Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 29. Number 1

Moscow
2023

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 29. Номер 1

Москва
2023

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2023. Volume 29. Number 1

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Web of Science (Russian Science Citation Index), Scopus, Zentralblatt MATH, Mathematical Reviews, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the catalogue of Russian Post is ПН145

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`
Website: `https://logicalinvestigations.ru`

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2023. Том 29. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «09.00.00 – философские науки»)

Подписной индекс каталога Почты России — ПН145

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 426

Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`

Сайт: `https://logicalinvestigations.ru`

TABLE OF CONTENTS

В НОМЕРЕ

Логические исследования
2023. Т. 29. № 1. С. 9–29
УДК 165.0

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 1, pp. 9–29
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-9-29

Философия и логика
Philosophy and logic

И.А. Карпенко

Некоторые предварительные условия для создания «многомировой теории всего» и развития интеллектуальной интуиции*

Иван Александрович Карпенко
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономки».
Российская Федерация, 109028, г. Москва, Покровский бульвар, д. 11.
E-mail: gobzev@hse.ru

Аннотация: В статье подвергаются сомнению некоторые классические принципы логики, основанные на традиционной интеллектуальной интуиции. В частности, оспаривается интуитивная приемлемость требования непротиворечивости, принципа «из противоречия следует все, что угодно», закона исключенного третьего и некоторых других.

В литературе, особенно логической, этой проблематике посвящено множество исследований в течение XX–XXI вв. В настоящей работе формулируется новый подход, основанный на гипотезе «многомировой теории всего» — гипотезе, которая базируется на идее признания мультивселенной как актуальной реальности. Такая гипотеза бросает вызов существующим подходам к научному исследованию, понятию и критериям научной теории. Она требует отказа от ряда традиционных представлений, например от той роли классического эксперимента в обосновании теории, которую он играет как интуитивно приемлемый (в «многомировой теории всего» он таковым не является).

Работа исходит из допущения, что мультивселенная является объективной реальностью. Для обоснования основной идеи не важно, какая именно из распространенных в настоящее время концепций множества миров близка к действительности, значение имеет только что, что такая модель должна быть логически совместима с соответствующими теориями в физике и космологии (например, многомировая интерпретация квантовой механики, струнный ландшафт, хаотическая инфляция и некоторые другие). При этом, конечно, остается фактом, что эти модели имеют статус гипотез.

Высказывается предположение, что интеллектуальная интуиция, соответствующая корректному описанию мира, должна основываться на многомировом подходе, поскольку именно такой подход позволяет снять некоторые нерешенные проблемы как контринтуитивные. Обосновывается, что соответствующим логическим базисом для такой теории может стать паранепротиворечивая логика (или квантовая логика, возможно, совместимая с ней, что нужно показывать отдельно) как строящаяся на представлениях, приближенных к фундаментальному устройству мира.

* Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 22-18-00450, https://rscf.ru/project/22-18-00450/

Ключевые слова: непротиворечивость, паранепротиворечивость, мультивселенная, теория всего, космология, интуиция, эксперимент

Для цитирования: *Карпенко И.А.* Некоторые предварительные условия для создания «многомировой теории всего» и развития интеллектуальной интуиции // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 1. С. 9–29. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-9-29

Введение

На сегодняшний день в космологии существует несколько рабочих концепций множества миров[1], рабочих в том смысле, что они логически совместимы с базовыми теориями, на которых они основаны, и предлагают ряд важных следствий для развития философии науки. Эти следствия имеют как онтологический, так и эпистемологический характер. В первую очередь они важны для понимания того, как может быть устроен мир на фундаментальном уровне и как должны работать механизмы его познания, и более того — могут очерчивать границы этого познания.

Очевидно, ни одна из этих концепций на сегодняшний день не имеет экспериментального обоснования (и может оказаться так, что не получит). Все они могут оказаться неверны. Тем не менее то, что они совместимы с работающими физическими теориями, и то обстоятельство, что значительная часть научного сообщества принимает их, говорит о том, что они заслуживают серьезного отношения[2].

