основе подобных логик, выступает «умозаключение, где степень уверенности, с которой мы принимаем заключение, не ниже, чем наименьшая в множестве степеней уверенности для принимаемых посылок». Иными словами, степень уверенности в истинности заключения не может быть ниже степени уверенности в той из посылок, в которой мы уверены в наименьшей степени. Автор приводит и анализирует несколько вариантов формальной реализации данной идеи. Для этого он вводит понятие структуры степеней истинности. Под *структурой степеней истинности* для языка $\mathcal{L}$ понимается тройка $M_{\geq} = \langle A, F, \geq \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ — алгебра, подобная $\mathcal{L}$, и $\leq$ — отношение частичного порядка на A. Как и в случае логических матриц, множество оценок формул $\mathcal{L}$ в $M_{\geq}$ — это можество всех гомоморфизмов из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$.

Ж.М. Фонт рассматривает следование, сохраняющее степени истинности, в связи с тезисом Сушко и проблемой природы логических значений [Font, 2009]. Он ставит целью обосновать, что степени истинности могут выступать как формальная репрезентация логических значений. Пусть $M_{\geq} = \langle A, F, \geq \rangle$ — структура степеней истинности. Определим следование $\vDash_{\geq}$ в $M_{\geq}$:

$$X \vDash_{\geq} \alpha, \text{ е.т.е. для каждого } a \in A \text{ верно, что } h(\alpha) \geq a, \text{ коль скоро } h(\beta) \geq a \text{ для каждой формулы } \beta \text{ из } X.$$

Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a) = \{x \in A : x \geq a\}$. Рассмотрим структуры $M_a = \langle A, F, [a) \rangle$ и $M_A = \langle A, F, \{[a) : a \in A\} \rangle$. Пусть

$$X \vDash_a \alpha, \text{ е.т.е. } h(\alpha) \in [a), \text{ коль скоро } h(X) \subseteq [a).$$

Определим следование $\vDash_A$ в M_A: $X \vdash_A \alpha$, е.т.е. $X \vDash_a \alpha$ для каждого $a \in A$. Имеет место следующее: $X \vDash_{\geq} \alpha$, е.т.е. $X \vDash_A \alpha$. Таким образом, M_A характеризует следование, сохраняющее степени истинности, $\{[a) : a \in A\}$ представляет собой систему подмножеств универсума M_A, для каждого a множество $[a)$ обозначает одну из степеней истинности как свойство «быть не менее истинным, чем a», а также существенным образом используется в определении следования $\vDash_A$. В таком случае, следуя концепции логического значения Ванзинга и Шрамко (см. [Wansing, Shramko, 2008]), можно говорить о том, что степени истинности репрезентируют логические значения.

Хотя рассмотрение логик, сохраняющих степени истинности, отталкивается от структуры $M_{\geq} = \langle A, F, \geq \rangle$, где, в отличие от логической матрицы, используется не унарный предикат D (множество выделенных значений), а бинарный предикат $\geq$, в конечном итоге мы возвращаемся к уже знакомому случаю, где используются только унарные предикаты. С формальной точки зрения сведение бинарного отношения к набору унарных предикатов корректно, но с содержательной точки зрения оно выглядит несколько искусственным. Кроме того, ясно, что не любое множество референтов имеет естественную трактовку как «степень истинности», что ограничивает область применения данного подхода.

В то же время можно также использовать структуру $M_{\geq} = \langle A, F, \geq \rangle$, чтобы определить следование, которое, в общем случае, не может быть сведено к пересечению следований в неком классе матриц вида $M_i = \langle A, F, D_i \rangle$. Определим следование $\vDash^2_{\geq}$ следующим образом:

$$X \vDash^2_{\geq} \alpha, \text{ е.т.е. для любой пары оценок } h_1,\ h_2 \text{ верно, что } h_1(\alpha) \geq h_2(\alpha),$$
$$\text{коль скоро } h_1(\beta) \geq h_2(\beta) \text{ для любой формулы } \beta \text{ из } X.$$

Пусть $M_{\geq} = \langle \mathcal{B}_2, \geq \rangle$, где $\mathcal{B}_2$ — двухзначная булева алгебра. Рассмотрим класс матриц $\{M_1, \dots M_n\}$, где $M_i = \langle \mathcal{B}_2, D_i \rangle$, $D_i \subseteq \{0, 1\}$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$. Определим следование $\vDash_i$ стандартным образом:

$$X \vDash_i \alpha, \text{ е.т.е. } h(\alpha) \in D_i, \text{ коль скоро } h(X) \subseteq D_i.$$

Допустим, что $X \vDash^2_{\geq} \alpha$, е.т.е. $X \vDash_i \alpha$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Обратим внимание, для каждого $a \in \{0, 1\}$ верно, что $X \vDash^2_{\geq} \alpha$ для любого X, коль скоро $h(\alpha) = a$ для любой оценки h. Поскольку $\mathcal{B}_2$ — булева алгебра, существует такая формула α_0, что $h(\alpha_0) = 0$ для любой оценки h в $M_{\geq}$, а также существует такая формула α_1, что $h(\alpha_1) = 1$ для любой оценки h в $M_{\geq}$. Таким образом $X \vDash^2_{\geq} \alpha_0$ и $X \vDash^2_{\geq} \alpha_1$ для любого X.

В этом случае, согласно допущению, для всех $i \in \{1, \dots n\}$ также верно, что $X \vDash_i \alpha_0$ и $X \vDash_i \alpha_1$ для любого X. В частности, $p \vDash_i \alpha_0$ и $p \vDash_i \alpha_1$. Но тогда, в силу определения $\vDash_i$, необходимо $D_i = \{0, 1\}$. Если $D_i = \{0, 1\}$ для каждого $i \in \{1, \dots n\}$, то $p \vDash_i q$ для каждого $i \in \{1, \dots n\}$.

Согласно допущению, также имеет место $p \vDash^2_{\geq} q$. Однако это не так, поскольку при $h_1(p) = 0$, $h_1(q) = 1$, $h_2(p) = 1$, $h_2(q) = 0$ верно, что $h_1(p) \geq h_2(p)$, однако неверно, что $h_1(q) \geq h_2(q)$. Таким образом, в отличие от подхода из [Font, 2009], в нашем случае $\geq$ не получится свести к набору унарных предикатов.

Обобщим приведенный выше пример. Пусть $M_R = \langle A, F, R \rangle$, где $\langle A, F \rangle$ — алгебра и R — n-местное отношение на A. Определим следование $\vDash^n_R$ следующим образом:

$$\vDash^n_R \alpha, \text{ е.т.е. для любых оценок } h_1, \ldots, h_n \text{ верно, что } R(h_1(\alpha), \ldots, h_n(\alpha)),$$
$$\text{коль скоро } R(h_1(\beta), \ldots, h_n(\beta)) \text{ для любой формулы } \beta \text{ из } X.$$

Заметим, что такое определение очень близко к «каноническому» семантическому определению следования у Ванзинга и Шрамко, с той лишь разницей, что в данном случае от посылок к заключению сохраняется не унарный предикат, а предикат произвольно взятой местности.

Другой интересной чертой $\vDash^n_R$ является то, что оно представляет собой следование по Тарскому. Вспомним, что отношение R по определению является подмножеством A^n. Это значит, что структуре $M_R = \langle A, F, R \rangle$ всегда можно сопоставить структуру $M = \langle A^n, F^n, R \rangle$, где A^n — декартова n-ная степень A, а множество F^n получено из множества F сопоставлением каждой $f(x_1, \ldots, x_k)$ из F функции на A^n следующего вида:

$$f_{\otimes}((a_{1_1}, \ldots, a_{1_n}), \ldots, (a_{k_1}, \ldots, a_{k_n})) = (f(a_{1_1}, \ldots, a_{k_1}), \ldots f(a_{1_n}, \ldots, a_{k_n})).$$

Такая структура представляет собой обычную логическую матрицу, и следование в ней, определяемое стандартно, совпадает со следованием $\vDash^n_R$. В то же время стандартное матричное следование — это всегда следование по Тарскому. Следовательно, таково и $\vDash^n_R$.

Если $\vDash^n_R$ определяется канонически и обладает свойствами следования по Тарскому, с нашей точки зрения, это дает основания рассматривать любой предикат R как инференциальное значение. Однако следование, введенное с использованием этого предиката, всегда можно свести к обычному матричному следованию. Поэтому с формальной точки зрение применение предикатов местности больше 1 выглядит избыточным. В то же время, как мы покажем ниже, предложенная нами расширительная трактовка понятия инференциального значения позволяет с новой стороны взглянуть на взаимоотношения референциальных и инференциальных значений.

2.3. Референциально двухзначные семантики для инференциально многозначных логик

В этом подразделе мы используем структуры вида M_R и следование $\vDash_R$, чтобы построить референциально двузначные семантики для двух инференциально четырехзначных и двух инференциально трехзначных логик.

Рассмотрим стандартную матрицу классической логики высказываний $C_2 = \langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, \supset, \neg, \{1\} \rangle$.

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\supset$	0	1
0	1	1
1	0	1

x	$\neg x$
0	1
1	0

Построим произведение матрицы C_2 произведение на саму себя:

$$C_2^2 = \langle\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}, \vee_\otimes, \wedge_\otimes, \supset_\otimes, \neg_\otimes, \{(1,1)\}\rangle.$$

Операции определяются покомпонентно и отвечают таблицам, приведенным ниже:

$$f_\otimes((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)) = (f(x_1,\ldots,x_n), f(y_1,\ldots,y_n)).$$

$\vee_\otimes$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,1)	(1,1)	(1,1)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(1,0)	(1,1)
(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)

$\wedge_\otimes$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(0,1)	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,1)
(1,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	(1,0)
(1,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)

$\supset_\otimes$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)
(0,1)	(1,0)	(1,1)	(1,0)	(1,1)
(1,0)	(0,1)	(0,1)	(1,1)	(1,1)
(1,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)

x	$\neg_\otimes x$
(0,0)	(1,1)
(0,1)	(1,0)
(1,0)	(0,1)
(1,1)	(0,0)

Известно, что C_2^2 — характеристическая матрица классической логики. В частности, это следует из того факта, что простая фактор-матрица C_2^2 изоморфна C_2 [Wójcicki, 1988, § 3.1]. Превратим C_2^2 в b-матрицу, поменяв класс выделенных значений и добавив класс антивыделенных значений:

$$C_b = \langle\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}, \vee_\otimes, \wedge_\otimes, \supset_\otimes, \neg_\otimes, \{(0,1),(1,1)\}, \{(1,0),(1,1)\}\rangle.$$
$$\overline{D} = \{(0,1),(1,1)\},\ D = \{(1,0),(1,1)\}$$

Используем определение матричного b-следования:

$X \vDash_{C_b} \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в C_b верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \cap \overline{D} = \varnothing$.

Теперь универсум разбивается на четыре типа значений: только выделенные — $(1,0)$, только антивыделенные — $(0,1)$, одновременно выделенные и антивыделенные — $(1,1)$, не являющиеся ни выделенными, ни антивыделенными — $(0,0)$. Покажем, что $\langle\mathcal{L}, \vDash_{C_b}\rangle$ — инференциально четырехзначная логика, согласно критерию из Теоремы 1.

Теорема 2. *Следование $\vDash_{C_b}$ монотонно, но не рефлексивно и не транзитивно.*

Доказательство. Следование $\vDash_{C_b}$ монотонно, так как любое b-следование монотонно [Blasio et al., 2017]. Следование $\vDash_{C_b}$ не рефлексивно, так как $\alpha \nvDash_{C_b} \alpha$. Достаточно рассмотреть $h(\alpha) = (0,0)$. Следование $\vDash_{C_b}$ не транзитивно, так как $p \vDash_{C_b} p \vee \neg p$ и $p, p \vee \neg p \vDash_{C_b} \neg p$, $p \nvDash_{C_b} \neg p$. Обратим внимание, что $h(p \vee \neg p) = (1,1)$ для любой оценки h. Поскольку $(1,1) \in D$, имеет место $p \vDash_{C_b} p \vee \neg p$. В силу $(1,1) \in \overline{D}$, также имеет место $p, p \vee \neg p \vDash_{C_b} \neg p$. Чтобы убедиться в истинности утверждения $p \nvDash_{C_b} \neg p$, достаточно рассмотреть оценку $h(p) = (1,0)$. ∎

Теперь модифицируем матрицу C_2, полагая

$$C_r = \langle \{0,1\}, \vee, \wedge, \supset, \neg, \overline{R}, R \rangle,$$

где $\overline{R}(x,y)$, е.т.е. $y \geq x$ и $y = 1$; $R(x,y)$, е.т.е. $x \geq y$ и $x = 1$. Определим отношение r-следования:

$X \vDash_{C_r} \alpha$, е.т.е. для каждой пары оценок v_1, v_2 верно, что $R(v_1(\alpha), v_2(\alpha))$, коль скоро ни для какой формулы β из X не имеет места $\overline{R}(v_1(\beta), v_2(\beta))$.

Теорема 3. *$X \vDash_{C_b} \alpha$, е.т.е. $X \vDash_{C_r} \alpha$*

Доказательство. Обратим внимание, что $\overline{R}(x,y)$, е.т.е. $(x,y) \in \overline{D}$, и $R(x,y)$, е.т.е. $(x,y) \in D$. Пусть $X \nvDash_{C_b} \alpha$. Тогда найдется такая оценка h в C_b, что $h(X) \subseteq \{(0,0),(1,0)\}$ и $h(\alpha) \in \{(0,0),(0,1)\}$. Пусть v_1 и v_2 такие оценки в C_r, что $v_1(p) = a_1$ и $v_2(p) = a_2$, коль скоро $h(p) = (a_1, a_2)$. Тогда, поскольку операции C_b определяются покомпонентно, ни для какой формулы β из X не имеет места $\overline{R}(v_1(\beta), v_2(\beta))$, однако неверно, что $R(v_1(\alpha), v_2(\alpha))$, поэтому $X \nvDash_{C_r} \alpha$. Теперь пусть $X \nvDash_{C_r} \alpha$. Тогда найдутся такие оценки v_1 и v_2 в C_r, что ни для какой формулы β из X не имеет места $\overline{R}(v_1(\beta), v_2(\beta))$, однако неверно, что $R(v_1(\alpha), v_2(\alpha))$. Пусть h такая оценка в C_b, что $h(p) = (a_1, a_2)$, коль скоро $v_1(p) = a_1$ и $v_2(p) = a_2$. Тогда, поскольку операции C_b определяются покомпонентно, ни для какой формулы β из X не имеет места $\beta \in \overline{D}$, и в то же время $\alpha \notin D$. Поэтому $X \nvDash_{C_b} \alpha$. ∎

Таким образом, C_r — это матрица с двумя референциальными значениями, которая характеризует инферереренциально четырехзначную логику.

Обратим внимание на две особенности C_r и $\vDash_{C_r}$. Во-первых, в определениях $\overline{R}$ и R используется отношение $\geq$, а также тождества $x = 1$, $y = 1$. Последнее указывает на имплицитное присутствие привычных выделенных значений. Во-вторых, $R(x,y)$, е.т.е. $\overline{R}(y,x)$, поэтому использование двух отношений является избыточным, чтобы определить следование достаточно и одного. Принимая во внимание эти наблюдения, можно переопределить матрицу C_r и отношение следования так:

$$C_r^* = \langle \{0,1\}, \vee, \wedge, \supset, \neg, \geq, \{1\} \rangle.$$

$X \vDash_{C_r^*} \alpha$, е.т.е. для каждой пары оценок v_1, v_2 верно, что $v_1(\alpha) \geq v_2(\alpha)$ и $v_1(\alpha) \in D$, коль скоро ни для какой формулы β из X не имеет места $(v_2(\beta) \geq v_1(\beta)$ и $v_2(\beta) \in D)$.

Рассмотрим также матрицу и определение следования, где используется только $\geq$:

$$C_{\geq} = \langle \{0,1\}, \vee, \wedge, \supset, \neg, \geq \rangle.$$

$X \vDash_{C_{\geq}} \alpha$, е.т.е. для каждой пары оценок v_1, v_2 верно, что $v_1(\alpha) \geq v_2(\alpha)$, коль скоро ни для какой формулы β из X не имеет места $v_2(\beta) \geq v_1(\beta)$.

Следование $\vDash_{C_{\geq}}$ можно также задать с помощью b-матрицы и b-следования:

$$C_p = \langle \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}, \vee_{\otimes}, \wedge_{\otimes}, \supset_{\otimes}, \neg_{\otimes},$$
$$\{(0,0),(0,1),(1,1)\}, \{(0,0),(1,0),(1,1)\} \rangle.$$

$X \vDash_{C_p} \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в C_p верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \cap \overline{D} = \varnothing$.

Эквивалентность $\vDash_{C_{\geq}}$ и $\vDash_{C_p}$ доказывается так же, как в Теореме 3.

Теорема 4. *Следование $\vDash_{C_p}$ монотонно и рефлексивно, но не транзитивно.*

Доказательство. Монотонность имеет место по определению, так как любое b-следование монотонно. Рефлексивность имеет место, поскольку $A \setminus D = \{(0,1)\}$ и $(0,1) \in \overline{D}$. Транзитивность не имеет места, поскольку (1) $p \vDash_{C_p} p \vee \neg p$, так как $h(p \vee \neg p) = (1,1)$ для каждой оценки h, и $(1,1) \in D$; (2) $p, p \vee \neg p \vDash_{C_p} \neg p$, так как $(1,1) \in \overline{D}$; (3) $p \nvDash_{C_p} \neg p$, так как $\neg(1,0) = (0,1)$, $(1,0) \notin \overline{D}$, $(0,1) \notin D$. ■

Поскольку $\vDash_{C_{\geq}} = \vDash_{C_p}$, матрица $C_{\geq}$ задает следование, которое монотонно и рефлексивно, но не транзитивно, поэтому логика $\langle \mathcal{L}, \vDash_{C_{\geq}} \rangle$ является инференциально трехзначной.

Теперь приведем аналогичной пример для следования, которое также является инференциально трехзначным, однако на этот раз монотонно и транзитивно, но не рефлексивно. Для этого рассмотрим матрицу и определение следования, где вместо $\geq$ используется строгий порядок $>$:

$$C_{>} = \langle \{0,1\}, \vee, \wedge, \supset, \neg, > \rangle.$$

$X \vDash_{C_{>}} \alpha$, е.т.е. для каждой пары оценок v_1, v_2 верно, что $v_1(\alpha) > v_2(\alpha)$, коль скоро ни для какой формулы β из X не имеет места $v_2(\beta) > v_1(\beta)$.

Как и в случае $\vDash_{C_{\geq}}$, следование $X \vDash_{C_{>}}$ можно задать с помощью b-матрицы и b-следования:

$$C_q = \langle \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}, \vee_{\otimes}, \wedge_{\otimes}, \supset_{\otimes}, \neg_{\otimes}, \{(0,1)\}, \{(1,0)\} \rangle.$$

Определение $\vDash_{C_p}$ аналогично определению $\vDash_{C_p}$. Равенство $\vDash_{C_{>}}$ и $\vDash_{C_p}$ также доказывается по аналогии с Теоремой 3.

Теорема 5. *Следование $\vDash_{C_q}$ монотонно, не рефлексивно и транзитивно.*

Доказательство. Монотонность имеет место, так как любое b-следование монотонно. Рефлексивность не имеет места, поскольку $(1,1) \notin D$ и $(1,1) \notin \overline{D}$. Покажем, что имеет место транзитивность. Пусть $X \vDash_{C_q} \alpha$ для всех $\alpha \in Y$, $X, Y \vDash_{C_q} \gamma$, $X \nvDash_{C_q} \gamma$. Существует такая оценка h, что $\gamma \in \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ и $h(X) \subseteq \{(0,0),(1,0),(1,1)\}$. В таком случае $h(Y) \cap \{(0,1)\} \neq \varnothing$. Пусть $\alpha_0 \in Y$ и $h(\alpha_0) = (0,1)$. Если $h(\alpha_0) = (0,1)$, то $h(X) \cap \overline{D} = \emptyset$ и $\alpha_0 \notin D$, поэтому $X \nvDash_{C_q} \alpha_0$, что противоречит допущению. ∎

Таким образом, в силу $\vDash_{C_{>}} = \vDash_{C_q}$, матрица $C_{>}$ задает следование, которое монотонно и транзитивно, но не рефлексивно, поэтому логика $\langle \mathcal{L}, \vDash_{C_{>}} \rangle$ является инференциально трехзначной.

В силу Теорем 4 и 5, $\vDash_{C_p} \cap \vDash_{C_q}$ — это только монотонное следование. Поэтому логика $\langle \mathcal{L}, \vDash_{C_p} \cap \vDash_{C_q} \rangle$ инференциально четырехзначна. Сравним $\vDash_{C_p} \cap \vDash_{C_q}$ с $\vDash_{C_b}$.

Теорема 6. *Имеет место следующее:*
(1) $\vDash_{C_p} \cap \vDash_{C_q} \subseteq \vDash_{C_b}$; (2) $\vDash_{C_p} \cap \vDash_{C_q} \neq \vDash_{C_b}$.

Доказательство. Пусть $X \nvDash_{C_b} \alpha$. Тогда существует такая оценка h, что $h(X) \subseteq \{(0,0),(1,0)\}$, $h(\alpha) \in \{(0,0),(0,1)\}$. В таком случае h — такая оценка, что $h(X) \subseteq \{(0,0),(1,0),(1,1)\}$, $h(\alpha) \in \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, поэтому $X \nvDash_{C_q} \alpha$. Следовательно, $\vDash_{C_q} \subseteq \vDash_{C_b}$, и $\vDash_{C_p} \cap \vDash_{C_q} \subseteq \vDash_{C_b}$. В то же время $p \vDash_{C_b} p \vee \neg p$, однако $p \nvDash_{C_q} p \vee \neg p$, поскольку для любой оценки h верно, что $h(p \vee \neg p) = (1,1)$, и при этом $(1,1,) \in \{(1,0),(1,1)\}$, $(1,1) \notin \{(1,0)\}$. Таким образом, $\vDash_{C_p} \cap \vDash_{C_q} \neq \vDash_{C_b}$. ∎

Это означает, что класс матриц $\{C_{\geq}, C_{>}\}$ характеризует инференциально четырехзначное следование, являющееся строго более слабым, чем следование, которое характеризует матрица C_r.

Заключение

Опираясь на приведенные выше построения, можно сделать несколько выводов общего характера. В работах, рассмотренных в статье, инференциальные значения рассматриваются как подлинно логические значения, а референциальные значения носят подчиненный характер и трактуются как техническая абстракция. Приведенные нами примеры матриц с двухэлементным универсумом, которые характеризуют инференциально трехзначные и четырехзначные логики, показывают, что отношения между референциальными и инференциальными значениями сложнее. Возможна не только ситуация, когда референциально многозначная логика оказывается инференциально двухзначной, но и обратная ей — инференциально многозначная логика может оказаться двухзначной. Поэтому имеет смысл рассматривать раференциальные и инференциальные значения более равноправно.

Второй вывод состоит в следующем. Когда инференциальные значения рассматриваются как свойства, то есть одноместные предикаты, мы имеем дело с понятиями «истины» и «лжи» в абсолютном смысле. Референт либо обладает «свойством истины», либо не обладает. При переходе к отношениям мы отказываемся от абсолютной трактовки в пользу относительной. Именно переход к относительной трактовке позволяет строить двухзначные интерпретации для более широкого класса логик. Это мотивирует рассматривать «свойство истины», имплицитно заложенное в классическом подходе к интерпретации значений, как частный случай «отношения истины», которое, в общем случае, может иметь любую местность.

В литературе рассматривались определения следования, сохраняющего порядок от посылок к заключению в рамках одной оценки. Мы привели примеры следования, где порядок сохраняется от оценки к оценке. Как оказалось, это может быть и следование по Тарскому, и q-следование, и p-следование, и b-следование. С точки зрения автора, дальнейшее изучение следования, сохраняющего порядок от оценки к оценке для различных наборов значений и заданных на них порядках, представляет самостоятельный интерес.

Литература

Мальцев, 1970 – *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

Belikov, 2021 – *Belikov A.* Peirce's triadic logic and its (overlooked) connexive expansion // Logic and Logical Philosophy. 2021. Vol. 30. No. 3. P. 535–559.

Blasio et al., 2017 – *Blasio K., Marcos J., Wansing H.* An inferentially many-valued two-dimensional notion of entailment // Bulletin of the Section of Logic. 2017. Vol. 46. No. 3/4. P. 233–262.

Chemlá, Egré, 2019 – *Chemlá E., Egré P.* Suszko's problem: mixed consequence and compositionality // The Review of Symbolic Logic. 2019. Vol. 12. No. 4. P. 736–767.

Font, 2009 – *Font J.M.* Taking degrees of truth seriously // Studia Logica. 2009. Vol. 91. No. 3. P. 383–406.