Здесь под многомировыми моделями, история которых насчитывает столетия, будут пониматься лишь те, которые коррелируют с современной физикой и космологией, и являются научно детерминированными. Мы опираемся на такие модели, как многомировая интерпретация Эверетта [Everett, 2015], сценарий хаотической инфляции [Linde, 1982; Linde, 1983], модель струнного ландшафта [Susskind, 2003] и некоторые другие.

Все эти модели предполагают существование других вселенных. Если основная идея — идея о том, что фундаментальная реальность является многомировой, — верна, то это приводит к интересным и важным выводам, имеющим существенное значение для лучшего понимания того, чем являются (или должны являться) теория, закон, эксперимент и некоторые

[1] В тексте статьи используются выражения «мультивселенная», «многомировые концепции», «многомировые модели» как синонимичные и служат обозначением для любых вариантов мультивселенных. Мы рассматриваем из как совместимые, более того, для наших целей даже требуется их совмещение. Там, где речь идет о конкретных моделях, используются соответствующие принятые в научной литературе названия: «многомировая интерпретация», «хаотическая инфляция», «струнный ландшафт» и т.д.

[2] Более того, в современном научном сообществе уже невозможно отвергать с полной уверенностью, что мир представляет собой мультивселенную, но в это можно не верить.

другие основополагающие элементы научного исследования. Кроме того, это позволит объяснить некоторые факты, касающиеся логических систем и интеллектуальной интуиции в целом, а также ответить на вопрос, чем может быть вызвана контринтуитивность некоторых базовых принципов классической логики.

1. Многомировые модели

Одно из преимуществ многомировых моделей заключается в том, что они снимают проблему тонкой настройки вселенной (см. [Rees, 2001; Colyvan et al., 2005]). Это спорный вопрос, некоторые считают, что скорее это отказ от решения проблемы, чем ее решение. По крайней мере, можно сказать, что они ее снимают. Проблема тонкой настройки состоит в том, что существует ряд фундаментальных констант (космологическая постоянная, скорость света, гравитационная постоянная, постоянная Планка, масса электрона и протона, заряд электрона и т.д.), незначительное изменение которых привело бы к невозможности существования вселенной в том виде, в котором она существует. По этой причине возникают правомерные вопросы — почему эти константы имеют именно такие значения? Могли бы они быть другими? Физические теории, которые изучают их, ответы на эти вопросы не дают. Эти константы не выводятся, например, в Стандартной модели, но их можно получить из эксперимента (см. [Nagashima, 2013]). То есть фундаментальные параметры нашего мира не предсказываются существующими теориями и никак не объясняются — они таковы, просто потому что таковы.

Именно это обстоятельство существенно пополнило ряды сторонников мультивселенной, начиная с последней четверти XX в. В самом деле, если нет никаких причин, почему параметрам нельзя быть другими, логично (в соответствии с принципом достаточного основания) предположить, что существуют другие миры, где реализованы все возможные сценарии. Разумеется, это не более чем предположение, никто не наблюдал эти миры (хотя, как уже отмечалось, соответствующие гипотезы в ряде случаев совместимы с рабочими физическими теориями и могут быть описаны математически). Однако, как нам представляется, предположение вполне разумное — до тех пор, пока не появится физическая теория, которая предскажет (позволит вывести с помощью имеющихся у нее инструментов) базовые константы нашего мира. Но, как нам представляется, такой теории никогда не будет (хотя, конечно, можем и ошибаться в этом вопросе). Не будет по той причине, что если подлинная реальность — это мультивселенная, то такой теории не может быть. Но может быть создано то, что часто называют громким термином «Теория всего» [Tegmark, 1988].