Frankowski, 2004 – *Frankowski S.* Formalization of a plausible inference // Bulletin of the Section of Logic. 2004. Vol. 33. No. 1. P. 41–52.

Frankowski, 2004a – *Frankowski S.* p-consequence versus q-consequence operations // Bulletin of the Section of Logic. 2004. Vol. 33. No. 4. P. 41–52.

Frankowski, 2008 – *Frankowski S.* Plausible reasoning expressed by p-consequence // Bulletin of the Section of Logic. 2008. Vol. 37. No. 3–4. P. 161–170.

French, Ripley, 2019 – *French R., Ripley D.* Valuations: bi, tri, and tetra // Studia Logica. 2019. Vol. 107. No. 6. P. 1313–1346.

Kleene, 2002 – *Kleene S.C.* Mathematical logic. Courier Corporation, 2002. 398 p.

Łukasiewicz, Tarski, 1956 – *Łukasiewicz J., Tarski A.* Investigations into the sentential calculus / A. Tarski. Logic, semantics, metamathematics: papers from 1923 to 1938. Oxford: Clarendon Press, 1956. P. 38–59.

Malinowski, 1990 – *Malinowski G.* Towards the concept of logical many–valuedness // Acta Universitatis Lodziensis. Folia Philosophica. 1990. Vol. 7. P. 97–103.

Malinowski, 1990a – *Malinowski G.* Q-consequence operation // Reports on Mathematical Logic. Vol. 24. P. 49–59.

Malinowski, 1993 – *Malinowski G.* Many-valued Logics. Oxford: Clarendon Press, 1993. 131 p.

Malinowski, 1994 – *Malinowski G.* Inferential many-valuedness // Philosophical Logic in Poland / Ed. by J. Woleński. Dordrecht: Springer, 1994. P. 75–84.

Malinowski, 2009 – *Malinowski G.* Beyond three inferential values // Studia Logica. 2009. Vol. 92. No. 2. P. 203–213.

Nowak, 1990 – *Nowak M.* Logics preserving degrees of truth // Studia Logica. 1990. Vol. 49. No. 4. P. 483–499.

Shramko, Wansing, 2011 – *Shramko Ya., Wansing H.* Truth and falsehood: An inquiry into generalized logical values. Springer Science & Business Media, 2011. 260 p.

Strollo, 2022 – *Strollo A.* Truth pluralism and many-valued logic: lesson from Suszko's thesis // The Philosophical Quarterly. 2022. Vol. 72. No. 1. P. 155–176.

Suszko, 1977 – *Suszko R.* The Fregean axiom and Polish mathematical logic in the 1920s // Studia Logica. 1977. Vol. 36. No. 4. P. 377–380.

Wansing, Shramko, 2008 – *Wansing H., Shramko Ya.* Suszko's thesis, inferential many-valuedness, and the notion of a logical system // Studia Logica. 2008. Vol. 88. No. 3. P. 405–429.

Wójcicki, 1970 – *Wójcicki R.* Some remarks on the consequence operation in sentential logics // Fundamenta Mathematicae. 1970. Vol. 68. P. 269–279.

Wójcicki, 1988 – *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi. Dordrecht: Springer, 1988. 473 p.

Leonid Yu. Devyatkin

A non-classical view of the nature of truth values

Leonid Yu. Devyatkin
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Abstract: The paper is devoted to semantics of many-valued logics and deals with the problem of interpretation of values in logical matrices. The starting point of the research is R. Suszko's thesis, according to which every many-valued logic is logically two-valued, as well as the analysis of this thesis in the subsequent literature. As shown by Suszko, any many-valued matrix semantics can be reduced to two values. This raised the question of whether many-valued logics are possible in principle. The positive answer was given by G. Malinowski on the basis of his proposed concept of inferential many-valuedness. The foundation of this concept lies in generalizations of the concepts of logical matrix and consequence, where, along with the class of designated values, other subsets of the matrix universe are involved, considered as logical values. This allows Malinowski to provide examples of many-valued semantics that can not be reduced to two values using Suszko's technique. Based on the results of Malinowski and other authors who developed this topic, we propose our own generalizations of the concepts of logical matrix and consequence. Instead of considering subsets of the matrix universe as logical values, we assign this role to relations, that is, subsets of Cartesian powers of the universe. Such a generalization makes it possible to construct bivalent truth-functional semantics for logics, which, as follows from the results known in the literature, do not have two-valued semantics in the style of Suszko.

Keywords: many-valued logics, truth values, logical semantics, Suszko's Thesis, logical matrices, consequence relation

For citation: Devyatkin L.Yu. "Neklassicheskij vzglyad na prirodu znachenij istinnosti" [A non-classical view of the nature of truth values], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2022, Vol. 28, No. 2, pp. 40–65. DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-40-65 (In Russian)

References

Мальцев, 1970 – Mal'cev, A.I. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic systems], Nauka, 1970. 392 p.

Belikov, 2021 – Belikov, A. "Peirce's triadic logic and its (overlooked) connexive expansion", *Logic and Logical Philosophy*, 2021, Vol. 30, No. 3, pp. 535–559.

Blasio et al., 2017 – Blasio, K., Marcos, J., Wansing, H. "An inferentially many-valued two-dimensional notion of entailment", *Bulletin of the Section of Logic*, 2017, Vol. 46, No. 3/4, pp. 233–262.

Chemlá, Egré, 2019 – Chemlá, E., Egré, P. “Suszko’s problem: mixed consequence and compositionality”, *The Review of Symbolic Logic*, 2019, Vol. 12, No. 4, pp. 736–767.

Font, 2009 – Font, J.M. “Taking degrees of truth seriously”, *Studia Logica*, 2009, Vol. 91, No. 3, pp. 383–406.

Frankowski, 2004 – Frankowski, S. “Formalization of a plausible inference”, *Bulletin of the Section of Logic*, 2004, Vol. 33, No. 1, pp. 41–52.

Frankowski, 2004a – Frankowski, S. “p-consequence versus q-consequence operations”, *Bulletin of the Section of Logic*, 2004, Vol. 33, No. 4, pp. 41–52.

Frankowski, 2008 – Frankowski, S. “Plausible reasoning expressed by p-consequence”, *Bulletin of the Section of Logic*, 2008, Vol. 37. No. 3–4, pp. 161–170.

French, Ripley, 2019 – French, R., Ripley, D. “Valuations: bi, tri, and tetra”, *Studia Logica*, 2019, Vol. 107, No. 6, pp. 1313–1346.

Kleene, 2002 – Kleene, S.C. *Mathematical logic*, Courier Corporation, 2002. 398 p.

Łukasiewicz, Tarski, 1956 – Łukasiewicz, J., Tarski, A. “Investigations into the sentential calculus”, *Logic, semantics, metamathematics: papers from 1923 to 1938* by A. Tarski. Clarendon Press, 1956, pp. 38–59.

Malinowski, 1990 – Malinowski, G. “Towards the concept of logical many–valuedness”, *Acta Universitatis Lodziensis. Folia Philosophica*, 1990, Vol. 7, pp. 97–103.

Malinowski, 1990a – Malinowski, G. “Q-consequence operation”, *Reports on Mathematical Logic*, Vol. 24, pp. 49–59.

Malinowski, 1993 – Malinowski, G. *Many-valued Logics*, Clarendon Press, 1993. 131 p.

Malinowski, 1994 – Malinowski, G. “Inferential many-valuedness”, *Philosophical Logic in Poland*, ed. by J. Woleński. Dordrecht: Springer, 1994. pp. 75–84.

Malinowski, 2009 – Malinowski, G. “Beyond three inferential values”, *Studia Logica*, 2009, Vol. 92, No. 2, pp. 203–213.

Nowak, 1990 – Nowak, M. “Logics preserving degrees of truth”, *Studia Logica*, 1990, Vol. 49, No. 4, pp. 483–499.

Shramko, Wansing, 2011 – Shramko, Ya., Wansing, H. *Truth and falsehood: An inquiry into generalized logical values*, Springer Science & Business Media, 2011. 260 p.

Strollo, 2022 – Strollo, A. “Truth pluralism and many-valued logic: lesson from Suszko’s thesis”, *The Philosophical Quarterly*, 2022, Vol. 72, No. 1, pp. 155–176.

Suszko, 1977 – Suszko, R. “The Fregean axiom and Polish mathematical logic in the 1920s”, *Studia Logica*, 1977, Vol. 36, No. 4, pp. 377–380.

Wansing, Shramko, 2008 – Wansing, H., Shramko, Ya. “Suszko’s thesis, inferential many-valuedness, and the notion of a logical system”, *Studia Logica*, 2008, Vol. 88, No. 3, pp. 405–429.

Wójcicki, 1970 – Wójcicki, R. “Some remarks on the consequence operation in sentential logics”, *Fundamenta Mathematicae*, 1970, Vol. 68, pp. 269–279.

Wójcicki, 1988 – Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi*, Springer, 1988. 473 p.

Логические исследования
2022. Т. 28. № 2. С. 66–76
УДК 160.1, 168.51

Logical Investigations
2022, Vol. 28, No. 2, pp. 66–76
DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-66-76

А.А. Печенкин

Логика как эмпирическая наука: Х. Патнем и М. Рэдхед

Александр Александрович Печенкин
МГУ им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: a_pechenk@yahoo.com

Аннотация: Как известно, в 1936 г. Г. Биркгоф и И. фон Нейман сформулировали логическое исчисление, повторяющее структуру замкнутых подпространств гильбертова пространства, пространства состояний квантовой механики. Статья, однако, концентрируется на проблеме, которая возникла в конце XX в. Ссылаясь на квантовую логику, сформулированную Биркгофом и фон Нейманом, Х. Патнем поставил вопрос, является ли логика эмпирической наукой, и дал положительный ответ на этот вопрос. Исходя из инструменталистского подхода к логике М. Рэдхед сопоставляет классическое исчисление предикатов и квантовую логику. Если классическое исчисление предикатов является логикой классической механики, то квантовая логика Биркгофа и фон Неймана позволяет четко сформулировать некоторые концептуальные проблемы квантовой механики.

Ключевые слова: теория решеток, атомарная ортомодулярная полная решетка, булева алгебра, универсальность логики, концептуальные проблемы

Для цитирования: *Печенкин А.А.* Логика как эмпирическая наука: Х. Патнем и М. Рэдхед // Логические исследования / Logical Investigations. 2022. Т. 28. № 2. С. 66–76. DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-66-76

Введение

Вопрос о статусе логики исторически связан со статьей Г. Биркгофа и И. фон Неймана о квантовой логике, появившейся в 1936 г. [Birkhoff, von Neumann, 1936]. Действительно, в этой статье был поставлен вопрос о логике не интерпретации квантовой механики, а о логике понятийного аппарата этой теории, о логике, присутствующей в неявном виде уже в книге И. фон Неймана «Математические основания квантовой механики» ([Von Neumann, 1932], русский перевод — 1964 г.). В этой статье был поставлен вопрос об особой логике проекционных операторов, присутствующих в математическом изложении квантовой механики, данном фон Нейманом.

История квантовой логики прослежена в книге М. Джеммера «Философия квантовой механики. Историческая ретроспектива интерпретаций квантовой механики» [Jammer, 1974] — книга на русский язык не переводилась. В этой книге подробно описана упомянутая выше статья Биркгофа и фон Неймана. Однако проблемы квантовой логики обсуждались и после выхода книги Джеммера. В частности, та дискуссия об эмпирических основаниях логики, которой посвящена настоящая статья, началась в середине семидесятых годов и в книге Джеммера не описана.

В отечественной литературе эволюция логической проблематики, появившейся в связи с развитием квантовой механики, прослеживается в ряде книг и статей (см.: В.Л. Васюков, В.С. Меськов, А.И. Панченко и др.). Однако поставленный Х. Патнемом вопрос об эмпирическом статусе логики в них специально не рассматривается.

1. Статья Биркгофа и фон Неймана

Как уже отмечалось, вопрос об особой квантовой логике ставится в уже упомянутой книге фон Неймана о математических основаниях квантовой механики. «Мы видим, — пишет фон Нейман, — что связь между свойствами физической системы, с одной стороны, и проекционными операторами, с другой, делает возможным логическое исчисление над ними. Однако в противоположность исчислению обычной логики эта система обогащается характерным для квантовой механики понятием «одновременной рассудимости».

Это основанное на проекционных операторах исчисление предложений имеет, пожалуй, определенные преимущества над исчислением величин, опирающихся на совокупность всех эрмитовых гипермаксимальных операторов, состоящее в том, что понятие «одновременной рассудимости» является уточнением понятия «одновременной измеримости».

В статье Биркгофа и фон Неймана предлагается исчисление высказываний, формально неотличимое от исчисления замкнутых подпространств гильбертова пространства, построенного с теоретико-множественными операциями произведения, суммы и ортогонального дополнения (аналоги «и», «или», «не» в обычном исчислении высказываний). Однако это новое исчисление высказываний не просто повторяло свойства замкнутых подпространств гильбертова пространства. Скорее, эти свойства использовались в качестве эвристических соображений. Биркгоф и фон Нейман получили абстрактную аксиоматическую систему, для которой геометрия гильбертова пространства была лишь одной из возможных реализаций.

2. Что представляют собой экспериментальные высказывания?

Биркгоф и фон Нейман обозначали этим свойством подпространства «пространств наблюдения», т.е. пространств результатов различных совместных измерений (речь шла именно о подпространствах, а не просто об элементах пространства ввиду неустранимой расплывчатости показаний прибора — практически ведь с прибора считываются интервалы оси действительных чисел, а не отдельные числа). В случае классических систем экспериментальные высказывания соответствуют подмножествам элементов фазового пространства классической механики. Например, экспериментальное высказывание, устанавливающее такое-то значение координаты физической системы и такое-то значение ее импульса, соответствует точке фазового пространства этой системы. В принципе таким же образом обстоит дело и в квантовой механике, где пространством состояний является гильбертово пространство. Только степень абстрактности возрастает. Пусть, пишут Биркгоф и фон Нейман, α_1, α_2,..., α_n суть совместные измерения некой физической величины σ, обладающей пространством состояний Σ. Оставим в стороне проблемы непрерывного спектра. Тогда существует такое множество замкнутых линейных подпространств Ω_i, принадлежащих Σ, которое соответствует множеству семейств собственных функций, удовлетворяющих уравнениям

$$\alpha_1 f = \lambda_{i1} f, \ldots, \alpha_n f = \lambda_{in} f \tag{1}$$

причем такое, что каждая точка (функция) $f \in \Sigma$ может быть единственным образом представлена в форме

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_i f_i + \ldots$$

где $f_i \in \Omega_i$.

Иными словами, экспериментальные высказывания (подмножества пространства наблюдения, определяемого совместными измерениями α_1, α_2,..., α_n), касающимися квантово-механической системы σ, соответствуют множеству всех точек f пространства состояний, которые линейно определяются собственными функциями f_k, удовлетворяющими уравнениям (1), где (λ_1,..., λ_n) есть элемент пространства наблюдения.

Биркгоф и фон Нейман построили исчисление экспериментальных высказываний, соответствующее исчислению замкнутых подпространств гильбертова пространства. Они определили на множестве экспериментальных высказываний отношение частичной упорядоченности (аналог импликации в обычном исчислении высказываний), наибольшую нижнюю грань (аналог конъюнкции) и наименьшую верхнюю грань (аналог дизъюнкции).

Алгебраический объект, представляющий собой частично упорядоченное множество с наибольшей нижней гранью и наименьшей верхней гранью и содержащий элементы 0 (аналог — ложное высказывание) и 1 (аналог — истинное высказывание), называется решеткой. Применяется также название «решетка с нулем и единицей».

Решетка, которую предложили Биркгоф и фон Нейман, была ортодополнительной: в ней присутствует операция ортодополнения. Это означает, что каждому элементу a ставится в соответствие такой элемент a', что

$$a \vee a' = 1,$$
$$(a')' = a$$

и если $a \prec b$, то $b' \prec a'$.

Когда ортодополнительная решетка отвечает условию дистрибутивности, она представляет собой булеву алгебру, отвечающую классической логике. Дистрибутивность означает следующее:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

и

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b)$$

Согласно Биркгофу и фон Нейману, в квантовой механике выполняется более слабое условие модулярности. Оно формулируется следующим образом:

$$\textit{если } a \subseteq b, \textit{ то } a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

Структура логики высказываний, поддерживаемая классической механикой, пишут Биркгоф и фон Нейман, есть булевая решетка, а структура логики высказываний в квантовой механике есть ортодополнительная модулярная решетка.

В конце своей статьи Биркгоф и фон Нейман, однако, призывают к осторожности в интерпретации вопроса о логике квантовой механики. Они оставляют открытыми два вопроса:

1. какой экспериментальный смысл может быть придан конъюнкции и дизъюнкции двух экспериментальных высказываний?

2. каков физический смысл модулярности?

Хотя Джеммер цитирует эти вопросы, поставленные Биркгофом и фон Нейманом, при дальнейшем изложении вопроса о квантовой логике они не всегда принимались во внимание. Во всяком случае, в статье Патнема, которая цитируются ниже, эти вопросы не обсуждались.

3. Патнем о логике квантовой механики

Патнем начинает свою статью «Является ли логика эмпирической наукой?», указывая на уже известные трудности с проведением дихотомии аналитических и синтетических предложений. Он вспоминает пример У. Куайна «все холостяки неженаты», «все красноголовые дятлы имеют красные головы».

В настоящей статье мы, однако, начнем излагать статью Патнема, описывая его концепцию квантовой логики.

«В классической физике, — пишет Патнем, — состояние системы S, состоящей из N частиц, определяется заданием $3N$ пространственных координат и $3N$ координат импульса. Любая разумная математическая функция этих $6N$ величин представляет возможную физическую характеристику $m(S) = r$. Утверждения типа "величина m имеет значение r для системы S" будут именоваться нами "базисными физическими высказываниями"».

Фундаментальная физическая идея квантовой механики состоит в следующем: некоторое бесконечномерное векторное пространство связывается с каждой физической системой S и каждое базисное физическое высказывание связывается с подпространством этого векторного пространства. В случае невырожденной величины $m(s)$ подпространство, координируемое с базисным физическим высказыванием $m(s) = r$, является одномерным (обозначим V_r) и линейная комбинация подпространств V_r образует все пространство...

Мы сказали, что существует предписание, как координировать физические высказывания с подпространствами пространства $H(s)$. Это предписание может быть распространено на составные высказывания посредством следующих правил:

- $S(p \vee q)$ = линейной комбинации пространств $S(p)$ и $S(q)$
- $S(pq)$ = пересечение пространств $S(p)$ и $S(q)$
- $S(-p)$ = ортогональное дополнение $S(p)$

Эти правила, однако, вступают в противоречие с классической логикой. Чтобы увидеть это, представим себе, что $r_1, r_2, \ldots, r_n$ будут всеми возможными значениями некоторой невырожденной физической величины. Тогда прямые $V_{r_1}, \ldots, V_{r_n}$ «растягивают» все пространство $H(s)$ — иными словами, n является также величиной размерности $H(s)$ и любой вектор из пространства $H(s)$ может быть представлен как линейная комбинация векторов V_{r_i}. Поскольку линейная комбинация $V_{r_1}, \ldots, V_{r_n}$ представляет собой все пространство, предложение

$$m(s) = r_1 \vee m(s) = r_2 \vee \cdots \vee m(s) = r_n$$

где m — рассматриваемая физическая величина, является всегда истинным предложением.

Пусть теперь m' любая другая величина такая, что прямая $V_{r'}$, представляющая предложение $m'(s) = r$ (где r — некоторое действительное число), не совпадает ни с одной из прямых $V_{r_1}, \ldots, V_{r_n}$ (такая величина всегда может быть найдена). Предложение

$$m'(s) = r\,[m(s) = r_1 \vee m(s) = r_2 \vee \cdots \vee m(s) = r_n]$$

соответствует пересечению $V_{r'}$ со всем пространством, и это пересечение есть как раз $V_{r'}$.

Таким образом, последняя строчка эквивалентна

$$m'(s) = r$$

С другой стороны, посмотрим на дизъюнкцию

$$\big(m'(s) = r \cdot m(s) = r_1\big) \vee \big(m'(s) = r \cdot m(s) = r_2\big) \vee \cdots \vee \big(m'(s) = r \cdot m(s) = r_n\big)$$

Каждый элемент в этой дизъюнкции соответствует 0-мерному подпространству (началу координат), которое, учитывая нашу договоренность, соответствует всегда ложному высказыванию. Ибо каждая составная часть этой дизъюнкции $(m'(s) = r \cdot m(s) = r_i)$ соответствует пересечению двух одномерных подпространств V_r и V_{r_i} , а это как раз и есть начало координат. Таким образом в последней формуле представлено пространство, являющееся линейной комбинацией нульмерных подпространств и само являющееся нульмерным. Итак, два высказывания, эквивалентные с точки зрения классической логики, отображаются на различные подпространства пространства $H(s)$, представляющего все возможные высказывания относительно S. Мораль: отображение не имеет смысла, мы должны изменить логику [Putnam, 1985].

Каким образом мы можем сделать это? Согласно Патнему, геометрия гильбертова пространства указывает нам путь к новой логике (здесь Патнем ссылается на статью Биркгофа и фон Неймана). Два высказывания рассматриваются в качестве эквивалентных, если они отображаются в одно и то же подпространство гильбертова пространства. И высказывание p_1 может рассматриваться как «имплицирующее» высказывание p_2, если соответствующее ему подпространство включается в подпространство, соответствующее второму высказыванию.

4. Патнем сопоставляет логику и геометрию

В ряде статей [Putnam, 1981; Putnam, 1985], касающихся эмпирического статуса логики, Патнем сопоставляют логику и геометрию и формулирует тезис, ставший популярным среди тех, кто занимается философией физики. Это следующий тезис: «логика, как и геометрия, является эмпирической наукой... Мы живем в мире неклассической логики».

Более конкретно: Патнем проводит параллель между тем развитием геометрии, которое она получила в общей теории относительности, и тем развитием логики, которое имело место в статье Биркгофа и фон Неймана. Патнем сформулировал следующую пропорцию:

$$\frac{\text{Геометрия}}{\text{ОО}} = \frac{\text{Логика}}{\text{КМ}}$$

где ОО — общая теория относительности, КМ — квантовая механика.

Подобно тому, как физическая теория, общая теория относительности, имплицирует новую концепцию геометрии, квантовая механика предполагает новую концепцию логики.

В рассуждениях Патнема есть некая натяжка. Скорее, риманово пространство общей теории относительности является аналогом не квантовой логики, а гильбертова пространства, пространства состояний квантовой системы. Однако аналогия с римановым пространством позволяет Патнему рельефнее выразить свой тезис «логика — эмпирическая наука».

5. Рэдхед сопоставляет логику и булеву алгебру

Рэдхед в книге 1989 г. обсуждает широкий спектр вопросов философии квантовой механики. Параграф о квантовой логике включен им в главу «Квантово-механический формализм». Однако книга содержит и специальную главу о квантовой логике, озаглавленную им «Реализм и квантовая логика». Вопрос об истолковании квантовой механики с позиции философского реализма в настоящей статье не рассматривается. Нас интересует вопрос об эмпирическом статусе квантовой логики, а обсуждение этого вопроса предваряет в книге Рэдхеда обсуждение вопроса о реализме.

Рэдхед подчеркивает эквивалентность множества логических связок и множества теоретико-множественных операций:

$$\vee \text{ соответствует } \cup$$

$$\wedge \text{ соответствует } \cap$$

$$\neg \text{ соответствует } -$$

Обычно при изложении теории множеств мы представляем себе булевы операторы как определенные в терминах логических связок. Итак,

$$P \cup Q = \{x : (x \in P) \vee (x \in Q)\}$$

$$P \cap Q = \{x : (x \in P) \wedge (x \in Q)\}$$

$$\neg P = \{x : \neg (x \in P)\}$$

Однако в духе эмпирического подхода к логике Рэдхед следующим образом переписывает эти определения (он определяет логические коннекторы в терминах теории множеств)

$$(x \in P) \vee (x \in Q) = x \in (P \cup Q)$$

$$(x \in P) \wedge (x \in Q) = x \in (P \cap Q)$$

$$\neg (x \in P) = x \in -P$$

Мы видим, что составные высказывания, сконструированные из элементарных высказываний, являются сами элементарными высказываниями. Что же тогда соответствует тавтологии (логической истине)? Это высказывание, которое говорит, что система находится где-то во вселенной, т.е. высказывание, лишенное информационной ценности. Мы и так знаем, что находимся где-то во вселенной.

Класс тавтологий, построенных в соответствии с приведенными определениями, есть тот же класс тавтологий, которые возникают при подстановке истинностных значений в булеву алгебру. Мы таким образом объясняем, почему классическое исчисление предикатов является логикой классической физики.