Обычно под «Теорией всего» понимается теория, которая объединяет все фундаментальные взаимодействия [Barrow, 2008]. Такую теорию также называют «Квантовой теорией гравитации» [Oriti, 2009], потому что гравитационное взаимодействие — единственное, которого нет в квантовой теории поля в виде Стандартной модели. Мы здесь хотим расширить понимание «Теории всего». Существующие претенденты на звание Теории всего, например теория суперструн, предлагают довольно сложные модели, трудно соотносимые с наблюдаемой реальностью. В теории суперструн мы видим дополнительные пространственные измерения [Witten, 1995], многомерные браны и очень большое число вариантов компактификации измерений, которые называются многообразиями Калаби-Яу. Теория не дает никакого инструмента вычисления того многообразия, которое описывало бы нашу вселенную. Все эти многообразия выглядят как равноправные — как различные варианты реализации вселенной, иначе говоря, как описания разных миров.

Многомировая теория всего (если такая появится) — фундаментальная теория, претендующая на описание всех физических взаимодействий во всех возможных мирах — в принципе не может содержать такие инструменты и делать такие предсказания. Потому что она рассматривает все возможные миры как равноправные, и ни один из них не может быть выделенным, и, следовательно, теория будет предсказывать все теоретически возможные параметры (что, вероятно, и происходит в случае теории суперструн) [Yau, Nadis, 2010].

По этой причине, говоря о теории всего, мы подразумеваем такую теорию, которая описывает все возможные миры (не каждый в отдельности, иначе это было бы множество отдельных теорий, а задает общую модель и инструменты). Но это означает, что эксперимент в своем классическом эпистемологическом значении и практическом применении в такой теории теряет часть доказательной силы инструмента, подтверждающего и опровергающего теорию в целом. Если теория описывает множество миров с разными фундаментальными наборами параметров (и, как следствие, с разными законами природы) как равноправные в потенции существования, то эксперимент будет лишь указывать на связь частного аспекта теории с конкретным миром, где ставится эксперимент, но не будет подтверждать теории в целом. Поскольку такая теория должна предсказывать все возможные параметры, не выделяя какие-либо. Вопрос о том, каким должен быть новый тип эксперимента и на каких основаниях он должен строиться, пока остается открытым.

Развитие квантовой механики, популяризация работы Эверетта, создание Аланом Гутом инфляционной модели также сильно поспособствовали увлечению многомировыми концепциями. Квантовая механика в самой своей основе содержит важный принцип, говорящий, что все возможное (допустимое в рамках физики) может произойти. В одномировой интерпретации может, но не обязательно происходит. Если вероятность события чрезвычайно мала, то принято считать, что не происходит. Но многомировая интерпретация усиливает принцип: все возможное обязательно происходит, поскольку в параллельных вселенных должны реализоваться все возможные исходы.

Таким образом, наша гипотеза состоит в том, что реальность вполне может оказаться многомировой, и это объяснило бы не только проблему тонкой настройки, но и некоторые вопросы, связанные с интеллектуальной интуицией.

2. Об интеллектуальной интуиции

Интеллектуальная интуиция различалась в различные эпохи в зависимости от определенного культурного опыта, уровня развития, количества и качества знаний. Очевидно, что в древнее время, и даже в относительно недавнее — так называемое Новое время, она была существенно иной, чем сейчас (при этом нужно учитывать, что и у разных людей с разным уровнем образования она может быть разной). Есть много работ, посвященных интеллектуальной интуиции и ее видам (например, см. [Weinberg et al., 2001; Chudnoff, 2020; Van-Quynh, 2019]).

Интеллектуальная интуиция — это философская абстракция, призванная обозначать некую мыслительную способность (ее нет в нейробиологии, хотя, вероятно, в перспективе возможно осуществить нейробиологическую редукцию интуиции). В философии математики есть обширная литература, посвященная интеллектуальной интуиции, однако это не совсем то, что обычно понимается под интуицией в философии. Постараемя прояснить, что под интуицией понимается конкретно здесь.