Переходя к квантовой механике, Рэдхед дает следующие определения логических коннекторов (связок):

$$\vee \text{ соответствует линейной оболочке } \oplus$$

$$\wedge \text{ соответствует теоретико-множественному пересечению } \cap$$

$$\neg \text{ соответствует ортогональному дополнению } \perp$$

Какова базовая идея квантовой логики (точнее — квантовой логики высказываний)? Это идея заменить булеву решетку, соответствующую фазовому пространству классической физики, на решетку проекционных операторов гильбертова пространства. Операциям объединения и пересечения, действующим в этой решетке, соответствуют операции «линейная комбинация» и «теоретико-множественное пересечение», действующие на множестве подпространств гильбертова пространства. Решетка проекционных операторов также обладает операцией ортогонального дополнения, соответствующей построению ортогональных подпространств гильбертова пространства.

Квантово-логические тавтологии являются правильно построенными формулами, общезначимыми в отношении решетки проекционных операторов, а не общезначимыми формулами классического исчисления предикатов.

Квантовая логика описывает решетку проекционных операторов гильбертова пространства. Но это именно логика, оперирующая понятиями истинности и общезначимости. Она характеризует решетку проекционных операторов как некий самостоятельный алгебраический объект, отвлекаясь от ее генетической связи с гильбертовым пространством.

6. Рэдхед о статусе квантовой логики

Опустив ряд технических рассуждений Рэдхеда, обратимся к его выводам. В терминах результатов измерения, пишет Рэдхед, дизъюнкция в квантовой логике означает, что результат измерения всегда или q_1, или q_2. В отличие от квантовой классическая дизъюнкция утверждает, что результат измерения или всегда q_1, или всегда q_2. Это сопоставление оказывается еще более рельефным, если мы рассматриваем отрицание.

В терминах результатов измерения отрицание в квантовой механике предполагает, что результат измерения Q никогда не будет q_1, в то время как классическое отрицание означает, что результат измерения не всегда будет q_1.

«Ясно, — пишет Рэдхед, — что квантовая логика не является конкурентом классической логики. Это лишь иной способ для выражения сложных предложений иного вида. Например, дизъюнкция предполагает недостаток определенности в локализации квантово-механического вектора состояния в гильбертовом пространстве. Но недостаток иного рода, чем предполагает классическая дизъюнкция. Действительно, смысл квантово-теоретических связок, который мы считываем с решетки проекторов, всегда может быть «переведен» в термины теоретико-множественной структуры гильбертова пространства, а эти теоретико-множественные структуры предполагают классическую логику» [Redhead, 1989].

7. Заключение

Как и Патнэм, Рэдхед исходит из вышеупомянутой статьи Биркгофа и фон Неймана, опубликованной в 1936 г. Но его подход отличается от подхода Патнема. Если Патнем упрощает ситуацию и разбирает случай дискретного спектра и фактически заменяет бесконечномерное гильбертово пространство пространством, имеющим n измерений, то Рэдхед последовательно исходит из аппарата гильбертова пространства, представленного в книге фон Неймана.

Литература

Birkhoff, von Neumann, 1936 – *Birkhoff G., von Neumann I.* The logic of quantum mechanics // Annals of Mathematics. 1936. Vol. 37. P. 823–843.

Jammer, 1974 – *Jammer M.* The Philosophy of Quantum Mechanics. New York: Wiley, 1974. 536 p.

Von Neumann, 1932 – *Von Neumann J.* Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Springer, 1932. 271 p. (Рус. перевод под ред. Н.Н. Боголюбова. М.: Наука, 1964.)

Putnam, 1985 – *Putnam H.* Is logic empirical? // Boston Studies in the Philosophy of Science. A Portrait of Twenty-five Years. Dordrecht, Boston: D. Reidal, 1985. P. 75–100.

Putnam, 1981 – *Putnam H.* Quantum Mechanics and Observer // Erkenntnis. 1981. Vol. 16. P. 193–219.

Redhead, 1989 – *Redhead M.* Incompleteness, nonlocality and realism. Clarendon, 1989. 200 p. (Reprinted in 2009.)

Alexander A. Pechenkin

Logic as an empirical science: H. Putnam and M. Redhead

Alexander A. Pechenkin
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: a_pechenk@yahoo.com

Abstract: The paper is concerned with the problem which arose in connection with the discussions initiated by the Birkgoff-von Neumann 1936 paper on quantum logic. However it concentrates on the problem which arose at the end of the twentieth century. By appealing to quantum logic H. Putnam formulated the question "Is logic an empirical science?" and he gave a positive answer on it. By proceeding from the instrumentalist point of view M. Redhead treats quantum logic as a logic appropriate for discussion of the conceptual problems of quantum theory.

Keywords: the theory of lattice, atom, orthomodular complete lattice, Boolean algebra, logic as an universal science.

For citation: Pechenkin A.A. "Logika kak empiricheskaya nauka: H. Putnam i M. Redhead" [Logic as an empirical science: H. Putnam and M. Redhead], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2022, Vol. 28, No. 2, pp. 66–76. DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-66-76 (In Russian)

References

Birkhoff G. Neumann I. von., 1936 – Birkhoff, G., Neumann, I. von. "The logic of quantum mechanics", *Annals of Mathematics*, 1936, Vol. 37, pp. 823–843.

Jammer M., 1974 – Jammer, M. *The Philosophy of Quantum Mechanics.* New York: Wiley, 1974. 536 pp.

Von Neumann J., 1932 – Von Neumann, J. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Berlin: Springer, 1932. 271 pp.

Putnam H., 1985 – Putnam, H. "Is logic empirical?", *Boston Studies in the Philosophy of Science. A Portrait of Twenty-five Years.* Dordrecht, Boston: D. Reidal, 1985, pp. 75–100.

Putnam H., 1981 – Putnam, H. "Quantum Mechanics and Observer", *Erkenntnis*, 1981, Vol. 16, pp. 193–219.

Redhead M., 1989 – Redhead, M. *Incompleteness, nonlocality and realism.* Clarendon, 1989. 200 pp.

Логические исследования
2022. Т. 28. № 2. С. 77–95
УДК 510.644

Logical Investigations
2022, Vol. 28, No. 2, pp. 77–95
DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-77-95

Н.Е. Томова

К вопросу о критерии паранепротиворечивости логик

Наталья Евгеньевна Томова
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Аннотация: В статье рассмотрены различные аспекты, связанные с определением паранепротиворечивых логик. Приведены критерии паранепротиворечивости логических систем, которые были предложены С. Яськовским и Н. да Костой. Даны различные формулировки принципа «из противоречия следует все что угодно» (*ex falso quodlibet*) и соответствующие определения паранепротиворечивой логики. Указано, в каких случаях эти определения могут быть эквивалентны. Также описана проблема эксплозивности отношения следования относительно некоторых операторов и связок и приведены те решения, которые были предложены различными исследователями. В статье рассмотрены вопросы, связанные с паранепротиворечивым отрицанием, указаны свойства классического отрицания, несовместимые с отказом от принципа «из противоречия следует все что угодно». Приведены различные взгляды на необходимость неверифицируемости в паранепротиворечивых логиках принципа непротиворечия.

Ключевые слова: паранепротиворечивость, закон Дунса Скота, принцип непротиворечия, отрицание, отношение следования, С. Яськовский, Н. да Коста

Для цитирования: *Томова Н.Е.* К вопросу о критерии паранепротиворечивости логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2022. Т. 28. № 2. С. 77–95. DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-77-95

Введение

Существуют контексты рассуждений, для работы с которыми классическая логика не применима. Среди них особо выделяют контексты с *избытком информации* и контексты с *недостатком информации*.

Так, например, различные базы данных очень часто содержат и противоречивую и неполную информацию. Научные теории — еще один пример реальных ситуаций, в которых противоречия кажутся неизбежными. Существуют такие научные теории, которые сами по себе непротиворечивы, однако могут приводить к противоречиям в сочетании с другими теориями.

Для работы с подобными контестами подходят паранепротиворечивые и параполные логики.

Предложенная статья представляет собой первую часть более общего исследования, посвященного вопросам определения паранепротиворечивости и параполноты логических систем.

Часто в рассуждениях о какой-либо ситуации имеется противоречивая информация. В классической логике наличие противоречия ведет к тривиализации теории («из противоречия следует все что угодно»).

При этом на практике люди не воспринимают противоречие как то, что позволяет делать совершенно любые выводы, умозаключения. Они не делают произвольных выводов обо всем из противоречивых посылок. Другими словами, принцип «из противоречия следует все что угодно» (*ex falso quodlibet*) отвергается. Логики, в которых противоречия не ведут к тривиальности, называются паранепротиворечивыми логиками.

Как отмечает Л.И. Розоноэр [Розоноэр, 1983, с. 114], исследование паранепротиворечивых логик вызвано, с одной стороны, чисто математическим интересом, с другой, стремлением отразить различные аспекты применений логики. Например, при анализе логики дискуссий, когда участники могут высказывать противоположные мнения [Jaśkowski, 1969]; логики начальной стадии развития теории, на которой возможны противоречия, впоследствии устраняемые [D'Ottaviano, da Costa, 1970]; логики, в которых противоречивые суждения могут быть оба верными с определенными степенями вероятности [Kotas, da Costa, 1978]; в связи с проблемами, связанными с обработкой противоречивой информации компьютером, и др.

В данной работе мы рассмотрим критериии паранепротиворечивости, которым должна удовлетворять логическая система для корректной работы в условиях противоречивой информации. Имеющиеся в литературе формулировки подобных критериев непосредственно связаны с тем, какие задачи стоят перед исследователями, что понимается под логикой, в каком языке формулируется та или иная система.

Наш обзор будет строиться вокруг критериев, предложенных основателями паранепротиворечивой логики — С. Яськовским и Н. да Костой, также мы рассмотрим некоторые связанные с этими критериями нежелательные следствия и дикуссионные моменты. В рамках статьи мы коснемся ключевых вопросов, связанных с определением паранепротиворечивости, также будут затронуты некоторые аспекты взаимосвязи различных определений паранепротиворечивости, случаи их эквивлентности и др.

Существует большое количество работ, посвященных вопросам критериев паранепротиворечивости логик. В основном это работы зарубежных авторов. На некоторые из них мы будем ссылаться в нашей статье. Из отечественных работ, в которых рассмотрены общие вопросы паранепротиворечивости, а также ее различные аспекты, на наш взгляд, следует отдельно отметить базовую статью [Ишмуратов и др., 1989] — по сути, это первый в русской логической литературе обзор паранепротиворечивых логик, а также диссертацию Н.Л. Кварталовой «Паранепротиворечивость и релевантность» [Кварталова, 2004].

Необходимо отметить, что хотя в области паранепротиворечивых логик достаточно активно ведутся исследования и получено немало результатов, которые касаются не только непосредственно данной области исследования, но и помогают по-новому осмыслять традиционные логические понятия (такие, например, как «отрицание», «следование» и др.), существуют различные мнения по поводу необходимых и достаточных условий для логики, чтобы она могла называться парнепротиворечивой.

1. Определения

Приведем основные определения, которые будут нами использованы в статье.

Пусть $Var = \{p, q, r \ldots\}$ — счетное множество пропозициональных переменных и $Con = \{\S_1, \ldots \S_n\}$ — конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке $\S_i$ сопоставлено натуральное число $a(\S_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Хотя бы для одного $i \in \{1, \ldots n\}$ имеет место $a(\S_i) \neq 0$. Множество формул For определяется индуктивно стандартным образом:

(1) $Var \subseteq For$,

(2) Для каждого такого $\S_i \in Con$, что $a(\S_i) = k$, $\S_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in For$, если $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in For$,

(3) Ничто иное не принадлежит For.

Алгебру формул $\mathcal{L} = \langle For, \S_1, \ldots, \S_n \rangle$ будем называть *пропозициональным языком.*

Множества формул из For называются *теориями* и обозначаются $\mathcal{T}, \mathcal{S}$.

Отношением следования для пропозиционального языка $\mathcal{L}$ называем бинарное отношение $\vdash$ между $\mathcal{T} \subseteq For$ и $\varphi \in For$, отвечающее условиям:

- Если $\varphi \in \mathcal{T}$, то $\mathcal{T} \vdash \varphi$ (рефлексивность);
- Если $\mathcal{T} \vdash \varphi$ и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, то $\mathcal{T}' \vdash \varphi$ (монотонность);
- Если $\mathcal{T} \vdash \varphi$ и $\mathcal{T}', \varphi \vdash \psi$, то $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \vdash \psi$ (транзитивность).

Если $\vdash$ также замкнуто относительно всех эндоморфизмов (подстановок) $\mathcal{L}$, называем такое следование *структурным.*

Если $\mathcal{L}$ — пропозициональный язык и $\vdash$ — структурное логическое следование на $\mathcal{L}$, то $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — *пропозициональная логика.* Далее, если не оговорено иное, будем рассматривать логики, заданные в стандартном языке, в котором имеются связки $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$.

Логика называется *нормальной*, если отношение следования рефлексивно, монотонно, транзитивно.

Теория $\mathcal{T}$ *противоречива*, е.т.е. существует такая формула φ, что:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \quad \text{и} \quad \mathcal{T} \vdash \neg\varphi.$$

Теория $\mathcal{T}$ *тривиальна*, е.т.е. для любой формулы φ верно, что:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi.$$

Логическая матрица для $\mathcal{L}$ — это структура $\mathcal{M} = \langle V, f_1, \ldots, f_k, D \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \ldots, f_k \rangle$ алгебра того же типа, что пропозициональный язык $\mathcal{L}$, V — множество истинностных значений и f_i — функция на V той же местности, что и $\S_i$; $D \subseteq V$ — непустое собственное подмножество V. Когда $\mathcal{M}$ — матрица для $\mathcal{L}$, гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой* $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$.

Некоторая формула φ есть *тавтология* в $\mathcal{M}$, е.т.е. для каждой оценки h в $\mathcal{M}$ верно, что $h(\varphi) \in D$.

Теорией, порождаемой $\mathcal{M}$, называем множество всех тавтологий в $\mathcal{M}$ и обозначаем его как $E(\mathcal{M})$.

Матричное отношение следования есть множество $Cn(\mathcal{M})$ упорядоченных пар $\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle$ таких, что для всякой оценки h в $\mathcal{M}$, если $h(\mathcal{T}) \subseteq D$, то $h(\varphi) \in D$.

Тогда под логикой L можно понимать пару $\langle \mathcal{L}, Cn(\mathcal{M}) \rangle$, с другой стороны, логику L можно также рассматривать как матричную теорию, т.е. класс тавтологий $E(\mathcal{M}_L)$.

2. Критерий С. Яськовского

С. Яськовский, вдохновленный работой Я. Лукасевича, посвященной принципу непротиворечия у Аристотеля, — первый, кто представил формальную систему пропозициональной паранепротиворечивой логики.

Проблема построения логики, в которой принцип «из противоречия следует все что угодно» не действует и на основе которой могут быть построены противоречивые, но не тривиальные теории, была поставлена в 1948 г.

именно С. Яськовским [Jaśkowski, 1969][1]. Как считается, именно Яськовский впервые формулирует в рамках противоречивых систем вопросы, связанные с нетривиальностью.

Существуют различные способы опровержения и ограничения принципа «из противоречия следует все что угодно».

Яськовский ставит задачу найти систему пропозиционального исчисления, которая послужила бы основой для противоречивых, но нетривиальных теорий. Формулируются следующие критерии для такого исчисления [Jaśkowski, 1969, p. 145]:

Я1 при применении к противоречивым системам не всегда приводило бы к тривиализации теории[2],

Я2 должно быть достаточно богатым, чтобы можно было делать практические выводы,

Я3 должно иметь интуитивное обоснование.

Как указывает С. Яськовский, эти требования могут быть выполнены в различной степени, поэтому отсутствует однозначное универсальное решение конструирования паранепротиворечивой системы.

Проблема определения паранепротиворечивых логик, удовлетворяющих критериям **Я1**–**Я3**, была названа «проблемой Яськовского». Существует ряд работ, посвященных решению «проблемы Яськовского» (см., например, [D'Ottaviano, da Costa, 1970; Kotas, da Costa, 1978]).

Сам Яськовский в качестве решения поставленной им проблемы конструирует дискуссивную логику. Основные идеи дискуссивной логики, ее развитие в исторической перспективе, вопросы аксиоматизации, алгебраизации, возникающие проблемы и их решения рассмотрены в статье [Ciuciura, 1999].

Критерии **Я1**–**Я3** сформулированы в самом общем виде. Но какие конкретные формальные требования они предполагают?

В своей статье С. Яськовский подчеркивает, что для реализации **Я1** в логике не должен иметь места закон Дунса Скота $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$.

---

[1] Статья, посвященная дискуссивной логике изначально, появилась на польском языке в 1948 г., ее английский перевод — в 1969 г.

[2] С. Яськовский вместо понятия «тривиальная теория» использует аналогичное понятие «сверхполноты».

Согласно [Karpenko, 1999], условие **Я2** предполагает наличие правила *modus ponens* и верификацию следующих формул:

$$\varphi \to \varphi,$$

$$(\varphi \to \psi) \to ((\gamma \to \varphi) \to (\gamma \to \psi)),$$

$$(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to (\psi \to (\varphi \to \gamma)).$$

Относительно условия **Я3** там же имеется следующая трактовка: на классических значениях $\{0, 1\}$ логические связки в паранепртиворечивой логике ведут себя как классические связки.

Таким образом, при матричном задании логики как класса тавтологий в *паранепротиворечивой* логике формула $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ не является тавтологией.

Отношение следования называется *эксплозивным* (explosive), если $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ для любых $\varphi, \psi \in For$.

На основании этого понятия стандартное определение паранепротиворечивой логики дано в [Priest et al., 2014]: логика *паранепротиворечива*, если и только если ее отношение логического следования[3] не является эксплозивным.

Таким образом, если $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — пропозициональная логика, то она является *паранепротиворечивой*, если существуют формулы $\varphi, \psi \in For$ такие, что $\varphi, \neg\varphi \nvdash \psi$.

Однако здесь возникают некоторые сложности.

Уже сам Яськовский отмечает недостаточность для работы с противоречивыми и нетривиальными теориями соблюдения требования неверифицируемости закона Дунса Скота. Так, автор отказывается от своей дискуссивной логики, поскольку, несмотря на то, что закон Дунса Скота не является тавтологией в этой логике, в ней верифицируется т.н. формула Лукасевича:

$$\varphi \to (\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)),$$

т.е. хотя «из противоречия не следует все что угодно», наличие противоречивой тройки φ, $\neg\varphi$, $\neg\neg\varphi$ приводит к тривиализации. Более того, это свойство характерно для всех логик, которые являются паранепротиворечивыми только на атомарном уровне[4] [Béziau, 2000, p. 102]. Д. Батенс

[3] Отношение логического следования определено или синтаксически, или семантически.

[4] На уровне пропозициональных переменных и их отрицаний (литералов). О литеральных паранепротиворечивых логиках см. [Lewin, Mikenberg, 2006; Карпенко, Томова, 2016].

такие паранепротиворечивые логики, в которых верифицируется формула Лукасевича называет *не строго паранепротиворечивыми* [Batens, 1980].

Ж.-И. Безье указывает, что в некоторых паранепротиворечивых системах имеет место $\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$.

В связи с этим Е.К. Войшвилло обобщает понятие паранепротиворечивости: логика *паранепротиворечива*, если не содержит конечного множества формул, из которого выводима некоторая произвольная формула [Войшвилло, 1998, с. 130]. При данном подходе к паранепротиворечивым логикам нельзя отнести логики, которые являются таковыми только на атомарном уровне.

Еще один важный момент. Существуют такие системы, которые, удовлетворяя общему требованию паранепротиворечивости — «из противоречия не следует все что угодно», т.е. отношение следования в этих системах в общем виде не является эксплозивным, тем не менее также не подходят для работы с противоречивыми теориями, поскольку отношение следования в них эксплозивно относительно некоторых операторов и связок.

В связи с этим С. Яськовский замечает [Jaśkowski, 1969, p. 147], а также на это указывают и другие исследователи, что в системах паранепротиворечивых логик нежелательна верификация формул типа $\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$ (аналог закона Дунса Скота), т.е. когда из противоречия выводимо отрицание любой формулы. Именно на основании этого свойства минимальная логика Йохансона [Johansson, 1936] хотя и удовлетворяет определению паранепротиворечивой логики, многими исследователями не рассматривается в качестве таковой. В поисках системы, удовлетворяющей требованиям паранепротиворечивости, Яськовский рассматривает известный ему пример — систему Колмогорова, которая также обладает этим свойством.

О недостаточности неверифицируемости закона Дунса Скота для построения логики, лежащей в основе противоречивой, но не тривиальной теории, говорит Батенс [Batens, 1980, p. 201], приводя пример логической системы, имеющей следующую матрицу:

$$\mathcal{M} = \langle \{1, 1/2, 0\}, \neg, \to, \vee, \{1\} \rangle,$$

где $\neg$, $\to$ и $\vee$ определяются таблицами:

x	$\neg x$
1	0
1/2	1/2
0	1

$\to$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

Эта логика паранепротиворечива в том смысле, что закон Дунса Скота не является здесь тавтологией. Но, как указывает Д. Батенс, хотя эта система и паранепротиворечива, но она не подходит для работы с противоречивыми, но не тривиальными теориями, поскольку формула $\varphi \to (\neg\varphi \to (\psi \vee \neg\psi))$ является тавтологией, при этом формула $\psi \vee \neg\psi$ тавтологией не является. Получается, что наличие противоречия приводит к тому, что формулы вида $\psi \vee \neg\psi$ всегда будут теоремами.

Другой пример. А. Арруда и Н. да Коста представили семейство из пяти логик, предназначенных для решения парадоксов, возникающих в «наивных» теориях множеств. Оказалось, что две системы J_2 и J_4 технически удовлетворяют определению паранепротиворечивости, т.е. $\varphi, \neg\varphi \nvdash \psi$, но в то же время имеет место $\varphi, \neg\varphi \vdash (\psi \to \phi)$ [Arruda, da Costa, 1974].

И. Урбас в статье [Urbas, 1990], рассматривая проблему эксплозивности отношения следования относительно некоторых операторов и связок в паранепротиворечивых логиках, предлагает свое решение и вводит понятие *строгой паранепротиворечивости*, основанное на отказе и от различных частных форм принципа «из противоречия не следует все что угодно»[5].

3. Критерий Н. да Косты

Возникновение паранепротиворечивой логики том виде, в каком мы имеем с ней дело сегодня, приписывают Н. да Косте. Некоторые исследователи отмечают, что именно он первым построил паранепротиворечивые системы в полном охвате: логику высказываний, логику предикатов, теорию множеств.

В 1963 г. Н. да Коста независимо от С. Яськовского представил паранепротиворечивую логику C_1 и связанную с ней иерархию подобных паранепротиворечивых пропозициональных логик C_n, где $0 < n < \omega$. При этом он указывает следующие требования для паранепротиворечивых исчислений [da Costa, 1974, p. 498] (см. также [Marcos, 2005a]):

дК1 в C_n принцип непротиворечия $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ не является допустимой схемой;

дК2 из двух противоречащих формул φ и $\neg\varphi$ в общем случае в C_n нельзя вывести произвольную формулу ψ;

дК3 существует простое расширение C_n до логики предикатов (с равенством или без равенства);

[5] В данном случае имеется в виду, что определение эксплозивности отношения следования будет предполагать, что из противоречия выводимы не любые формулы, а только формулы определенного вида.

дК4 C_n содержит существенную часть схем и правил классической логики, которые не противоречат первым условиям.

Так же как и в случае требований для паранепротиворечивой логики, предложенных С. Яськовским, в условиях Н. да Косты присутствует некоторая неопределенность, что дает возможность по-разному решать проблему паранепротиворечивости логик.

Очевидно, условия **дК2** и **Я1** совпадают. Это требование единодушно принимается всеми исследователями в качестве необходимого условия для паранепротиворечивых систем. Другой вопрос, что имеются различные способы ограничения принципа «из противоречия не следует все что угодно».

Необходимость **дК3** также принимается многими.

Рассмотрим условие **дК1**.

Существуют различные взгляды на необходимость требования **дК1** для паранепротиворечивых логик.

Так, например, Безье в ряде своих работ отмечает, что паранепротиворечивая логика — логика, отвергающая принцип непротиворечия (см., например, [Béziau, 1999]).

Тем не менее существует ряд паранепротиворечивых логик, в которых принцип непротиворечия в форме $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ является теоремой. Например, в паранепротиворечивой логике $\mathbf{J_3}$ [D'Ottaviano, da Costa, 1970]. Такие паранепротиворечивые логики Безье называет *полными* [Béziau, 1999, p. 478], хотя и отмечает, что не совсем ясно, что означает такая полнота систем[6]. Как отмечает Яськовский, закон непротиворечия является теоремой его дискуссивной логики и в целом не имеет связи с проблемой логики противоречивых систем [Jaśkowski, 1969, p. 152][7].

Некоторые исследователи признают, что принцип непротиворечия традиционно считается одним из существенных свойств отрицания, и отказ от этого принципа позволяет утвержать, что отрицание в логиках Н. да Косты не является отрицанием (см., например, [Priest et al., 2014, p. 165]).

[6] Ситуация, что принцип непротиворечия $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ имеет место, но «из противоречия не следует все что угодно», возможна, когда, например, в трехзначной логике отрицание представляет собой инволюцию ($\sim x = 1 - x$) и третье истинностное значение берется в качестве выделенного.

[7] Здесь необходимо заметить, что в логике Яськовского нестандартная конъюнкция: $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$, но $\varphi, \psi \nvdash \varphi \wedge \psi$, т.е. в логике Яськовского отсутствует правило введения конъюнкции. Подобные логики называются *не-адъюнктивными*. Данное свойство конъюнкции связано с тем, что логика Яськовского не предусматривает стандартного правила *modes ponens* (как правила, сохраняющего истину, выделенное значение), *modus ponens* здесь имеет место только как допустимое правило, сохраняющее тавтологию, т.е. как правило, которое может применяться только к теоремам.

Здесь же авторы следующим образом поясняют это утверждение: φ и ψ находятся в отношении подпротивоположности, если $\varphi \vee \psi$ логически истинно; φ и ψ находятся в отношении противоречия, если $\varphi \vee \psi$ логически истинно и $\varphi \wedge \psi$ логически ложно. Итак, при подходе Н. да Косты имеем: $\varphi \vee \neg\varphi$ — логически истинно, $\varphi \wedge \neg\varphi$ не является логически ложным. Таким образом, φ и $\neg\varphi$ находятся в отношениии подпротивоположности, а не в отношении противоречия. Далее делается вывод, что отрицание да Косты не есть отрицание, т.к. отрицание — оператор, формирующий противоречие, а не подпротивоположность.

Существуют различные способы реализации стратегии, описанной в пункте **дК4**. Здесь также видна аналогия с требованием **Я2** у Яськовского.

Как указывает Дж. Маркос [Marcos, 2005a, p. 55], пункт **дК4** можно понимать как то, что паранепротиворечивое исчисление должно быть *максимальным*, т.е. если φ — классическая тавтология, не доказуемая в этом исчислении, тогда в результате добавления φ к этому исчислению в качестве новой схемы аксиомы получим классическую логику.

В настоящее время большое внимание уделяется систематическому поиску максимальных паранепротиворечивых фрагментов классической логики [Marcos, 2005b, p. xliv]. Проблеме поиска критериев максимальности паранепротиворечивости и параполноты посвящена работа [Девяткин, 2021].

Другой подход к реализации требования да Косты **дК4** используется в противоречиво-адаптивных логиках (inconsistency-adaptive logics) (см. [Batens, 2000]), в которых максимальность достигается с помощью немонотонных стратегий, предполагающих непротиворечивость.

Необходимо отметить, что условие **дК4** о максимально возможном сохранении классической логики принимается и одобряется далеко не всеми исследователями (см., например, [Urbas, 1988]). Так, например, предлагается ослабить это условие и, как альтернатива, опираться на схемы и правила интуиционисткой логики.

Н. да Коста конструирует свою паранепротиворечивую логику C_1, пытаясь сохранить в этой логике классические свойства, насколько это возможно.

4. Другие определения паранепротиворечивости. Об отрицании

Ключевым в определении паранепротиворечивых логик является понятие отрицания. Некоторые исследователи непостредственно указывают на это. Так, например, Ж.-И. Безье в своих работах, анализируя вопросы критериев для определения паранепротиворечивых логик, особое внимание уделяет отрицанию. Именно с точки зрения понятия отрицания он рассматривает критерий паранепротиворечивости.

Как указывает Безье, все исследователи паранепротиворечивых логик сходятся в отрицательном критерии для паранепротиворечивой логики: принцип «из противоречия следует все что угодно» не должен иметь места. Существуют различные формализации принципа эксплозивности, Безье приводит стандартную:

$$\mathcal{T}, \varphi, \neg\varphi \vdash \psi, \text{ для любой теории } \mathcal{T} \text{ и формул } \varphi \text{ и } \psi^{8}.$$

Безье предлагает следующее определение паранепротиворечивой логики, основанное на отказе от вышеуказанного принципа.

В данной логике отрицание является паранепротиворечивым, е.т.е. существует теория $\mathcal{T}$ и формулы φ и ψ такие, что:

$$\mathcal{T}, \varphi, \neg\varphi \nvdash \psi.$$

Логика *паранепротиворечива*, е.т.е. она содержит паранепротиворечивое отрицание.

Безье объединяет определения паранепротиворечивости С. Яськовского и Н. да Косты в одно. Это определение паранепротиворечивости, как пишет Безье, то же, что и сформулированное ранее независимым образом С. Яськовским и Н. да Костой. Он дает это определение в своей нотации [Béziau, 2000, p. 99]:

В логике с отрицанием теория $\mathcal{T}$
- *противоречива*, е.т.е. существует такая формула φ, что: $\mathcal{T} \vdash \varphi$ и $\mathcal{T} \vdash \neg\varphi$;
- *тривиальна*, е.т.е. для любой формулы φ верно, что: $\mathcal{T} \vdash \varphi$.
- *паранепротиворечива*, е.т.е. она противоречива и нетривиальна.

В случае *нормальной* логики принцип «из противоречия следует все что угодно» эквивалентен традиционной формулировке принципа непротиворечия: «предложение и его отрицание не могут быть оба истинными».

И это позволяет некоторым исследователям определять паранепротиворечивую логику как логику, в которой принцип непротиворечия не имеет места.

[8] Как пишет Безье [Béziau, 2000, p. 99], аналогичный принцип без упоминания $\mathcal{T}$ — частный случай приведенной формулировки (см. стр. 82), и обе формулировки эквивалентны при монотонности. Если отношение следования $\vdash$ является структурным, то вместо формул φ и ψ в формулировке принципа достаточно писать пропозициональные переменные p и q. Приведенная формулировка имеет место также для неструктурного отношения следования [Arieli et al., 2011, p. 35].

Однако известно, что $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ и $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ не эквивалентны. Так, например, в трехзначной логике Лукасевича первое имеет место, а второе — нет; в паранепротиворечивой логике Приста **LP** первое не имеет места, а второе является теоремой.

Таким образом, в данном смысле отказ от закона непротиворечия недостаточен, чтобы получить паранепротиворечивую логику.

Однако, как подчеркивает Безье, когда неформально определяется паранепротиворечивая логика как система, в которой принцип непротиворечия не имеет места, здесь принципиально учитывать неэквивалентность этого утверждения тому, что формула $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ не является теоремой этой логики.

Безье делает важный вывод о том, что в случае *нормальной* логики три рассмотренные формулировки паранепротиворечивости: первая, основанная на отказе от принципа «из противоречия следует все что угодно», вторая — на различии между тривиальностью и противоречивостью и третья — на отказе от принципа непротиворечия, *эквивалентны*.

В исследованиях паранепротиворечивых логик вопросу отрицания и его свойствам уделяется особое внимание (см., например, [Béziau, 1999; Lenzen, 1996]). Так, Ж.-И. Безье, рассматривая различные свойства отрицания, исследует, какие из них совместимы с не эксплозивным отношением следования.

При структурном отношении следования отказ от принципа «из противоречия следует все что угодно» в различных его вариантах автоматически приводит к тому, что некоторые привычные свойства отрицания не имеют место. Такие, например, как

- *контрапозиция*: если $\mathcal{T}, p \vdash q$, то $\mathcal{T}, \neg q \vdash \neg p$,
- *сведение к абсурду*: если $\mathcal{T}, \neg p \vdash q$, и $\mathcal{T}, \neg p \vdash \neg q$ то $\mathcal{T} \vdash p$.

Как указано в [Кварталова, 2004, с. 41], наличие в системах гильбертовского типа хотя бы ослабленного варианта контрапозиции наряду с аксиомами

$$\varphi \to (\psi \to \varphi),$$

$$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to (\varphi \to \gamma))$$

позволяет доказать закон Дунса Скота. Отсутствие контрапозиции, в свою очередь, приводит к нежелательным последствиям: в общем случае оказывается неприемлемым принцип замены для доказанных эквивалентностей.

С другой стороны, многие свойства классического отрицания совместимы с отказом от принципа эксплозивности следования [Béziau, 2016]. Поэтому, как утверждает Безье, паранепротиворечивое отрицание является отрицанием. Также он ссылается на математику, где много различных унарных операторов с различными свойствами, близкими, но не тождественными свойствам классического отрицания, которые тем не менее считаются отрицаниями.

В случае паранепротиворечивых логик варьирование отрицания — один из способов избежать закона непротиворечия.

В статье [Basu, Roy, 2022] упоминаются несколько альтернативных определений эксплозивности отношения следования.

Отношение следования называется *эксплозивным* (explosive), если

$\varphi \wedge \neg\varphi \vdash \psi$ для любых $\varphi, \psi \in For$.

В логиках, где имеются правила введения и исключения конъюнкции, данная формулировка эксплозивности отношения следования эквивалентна стандартной, приведенной нами на стр. 82.

В *не-адъюнктивных* системах могут использоваться следующие формулировки:

$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$ для любых $\varphi, \psi \in For$.

$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ и $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ для любых $\varphi, \psi \in For$.

В логиках, в которых имеет место правило *modus ponens* и теорема дедукции, все приведенные нами формулировки эквивалентны [Basu, Roy, 2022, p. 151].

Таким образом, существует несколько формулировок принципа «из противоречия следует все что угодно», эти формы могут содержать несколько логических связок, среди которых всегда присутствует отрицание. Стоит отметить, что некоторые авторы исследуют возможность описания понятия паранепротиворечивости без использования оператора отрицания (см., например, [Basu, Roy, 2022]).

Заключение

В нашей статье мы рассмотрели некоторые вопросы, которые возникают в связи с определением паранепротиворечивости логик. Отталкиваясь от критериев паранепротиворечивости, которые были заданы основателями данной области исследования — С. Яськовским и Н. да Костой, — мы привели различные формулировки принципа «из противоречия следует все что угодно» и, соответственно, определения паранепротиворечивости.

Многообразие этих формулировок указывает на то, что проблему паранепротиворечивости логик можно решать по-разному, в зависимости от того, какие задачи стоят перед исследователем. Также были приведены условия, при которых приведенные определения эквивалентны. Были затронуты вопросы отрицания в паранепротиворечивых логиках, о верифицируемости закона непротиворечия и др. В продолжении данной работы планируется рассмотреть ключевые вопросы, связанные с определением параполноты логик.

Литература

Войшвилло, 1998 – *Войшвилло Е.К.* О паранепротиворечивой логике P_1 Сетте // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 1998.

Девяткин, 2021 – *Девяткин Л.Ю.* О выразительных возможностях максимально паранепротиворечивых и максимально параполных четырехзначных расширений FDE // Логические исследедования / Logical Investigations. 2021. Т. 27. № 2. С. 66–92.

Ишмуратов и др., 1989 – *Ишмуратов А.Т., Карпенко А.С., Попов В.М.* О паранепротиворечивой логике // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М.: Наука, 1989. С. 261–284.

Карпенко, Томова, 2016 – *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.

Кварталова, 2004 – *Кварталова Н.Л.* Паранепротиворечивость и релевантность: дис. … канд. филос. наук: 09.00.07. М., 2004. 86 с.

Розоноэр, 1983 – *Розоноэр Л.И.* О выявлении противоречий в формальных теориях. I // Автоматтика и телемеханика. 1983. Вып. 6. С. 113–124.

Arieli et al., 2011 – *Arieli O., Avron A., Zamansky A.* Ideal Paraconsistent Logics // Studia Logica. 2011. Vol. 99. P. 31–60.

Arruda, da Costa, 1974 – *Arruda A.I., da Costa N.C.A.* Le schéma de la séparation et les calculs J_n // Mathematiea Japonieae. 1974. Vol. 19. P. 183–186.

Basu, Roy, 2022 – *Basu S., Roy S.* Negation-Free Definitions of Paraconsistency // A. Indrzejczak, M. Zawidzki (eds.). 10th International Conference on Non-Classical Logics. Theory and Applications (NCL 2022) EPTCS 358, 2022. P. 150–159.

Batens, 1980 – *Batens D.* Paraconsistent extentional propositional logics // Logique et Analyse. 1980. Vol. 90–91. P. 127–139.

Batens, 2000 – *Batens D.* A survey of inconsistency-adaptive logics. 2000.

Béziau, 1999 – *Béziau J.-Y.* The future of paraconsistent logic // Logical Studies. 1999. Vol. 2. P. 1–23.

Béziau, 2000 – *Béziau J.-Y.* What is paraconsistent logic? // Frontiers of Paraconsistent Logic. Batens D. et al. (eds.). Research Studies Press, Baldock, 2000. P. 95–111.

Béziau, 1999 – *Béziau J.-Y.* Are paraconsistent negations negations? // W.A. Carnielli, M.E. Coniglio, and I.M.L. D'Ottaviano (eds.), Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent, Proceedings of the II World Congress on Paraconsistency, held in Juquehy, BR, May 8–12, 2000. Vol. 228 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 2002. P. 465–486.

Béziau, 2016 – *Béziau J.-Y.* Two Genuine 3-Valued Paraconsistent Logics // Akama S. (ed.). Towards Paraconsistent Engineering. Intelligent Systems Reference Library. Vol. 110. Springer Cham, 2016. P. 35–47.

Ciuciura, 1999 – *Ciuciura J.* History and development of the discursive logic // Logica Trianguli. 1999. Vol. 3. P. 3–31.

D'Ottaviano, da Costa, 1970 – *D'Ottaviano I.M.L., da Costa N.C.A.* Sur un probléme de Jaśkowski // C.R. Acad. Sc. Paris. 1970. 270A. P. 1349–1353.

Jaśkowski, 1969 – *Jaśkowski S.* A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.

Johansson, 1936 – *Johansson I.* Der Minimalkalkil, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compositio Mathematica. 1936. Vol. 4. P. 119–136.

Karpenko, 1999 – *Karpenko A.S.* Jaśkowski's criterion and three-valued paraconsistent logics // Log. Log. Philos. 1999. Vol. 7. P. 81–86.

Kotas, da Costa, 1978 – *Kotas J., da Costa N.C.A.* On the problem of Jaśkowski and the logics of Lukasiewicz // Mathematical logic. Proc. of the first Brazilian Conf. New York and Basel: Marcel Dekker, inc., 1978. P. 127–139.

Lenzen, 1996 – *Lenzen W.* Necessary conditions for negation operators // Negation. A Notion in Focus. Ed. by H. Wansing. Berlin: de Gruyter, 1996. P. 37–58.

Lewin, Mikenberg, 2006 – *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.

Marcos, 2005a – *Marcos J.* On a Problem of da Costa // Essays on the Foundations of Mathematics and Logic. Vol. 2. Polimetrica International Scientific Publisher Monza/Italy, 2005. P. 53–69.

Marcos, 2005b – *Marcos J.* Logics of Formal Inconsistency. PhD Thesis. Campinas, 2005.

da Costa, 1974 – *da Costa N.C.A.* On the theory of inconsistent formal systems // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1974. Vol. 11. No. 4. P. 497–510.

D'Ottaviano, da Costa, 1970 – *D'Ottaviano I.M.L., da Costa N.C.A.* Sur un probléme de Jaśkowski // Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Acad´emie des Sciences. Séries A–B. 1970. Vol. 270. No. 21. P. 1349–1353.

Priest et al., 2014 – *Priest G., Routley R., Norman J.* (eds.). Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent. Munchen; Hamden, Wien: Philosophia, 1989. 715 p.

Priest et al., 2014 – *Priest G., Tanaka K., Weber Z.* Paraconsistent Logic // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2022 Edition), E.N. Zalta (ed.). URL: https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/logic-paraconsistent (дата обращения: 01.06.2022).

Tarafder, Chakraborty, 2014 – *Tarafder S., Chakraborty M.Kr.* A Paraconsistent Logic Obtained from an Algebra-Valued Model of Set Theory // New Directions in Paraconsistent Logic, ed. by J.-Y. Beziau, M. Chakraborty, S. Dutta. Springer, India, 2015. P. 165–184.

Urbas, 1988 – *Urbas I.* Paraconsistency and the J-systems of Arruda and da Costa // Logique et Analyse. 1988. Vol. 31. No. 121/122. P. 27–44.

Urbas, 1990 – *Urbas I.* Paraconsistency // Studies in Soviet Thoughts. 1990. Vol. 39. No. 3–4. P. 343–354.

Natalya E. Tomova

On the question of the criteria for the paraconsistency of logics

Natalya E. Tomova
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Abstract: The paper discusses various aspects related to the definition of paraconsistent logics. The criteria of the paraconsistency of logical systems, which were proposed by S. Jaśkowski and N. da Costa, are given. Various formulations of the principle "from contradiction, anything follows" (*ex falso quodlibet*) and the corresponding definitions of paraconsistent logic are given. It is indicated in which cases these definitions may be equivalent. The problem of explosiveness of the consequence relation with respect to some operators and bundles is also described, and the solutions that have been proposed by various researchers are given. The paper deals with issues related to the paraconsistent negation, the properties of classical negation that are incompatible with the rejection of the principle of "from contradiction, anything follows" are indicated. Different views on the necessity for non-verifiability the principle of non-contradiction in paraconsistent logics are regarded.

Keywords: paraconsistency, the law of Duns Scotus, the principle of non-contradiction, negation, consequence relation, S. Jaśkowski, N. da Costa

For citation: Tomova N.E. "K voprosu o kriterii paraneprotivorechivosti logik" [On the question of the criteria for the paraconsistency of logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2022, Vol. 28, No. 2, pp. 77–95. DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-77-95 (In Russian)

References

Voishvillo, 1998 – Voishvillo, E.K. "O paraneprotivorechivoi logike P_1 Sette" [On paraconsistent Sette's logic P_1], *Trudy nauchno-issledovatel'skogo seminara logicheskogo tsentra Instituta filosofii RAN*. M., 1998. (In Russian)

Devyatkin, 2021 – Devyatkin, L.Yu. "O vyrazitel'nykh vozmozhnostyakh maksimal'no paraneprotivorechivykh i maksimal'no parapolnykh chetyrekhznachnykh rasshirenii FDE" [On the expressive power of maximally paraconsistent and paracomplete expansions of FDE], *Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 66–92. (In Russian)

Ishmuratov et al., 1989 – Ishmuratov, A.T., Karpenko, A.S., Popov, V.M. "O paraneprotivorechivoi logike" [On paraconsistent logic], *Sintaksicheskie i semanticheskie issledovaniya neekstensional'nykh logik*. Moscow: Nauka, 1989, pp. 261–284. (In Russian)

Karpenko, Tomova, 2016 – Karpenko, A.S., Tomova, N.E. *Trekhznachnaya Logika Bochvara i Literal'nye Paralogiki* [Bochvar's three-valued logic and literal paralogics]. Moscow: IPh RAS, 2016. 110 pp. (In Russian)

Kvartalova, 2004 – Kvartalova, N.L. Paraneprotivorechivost' i relevantnost' [Paraconsistency and relevance]: Dis. ... kand. filos. nauk: 09.00.07. Moscow, 2004. 86 pp. (In Russian)

Arieli et al., 2011 – Arieli, O., Avron, A., Zamansky, A. "Ideal Paraconsistent Logics", *Studia Logica*, 2011, Vol. 99, pp. 31–60.

Arruda, da Costa, 1974 – Arruda, A.I., da Costa, N.C.A. "Le schéma de la séparation et les calculs J_n", *Mathematiea Japonieae*, 1974, Vol. 19, pp. 183–186.

Basu, Roy, 2022 – Basu, S., Roy, S. "Negation-Free Definitions of Paraconsistency", *10th International Conference on Non-Classical Logics. Theory and Applications (NCL 2022) EPTCS 358*, ed. by Indrzejczak A., Zawidzki M. 2022, pp. 150–159.

Batens, 1980 – Batens, D. "Paraconsistent extentional propositional logics", *Logique et Analyse*, 1980, Vol. 90–91, pp. 127–139.

Batens, 2000 – Batens, D. "A survey of inconsistency-adaptive logics", *Frontiers of Paraconsistent Logic*. Research Studies Press, 2000, pp. 49–73.

Béziau, 1999 – Béziau, J.-Y. "The future of paraconsistent logic", *Logical Studies*, 1999, Vol. 2, pp. 1–23.

Béziau, 2000 – Béziau, J.-Y. "What is paraconsistent logic?", *Frontiers of Paraconsistent Logic*, ed. by Batens D. et al. Research Studies Press, Baldock, 2000, pp. 95–111.

Béziau, 1999 – Béziau, J.-Y. "Are paraconsistent negations negations?", *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent, Proceedings of the II World Congress on Paraconsistency, held in Juquehy, BR, May 8–12, 2000. Vol. 228 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, W.A. Carnielli, M.E. Coniglio, and I.M.L. D'Ottaviano (eds.). Marcel Dekker, 2002, pp. 465–486.

Béziau, 2016 – Béziau, J.-Y. "Two Genuine 3-Valued Paraconsistent Logics", *Towards Paraconsistent Engineering. Intelligent Systems Reference Library. Vol. 110.*, ed. by Akama S. Springer Cham, 2016, pp. 35–47.

Ciuciura, 1999 – Ciuciura, J. "History and development of the discursive logic", *Logica Trianguli*, 1999, Vol. 3, pp. 3–31.

D'Ottaviano, da Costa, 1970 – D'Ottaviano, I.M.L., da Costa, N.C.A. "Sur un probléme de Jaśkowski", *C.R. Acad. Sc. Paris*, 1970, 270A, pp. 1349–1353.

Jaskowski, 1969 – Jaśkowski, S. "A propositional calculus for inconsistent deductive systems", *Studia Logica*, 1969, Vol. 24, pp. 143–157.

Johansson, 1936 – Johansson, I. "Der Minimalkalkil, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus", *Compositio Mathematica*, 1936, Vol. 4, pp. 119–136.

Karpenko, 1999 – Karpenko, A.S. "Jaśkowski's criterion and three-valued paraconsistent logics", *Log. Log. Philos.*, 1999, Vol. 7, pp. 81–86.

Kotas, da Costa, 1978 – Kotas, J., da Costa, N.C.A. "On the problem of Jaśkowski and the logics of Lukasiewicz", *Mathematical logic. Proc. of the first Brazilian Conf.* New York and Basel: Marcel Dekker, inc., 1978, pp. 127–139.

Lenzen, 1996 – Lenzen, W. "Necessary conditions for negation operators", *Negation. A Notion in Focus*, ed. by H. Wansing. Berlin: de Gruyter, 1996, pp. 37–58.

Lewin, Mikenberg, 2006 – Lewin, R.A., Mikenberg, I.F. "Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices", *Math. Log. Quart.*, 2006, Vol. 52, No. 5, pp. 478–493.

Marcos, 2005a – Marcos, J. "On a Problem of da Costa", *Essays on the Foundations of Mathematics and Logic.* Vol. 2. Polimetrica International Scientific Publisher Monza/Italy, 2005, pp. 53–69.

Marcos, 2005b – Marcos, J. *Logics of Formal Inconsistency.* PhD Thesis. Campinas, 2005.

da Costa, 1974 – da Costa, N.C.A. "On the theory of inconsistent formal systems", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1974, Vol. 11, No. 4, pp. 497–510.

D'Ottaviano, da Costa, 1970 – D'Ottaviano, I.M.L., da Costa, N.C.A. "Sur un probléme de Jaśkowski", *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Séries A–B.* 1970, Vol. 270, No. 21, pp. 1349–1353.

Priest et al., 2014 – Priest, G., Routley, R., Norman, J. (eds.). *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent.* Munchen; Hamden, Wien: Philosophia, 1989. 715 pp.

Priest et al., 2014 – Priest, G., Tanaka, K., Weber, Z. "Paraconsistent Logic", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2022 Edition), E.N. Zalta (ed.) [https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/logic-paraconsistent, accessed on 01.06.2022].

Rozonoer, 1983 – Rozonoer, L.I. "O vyyavlenii protivorechii v formal'nykh teoriyakh. I" [On the identification of contradictions in formal theories. I], *Avtomat. i telemekh.*, 1983, Vyp. 6, pp. 113–124.

Tarafder, Chakraborty, 2014 – Tarafder, S., Chakraborty, M.Kr. A "Paraconsistent Logic Obtained from an Algebra-Valued Model of Set Theory", *New Directions in Paraconsistent Logic*, ed. by J.-Y. Beziau, M. Chakraborty, S. Dutta. Springer, India, 2015, pp. 165–184.

Urbas, 1988 – Urbas, I. "Paraconsistency and the J-systems of Arruda and da Costa", *Logique et Analyse*, 1988, Vol. 31, No. 121/122, pp. 27–44.

Urbas, 1990 – Urbas, I. "Paraconsistency", *Studies in Soviet Thoughts*, 1990, Vol. 39, No. 3–4, pp. 343–354.