В философии, говоря об интеллектуальной интуиции, чаще всего отсылают к Декарту, идеям Спинозы, Юма, Локка и концепциям Канта, Фихте, Шеллинга и других, при этом речь обычно идет об «интеллектуальном созерцании», которое и приравнивается к интуиции. Чертами интуиции объявляются очевидность, ясность, отчетливость, достоверность, фундаментальность и другие. Формулировка Декарта, где он называет интуицию отчетливым пониманием ясного ума объекта познания [Декарт, 1989, p. 84] оказывается актуальной с некоторыми оговорками и сейчас (с учетом размытости определений естественного языка). Нам бы хотелось добавить для понимания интеллектуальной интуиции, что это еще и некая общечеловеческая способность мыслить с опорой на некоторые универсальные принципы. Например, о наличии такой интуиции говорит общее (относительно) единодушие в принятии базовых правил мышления, способность понимать и принимать математические доказательства и наличие консенсуса по этому вопросу. E. Chudnoff в недавней статье [Chudnoff, 2020] предлагает три типа различной интуиции: полученная в ходе опыта, улучшенная — которая противоречит тому, что основано на здравом смысле, и интуиция, направляемая кем-то (экспертом, обучающим новичка), A. Van-Quynh [Van-Quynh, 2019, pp. 219–241], придерживаясь той же позиции, показывает, опираясь на феноменологию, аналогию между математической и обычной (перцептивной интуицией).

Какова природа интуиции? Обусловлена она исключительно культурными факторами, средой, или же есть генетические факторы, задающие некие общие принципы формирования человеческого мозга? Вероятно, имеет место и то, и другое, современные проекты по картированию мозга [Filler, 2009, pp. 1–76] косвенно свидетельствуют о том, что некоторые социокультурные факторы, которые традиционно считались порождением общественной жизни, могут иметь биологическое происхождение и возникают в ходе эволюции (требующие тем не менее развития в социальной среде), например та же способность к абстрактному мышлению, тесно связанная с усвоением грамматических структур.

Оставив этот сложный вопрос в стороне, ограничимся некоторыми замечаниями общего характера. Во-первых, интуиция эволюционирует. Это можно доказать на примере развития математики. Еще средневековым математикам понятия иррациональных чисел, комплексных чисел и многих других математических объектов и структур были чужды и непонятны — в том смысле, что они были контринтуитивны. Нам же они (разумеется, не всем, есть общества, где это не так) кажутся вполне интуитивными — по той причине, что мы осваиваем основы математики уже в раннем возрасте. То же касается, например, принципов общей теории относительности — для ученых эпохи Ньютона они показались бы невообразимыми и противоречащими интуиции, в то время как современному физику они, напротив, представляются совершенно очевидными именно в плане интуиции (и представимыми — Эйнштейн формулировал их, основываясь на геометрической представимости).

Квантовую механику называют контринтуитивной до сих пор — в силу ее очевидного противоречия здравому смыслу и повседневному опыту, сформировавших классическую интуицию (но, как представляется, это временно, и есть основания полагать, что новые поколения физиков, выросших после создания квантовой теории в начале XX в., не считают ее контринтуитивной); это может быть обусловлено обстоятельствами эволюции, для которой нецелесообразно формирование навыков распознавания элементов и явлений микромира — в естественном отборе это не играло положительной роли, и если соответствующие мутации и возникали, у них было мало шансов закрепиться в популяции[3]. Но, например, принятие интерпретации Эверетта с декогеренцией делает квантовую механику для части научного сообщества интуитивно приемлемой. То есть, видимо, интуиция совершенствуется, включая ранее непредставимое и непостижимое в систему научного мировоззрения. Надо полагать, это естественный процесс. Ясно, что интуиции могут быть разными, но в определенных пределах — едва ли найдется интуиция, для которой утверждение $2+2=4$ окажется контринтуитивным (хотя и тут есть возражения).

Ясно, что она очень сильно зависит от уровня развития науки и образования. У людей со сформированным мифологическим мировоззрением интеллектуальная интуиция совсем иная, чем у человека с научным мировоззрением, — она опирается на специфический опыт, не предполагающий опору на рациональность и критическое мышление. Но даже если говорить только о рациональном опыте (чем мы и будем заниматься, оставив в стороне мифологическую картину мира), то и тут он очень разный.