Логические исследования
2022. Т. 28. № 2. С. 96–114
УДК 164.07

Logical Investigations
2022, Vol. 28, No. 2, pp. 96–114
DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-96-114

Символическая логика
Symbolic logic

И.А. Горбунов

Вполне-определенные логики*

Игорь Анатольевич Горбунов
Институт проблем пердачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН).
Российская Федерация, 127051, г. Москва, ул. Б. Каретный пер., д. 19, стр. 1.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Аннотация: Обычно (особенно в рамках учебных курсов логики) теорема о дедукции воспринимается как техническое средство, облегчающее построение выводов в данной логике. При этом обходится вниманием тот факт, что если для логики верна теорема о дедукции для некоторого множества формул, то это дает новые возможности при задании отношения логического следования данной логики. При некоторых условиях, используя теорему о дедукции, вопрос о принадлежности секвенции к отношению логического следования можно свести к вопросу о принадлежности формул некоторого вида ко множеству тавтологий. Таким образом, множество тавтологий логики, обладающей дедуктивным свойством, полностью определяет саму логику. Такие логики получили в работах Р. Вуйицкого название *вполне-определенных* логик (well-determined logic). Он же отметил, что для того, чтобы логика была вполне-определенной, в некоторых случаях достаточно, чтобы для логики был верен слабый вариант теоремы о дедукции (о выводимости из формулы). Заметим, что интерес к вполне-определенным логикам, в частности, связан с тем, что для их семантического задания достаточно полной семантики, а требование сильной полноты не обязательно.

Множества формул, которые позволяют задать отношение стандартного логического следования, исследуя вопрос о принадлежности к этому множеству некоторых импликаций, были названы Р. Вуйицким *импликационными системами* (entailment system) или *дедуктивными множествами*. При этом понятия вполне-определенной логики и дедуктивного множества рассматривались Р. Вуйицким для логик в языках, содержащих конъюнкцию и импликацию.

В нашей работе множества формул, которые позволяют задать отношение логического следования формулы из формулы, получили название *слабодедуктивных множеств*. Найден критерий слабой дедуктивности. Построена минимальная слабодедуктивная логика в языке, в котором импликация является единственной связкой.

Кроме того, понятия вполне-определенной логики и дедуктивного множества были расширены на языки, которые могут и не содержать конъюнкцию. Найден критерий дедуктивности множеств в таких языках. В языке, единственной связкой которого является импликация, построена минимальная вполне-определенная логика. Доказано, что теорема о дедукции не верна для этой логики.

* Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 21-18-00195.

Ключевые слова: теорема о дедукции, дедуктивные множества, критерий дедуктивности, импликативные системы, вполне-определенные логики

Для цитирования: *Горбунов И.А.* Вполне-определенные логики // Логические исследования / Logical Investigations. 2022. Т. 28. № 2. С. 96–114. DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-96-114

Введение

Обычно (особенно в рамках учебных курсов логики) теорема о дедукции воспринимается как техническое средство, облегчающее построение выводов в данной логике. При этом обходится вниманием тот факт, что если для логики верна теорема о дедукции для некоторого множества формул, то это дает новые возможности при задании отношения логического следования данной логики. При некоторых условиях, используя теорему о дедукции, вопрос о принадлежности секвенции к отношению логического следования можно свести к вопросу о принадлежности формул некоторого вида ко множеству тавтологий. Таким образом, множество тавтологий логики с дедуктивным свойством полностью определяет саму логику.

В работах Р. Вуйцицкого [Wójcicki, 1988] и [Wójcicki, 1984] были исследованы некоторые условия, при которых появляется возможность задавать указанным способом отношение логического следования. Рассматривая классическую пропозициональную логику, Р. Вуйцицкий ввел две операции следования, обозначенные им посредством $\angle K_{DT}$ и $\angle K_{Cn}$ [Wójcicki, 1988, с. 51][1]. Эти следования определялись через принадлежность формул некоторого специального вида к тавтологиям классической логики.

Определения этих операций можно расширить, определив их не только для множества тождественно-истинных формул $\angle K$, но для произвольного множества формул L в подходящем языке. В той же работе [Ibid., с. 165, 2.10.1] такое расширение было проделано для операции $\angle K_{Cn}$, что позволило автору задавать логики с помощью *импликационных систем* (entailment system). (Формулы, входящие в entailment system, задаются в языке со связками $\wedge$ (конъюнкция) и $\Rightarrow$ (entailment).) Логики, в которых множества тавтологий являются импликационными системами, автор предложил называть *вполне-определенными логиками* (well-determined logic) [Wójcicki, 1984, с. 37].

Вполне-определенные логики интересны, в частности, тем, что для семантического задания присущего им отношения логического следования

[1] В той же работе он доказал, что эти операции совпадают со следованием классической логики (с. 52, Theorem 1.6.7.).

достаточно иметь полную семантику. Таким образом, для того, чтобы задать логику, требовать от семантики сильной полноты не обязательно.

Заметим, что для некоторых логик возможность определять отношение логического следования при помощи импликационных систем не требует наличия теоремы о дедукции в полном ее объеме. Оказывается, достаточно того, чтобы логика обладала слабой теоремой о дедукции (WDT) [Wójcicki, 1988, с. 47].

Здесь мы рассмотрим возможность задания логик с помощью импликационных систем, построенных на основе формул, задающих следование $\angle K_{DT}$ в языке классической логики[2]. Покажем, что такие системы существуют, и покажем, что понятие вполне-определенной логики может быть расширено и на эти импликационные системы, поскольку они определяют логическое следование однозначно.

1. Основные определения

Тройку $S = \langle \Pi, \Sigma, \Upsilon \rangle$, где $\Pi = \{p_i : i \geq 1\}$ — счетное множество *пропозициональных переменных*, Σ — некоторое множество конечноместных функциональных символов (которые мы будем называть *логическими связками*), а $\Upsilon = \{(,),,\}$ — множество вспомогательных символов, будем называть *пропозициональным алфавитом (языком)*. Всякий терм, построенный из символов алфавита $\langle \Pi, \Sigma, \Upsilon \rangle$, будем называть *формулой*. Множество всех формул обозначим посредством Φ.

Подстановкой будем называть гомоморфное продолжение отображения $\varepsilon : \Pi \to \Phi$ на множество всех формул. Поскольку это продолжение единственно, то обозначать его будем тоже ε. Для любого множества формул Γ посредством $\varepsilon\Gamma$ будем обозначать результат применения подстановки ε ко всем формулам этого множества. Посредством $\mathbf{E}$ обозначим множество всех подстановок.

Для любого множества X посредством $\mathcal{P}(X)$ будем обозначать множество всех его подмножеств, а посредством $\mathcal{P}_{fin}(X)$ множество всех его конечных подмножеств. Мощность множества X будем обозначать посредством $|X|$.

Логикой L будем называть пару $\langle S, C \rangle$, где $C : \mathcal{P}(\Phi) \to \mathcal{P}(\Phi)$ — операция добавления следствий (которую для краткости будем называть *следованием*).

Считаем, что следование C пропозициональной логики L обладает следующими свойствами:

[2] Эти формулы строятся в языке, содержащем только одну бинарную связку $\to$.

(B1) $\Gamma \subseteq C(\Gamma)$ (экстенсивность);

(B2) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow C(\Gamma) \subseteq C(\Delta)$ (монотонность);

(B3) $C(C(\Gamma)) = C(\Gamma)$ (идемпотентность).

Следование будем называть *стандартным*, если оно к тому же удовлетворяет следующим двум условиям:

(B4) $(\forall \varepsilon \in \mathbf{E})\ (\varepsilon(C(\Gamma)) \subseteq C(\varepsilon\Gamma))$ (структурность);

(B5) $\varphi \in C(\Gamma) \Rightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\varphi \in C(\Delta))$ (финитарность).

Логику со стандартным следованием будем называть *стандартной*.

Для данного следования C множество $C(X)$ будем называть *теорией* логики со множеством *аксиом* X. Множество $C(\varnothing)$ будем называть множеством тавтологий логики, а его элементы *тавтологиями*. Теорию $C(X)$ будем называть *непротиворечивой*, если $C(X) \neq \Phi$.

Стандартное следование C позволяет задать на множестве формул Φ отношение *логического следования* $\vdash_C \subseteq \mathcal{P}_{fin}(\Phi) \times \Phi$ следующим образом:

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{P}_{fin}(\Phi)(\Gamma \vdash_C \varphi) \Leftrightarrow \varphi \in C(\Gamma).$$

Таким образом, определения логики как пары $\langle S, C\rangle$, так и пары $\langle S, \vdash\rangle$ эквивалентны ([Горбунов, 2018]). Пару (Γ, φ), где $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \Phi$ и Γ — это конечное множество, будем называть *секвенцией* и обозначать посредством $\Gamma \vdash \varphi$. Секвенцию $\Gamma \vdash \varphi$ будем называть *секвенцией логики* $\langle S, C\rangle$, если $(\Gamma, \varphi) \in \vdash_C$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения. Посредством Pn обозначим множество всех перестановок, составленных из элементов n-элементного множества. Пусть $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — некоторое множество формул, тогда:

$\Gamma^{\wedge} \to \alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha$;

$[\Gamma^{\wedge} \to \alpha] = \{\alpha_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \alpha_{\sigma(n)} \to \alpha : \sigma \in Pn\}$;

$\vec{\Gamma} \to \alpha = \alpha_1 \to (\alpha_2 \to \ldots (\alpha_n \to \alpha) \ldots)$;

$\sigma\vec{\Gamma} \to \alpha = \alpha_{\sigma(1)} \to (\alpha_{\sigma(2)} \to \ldots (\alpha_{\sigma(n)} \to \alpha) \ldots)$, где $\sigma \in Pn$;

$[\vec{\Gamma} \to \alpha] = \{\sigma\vec{\Gamma} \to \alpha : \sigma \in Pn\}$.

2. Логики со слабым дедуктивным свойством

Говорят, что логика обладает классическим дедуктивным свойством, если она удовлетворяет условию

$$\alpha \in C(X, \beta) \Leftrightarrow (\beta \to \alpha) \in C(X).$$

Если мы положим множество $X = \varnothing$, то это условие примет следующий вид:

$$\alpha \in C(\beta) \Leftrightarrow (\beta \to \alpha) \in C(\varnothing).$$

На последнее условие обратил внимание Р. Вуйцицкий в работе [Wójcicki, 1988, с. 47]. Он назвал его теоремой слабой дедукции (WDT). Логики, обладающие этим свойством, мы будем называть логиками со *слабым дедуктивным свойством* или *слабодедуктивными логиками*, а следование, определяющее эти логики, — *слабодедуктивным следованием*. Заметим, что язык всех слабодедуктивных логик содержит связку $\to$.

Логики со слабым дедуктивным свойством интересны тем, что их язык позволяет представлять отношение логического следования, существующее между формулами, в виде формул, содержащих связку $\to$. То есть если из формулы β следует формула α, то формула вида $(\beta \to \alpha)$ является тавтологией данной логики. Таким образом, для того, чтобы определить наличие логической связи между формулами, нам достаточно рассмотреть вопрос о принадлежности некоторой импликации множеству тавтологий.

Пусть L — множество формул в языке, содержащем связку $\to$. Множество L будем называть *слабодедуктивным*, если существует такая слабодедуктивная логика C, что $C(\varnothing) = L$.

Лемма 1. *Если L — слабодедуктивное множество, то:*

1) *множество L замкнуто относительно всех подстановок;*

2) $(p \to p) \in L$*;*

3) *множество L замкнуто относительно правил*

$$(TR)\ \frac{p \to q, q \to r}{p \to r}, \qquad (MP)\ \frac{p, p \to q}{q}.$$

Доказательство. Согласно определению слабодедуктивного множества, существует такая логика C, что $C(\varnothing) = L$.

1) Множество $C(\varnothing)$ замкнуто относительно всех подстановок.

2) Поскольку $p \in C(p)$, то, в силу условия слабой дедуктивности, имеем, что $(p \to p) \in C(\varnothing)$.

3) Пусть $(p \to q) \in L$ и $(q \to r) \in L$. Таким образом, $q \in C(p)$ и $r \in C(q)$. По свойствам операции C получаем, что $r \in C(p)$. Следовательно, $(p \to r) \in L$.

Пусть для некоторой подстановки ε верно, что $(\varepsilon p \to \varepsilon q) \in L$, тогда $\varepsilon q \in C(\varepsilon p)$. Пусть при этом $\varepsilon p \in L$, тогда $C(\varepsilon p) \subseteq L$. Следовательно, $\varepsilon q \in L$. Таким образом, L замкнуто по (MP). ■

Операцию следования можно определить через принадлежность формул некоторого специального вида ко множеству тавтологий ([Wójcicki, 1988, с. 165]). Для всякого множества формул L посредством $\vec{L}_{(\to)}$ обозначим одноместную операцию на $\mathcal{P}(\Phi)$, которую определим следующим образом:

$$\alpha \in \vec{L}_{(\to)}(X) \Leftrightarrow \exists\, \beta \in X \cup L\ (\beta \to \alpha \in L). \tag{1}$$

Лемма 2. *Операция $\vec{L}_{(\to)}$ монотонна.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения. ■

Лемма 3. *Если L — множество, замкнутое по всем подстановкам, содержащее формулу $(p \to p)$ и замкнутое относительно правила (MP), то $L = \vec{L}_{(\to)}(\varnothing)$.*

Доказательство. Так как для любой формулы φ, принадлежащей множеству L, верно, что $\varphi \to \varphi \in L$, то $L \subseteq \vec{L}_{(\to)}(\varnothing)$.

Пусть $\varphi \in \vec{L}_{(\to)}(\varnothing)$, следовательно, существует такая формула $\psi \in L$, что $(\psi \to \varphi) \in L$. В силу замкнутости L по (MP) получим, что $\varphi \in L$. ■

Лемма 4. *Если L — множество, замкнутое по всем подстановкам, содержащее формулу $(p \to p)$ и замкнутое относительно правил (MP) и (TR), то $\vec{L}_{(\to)}$ — стандартная операция следования, такая, что $L = \vec{L}_{(\to)}(\varnothing)$.*

Доказательство. Равенство $L = \vec{L}_{(\to)}(\varnothing)$ следует из Леммы 3. Монотонность доказана в Лемме 2.

Докажем идемпотентность. Включение $\vec{L}_{(\to)}(X) \subseteq \vec{L}_{(\to)}(\vec{L}_{(\to)}(X))$ выполняется в силу монотонности.

Пусть $\varphi \in \vec{L}_{(\to)}(\vec{L}_{(\to)}(X))$, тогда существует такое $\psi \in \vec{L}_{(\to)}(X) \cup L$, что $(\psi \to \varphi) \in L$.

Если $\psi \in L$, то в силу замкнутости по (MP) $\varphi \in L$, получим, что $\varphi \in \vec{L}_{(\to)}(X)$.

Если $\psi \in \vec{L}_{(\to)}(X)$, то существует такое $\chi \in L \cup X$, что $(\chi \to \psi) \in L$. Отсюда, в силу замкнутости L по (TR), получим, что $(\chi \to \varphi) \in L$.

Если формула $\chi \in L$, то, в силу замкнутости L по (MP), получим, что $\varphi \in \vec{L}_{(\to)}(X)$.

Пусть $\chi \in X$, так как $(\chi \to \varphi) \in L$, то $\varphi \in \vec{L}_{(\to)}(X)$.

Финитность операции $\vec{L}$ непосредственно следует из ее определения.

Докажем структурность. Пусть $\alpha \in \vec{L}_{(\to)}(X)$, по определению это значит, что существует такая формула $\beta \in X \cup L$, что $(\beta \to \alpha) \in L$. В силу того, что множество L замкнуто относительно всех подстановок, для любой подстановки ε верно, что $(\varepsilon\beta \to \varepsilon\alpha) \in L$. Следовательно, $\varepsilon\alpha \in \vec{L}_{(\to)}(\varepsilon X)$. ■

Из Лемм 1 и 4 следует *критерий слабой дедуктивности.*

Теорема 1. *Множество L является слабодедуктивным тогда и только тогда, когда оно содержит формулу $(p \to p)$, замкнуто относительно всех подстановок и замкнуто по правилам (TR) и (MP).*

Теорема 2. *Для любого слабодедуктивного множества L верно, что следование $\vec{L}_{(\to)}$ определяет наименьшую слабодедуктивную логику, множество тавтологий которой совпадает с L.*

Доказательство. Пусть следование C является слабодедуктивным следованием таким, что $C(\varnothing) = L$. Пусть существует такое множество X, что $C(X) \subset \vec{L}_{(\to)}(X)$. Таким образом, существует такая формула α, что $\alpha \in \vec{L}(X)$ и $\alpha \notin C(X)$. Тогда, в силу определения $\vec{L}_{(\to)}$, существует такая формула $\beta \in L \cup X$, что $(\beta \to \alpha) \in L$. Так как следование C — слабодедуктивно, то $\alpha \in C(\beta)$. Так как $L \subseteq C(X)$, то в любом случае $C(\beta) \subseteq C(X)$. Полученное противоречие показывает, что для любого множества X верно, что $\vec{L}_{(\to)}(X) \subseteq C(X)$. ■

Заметим, что в общем случае слабодедуктивные логики позволяют определить с помощью множества тавтологий отношение логического следования только между формулой и формулой. Однако обычно логическое следование определяется как отношение между конечным (для стандартных логик) множеством формул и формулой. Поэтому далее мы рассмотрим такие свойства слабодедуктивных множеств, которые позволят задавать, с помощью этих множеств, отношение логического следования в полном объеме.

3. Вполне-определенные логики

Рассматривая классическую пропозициональную логику, Р. Вуйцицкий ввел две операции следования, обозначенные им посредством $\angle K_{DT}$

и $\angle K_{Cn}$ [Wójcicki, 1988, с. 51]. Эти операции он определил следующим образом:

$$\alpha \in \angle K_{DT}(X) \Leftrightarrow \exists\, \Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq X \cup \angle K\ (\vec{\Gamma} \to \alpha \in \angle K), \qquad (2)$$

$$\alpha \in \angle K_{Cn}(X) \Leftrightarrow \exists\, \Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq X \cup \angle K\ (\Gamma^{\wedge} \to \alpha \in \angle K), \qquad (3)$$

где $\angle K$ — это множество тавтологий классической логики. (Там же он доказал, что эти операции совпадают со следованием классической логики.) Определения этих операций могут быть распространены на произвольное множество формул L, в подходящем языке, путем замены множества $\angle K$ на множество L. Для операции $\angle K_{Cn}$ такое расширение было проделано в той же работе [Ibid., с. 165], что привело автора к способу задания логик с помощью импликационных систем (entailment system). (Entailment system задаются автором с помощью формул в языке со связками $\wedge$ (конъюнкция) и $\Rightarrow$ (entailment).)

В данной работе операцию, которая получается путем расширения определения операции $\angle K_{Cn}$ на любое множество L, мы обозначим посредством $\vec{L}_{(\vec{\wedge})}$. Таким образом, для любого множества формул L

$$\alpha \in \vec{L}_{(\vec{\wedge})}(X) \Leftrightarrow \exists\, \Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq X \cup L\ ([\Gamma^{\wedge} \to \alpha] \subseteq L). \qquad (4)$$

Будем говорить, что логика C обладает *конъюнктивным свойством*, если в ее языке есть связка $\wedge$, для которой верно, что $C(\varphi \wedge \psi) = C(\varphi, \psi)$.

В более ранней работе [Wójcicki, 1984, с. 37] того же автора слабодедуктивные логики с конъюнктивным свойством получили название *вполне-определенных* логик (well-determined logic), поскольку в этом случае задание множества тавтологий определяет следование однозначно (в отличие от слабодедуктивных множеств). Известно, что тот факт, что логика C является слабодедуктивной и обладает конъюнктивным свойством, эквивалентен тому [Горбунов, 2011, с. 99, Теорема 5], что она удовлетворяет условию $WD_{(\vec{\wedge})}$:

$$[\Gamma^{\wedge} \to \alpha] \subseteq C(\varnothing) \;\Leftrightarrow\; \alpha \in C(\Gamma),$$

где Γ — конечное множество формул. Поэтому здесь вполне-определенными логиками мы будем называть логики, удовлетворяющие условию $WD_{(\vec{\wedge})}$.

Р. Вуйцицкий предложил называть множество формул L *дедуктивным* множеством, если существует такая вполне-определенная логика C, что $C(\varnothing) = L$. Заметим, что для любого дедуктивного множества L такая вполне-определенная логика определяется единственным образом и совпадает с логикой $\vec{L}_{(\vec{\wedge})}$ [Там же, с. 106, Теорема 9].

Приведем критерий дедуктивности множества формул[3].

Множество L является дедуктивным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:

(C1) множество L замкнуто относительно всех подстановок;

(C2) $\{p \to p \wedge p, p \wedge q \to q\} \subseteq L$;

(C3) множество L замкнуто относительно следующих правил вывода:

$$(TR)\frac{p \to q, q \to r}{p \to r} \qquad (CM)\frac{p_1 \to q_1, p_2 \to q_2}{p_1 \wedge p_2 \to q_1 \wedge q_2} \qquad (AD)\frac{p, q}{p \wedge q}$$

$$(CV)\frac{p, p \wedge q \to r}{q \to r} \qquad (MP)\frac{p, p \to q}{q} \qquad (EA)\frac{p \to q}{p \wedge r \to q}.$$

Заметим, что в случае вполне-определенных логик наличие только слабого дедуктивного свойства уже позволяет однозначно задавать отношение логического следования не только между формулами, но и произвольными конечными множествами формул и формулами, поскольку в этом случае существует взаимооднозначное соответствие между секвенциями и множествами формул специального вида. Так, секвенции $\Gamma \vdash \alpha$ ставится в соответствие множество формул $[\Gamma^{\wedge} \to \alpha]$.

Это приводит, в частности, к тому, что для задания логики можно не требовать семантики с сильной полнотой, поскольку достаточно просто полной семантики. Действительно, пусть S — это некоторая характеристическая семантика логики C. (Тот факт, что любая формула из множества Γ истинна в этой семантике, мы будем обозначать $S \models \Gamma$.) Тогда верно, что

$$\Gamma \vdash \alpha \in \vdash_C \Leftrightarrow S \models [\Gamma^{\wedge} \to \alpha].$$

Поскольку мы хотим расширить понятия импликационной системы (дедуктивного множества) и вполне-определенной логики, то нам потребуются следующие определения.

Введем обозначение:

$$\{\Gamma^{\wedge} \to \alpha\} = \{\varepsilon p_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon p_n \to \varepsilon q : n \geq 1, q \in \Pi, \varepsilon \in \mathbf{E}\}.$$

Логику C будем называть *вполне-определенной, посредством множества* $\{\Gamma^{\wedge} \to \alpha\}$, *логикой*, если C удовлетворяет условию $WD_{(\vec{\wedge})}$. Множество L будем называть *дедуктивным множеством относительно множества формул* $\{\Gamma^{\wedge} \to \alpha\}$, если существует такая вполне-определенная, посредством того же множества, логика C, что $C(\varnothing) = L$.

[3] Несмотря на то, что в [Wójcicki, 1984, с. 38, Theorem 11.5] приведен критерий дедуктивности множества формул, мы используем здесь критерий, приведенный в [Горбунов, 2017].

4. Вполне-определенные логики в языке с одной связкой

Расширим определение операции $\angle K_{DT}$, задав ее для произвольного множества формул L. Полученную при этом расширении операцию обозначим посредством $\vec{L}_{(\to^k)}$ и определим ее следующим образом: для любого множества формул L положим

$$\alpha \in \vec{L}_{(\to^k)}(X) \Leftrightarrow \exists\, \Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq X \cup L \ ([\vec{\Gamma} \to \alpha] \subseteq L). \qquad (5)$$

Нашей целью является расширение понятий вполне-определенной логики и дедуктивного множества на следования, которые определяются посредством множества формул, используемых в операции $\vec{L}_{(\to^k)}$.

Рассмотрим свойства операции $\vec{L}_{(\to^k)}$.

Лемма 5. *Если $p \to p \in L$ и множество формул L замкнуто относительно всех подстановок, то для любого множества формул Γ верно, что $(\Gamma \cup L) \subseteq \vec{L}_{(\to^k)}(\Gamma)$.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения операции $\vec{L}_{(\to^k)}$ и того факта, что для любой формулы $\varphi \in \Gamma \cup L$ верно, что $\varphi \to \varphi \in L$. ■

Обозначим посредством $(R^\sigma(n, k_1 \ldots, k_n))$ правило вывода вида

$$(R^\sigma(n, k_1 \ldots, k_n)) \frac{[\vec{B}_n \to z], [\vec{A}^1_{k_1} \to y_1], \ldots, [\vec{A}^n_{k_n} \to y_n]}{\sigma\vec{C} \to z},$$

где $n, k_1 \ldots, k_n \geq 1$, $B_n = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $A^i_{k_i} = \{x^i_1, \ldots, x^i_{k_i}\}$ (для любого $1 \leq i \leq n$), $C = \bigcup\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$, $m = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} k_i$ и $\sigma \in Pm$. При этом все переменные множества $\{z\} \cup B_n \cup C$ попарно различны.

Положим $\Xi_1 = \{R^\sigma(n, k_1 \ldots, k_n) : (n, k_1 \ldots, k_n) \in Z_+^{n+1}, \sigma \in Pm\}$, где Z_+ — множество целых чисел, больших 0, и $m = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} k_i$.

Лемма 6. *Если $p \to p \in L$ и множество формул L замкнуто относительно всех подстановок и всех правил вывода из множества Ξ_1, то операция $\vec{L}_{(\to^k)}$ является стандартным следованием.*

Доказательство.

В силу Леммы 5 имеем, что $X \subseteq \vec{L}_{(\to^k)}(X)$.

Монотонность очевидна, докажем идемпотентность, а именно включение $\vec{L}_{(\to^k)}(\vec{L}_{(\to^k)}(X)) \subseteq \vec{L}_{(\to^k)}(X)$.

Пусть $\gamma \in \vec{L}_{(\to^k)}(\vec{L}_{(\to^k)}(X))$. Это означает, что существует такое конечное $B \subseteq \vec{L}_{(\to^k)}(X)$, что $[\vec{B} \to \gamma] \subseteq L$. Пусть $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Для любого $1 \leq i \leq n$, из того, что $\beta_i \in \vec{L}_{(\to^k)}(X)$, следует, что существует такое конечное $A_i \subseteq X \cup L$, что $[\vec{A_i} \to \beta_i] \subseteq L$. Так как L замкнуто относительно всех правил из множества Ξ, то $[\vec{C} \to \gamma] \subseteq L$, где $C = \bigcup\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$. Так как $C \subseteq X \cup L$, то $\gamma \in \vec{L}_{(\to^k)}(X)$.

Структурность следует из замкнутости L относительно всех подстановок, а финитность следует из определения $\vec{L}_{(\to^k)}$. ■

Лемма 7. *Если $p \to p \in L$ и множество формул L замкнуто относительно всех подстановок и всех правил вывода из множества Ξ_1, то верно, что $\vec{L}_{(\to^k)}(\varnothing) = L$ тогда и только тогда, когда L замкнуто относительно правила (MP).*

Доказательство. Пусть L замкнуто по MP и формула $\alpha \in \vec{L}_{(\to^k)}(\varnothing)$. Следовательно, существует такое конечное множество $A \subseteq L$, для которого верно, что $[\vec{A} \to \alpha] \subseteq L$. Тогда, кратным применением MP получаем, что $\alpha \in L$. Включение $L \subseteq \vec{L}_{(\to^k)}(\varnothing)$ следует из Леммы 5.

Пусть $\vec{L}_{(\to^k)}(\varnothing) = L$. Если $\alpha \in L$ и $\alpha \to \beta \in L$, то $\beta \in \vec{L}_{(\to^k)}(\varnothing)$. ■

Введем следующее обозначение:

$$\{\vec{\Gamma} \to \alpha\} = \{\varepsilon p_1 \to (\varepsilon p_2 \to \ldots (\varepsilon p_n \to \varepsilon q) \ldots) : n \geq 1, q \in \Pi, \varepsilon \in \mathbf{E}\}.$$

Как и в предыдущем случае, логику C будем называть *вполне-определенной посредством множества* $\{\vec{\Gamma} \to \alpha\}$, если выполняется условие $WD_{(\to^k)}$: для любого конечного множества Γ верно, что

$$\alpha \in C(\Gamma) \Leftrightarrow [\vec{\Gamma} \to \alpha] \subseteq L.$$

(Заметим, что если логика C вполне определена, то $(p \to (q \to p)) \in C(\varnothing)$, так как $p \in C(p, q)$.)

Множество L будем называть *дедуктивным множеством относительно множества формул* $\{\vec{\Gamma} \to \alpha\}$, если существует такая вполне-определенная, посредством того же множества, логика C, что $C(\varnothing) = L$.

Если множество, относительно которого рассматриваются вполне-определенные логики и дедуктивные множества, уже определено, то упоминать его не будем. Далее мы рассматриваем эти понятия касательно множества $\{\vec{\Gamma} \to \alpha\}$.

Обозначим посредством $(R^\sigma(A,B))$ правило вывода вида

$$(R^\sigma(A,B))\frac{[\vec{A} \to \alpha]}{\sigma\vec{B} \to \alpha},$$

где $A, B \in \mathcal{P}_{fin}(\Phi) \setminus \{\varnothing\}$, $A \subseteq B$, $m = |B|$ и $\sigma \in Pm$.

Положим $\Xi_2 = \{(R^\sigma(A,B)) : A, B \in \mathcal{P}_{fin}(\Phi), A \subseteq B, \sigma \in Pm\}$, где $m = |B|$.

Теорема 3. *Если $p \to p \in L$ и множество формул L замкнуто относительно всех подстановок, правила (MP) и всех правил вывода из множества $\Xi = \Xi_1 \cup \Xi_2$, то $\vec{L}_{(\to^k)}$ является вполне-определенной логикой, для которой верно, что $\vec{L}_{(\to^k)}(\varnothing) = L$.*

Доказательство. Пусть для некоторого конечного множества $X \cup \{\alpha\}$ верно, что $\alpha \in \vec{L}_{(\to^k)}(X)$. По определению это означает, что существует такое конечное $\Gamma \subseteq X \cup L$, что $[\vec{\Gamma} \to \alpha] \subseteq L$.

Введем следующие обозначения: пусть $\Gamma_1 = \Gamma \cap X$ и $\Gamma_2 = \Gamma \cap L$.

Для любого $\beta \in \Gamma_2$, в силу того, что $[\vec{\Gamma} \to \alpha] \subseteq L$ верно, что формула $\beta \to (\vec{\Delta} \to \alpha) \in L$, где $\Delta = \Gamma \setminus \{\beta\}$. Так как $\beta \in L$ и множество L замкнуто по (MP), то $\vec{\Delta} \to \alpha \in L$. Отсюда следует, что $[\vec{\Gamma}_1 \to \alpha] \subseteq L$.

Если же $\Gamma_1 = \Gamma$, то сразу получаем, что $[\vec{\Gamma}_1 \to \alpha] \subseteq L$.

Так как L замкнуто относительно всех правил вывода из множества Ξ_2 и $\Gamma_1 \subseteq X$, то $[\vec{X} \to \alpha] \subseteq L$. ■

Заметим, что всякое дедуктивное множество L определяет такое следование C, что $C(\varnothing) = L$, единственным образом, поскольку верна следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть L — дедуктивное множество. Вполне-определенная логика C такая, что $C(\varnothing) = L$, является единственной и совпадает с логикой $\vec{L}_{(\to^k)}$.*

Доказательство. В работе [Wójcicki, 1984, c. 15] на множестве всех следований одного и того же языка было введено следующее отношение порядка: будем писать $C_1 \leq C_2$ и говорить, что следование C_1 *слабее*, чем следование C_2, если для любого множества X верно, что $C_1(X) \subseteq C_2(X)$.

Пусть C — некоторая вполне-определенная логика, такая, что $C(\varnothing) = L$. Докажем, что она совпадает с логикой $\vec{L}_{(\to^k)}$, откуда и будет следовать единственность такой логики.

Пусть $C \neq \vec{L}_{(\to^k)}$, тогда либо $\vec{L}_{(\to^k)} < C$, либо $C < \vec{L}_{(\to^k)}$, либо C несравнимо с $\vec{L}_{(\to^k)}$.

Пусть $\vec{L}_{(\to^k)} < C$, тогда существует такое множество X, что $\vec{L}_{(\to^k)}(X) \subset C(X)$, а значит, и такая формула α, что $\alpha \in C(X)$ и при этом $\alpha \notin \vec{L}_{(\to^k)}(X)$. Поскольку C — финитарное, то, следовательно, существует такое конечное множество $Y \subseteq X$, что $\alpha \in C(Y)$, причем $\alpha \notin \vec{L}_{(\to^k)}(Y)$. Так как C — вполне-определенное следование, то $[\vec{Y} \to \alpha] \subseteq C(\varnothing) = L$, тогда, по определению следования $\vec{L}_{(\to^k)}$, получим, что $\alpha \in \vec{L}_{(\to^k)}(Y)$. Противоречие.

Пусть $C < \vec{L}_{(\to^k)}$, тогда существует такое множество формул X, что $C(X) \subset \vec{L}_{(\to^k)}(X)$, а значит, и такая формула α, что $\alpha \notin C(X)$ и $\alpha \in \vec{L}_{(\to^k)}(X)$. Из последнего следует, что существует конечное множество формул $Y \subseteq X \cup L$, причем такое, что $[\vec{Y} \to \alpha] \subseteq L$. Так же, как и в доказательстве теоремы 3, мы можем выделить множество $Z = Y \setminus L \subseteq X$ такое, что $[\vec{Z} \to \alpha] \subseteq L$. Так как C — вполне-определенное следование, $Z \subseteq X$ и $L = C(\varnothing)$, то $\alpha \in C(X)$. Противоречие.

Пусть C и $\vec{L}_{(\to^k)}$ несравнимы друг с другом, тогда существуют такие множества X и Y и такие формулы α и β, что $\alpha \in C(X)$, $\alpha \notin \vec{L}_{(\to^k)}(X)$, и $\beta \notin C(X)$, $\beta \in \vec{L}_{(\to^k)}(X)$. Далее доказательство аналогично доказательствам для случаев, приведенных выше.

Таким образом, $C = \vec{L}_{(\to^k)}$. ■

5. Критерий дедуктивности множества

Рассмотрим критерий дедуктивности множества формул L относительно множества формул $\{\vec{\Gamma} \to \alpha\}$.

Лемма 8. *Если множество L является дедуктивным, то оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Множество L замкнуто относительно всех подстановок.*
2. *Формула $(p \to p) \in L$.*
3. *Множество L замкнуто относительно правила вывода (MP).*
4. *Множество L замкнуто относительно всех правил вывода из множества Ξ.*

Доказательство. Пусть множество L — дедуктивно, значит, существует такое вполне-определенное стандартное следование C, что $C(\varnothing) = L$.

1. Поскольку C — структурное, то множество $C(\varnothing) = L$ замкнуто относительно всех подстановок.

2. Так как $p \in C(p)$, то $(p \to p) \in L$.

3. Пусть для некоторых $\alpha, \beta \in \Phi$ верно, что $\alpha \in C(\varnothing)$ и $\alpha \to \beta \in C(\varnothing)$. Таким образом, $\beta \in C(\alpha)$ и $C(\alpha) \subseteq C(\varnothing)$. Значит, $\beta \in C(\varnothing)$.

4. $(R^{\sigma}(n, k_1 \ldots, k_n))$

Пусть $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ — некоторое множество формул, множества $A^1, \ldots, A^n \in \mathcal{P}_{fin}(\Phi) \setminus \{\varnothing\}$ и $\gamma \in \Phi$. Пусть верно, что

$$[\vec{B} \to \gamma] \cup (\bigcup_{1 \le i \le n} [\vec{A^i} \to \beta_i]) \subseteq C(\varnothing).$$

Тогда имеем, что

$$\gamma \in C(B) \subseteq C(\bigcup_{1 \le i \le n} A^i).$$

Следовательно, $[\vec{G} \to \gamma] \subseteq C(\varnothing)$, где $G = \bigcup\limits_{1 \le i \le n} A^i$.

$(R^{\sigma}(A, B))$

Пусть $A, B \in \mathcal{P}_{fin}(\Phi) \setminus \{\varnothing\}$, $A \subseteq B$ и $[\vec{A} \to \alpha] \subseteq C(\varnothing)$. Таким образом, имеем, что $\alpha \in C(A)$. Так как $A \subseteq B$, то $\alpha \in C(B)$ и, значит, множество $[\vec{B} \to \alpha] \subseteq C(\varnothing)$. ■

Таким образом, будет верен следующий критерий дедуктивности множества формул.

Теорема 5. *Множество L является дедуктивным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Множество L замкнуто относительно всех подстановок.*
2. *Формула $(p \to p) \in L$.*
3. *Множество L замкнуто относительно правила вывода (MP).*
4. *Множество L замкнуто относительно всех правил вывода из множества Ξ.*

Следует из Леммы 7 и Леммы 8.

6. Хорошо определенные логики и дедуктивное свойство

Очевидно, что любая вполне-определенная, посредством множества $\{\vec{\Gamma} \to \alpha\}$, логика обладает слабым дедуктивным свойством. Однако и любая логика с дедуктивным свойством обладает слабым дедуктивным свойством. Естественно возникает вопрос о том, а существуют ли вполне-определенные логики, не обладающие дедуктивным свойством. Мы ответим на него в этом разделе.

Лемма 9. *Пусть C является вполне-определенной логикой, тогда для любых $A, B \in \mathcal{P}_{fin}(\Phi)$ и любой формулы α верно, что если $[\vec{A} \to \alpha] \subseteq C(\varnothing)$ и $B \subseteq A$, то $[\vec{B} \to \alpha] \subseteq C(A \setminus B)$.*

Доказательство. Пусть $G = A \setminus B$ и $|G| = n$. Заметим, что для любой формулы $\vec{B} \to \alpha$ верно, что

$$\{\sigma\vec{G} \to (\vec{B} \to \alpha) : \sigma \in Pn\} \subseteq [\vec{A} \to \alpha].$$

Таким образом, для любой формулы $(\vec{B} \to \alpha) \in [\vec{B} \to \alpha]$ имеем следующее включение: $\{\sigma\vec{G} \to (\vec{B} \to \alpha) : \sigma \in Pn\} \subseteq C(\varnothing)$. Следовательно, множество $[\vec{B} \to \alpha] \subseteq C(G)$. ■

Следствие 1. Если C является вполне-определенной логикой, то для любого конечного множества Γ верно, что

$$\beta \in C(\Gamma, \alpha) \Rightarrow (\alpha \to \beta) \in C(\Gamma).$$

Доказательство. Пусть $\Delta = \Gamma \cup \{\alpha\}$. Так как $\beta \in C(\Gamma, \alpha)$, то множество $[\vec{\Delta} \to \beta] \subseteq C(\varnothing)$. Тогда, в силу Леммы 9, $(\alpha \to \beta) \in C(\Gamma)$. ■

Следствие 2. Если C является вполне-определенной логикой, то для любого множества формул X верно, что

$$\beta \in C(X, \alpha) \Rightarrow (\alpha \to \beta) \in C(X).$$

Вытекает из Следствия 1.

Пусть L^m — это множество формул, выводимых в исчислении со схемой аксиом $p \to p$ и множеством правил вывода $\{(MP)\} \cup \Xi$. Рассмотрим вполне-определенную логику $\vec{L}^m_{(\to^k)}$.

Лемма 10. *Формула $\varphi \in L^m$ тогда и только тогда, когда $\varphi = \vec{\Gamma} \to \alpha$ (где Γ — некоторое конечное множество формул) и $\alpha \in \Gamma$.*

Доказательство. Доказываем индукцией по построению вывода.

Для схемы аксиом верность утверждения очевидна.

(MP) Пусть формула β получена из формул α и $\alpha \to \beta$ по (MP). При этом имеем, что $\alpha \to \beta = \vec{A} \to \gamma$, $\alpha \neq \beta$ и $\gamma \in A$.

Если $\alpha = \gamma$, то $\beta = \vec{B} \to \alpha$. Поскольку $\alpha = \vec{G} \to \delta$ и $\delta \in G$, то $\beta = \vec{B} \to (\vec{G} \to \delta) = \vec{F} \to \delta$, где $F = B \cup G$. При этом $\gamma \in F$.

Пусть $\alpha \neq \gamma$, тогда $\beta = \vec{B} \to \gamma$ и $\gamma \in B$.

$(R^\sigma(n, k_1 \ldots, k_n))$ Пусть формула получена по какому-то из правил $(R^\sigma(n, k_1 \ldots, k_n))$. Тогда она имеет вид $\sigma\vec{G} \to \alpha$, и при этом выведены все формулы из множеств $[\vec{A}^1_{k_1} \to \beta_1], \ldots, [\vec{A}^n_{k_n} \to \beta_n]$ и множества $[\vec{B}_n \to \alpha]$, где $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. При этом $\alpha \in B$, а значит, $\alpha = \beta_i$, для некоторого $1 \leq i \leq n$. Так как $\beta_i \in A^i_{k_i}$ и $G = \bigcup\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$, то $\alpha \in G$.

$(R^\sigma(A, B))$ Если формула получена по какому-то из правил $(R^\sigma(A, B))$, то утверждение верно, так как $A \subseteq B$.

Пусть $\varphi = \vec{\Gamma} \to \alpha$ и Γ — некоторое конечное множество формул, содержащее формулу α. Поскольку формула $\alpha \to \alpha \in L^m$, то, применяя правило $(R^\sigma(\{\alpha\}, \Gamma))$ для подходящей σ, получим, что $\varphi \in L^m$. ■

Очевидно, что логика обладает классическим дедуктивным свойством тогда и только тогда, когда любая ее теория замкнута по правилу MP. Если теория $\vec{L}^m_{(\to^k)}(q, q \to p)$ замкнута по (MP), то $(q \to ((q \to p) \to p) \in L^m$. Это противоречит Лемме 10, так как $p \notin \{q, q \to p\}$. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть L^m — это множество формул, выводимых в исчислении со схемой аксиом $p \to p$ и множеством правил вывода $\{(MP)\} \cup \Xi$. Вполне-определенная логика $\vec{L}^m_{(\to^k)}$ не обладает классическим дедуктивным свойством.*

7. Заключение

Таким образом, мы показали, что понятие импликативной системы может быть расширено. В частности, возможно построение импликативных систем на основе формул оператора $\angle K_{DT}$. При этом соответственным образом возникают понятия дедуктивного множества формул и вполне-определенной логики.

Построенная нами вполне-определенная, посредством множества формул $\{\vec{\Gamma} \to \alpha\}$, логика $\vec{L}^m_{(\to^k)}$ является слабодедуктивной, но не обладает дедуктивным свойством. Следовательно, будет верна следующая теорема.

Теорема 7. *Существуют вполне-определенные слабодедуктивные логики, для которых не выполняется теорема о дедукции.*

В связи с этим возникают следующие вопросы.

Существуют ли другие множества формул, которые позволяют строить импликативные системы, как в стандартном языке классической логики, так и в других языках?

Существуют ли некоторые общие критерии, показывающие, что данное множество формул позволяет строить импликативные системы в данном языке?

Существуют ли некоторые, не зависимые от языка, общие свойства, которыми обладают множества формул, позволяющие строить импликативные системы?

Литература

Горбунов, 2018 – *Горбунов И.А.* Логика, единство в трех лицах // Логические исследования. 2018. Т. 24. № 1. С. 9–25.

Горбунов, 2011 – *Горбунов И.А.* Хорошо определенные логики // Логические исследования. 2011. Т. 17. С. 95–108.

Горбунов, 2017 – *Горбунов И.А.* Эффективный критерий дедуктивности множеств формул логики // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 95–103.

Wójcicki, 1988 – *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations // Synthese Library. Vol. 199. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1988. 473 p.

Wójcicki, 1984 – *Wójcicki R.* Lectures on Propositional Calculi // Wroclaw: Ossolineum, 1984. 179 p.

Igor A. Gorbunov

Well-determined logics

Igor A. Gorbunov
Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute),
19/1 Bolshoy Karetny per., Moscow, 127051, Russian Federation.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Abstract:

It is known that the deductive property can be used to define logics. If the deduction theorem holds for a logic, then, under certain conditions, the relation of logical consequence is reduced to the set of tautologies of the logic. This allows us to use the set of tautologies of the logic to define the corresponding derivability relation. Logics defined by sets of tautologies were called by R. Wojcicki well-defined. He also noticed that, in some cases, in order for the logic to be well-defined, it is enough that the weak deduction theorem is true for it. (The weak deduction theorem concerns derivability over an empty set of hypotheses.)

The sets of formulas that allow us to define the relation of the standard logical consequence were called, by R. Wojcicki, implication systems or deductive sets. Note that R. Wojcicki studied the concepts of well-defined logic and deductive set for logics in languages containing conjunction and implication only.

In this paper, we call a set of formulas weak-deductive if it defines a logical consequence relation on a set of pairs of formulas. A criterion of weak-deductivity is found. A minimal weak-deductive logic is constructed. Also, in this paper, the concepts of well-defined logic and deductive set were extended to languages without conjunction. A criterion of deductivity of sets in such languages is found. In the language with implication only, a minimal well-defined logic is constructed. It is proved that the deduction theorem does not hold for this logic.

Keywords: deduction-detachment theorem, weak deduction theorem, deductive set, well-determined logic deductive set, entailment system

For citation: Gorbunov I.A. "Vpolne-opredelennye logiki" [Well-determined logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2022, Vol. 28, No. 2, pp. 96–114. DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-96-114 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is supported by Russian Science Foundation, projects No. 21-18-00195.

References

Gorbunov, 2011 – Gorbunov, I.A. "Khorosho opredelennye logiki" [Well-determined logic], *Logical Investigations*, 2011, Vol. 17, No. 2, pp. 95–108. (In Russian)

Gorbunov, 2017 – Gorbunov, I.A. “Effektivnyi kriterii deduktivnosti mnozhestv formul logiki” [An effective criterion of deductivity of a sets of logical formulas], *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika*, [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, No. 1, pp. 95–103. (In Russian)

Gorbunov, 2018 – Gorbunov, I.A. “Logic, Unity in Three Persons”, *Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 1, pp. 9–25.

Wójcicki, 1984 – Wójcicki, R. *Lectures on Propositional Calculi*, Wroclaw: Ossolineum, 1984. 179 pp.

Wójcicki, 1988 – Wójcicki, R. “Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations”, *Synthese Library*, Vol. 199. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1988, 473 pp.

Логические исследования
2022. Т. 28. № 2. С. 115–134
УДК 16

Logical Investigations
2022, Vol. 28, No. 2, pp. 115–134
DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-115-134

Логика и язык
Logic and language

Farshad Badie

Towards world identification in description logics

Farshad Badie
Faculty of Computer Science & Informatics, Berlin School of Business & Innovation,
Potsdamer Straße 180-182, 10783 Berlin, Germany.
Aalborg University,
Rendsburggade 14, 9000 Aalborg, Denmark.
E-mail: badie@id.aau.dk

Abstract: Logical analysis of the applicability of nominals (which are introduced by hybrid logic) in formal descriptions of the world (within modern knowledge representation and semantics-based systems) is very important because nominals, as second sorts of propositional symbols, can support logical identification of the described world at specific [temporal and/or spacial] states. This paper will focus on answering the philosophical-logical question of 'how a fundamental world description in description logic (DL) and a nominal can be related to each other?'. Based on my assumption that nominals can support more adequate identification of the world in DL, this paper will deal with the concept of 'world identification'. Accordingly, based on a logical-terminological analysis of nominals, the paper will analyse hybridised fundamental world descriptions. The research will finally reach the idea that we can have a hybrid description logic based on the analysed concepts.

Keywords: concept, description Logic, hybridised world description, individual, nominal, world description, world identification

For citation: Badie F. "Towards world identification in description logics", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2022, Vol. 28, No. 2, pp. 115–134. DOI: 10.21146/2074-1472-2022-28-2-115-134

1. Introduction

Hybrid logics are logics that result by adding further expressive power to ordinary modal logic, see [Braüner, 2017]. The history of hybrid logic goes back to Arthur Norman Prior's work on *hybrid tense logic* in the 1960s, see [Prior, 1967; Blackburn, 2006]. Actually the use of logical formulae as terms goes back to Prior's work. In fact, Prior's hybrid logic has focused on 'naming' worlds. The most fundamental hybrid logic is obtained by introducing *nominals* that are new kinds of propositional symbols, see [Blackburn & Seligman, 1995; Areces, 2000; Blackburn & Jørgensen, 2016b].

In the standard Kripke semantics for modal logic (see [Kripke, 1963; Menzel, 2018]), truth is relative to points in a set. Thus, a propositional symbol might have different truth-values relative to different points. Usually, these points are taken to represent possible worlds, times, epistemic states, etc., see [Braüner, 2017]. Formally speaking, any nominal (like $\mathtt{n}$) can be true at one (and only one) possible world. In fact, $\mathtt{n}$ is syntactically a marked propositional symbol that is true at one and only one state. Therefore, we can regard $\mathtt{n}$ as the addresser of a specific single state (and, correspondingly, of a time as well as of a place) that it is true at. The most significant assumption is that 'any nominal symbol can be true at exactly one state in any semantic model'. This research focuses on the logical analysis of an application of nominals in Description Logic.