Вполне очевидно, что интеллектуальная интуиция прогрессирует — меняется с ростом знания. То, что было неприемлемо ранее, становится со временем само собой разумеющимся.

Наиболее верной нам представляется интуиция, которая опирается на максимум абстрагирования от предметного мира, и это математическая интуиция [Tieszen, 2015; Van-Quynh, 2019]. Однако, хотя математика в значительной степени и свободна от привязки к субъективным оценкам, мифологии, влияния повседневной культуры, ее язык парадоксальным образом оказывается недостаточным, чтобы говорить о множестве проблем, например о тех, о которых говорится в настоящей работе. Причин может быть несколько. Одна из них, спорная и радикальная: все, о чем нельзя сказать на языке математики, — на самом деле фикция, потому что в реальности этому ничего не соответствует, и, следовательно, не стоит говорить о таких вещах. Сторонники этого подхода, математические платоники, полагают,

[3]Вообще, квантовая механика — это особый случай, поскольку она построена на изучении микроскопического, которое проявляет себя иначе, чем макроскопическое, в то время как наш повседневный опыт, как было отмечено, в значительной степени сформирован в ходе эволюции, как инструмент выживания в макроскопическом мире, на это ориентированы наши органы чувств и восприятие. Однако совсем не обязательно осязать электроны и видеть отдельные фотоны, чтобы их поведение стало соответствовать интеллектуальной интуиции. Для ученых и инженеров, чья работа лежит в основе функционирования современной электроники, использующей данные исследований в области квантовой теории поля, микромир ведет себя вполне интуитивно.

что подлинная реальность — математические структуры, и они и порождают все (качественное и количественное). Другая причина — язык математики пока еще недостаточно выразителен, чтобы сказать в нем обо всем понятно. И третья причина — необходим некий метаязык, например язык философии науки, который берет на себя функцию интерпретации того, о чем говорит наука. Конечно, с точки зрения математического платоника (см. [Panza, Sereni, 2013; Balaguer, 1998]), такая интерпретация не есть прояснение и объяснение, а наоборот, затуманивание вещей, потому что подлиная реальность — это как раз сами по себе математические структуры в чистом виде [Tieszen, 2011; Côté, 2013]. Но мы все же полагаем, что философия науки (с ее дискурсивными практиками) необходима, по крайней мере на современном этапе.

Основываясь на вышесказанном, мы будем понимать под интуицией, в соответствии с философской традицией, способность ясно и отчетливо понимать, воспринимать и познавать мир (точнее, отдельные его аспекты) с опорой на специфику имеющегося у субъекта знания.

3. Непротиворечивость

Существует большое количество различных формальных систем, начиная с классической, интуиционистской, релевантной и кончая паранепротиворечивой и квантовой, которые могут строиться на разных интуитивных основаниях — можно сказать, что им соответствуют разные интуиции в смысле Декарта (то что для интуициониста ясно и отчетливо представляется его разуму, для логициста нет). Тем не менее требования непротиворечивости, полноты, законы исключенного третьего и Дунса Скота и некоторые другие классические принципы остаются важными условиями, которым часто должна удовлетворять теория (например, физическая). Например, непротиворечивость — требование, согласно которому в теории не может быть истинной конъюнкция A и не верно A, поскольку это приведет к тривиальности теории (так как из противоречия следует все что угодно, множество формул и теорем теории совпадает) и выводимым станет любое возможное утверждение, что сделает теорию бесполезной.

В 1930 г. Курт Гёдель показал [Gödel, 2001, pp. 144–195], что если формальная арифметика не содержит противоречий, то в ней есть формула, которая является не выводимой и истинной (неопровержимой). Немноимм позже (1936) Алонзо Чёрч и Алан Тьюринг доказали неразрешимость исчисления предикатов первого порядка. Кроме того, было показано, что если формальная арифметика непротиворечива, то в ней нельзя вывести формулу, утверждающую ее непротиворечивость. Следовательно, программа Гильберта оказывается невыполнимой (вторая проблема из списка Гильберта [Hilbert, 1902, pp. 437–479]).