Description Logics (*DLs*) are among the most widely used knowledge representation formalisms in semantics-based systems, see [Baader et al., 2007; Baader et al., 2017a; Sikos, 2017]. DLs have emerged from *semantic networks* (which are knowledge bases that represent semantic interrelationships between various concepts; see [Quillian & Minski, 1968]) and *frame-based systems* (based on which knowledge can be divided into interrelated sub-structural frames, in order to be represented; see [Minsky, 1975]). In addition, other logical representational systems based on *structural subsumption algorithms* (e.g., KRYPTON (see [Brachman et al., 1983]) and KRIS (see [Baader & Hollunder, 1991])) have constructed supportive backgrounds for DL development. Most DLs are decidable fragments of Predicate Logic (PL). More specifically, DLs are PL-based terminological systems developed out of the attempt to represent knowledge, with a formal semantics, in order to establish a common ground for human and machine interplays.

The main focus of this paper is on answering the philosophical-logical question of 'how (*i*) a world description in the standard description logic $\mathcal{ALC}$[1] and (*ii*) a hybrid logic's nominal can be related to each other?'. Based on a review of the most relevant works on the available extensions of DLs (with nominals and other hybrid operators) as well as on temporal and spacial extensions of DLs, this research focuses on the logical analysis of nominals' usability and efficacy in DL-based descriptions of the world . More specifically, the research logically-terminologically describes how we can — based on logical nominalism — provide an identification for our described world in DL. A described world in DL (equivalently: a DL *world description*) is fundamentally expressible in the form of assertional axioms. Thereby, based on logical analysis of nominals, this research

[1] $\mathcal{ALC}$ stands for Attributive Concept Language with Complements. $\mathcal{ALC}$ is the prototypical description logic.

analyses hybridised assertions in order to identify them. The very important assumption is that DL may need to identify the world (or more specifically, to make an identification of a specific world description) by addressing specific [temporal and/or spacial] states. Correspondingly, the research deals with the interrelationships between nominals and DLs' individual symbols (that are equivalent to constant symbols in PL). Consequently, the paper offers the idea that we can have a hybridised $\mathcal{ALC}$, like $\mathcal{HALC}$, that can represent *identified world descriptions.*

2. Hybrid Logic

Hybrid logic can be regarded as the hybridised version of the ordinary tense logic. *Tense logic* is a modal-logic type of approach introduced around 1960 by Arthur Prior, see [Goranko & Rumberg, 2020; Blackburn & Jørgensen, 2012; Blackburn & Jørgensen, 2016b]. In addition to the usual propositional (truth-functional) operators, the basic logical language of tense logic contains four temporal modal operators as follows:

i. P that expresses "It has at some time been the case that ..."

ii. F that expresses "It will at some time be the case that ..."

iii. H that expresses "It has always been the case that ..."

iv. G that expresses "It will always be the case that ..."

Hybrid logic interprets the phenomenon of *temporality* as an intrinsic and essential property of objects in the world, see [Blackburn, 1993; Blackburn, 2006]. Prior obtained hybrid logic by introducing 'nominals' (as the second sorts of propositional symbols). In fact, the hybrid logic which Prior used is a language built on a set of nominals as well as on a set of ordinary propositional symbols.

This research has taken into account that there is a strong logical and semantic interrelationship between (i) nominals and (ii) the concepts of *moment* (which stands for a specific state of time) and *location* (which stands for a specific state of place). More specifically, there is a correlation between the following items:

1. Nominals (that are specific kinds of propositional symbols).

2. Descriptions [of propositions].

In fact, various descriptions can be structured based on the operations that indicate, and address, specific moments and locations of the world.

In this research, nominals are regarded as logical symbols. Therefore, the state of the existence of a nominal as well as the logical validity of its relationship(s) with specific moments and locations must be taken into consideration.

3. Description Logic

Description Logics (DLs) represent knowledge in terms of *concepts*, *individuals* and *roles*, see [Baader et al., 2007; Baader et al., 2017a; Sikos, 2017].

1. A concept corresponds to a distinct [mental] entity (see [Badie, 2017a; Badie, 2017b]). Also, it can be regarded as a class of entities. Concepts and their interrelationships are — hierarchically — utilised to create *terminologies* in DL (see [Badie, 2018; Badie, 2020]). Concepts are equivalent to unary predicates in predicate logic. Atomic concepts (e.g., *Student*, *Colour*, *Company*) are the first group of atomic symbols in DL.

2. Individuals are the instances of (and, thus, are describable by) concepts. For example, the individual `john` who is a student is describable as a 'student' (and can be covered by the concept *Student*). Individuals are equivalent to constant symbols in predicate logic. Individuals (e.g., `bob`, `blue`, `google`) are the second group of atomic symbols in DL.

3. A role expresses a relationship between various individuals. Also, a role can assign a property to an individual. Thereby, roles are either relations or properties. Roles are equivalent to binary predicates in predicate logic. Atomic roles (e.g., *isA*, *produces*, *hasChild*) are the third group of atomic symbols in DL.

Note that atomic symbols (i.e. atomic concepts, atomic roles, and individuals) are the most fundamental descriptions from which we can inductively build more-specified, as well as complex, world descriptions based on logical operators. Here are some examples of the most fundamental descriptions of the world.

- Any of the individuals `ann`, `red`, and `apple` is related to itself by means of the relation of valence 0.

- The descriptions 'Fred is a student' (formally representing: *Student*(`fred`)) and 'Green is a colour' (formally: *Colour*(`green`)) are structured based on the relations of valence 1.

- The descriptions 'Tom is married to Juliana' (formally: *marriedTo*(`tom`, `juliana`)), '10 is greater than 3' (or: *greaterThan*(10, 3)), and 'Bob is the father of Alice' (or: *hasFather*(`alice`, `bob`)) are structured based on the relations of valence 2.

Regarding N_C, N_O, and N_R as the sets of atomic concepts, atomic roles, and individuals, respectively, the triple $\langle N_C, N_O, N_R \rangle$ denotes a *signature* in relevant DL-based descriptions.

The set of main logical symbols in $\mathcal{ALC}$ is: $LS = \{$conjunction ($\sqcap$), disjunction ($\sqcup$), negation ($\neg$), implication ($\rightarrow$), equivalence ($\equiv$), subsumption ($\sqsubseteq$), existential quantification ($\exists$), universal quantification ($\forall$), truth/tautology ($\top$), falsity/contradiction ($\bot$)$\}$. In addition, atomic concepts and atomic roles are represented by A and r, respectively.

Semantic Interpretations. Formal semantics of a term in DL is interpretable based on concepts, roles and individuals (which are non-logical symbols in logical descriptions). Actually, non-logical symbols do not independently have any logical consequence in a formal description. Therefore, we need to utilise a semantic interpretation in order to deal with the semantics of a DL-based term (which is structured based on those non-logical symbols). A semantic interpretation (or: '$\mathcal{I}$') consists of the following ingredients:

1. An *interpretation domain* (or: 'Δ'). Δ is a non-empty set and consists of any individual which may occur in our descriptions.

2. An *interpretation function* (in the form of '$.^{\mathcal{I}}$'). This function assigns every individual symbol (like a) to an element $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Also, it assigns to every atomic concept A, a set $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$, and to every atomic role r, a binary relation $r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$.

Note that the interpretation domain of a concept, as well as of a role, can — after being interpreted by the interpretation function — become transformed into the elements of the set $\mathcal{V} = \{0, 1\}$ in order to express the semantic concepts of 'truth' and 'falsity'. Actually, becoming transformed into '0' expresses '[being] false' and becoming transformed into '1' expresses '[being] true'. More specifically:

1. Let some individual a be an instance of some interpreted concept C. Therefore, a will be transformed into 1.

2. Let some individual b be one of the instances of some interpreted role R. Then, b will be transformed into 1.

3. Let some individual c be not an instance of some interpreted concept C. So, c will be transformed into 0.

4. Let some individual d be not one of the instances of some interpreted role R. Thereby, d will be transformed into 0.

Table 1 presents the syntax and semantics of concept constructors in $\mathcal{ALC}$ (and over LS). Also, Table 2 reports terminological and assertional axioms in DL (and over LS). In these tables, C and D stand for two concepts, and R and S stand for two roles.

Note that a semantic interpretation is called a *model* for a DL-based description if it can satisfy all the terminological and assertional axioms based on which that description has been expressed.

Table 1. $\mathcal{ALC}$ Syntax and Semantics

Syntax	**Semantics**
A	$A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
r	$r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$
$\top$	$\Delta^{\mathcal{I}}$
$\bot$	$\emptyset$
$C \sqcap D$	$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \wedge D^{\mathcal{I}}$
$C \sqcup D$	$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \vee D^{\mathcal{I}}$
$\neg C$	$(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$
$\exists r.C$	$\{a \mid \exists b.(a,b) \in r^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}}\}$
$\forall r.C$	$\{a \mid \forall b.(a,b) \in r^{\mathcal{I}} \rightarrow b \in C^{\mathcal{I}}\}$

Table 2. Terminological and Assertional Axioms in DL

Name	**Syntax**	**Semantics**
concept subsumption axiom	$C \sqsubseteq D$	$C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
role subsumption axiom	$R \sqsubseteq S$	$R^{\mathcal{I}} \subseteq S^{\mathcal{I}}$
concept equality axiom	$C \equiv D$	$C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
role equality axiom	$R \equiv S$	$R^{\mathcal{I}} = S^{\mathcal{I}}$
concept assertion	$C(a)$	$a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
role assertion	$R(a,b)$	$(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$

4. Literature Review

4.1. Extensions of DLs with Nominals and other Hybrid Operators

There have been strong works on the extensions of DLs with nominals as well as with other hybrid operators. This section reviews the most important ones.

Since expressive role constructors are important in many applications but can be computationally problematical, [Horrocks et al., 2000] presents an algorithm that decides satisfiability of the DL $\mathcal{ALC}$ extended with transitive and inverse roles, role hierarchies, and qualifying number restrictions. [Areces, 2000] explores and exploits the logical connections (i.e. similarities and differences) between DL and hybrid logic. [Horrocks & Sattler, 2001] presents sound and complete reasoning services for the DL $\mathcal{SHOQ}(\mathcal{D})$. $\mathcal{SHOQ}(\mathcal{D})$ is an expressive DL equipped with named individuals and concrete datatypes which has almost exactly the same expressive power as web ontology languages. [Lutz et al., 2005] works on DLs with key constraints that allow the expression of statements like 'US citizens are uniquely identified by their social security number'. Based on this idea, the authors introduce a number of natural description logics and perform a detailed analysis of the decidability and of computational complexity. [Horrocks et al., 2006] describes an extension of the description logic underlying OWL-DL (see [OWL, 2012]), $\mathcal{SHOIN}$, with all expressive means that were suggested to authors by ontology developers as useful additions to OWL-DL, and which, additionally, do not affect its decidability and practicability. The resulting logic is called $\mathcal{SROIQ}$ that includes familiar features from hybrid logic. Regarding [Horrocks et al., 2007] (based on the work of [Horrocks et al., 2006]), in order to support extensionally defined classes, $\mathcal{SHOIN}$ includes nominals (in the form of classes whose extension is a singleton set[2]). This is actually an important feature for a logic which is designed for being used in ontology language applications, because extensionally defined classes are very common and applicable in ontologies (see [Guarino, 1998]). Later, [Krötzsch et al., 2011] proposes an extension of $\mathcal{SROIQ}$ with nominal schemas which can be used like variable nominal concepts within axioms. This feature supports the authors to express arbitrary DL-safe rules in DL syntax. Later on, [Gorin & Schröder, 2012] deals with the concept of self-reference that has been recognised as a useful feature in DL but is also known to cause substantial problems with decidability. Finally, [Tobies, 2000] studies the complexity of reasoning with cardinality restrictions and nominals in expressive DLs.

4.2. Temporal and Spacial Extensions of DLs

Temporal (and to a lesser extent also spatial) extensions of DLs have been studied extensively. Here are the most significant related works.

[Schild, 1993] shows how to add full first-order temporal expressiveness to terminological logics. It analyses that this feature can be achieved by embedding point-based tense operators in propositionally closed concept languages like $\mathcal{ALC}$. [Artale & Franconi, 2000] offers a survey of temporal extensions

[2] Singleton is a set that contains exactly one element.

of DLs. In the survey, the computational properties of various families of temporal description logics are pointed out. [Artale & Franconi, 2000] emphasises that the advantages of using temporal DLs are their high expressivity combined with desirable computational properties, such as decidability, soundness, and completeness of deduction procedures. [Baader et al., 2003] addresses the extensions of DLs concerning concrete domain constraints; modal, epistemic, and temporal operators; probabilities and fuzzy logic; and defaults. [Lutz et al., 2008] surveys temporal DLs which are designed based on standard temporal logics. In particular, the authors concentrate on the computational complexity of the satisfiability problem and algorithms for deciding it. [Artale et al., 2014] designs suitable temporal DLs for reasoning about temporal conceptual data models and also investigates their computational complexity. [Baader et al., 2017b] focuses the combination of DLs with metric temporal logics over the natural numbers by introducing interval-rigid names. This allows to state that elements in the extension of certain names stay in this extension for at least some specified amount of time. Finally, [Bourgaux et al., 2019] addresses the problem of handling inconsistent data in a temporal version of ontology-mediated query answering (based on the combination of conjunctive queries with operators of propositional linear temporal logic). Subsequently, the authors work on temporal knowledge bases.

5. Logical Analysis of Nominals in DL

According to [Baader et al., 2017c], we may want to use individual names inside concepts. For example, we are going to define the class *BookOfJohn* as those books which are written by John. Hence, we can offer the following concept definition:

$$\mathit{BookOfJohn} \;\equiv\; \mathit{Book} \sqcap \exists \mathit{writes}^{-}.\mathit{John}$$

In this concept definition, writes^{-} is an inverse role[3] (of the concept *John*) which is formalised in order to relate us to the role *havingBook* (of the concept *John*) and in fact, to the specified concept *BookOfJohn*. However, the problem is that this concept definition would not work for the following two reasons:

1. John cannot be both an individual and a concept name.

2. If we were to allow John to be in the place of a concept, we would need to say what this means for John's interpretation. In fact, based on every interpretation $\mathcal{I}$, $\mathit{John}^{\mathcal{I}}$ would be an element of the interpretation domain, but concepts are interpreted as sets of elements.

[3]The *inverse role*, or R^{-}, is constructed based on the role constructor '$^{-}$' and is represented by $\mathcal{I}$. Therefore, the description logic that can model inverse roles is called $\mathcal{ALCI}$.

To enable the use of individual names in concepts and avoid the mentioned problems, nominals have been introduced. The fact that a DL provides nominals is normally indicated by $\mathcal{O}$. According to [Baader et al., 2017c], the description logic $\mathcal{ALCO}$ is obtained from $\mathcal{ALC}$ by allowing nominals as additional concepts. Considering the individual a, for an interpretation $\mathcal{I}$ in $\mathcal{ALCO}$, the mapping $.^{\mathcal{I}}$ is extended as $(\{a\})^{\mathcal{I}} = \{a^{\mathcal{I}}\}$. Consequently, by utilising the interpretation $\mathcal{I}$, it is possible to redefine the concept *BookOfJohn* as:

$$BookOfJohn \;\equiv\; Book \sqcap \exists writes^{-}.\{\texttt{john}\}$$

In fact, by putting curly brackets around the individual name `john`, we have transformed `john` into a concept. Taking into account such a transformation, I need to offer the following definitions:

Definition – Identical Concept Constructors. An *identical concept constructor* (*IDCC*) is defined in order to turn an individual symbol into a concept. *IDCC* is formally represented by '{ }'. Any *IDCC* concentrates on a specific individual symbol and makes an identifier for it.

Definition – Identifier. An *identifier* is a name that labels the *identity* of a unique individual symbol.

It can be interpreted that any *IDCC* is a kind of role that (*i*) expresses the concept of *becoming* and (*ii*) makes an interrelationship between an individual and a concept. Regarding the latter, by relating a concept to a unique individual symbol, an *IDCC* assigns an identity to that individual.

Let me be more specific on the 'concept of an individual'. Actually, we may interpret that the existence of 'the concept of some [specific] individual' expresses the fact that 'there is, surely, one single object/thing in its own scope in our world'. Obviously, such a property is other than those forming usual concepts (e.g., *Book*, *Person*). In fact, when we [operate and] identify a concept constructor in a certain world, then a secondary concept (like $\mathcal{C}$) will arise. Accordingly, a single individual (like c) will be included in $\mathcal{C}$ [in its specific world]. It can be interpreted that $\mathcal{C}$ is empty (and meaningless) in other worlds. Therefore, $\mathcal{C}$ is a concept of different sort. In fact, properties of all individuals change from world to world.

6. First-Order Interpretations and Specific States of the World

As pointed out above, based on the standard Kripke semantics for modal logic, truth is relative to points in a set. Thus, a propositional symbol might have different truth-values relative to different points [Kripke, 1963]. It shall be taken into account that the relationship(s) between first-order interpretations and Kripke models (or more specifically, the states of a Kripke frame that can be regarded as various states of the world) is establishable as follows:

1. The states of the world are the elements of the domain of a first-order interpretation (like Δ that is a non-empty set).

2. The propositions (which can be either true or false at any state of the world) are regarded as [the outcomes of] the interpretations of unary predicates over the [interpretation] domain. Assessed by DL, this means that a proposition is described based on the interpretation of concept(s) over the interpretation domain in a DL world description.

3. The accessibility relations, which relate various states of the world together, are seen as [the outcomes of] the interpretations of binary predicates over the [interpretation] domain. Assessed by DL, the relations between various states of the world are seen as the interpretation(s) of role(s) over the interpretation domain in a DL world description.

7. World Descriptions at Specific States of the World

Accept that it is raining in Copenhagen at 17:19 on Thursday 21 September 2017. Here the nominal $\mathtt{n}$ stands for (and is identical to) the proposition 'It is in Copenhagen at 17:19 on Thursday 21 September 2017'. Then, $\mathtt{n}$ addresses a specific state (of the world) which the proposition 'It is raining in Copenhagen at 17:19 on Thursday 21 September 2017' (call this proposition 'A') is certainly true at. As pointed out above, $\{\mathtt{n}\}$ represents a concept. Regarding Δ as the domain of our interpretation, semantically we have: $(\{\mathtt{n}\})^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$. Equivalently: $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$.

As pointed out above, by means of the interpretation function '$.^{\mathcal{I}}$', our interpreted domain of individuals (or: $\Delta^{\mathcal{I}}$) can become transformed into the elements of the set $\mathcal{V} = \{0, 1\}$. Taking into account $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$, we can understand that $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$ has either the truth value '0' (i.e. is false) or the truth value '1' (i.e. is true).

Now suppose that the world description *Raining*($\mathtt{sky}$) expresses the proposition 'The sky is raining'. Since A is true at the state at which $\mathtt{n}$ is expressed, thus *Raining*($\mathtt{sky}$) is true at the same state and, in fact, over $\mathtt{n}$. Formally speaking, $\mathtt{sky}^{\mathcal{I}} \in \mathit{Raining}^{\mathcal{I}}$, when/where $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$. It is interpretable that $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$ — in order to express a truth (about A) in a model — provides a semantic reference for (i) $\{\mathtt{sky}^{\mathcal{I}}\}$ (based on the conceptualised and interpreted *Raining*) and, correspondingly, for (i) $\mathit{Raining}^{\mathcal{I}}(\mathtt{sky}^{\mathcal{I}})$.

At this point it shall be emphasised that the proposition A does not express a truth about itself, but about the individual $\mathtt{sky}$ at a specific state of the world.

Subsequently, *Raining*($\mathtt{sky}$) is interpreted true based on the interpretation of the singleton $\{\mathtt{sky}\}$ (which is, in fact, a concept) over $\mathtt{n}$ in a semantic model. It shall be taken into account that such a truth about the individual $\mathtt{sky}$ (which is an instance of $\{\mathtt{sky}\}$) is certainly not peculiar to the state of $\mathtt{n}$ (see [Øhrstrøm, 1996]). However, the remarkable logical assumption is that $\mathtt{n}$ has — based on the fact that 'we are having rain' (or equivalently, 'the rain has been experienced') — provided an adequate identification for the description 'the sky is raining'.[4]

8. World Identification in Description Logic

8.1. Identification of Concept Assertions

The concept assertion $C(a)$ is made up of the concept C and the individual a. More specifically, $C(a)$ is formally-logically structured based on the collection of the concepts C and $\{a\}$.

Definition – Hybridised Concept Assertion. The formula $@_{\mathtt{n}}C(a)$ represents a *hybridised concept assertion*, when/where $\mathtt{n}$ is a nominal and $C(a)$ stands for a concept assertion. It is interpreted that $@_{\mathtt{n}}C(a)$ expresses the co-existence of $C(a)$ and $\mathtt{n}$.

Definition – Coexistence. The semantic operation '$=^{\mathcal{E}}$' between two interpreted concepts (as well as interpreted [concept] descriptions) expresses their *coexistence*. Hence, $C^{\mathcal{I}} =^{\mathcal{E}} D^{\mathcal{I}}$ means that C and D are interpreted to have co-existence. In other words, it is interpreted that C and D do exist, and be valid, together (at/in the same time and/or location).

Taking into consideration $@_{\mathtt{n}}C(a)$, we can conclude that there is a co-existence relationship between 'the collection of the concepts C and $\{a\}$' and 'the concept $\{\mathtt{n}\}$'. Semantically: $((\{a\})^{\mathcal{I}} \wedge C^{\mathcal{I}}) =^{\mathcal{E}} (\{\mathtt{n}\})^{\mathcal{I}}$. Consequently: $(\{a^{\mathcal{I}}\} \wedge C^{\mathcal{I}}) =^{\mathcal{E}} \{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$. In addition, since $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$ is either true or false (and can

[4] In [semantics-based] information systems, ontologies which are fomal-logical descriptions of concepts as well as of concepts' [intra-/inter]relationships, can be applied in order to offer a specified shared conceptualization of various concepts over a specific domain of discourse. Obviously, in applied ontologies it is easy to interpret and understand that some individual a has a unique identification number. But what about my offered example in this section? A possible solution can be to divide our temporal space into various countable [semantic knowledge] boxes. For instance, in our example, 'Thursday 21 September 2017' can be divided into 1440 knowledge boxes (any of which would be a knowledge base for one specific minute in 'Thursday 21 September 2017'). Subsequently, we can have 1440 knowledge boxes which will contain specific 'individuals (as instances of concepts/roles)', 'identified individuals', and 'arised concepts'.

become transformed into either '0' or '1'), it is interpretable that $(\{a^{\mathcal{I}}\} \wedge C^{\mathcal{I}})$ can also be transformed into either '0' or '1'.

Note that the existence of the hybridised concept assertion $@_{\mathtt{n}}C(a)$ indicates the co-existence of '$(\{a^{\mathcal{I}}\} \wedge C^{\mathcal{I}})$' and '$\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$'. According to $(\{a^{\mathcal{I}}\} \wedge C^{\mathcal{I}}) =^{\mathcal{E}} \{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$ it is interpretable that $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$ provides a semantic reference for $\{a^{\mathcal{I}}\}$ (in conjunction with the conceptualised and interpreted C). This means that $\{\mathtt{n}\}$ (which is the identifier of $\mathtt{n}$) acts as the identifier of the individual a, when/where a is interpreted to be existed with C.

Proposition. Regarding $@_{\mathtt{n}}C(a)$, the nominal $\mathtt{n}$ identifies a specific state (of time and/or place) at which $C(a)$ is certainly true. In fact, any identified concept assertion (in correspondence with a nominal) has a correlation with an identified individual. This is how an interpreted individual (that is a constant and non-logical symbol) and an interpreted nominal (that is a propositional symbol) are semantically tied together.

Example. Accept that Bob is a student in London. I will address the proposition 'Bob is a student in London' by B. The nominal $\mathtt{n}$ stands for 'It is in London'. Then, the world description $\mathit{Student}(\mathtt{bob})$ is true at the point at which $\mathtt{n}$ becomes expressed. Semantically, the conjunction of the propositions 'Bob is a student' and 'It is in London' is subsumed under the concept of truth. Considering the hybridised concept assertion $@_{\mathtt{n}}\mathit{Student}(\mathtt{bob})$, the description $\mathit{Student}(\mathtt{bob})$ can, by being transformed into $\mathtt{n}$, express a truth about 'being student by Bob'. Regarding the hybridised concept assertion $@_{\mathtt{n}}\mathit{Student}(\mathtt{bob})$, semantically we have: $(\{\mathtt{bob}^{\mathcal{I}}\} \wedge \mathit{Student}^{\mathcal{I}}) =^{\mathcal{E}} \{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$. This means that $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$ provides a semantic reference for $\{\mathtt{bob}^{\mathcal{I}}\}$ (in conjunction with the conceptualised and interpreted *Student*) $(*)$.

In this example, the concept $\{\mathtt{n}\}$ has — by addressing 'in London' — become subsumed under the concept of *Location*. By defining $\mathcal{L}$ as the logical concept '*Location*' in our formalism, we have: $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\} \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{I}}$ $(**)$.

According to $(*)$ and $(**)$, we can conclude that: $(\{\mathtt{bob}^{\mathcal{I}}\} \wedge \mathit{Student}^{\mathcal{I}}) \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{I}}$. In fact, regarding the interpretation of the hybridised description of 'Bob is a student', we can conclude that 'being student by Bob is identifiable in the location 'London'' if and only if: (*i*) being student is interpretable and meaningful in London, (*ii*) the individual Bob is recognisable as a concept in London, and (*iii*) Bob can be subsumed under the concept *Student* in London.

It shall be summarised that the concept $\{\mathtt{n}\}$ has provided a semantic reference for:

1. the concept of 'being student',

2. the identity of the individual Bob and its validity and recognisability as a concept, and

3. the logical interrelationships between (1) and (2).

8.2. Identification of Role Assertions

The role assertion $R(a, b)$ is structured based on the combination of (i) the individuals a and b and (ii) the role R (that has related a and b together). More specifically, the existence of $R(a, b)$ indicates the co-existence of the role R and the concepts $\{a\}$ and $\{b\}$.

Definition – Hybridised Role Assertion. The formula $@_{\mathtt{n}}R(a, b)$ represents a hybridised version of the role assertion $R(a, b)$, when/where $\mathtt{n}$ is a nominal. Actually, $@_{\mathtt{n}}R(a, b)$ expresses the co-existence of $R(a, b)$ and $\mathtt{n}$.

Taking into consideration $@_{\mathtt{n}}R(a, b)$ we can conclude that there is a co-existence relationship between 'the collection of R, $\{a\}$, $\{b\}$' and '$\{\mathtt{n}\}$'. Semantically: $((\{a\})^{\mathcal{I}} \wedge (\{b\})^{\mathcal{I}} \wedge R^{\mathcal{I}}) =^{\mathcal{E}} (\{\mathtt{n}\})^{\mathcal{I}}$. Consequently: $(\{a^{\mathcal{I}}\} \wedge \{b^{\mathcal{I}}\} \wedge R^{\mathcal{I}}) =^{\mathcal{E}} \{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$. Also, since $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$ is either true or false (and can become transformed into either '0' or '1'), we can interpret that $\{a^{\mathcal{I}}\} \wedge \{b^{\mathcal{I}}\} \wedge R^{\mathcal{I}}$ can also be transformed into either '0' or '1'.

Here the existence of the hybridised role assertion $@_{\mathtt{n}}R(a, b)$ indicates the co-existence of $\{a^{\mathcal{I}}\} \wedge \{b^{\mathcal{I}}\} \wedge R^{\mathcal{I}}$ and $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$. Regarding $(\{a^{\mathcal{I}}\} \wedge \{b^{\mathcal{I}}\} \wedge R^{\mathcal{I}}) =^{\mathcal{E}} \{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$, we can conclude that $\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$ provides a semantic reference for $\{a^{\mathcal{I}}\}$ and for $\{b^{\mathcal{I}}\}$ (in conjunction with the conceptualised and interpreted R). This means that $\{\mathtt{n}\}$ (that is the identifier of $\mathtt{n}$) acts as the identifier of the individuals a and b, when/where a and b are interpreted to be existed with R.

Proposition. According to $@_{\mathtt{n}}R(a, b)$, the nominal $\mathtt{n}$ identifies a specific state (of time and/or place) at which $R(a, b)$ is certainly true. In fact, any identified role assertion (in correspondence with a nominal) has a correlation with two identified individuals. This is how two interpreted individuals (that are constant and non-logical symbols) and an interpreted nominal (that is a propositional symbol) are semantically tied together.

Example. Accept that Mary and David are hugging each other at 16:07 on Thursday 28 June 2018. I will address the proposition 'Mary and David are hugging each other at 16:07 on Thursday 28 June 2018' by H. The nominal $\mathtt{p}$ stands for 'It is at 16:07 on Thursday 28 June 2018'. Hence the world description $\textit{isHugging}(\mathtt{mary}, \mathtt{david})$ (that expresses the proposition 'Mary and David are hugging each other') is true at the state at which the nominal $\mathtt{p}$ has been expressed. In fact, the conjunction of the propositions 'Mary and David are hugging each other' and 'It is at 16:07 on Thursday 28 June 2018' is subsumed under the concept of truth. The existence of the hybridised role assertion $@_{\mathtt{p}}\mathit{isHugging}(\mathtt{mary}, \mathtt{david})$ indicates the co-existence of $\{\mathtt{mary}^{\mathcal{I}}\} \wedge \{\mathtt{david}^{\mathcal{I}}\} \wedge \mathit{isHugging}^{\mathcal{I}}$ and $\{\mathtt{p}^{\mathcal{I}}\}$. Subsequently, based on $(\{\mathtt{mary}^{\mathcal{I}}\} \wedge \{\mathtt{david}^{\mathcal{I}}\} \wedge \mathit{isHugging}^{\mathcal{I}}) =^{\mathcal{E}} \{\mathtt{p}^{\mathcal{I}}\}$, we can interpret that $\{\mathtt{p}^{\mathcal{I}}\}$ provides a semantic reference for $\{\mathtt{mary}^{\mathcal{I}}\}$ and for $\{\mathtt{david}^{\mathcal{I}}\}$ (in conjunction with the conceptualised and interpreted *isHugging*) $(*)$.

In this example, the concept $\{\mathtt{p}\}$ has — by addressing 'at 16:07 on Thursday 28 June 2018' — become subsumed under the concept of *Moment*. Let us represent the logical concept of '*Moment*' by $\mathcal{M}$. It can be interpreted that: $\{\mathtt{p}^{\mathcal{I}}\} \subseteq \mathcal{M}^{\mathcal{I}}$ $(**)$.

Taking into account $(*)$ and $(**)$, we can conclude that: $(\{\mathtt{mary}^{\mathcal{I}}\} \wedge \{\mathtt{david}^{\mathcal{I}}\} \wedge \mathit{isHugging}^{\mathcal{I}}) \subseteq \mathcal{M}^{\mathcal{I}}$. According to the interpretation of the hybridised description of 'Mary and David are hugging each other', we can conclude that 'hugging David and Mary (by each other) is identifiable at the moment '16:07 on Thursday 28 June 2018'' if and only if: (*i*) the individual Mary is recognisable as a concept at the same moment, (*ii*) the individual David is recognisable as a concept at the same moment, (*iii*) 'is hugging' is an interpretable and meaningful role at the same moment, and (*iv*) Mary and David are related together by means of 'is hugging' at the same moment.

It shall be summarised that the concept $\{\mathtt{p}\}$ has provided a semantic reference for:

1. the role 'is hugging',

2. the identities of 'Mary' and 'David' and their validity (and recognisability) as concepts, and

3. the logical interrelationships between (1) and (2).

9. A Hybridised Description Logic

This research has shown that we can identify DL world descriptions (which are primarily in the forms of concept assertions and role assertions) at specific states (of the world). *World identification* is a remarkable application of nominals in description logics. Taking into account this application of nominals, we can reach the idea that there is a need for another version of a hybridised description logic $\mathcal{ALC}$ (or $\mathcal{HALC}$).

In order to syntactically model $\mathcal{HALC}$, I add the logical symbol $\mathtt{n}$ (which stands for nominals) to the usual syntax of $\mathcal{ALC}$. I also add the logical symbols $\mathcal{L}$ and $\mathcal{M}$ in order to represent the logical concepts of *Location* and *Moment*, respectively. Table 3 presents the syntax and semantics of concept constructors in $\mathcal{HALC}$.

Correspondingly, table 4 presents terminological and assertional axioms in $\mathcal{HALC}$. According to table 4, 'location subsumption axiom' and 'moment subsumption axiom' are added to the usual terminological axioms in $\mathcal{ALC}$. In addition, 'hybridised concept assertion' and 'hybridised role assertion' are added to the standard assertional axioms.

Table 3. $\mathcal{HALC}$ Syntax and Semantics

Syntax	**Semantics**
A	$A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
r	$r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$
$\mathtt{n}$	$\{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
$\mathcal{M}$	$\mathcal{M}^{\mathcal{I}}$ (i.e. when ...)
$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}^{\mathcal{I}}$ (i.e. where ...)
$\top$	$\Delta^{\mathcal{I}}$
$\bot$	$\emptyset$
$C \sqcap D$	$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \wedge D^{\mathcal{I}}$
$C \sqcup D$	$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \vee D^{\mathcal{I}}$
$\neg C$	$(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$
$\exists r.C$	$\{a \mid \exists b.(a,b) \in r^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}}\}$
$\forall r.C$	$\{a \mid \forall b.(a,b) \in r^{\mathcal{I}} \rightarrow b \in C^{\mathcal{I}}\}$

10. Concluding Remarks

Nominals are second sorts of propositional symbols and are introduced by hybrid logic. This research is relied on the assumption that we can utilise nominals as logical symbols in order to identify DL world descriptions. Actually I have believed that nominals support logical identification of the described world at specific states within DL world descriptions.

The research has taken into account that there is a strong logical-terminological and semantic interrelationship between (i) nominals and (ii) the concepts of 'moment' and 'location'. Relying on such a logical relationship, it has been assumed that the state of the existence of a nominal as well as the logical validity of its relationship(s) with specific moments and locations (within

Table 4. Terminological and Assertional Axioms in $\mathcal{HALC}$

Name	**Syntax**	**Semantics**
concept subsumption axiom	$C \sqsubseteq D$	$C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
role subsumption axiom	$R \sqsubseteq S$	$R^{\mathcal{I}} \subseteq S^{\mathcal{I}}$
concept equality axiom	$C \equiv D$	$C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
role equality axiom	$R \equiv S$	$R^{\mathcal{I}} = S^{\mathcal{I}}$
location subsumption axiom	$\{\mathtt{n}\} \sqsubseteq \mathcal{L}$	$(\{\mathtt{n}\})^{\mathcal{I}} = \{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\} \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{I}}$
moment subsumption axiom	$\{\mathtt{n}\} \sqsubseteq \mathcal{M}$	$(\{\mathtt{n}\})^{\mathcal{I}} = \{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\} \subseteq \mathcal{M}^{\mathcal{I}}$
concept assertion	$C(a)$	$a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
role assertion	$R(a,b)$	$(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$
hybridised concept assertion	$@_{\mathtt{n}}C(a)$	$(\{a^{\mathcal{I}}\} \wedge C^{\mathcal{I}}) =^{\mathcal{E}} \{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$
hybridised role assertion	$@_{\mathtt{n}}R(a,b)$	$(\{a^{\mathcal{I}}\} \wedge \{b^{\mathcal{I}}\} \wedge R^{\mathcal{I}}) =^{\mathcal{E}} \{\mathtt{n}^{\mathcal{I}}\}$

world descriptions) can be expressed. Accordingly, identical concept constructors (*IDCC*s) are conceptually defined in order to relate an identifying concept, like $\{a\}$, to an individual symbol (like a). More specifically, an *IDCC* — by relating a concept to a unique individual symbol — assigns an identity to that individual. Similarly, some nominal n (that stands for the propositions 'It is in/at/on somewhere specific' or/and 'It is in/at/on sometime specific'), is considered as an individual symbol. In fact, $\mathtt{n}$ makes a specific identity for the propositions 'It is in/at/on somewhere specific' and 'It is in/at/on sometime specific'. Then the identifying concept $\{\mathtt{n}\}$ is similarly defined (as the product of the transformation of $\mathtt{n}$ by means of *IDCC*).

Relying on the logical interconnections between 'nominals', 'individuals', '*IDCC*' and 'identifying concepts', I have defined the hybridised concept assertion $@_{\mathtt{n}}C(a)$ and the hybridised role assertion $@_{\mathtt{n}}R(a,b)$. According to the existence of the hybridised concept assertion $@_{\mathtt{n}}C(a)$, it is concluded that the concept $\{\mathtt{n}\}$ acts as the identifier of the individual a (when/where a has been classified under the conceptualised concept C). So, $\mathtt{n}$ identifies a specific state (of time and/or place) at which $C(a)$ is certainly true. In fact, any identified concept assertion (that has a co-existence with a nominal) has a correlation with an identified individual. Moreover, regarding the existence of the hybridised role assertion $@_{\mathtt{n}}R(a,b)$, it is concluded that the concept $\{\mathtt{n}\}$ works as the identifier of the individuals a and b (when/where a and b have been related to each other by means of the relation R). Therefore, $\mathtt{n}$ identifies a specific state (of time and/or place) at which $R(a,b)$ is certainly true. This means that any identified role assertion (that has a co-existence with a nominal) has a correlation with two identified individuals. Consequently, based on the concepts of 'hybridised concept assertion' and 'hybridised role assertion', I have concluded that the identifying concept $\{\mathtt{n}\}$ provides a semantic reference for:

1. the most central concept in a hybridised world description (which can fundamentally be described in the form of either a hybridised concept assertion or a hybridised role assertion),
2. the identities of the individual(s) (within either hybridised concept assertion or hybridised role assertion) as well as their validity (and recognisability) as concepts, and
3. the logical interrelationships between (1) and (2).

Finally, relying on the outcomes of the research, the paper has dealt with the idea that we can have a hybridised DL, like $\mathcal{HALC}$, which can be a supportive formal-logical system for representing and analysing identified world descriptions.

References

Areces, 2000 – Areces, C.E. *Logic Engineering. The Case of Description and Hybrid Logics*, University of Amsterdam: ILLC dissertation series, 2000.

Artale & Franconi, 2000 – Artale, A. & Franconi, E. "A Survey of Temporal Extensions of Description Logics", *Ann. Math. Artif. Intell.*, 2000, Vol. 30, No. 1–4, pp. 171–210.

Artale et al., 2014 – Artale, A., Kontchakov, R., Ryzhikov, V. & Zakharyaschev, M. "A Cookbook for Temporal Conceptual Data Modelling with Description Logics", *ACM Transactions on Computational Logic*, 2014, No. 25, pp. 1–50.

Baader & Hollunder, 1991 – Baader, F. & Hollunder, B. "KRIS: Knowledge Representation and Inference System", *ACM SIGART Bull*, 1991, Vol. 2, No. 3, pp. 8–14.

Baader et al., 2003 – Baader, F., Küsters, R. & Wolter, F. "Extensions to Description Logics", in: F. Baader, D. Calvanese, D. L. McGuinness, D. Nardi & P.F. Patel-Schneider (eds.), *Description Logic Handbook*, Cambridge University Press, 2003, pp. 219–261.

Baader et al., 2007 – Baader, F., Calvanese, D., McGuinness, D.L., Nardi, D. & Patel-Schneider, P.F. *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications*. Cambridge University Press, 2007.

Baader et al., 2017a – Baader, F., Horrocks, I., Lutz, C. & Sattler, U. *An Introduction to Description Logic*. Cambridge University Press, 2017.

Baader et al., 2017b – Baader, F., Borgwardt, S., Koopmann, P., Ozaki, A. & Thost, V. "Metric Temporal Description Logics with Interval-Rigid Names", in: Clare Dixon & Marcelo Finger (eds.), *FroCoS*. Springer, 2017, pp. 60–76.

Baader et al., 2017c – Baader, F., Horrocks, I., Lutz, C., & Sattler, U. "A Basic Description Logic", in: *An Introduction to Description Logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017, pp. 10–49.

Baader et al., 2020 – Baader, F., Borgwardt, S., Koopmann, P., Ozaki, A. & Thost, V. "Metric Temporal Description Logics with Interval-Rigid Names", *ACM Trans. Comput. Log.*, 2020, Vol. 21, No. 30, pp. 1–46.

Badie, 2017a – Badie F. "From Concepts to Predicates Within Constructivist Epistemology", in: Baltag A., Seligman J., Yamada T. (eds.), *Logic, Rationality, and Interaction*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 10455. Springer: Berlin, Heidelberg, 2017, pp. 687–692.

Badie, 2017b – Badie, F. *A Theoretical Model for Meaning Construction through Constructivist Concept Learning: A Conceptual, Terminological, Logical and Semantic Study within Human-Human-Machine Interactions*, PhD series for the Faculty of Humanities. Aalborg University Press: Aalborg, Denmark, 2017.

Badie, 2018 – Badie, F. "On Logical Characterisation of Human Concept Learning based on Terminological Systems", *Logic And Logical Philosophy*, 2018, Vol. 27, No. 4, pp. 545–566.

Badie, 2020 – Badie, F. "Logic and Constructivism: A Model of Terminological Knowledge", *Journal of Knowledge Structures & Systems*, 2020, Vol. 1, No. 1, pp. 23–39.

Blackburn, 1993 – Blackburn, P. "Nominal Tense Logic", *Notre Dame J. Formal Logic*, 1993, Vol. 34, No. 1, pp. 56–83.

Blackburn, 2006 – Blackburn, P. "Arthur Prior and Hybrid Logic", *Synth*, 2006, Vol. 150, No. 3, pp. 329–372.

Blackburn & Jørgensen, 2012 – Blackburn, P. & Jørgensen, K.F. "Indexical Hybrid Tense Logic", in: T. Bolander, T. Braüner; S. Ghilardi & Lawrence S. Moss (eds.), *Advances in Modal Logic*. College Publications, 2012, pp. 144–160.

Blackburn & Jørgensen, 2016 – Blackburn, P. & Jørgensen, K.F. "Arthur Prior and 'Now'", *Synth*, 2016, Vol. 193, No. 11, pp. 3665–3676.

Blackburn & Jørgensen, 2016b – Blackburn, P. & Jørgensen, K.F. "Reichenbach, Prior and hybrid tense logic", *Synth*, 2016, Vol. 193, No. 11, pp. 3677–3689.

Blackburn & Seligman, 1995 – Blackburn, P. & Seligman, J. "Hybrid Languages", *J. Log. Lang*, 1995, Vol. 4, No. 3, pp. 251–272.

Bourgaux et al., 2019 – Bourgaux, C., Koopmann, P. & Turhan, A.-Y. "Ontology-mediated Query Answering Over Temporal and Inconsistent Data", *Semantic Web*, 2019, Vol. 10, No. 3, pp. 475–521.

Brachman et al., 1983 – Brachman, R., Fikes, R. & Levesque, H. "Krypton: A Functional Approach to Knowledge Representation", *Computer*, 1983, Vol. 16–10, pp. 67–73.

Braüner, 2017 – Braüner, T. "Hybrid Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), 2017, Center for the Study of Language and Information (CSLI), Stanford University.

Goranko & Rumberg, 2020 – Goranko, V. & Rumberg, A. "Temporal Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.), 2020, Center for the Study of Language and Information (CSLI), Stanford University.

Gorin & Schröder, 2012 – Gorin, D. & Schröder, L. “Extending ALCQ with Bounded Self-Reference”, in: T. Bolander, T. Braüner, S. Ghilardi & L.S. Moss (eds.), *Advances in Modal Logic*. College Publications, 2012, pp. 300–316.

Guarino, 1998 – Guarino, N. “Formal Ontology in Information Systems”, *Proceedings of the 1st International Conference* (Trento, Italy). IOS Press: Amsterdam, The Netherlands, 1998, pp. 3–15.

Horrocks et al., 2000 – Horrocks, I., Sattler, U. & Tobies, S. “Practical Reasoning for Very Expressive Description Logics”, *Logic Journal of the IGPL*, 2000, Vol. 8, No. 3, pp. 239–264.

Horrocks & Sattler, 2001 – Horrocks, I. & Sattler, U. “Ontology Reasoning in the SHOQ(D) Description Logic”, in: *IJCAI*, 2001, pp. 199–204.

Horrocks et al., 2006 – Horrocks, I., Kutz, O. & Sattler, U. “The Even More Irresistible SROIQ”, iIn: P. Doherty, J, Mylopoulos & Ch. A. Welty (eds.), *Proc. of the 10th Int. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*. AAAI Press, 2006, pp. 57–67.

Horrocks et al., 2007 – Horrocks, I., Glimm, B. & Sattler, U. “Hybrid Logics and Ontology Languages”, *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, 2007, Vol. 174, No. 6, pp. 3–14.

Kripke, 1963 – Kripke, S. “Semantical Considerations on Modal Logic”, *Acta Phil. Fennica*, 1963, Vol. 16, pp. 83–94.

Krötzsch et al., 2011 – Krötzsch, M., Maier, F., Krisnadhi, A.A. & Hitzler, P. “Nominal Schemas for Integrating Rules and Description Logics”, in: R. Rosati, S. Rudolph & M. Zakharyaschev, (eds.), *Description Logics*, 2011, pp. 268–278.

Lutz et al., 2005 – Lutz, C.; Areces, C., Horrocks, I. & Sattler, U. “Keys, Nominals, and Concrete Domains”, *J. Artif. Intell. Res.*, 2005, Vol. 23, pp. 667–726.

Lutz et al., 2008 – Lutz, C., Wolter, F. & Zakharyaschev, M. “Temporal Description Logics: A Survey”, *15th International Symposium on Temporal Representation and Reasoning, Montreal.* QC, Canada, 2008, pp. 3–14.

Menzel, 2018 – Menzel, Ch. “Actualism”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), 2018, Center for the Study of Language and Information (CSLI), Stanford University.

Minsky, 1975 – Minsky, M. “A Framework for Representing Knowledge”, in: P. Wiston (ed.), *The psychology of computer vision*. Mc Graw Hill, New York, 1975, pp. 211–277.

Øhrstrøm, 1996 – Øhrstrøm, P. “A Statement of Temporal Realism”, in: B. Jack Copeland (ed.), *Logic and Reality, Essays on the Legacy of Arthur Prior*. Clarendon Press, 1996, pp. 43–51.

Prior, 1967 – Prior, A.N. *Past, Present and Future*. Oxford University Press, 1967.

Quillian & Minski, 1968 – Quilian, M.R., Minski, M. “Semantic Memory”, in: M. Minski (ed.), *Semantic Information Processing*. MIT Press, Cambridge, MA, 1968, pp. 227–270.

Schild, 1993 – Schild, K. “Combining Terminological Logics with Tense Logic”, in: Miguel Filgueiras & Luis Damas (ed.), *EPIA*. Springer, 1993, pp. 105–120.

Sikos, 2017 – Sikos, L.F. *Description Logics in Multimedia Reasoning*. Springer, 2017.

Tobies, 2000 – Tobies, S. "The Complexity of Reasoning with Cardinality Restrictions and Nominals in Expressive Description Logics", *J. Artif. Intell. Res.*, 2000, Vol. 12, pp. 199–217.

OWL, 2012 – *Web Ontology Language (OWL)*, [https://www.w3.org/OWL, 2012, accessed on 01.04.2022].

Сообщение об отзыве (ретракции) публикации

Retraction of publication

Автор статьи: Левин В.И.

Название статьи: Интервальная логика и некоторые ее применения.

Выходные данные статьи: Логические исследования. 2004. Вып. 11. С. 174–188.

Основания отзыва статьи: Дублирование статьи в нескольких изданиях.

Первоисточник: Левин В.И. Обобщение непрерывной логики на случай неопределенных переменных // Автоматика и телемеханика. 2003. № 2. С. 176–188.

Дата ретракции: 06.09.2022.

Информация для авторов

• Журнал «Логические исследования» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики см. на сайте журнала `http://logicalinvestigations.ru`)

• Все статьи, планируемые к публикации в журнале «Логические исследования», проходят процедуру анонимного рецензирования.

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате $\LaTeX\,2_\varepsilon$

• При подготовке рукописи в $\LaTeX\,2_\varepsilon$ необходимо использовать стилевой класс `LIarticle.cls` и шаблон `LI_template.tex` (если рукопись на русском языке) или `LI_template_eng.tex` (если рукопись на английском языке), которые размещены в правилах предоставления рукописей на сайте `http://logicalinvestigations.ru`. Здесь же размещены подробные рекомендации по подготовке рукописи.

• Объем рукописи не должен превышать 25 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, списоки литературы, аннотации (на русском и английском языках).

Статьи следует направлять в электронном виде в редакцию через сайт
`http://logicalinvestigations.ru`

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: `http://logicalinvestigations.ru`)

• All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process.

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the $\LaTeX\,2_\varepsilon$ format

• While typesetting a paper, the class file `LIarticle.cls` and the template `LI_template_eng.tex` should be used; both files can be accessed at `http://logicalinvestigations.ru`. Here you can also find detailed guidelines for preparing your paper.

• Papers should not exceed 25 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

Submissions should be sent in electronic form through the website:
`http://logicalinvestigations.ru`

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2022. Том 28. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: *ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.*

Главный редактор: *В.И. Шалак*

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технический редактор: *Е.А. Морозова*

Корректор: *И.А. Мальцева*

Художники: *Н.Н. Попов*, *С.Ю. Растегина*

Подписано в печать с оригинал-макета 10.10.2022.
Формат 70 x 100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Для набора греческого текста использован пакет Teubner.
Усл. печ. л. 11,21. Уч.-изд. л. 6,68. Тираж 1 000 экз. Заказ № 19.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Разработка LaTeX-класса стилевого оформления оригинал-макета: *А.Е. Коньков*

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
`http://logicalinvestigations.ru`