Таким образом, непротиворечивость (а также полнота и разрешимость) очень важна для теории, и, возможно, для физической даже в большей степени, чем для чисто формальной. Однако может найтись подход, согласно которому принцип «из противоречия следует все что угодно» и связанное требование непротиворечивости оказываются контринтуитивными и считаются обоснованными лишь благодаря другим принципам и требованиям, которые кажутся приемлемыми в силу интеллектуальной интуиции, основанной на неверных онтологических представлениях. Нам представляется, что таким будет подход, который опирается на совмещение многомирового подхода и паранепротиворечивую логику.

Также, вероятно, для более корректного описания реальности требуется квантовая логика (см. одну из первых работ в этой области [Birkhoff, Neumann, 1936] и более современные подходы [Васюков, 2005]). Утверждение «пациент жив и мертв» (если пациент размером с элементарную частицу и не декогерирован) будет истинным либо неопределенным (он жив и мертв одновременно — на 50 процентов жив, на 50 процентов мертв), утверждение «пациент жив и не жив» (которое, в отличие от предыдущего, как раз содержит противоречие) также будет истинным либо неопределенным, но точно не ложным. Более того, конъюнкция всех вероятных промежуточных состояний пациента с комплекснозначными весами будет также истинной.

В квантовой механике исход любого события можно интерпретировать как имеющего место с какой-то вероятностью, обусловленной волной вероятности этого события (или его волновой функцией, эволюцию которого во времени задает уравнение Шрёдингера). До акта измерения все исходы равноправны, различаются лишь степени вероятности. В этом случае исход события задается суперпозицией, которая является сложением вероятностей. Поэтому конъюнкция: «электрон находится в A и не находится в A», вероятно, будет ложной (поскольку в A он все же находится, как и во всех других возможных местах одновременно, хотя это вопрос интерпретации, в строгом смысле он нигде не «находится» в обычном понимании, он как бы «размазан» в пространстве-времени), но конъюнкция «электрон находится в A и находится не в A» будет уже истинной[4]. В первом случае

[4] Следует обратить внимание на разность утверждений типа «пациент жив и не жив» и «электрон находится в A и не находится в A». Они не однотипны и не могут быть формализованы одинаковым образом, в первом случае идет речь о состояниях, во втором о фактах.

мы получаем классическое противоречие, а во втором нет. Но даже в первом случае принцип «из противоречия следует все, что угодно» не должен работать.

Что касается паранепротиворечивой логики, существующие системы, наверное, слишком слабы для того, чтобы быть инструментом описания реальности, тем не менее именно она (наряду с квантовой логикой) может стать претендентом для описания многомировой реальности, в силу отказа от обсуждаемого принципа.

4. О возможных и невозможных мирах с точки зрения физики и логики

Логика как раз та наука, которая в принципе занимается возможными мирами и, можно сказать, в целом является наукой о мультивселенной. В том смысле, что каждая логическая система, которых может быть бесконечное множество, является описанием какого-то возможного мира. Логика не описывает физику того или иного мира, но она дает инструменты, позволяющие говорить о том, как устроены миры — об их гносеологической структуре.

В логике нет эксперимента, который подтвердил бы, что та или иная система описывает именно наш мир, поэтому нельзя сказать, что классическая, интуиционистская или релевантная логика соответствуют нашему миру. Но в каком-то смысле соответствуют — биты информации 0 и 1 используются в программировании электроники, и техника, построенная на соответствующих логических принципах, работает. Может использоваться троичное представление информации (основанное на трехзначных логиках). Взаимодействие атомов можно рассматривать как вычислительные процессы — их столкновения можно представить в виде операций «не», «и», «или», «копировать», производимыми над битами (обычно это 1 и 0 по причине удобства применения двоичной системы счисления — аналогично в квантовой логике кубиты имеют значения, основанные на 1 и 0) [Lloyd, 2013]. Таким образом, определенное соответствие можно установить, используя логические операции для цифрового описания реальности. Но в строгом смысле формальная система не описывает физический мир.

Можно различать логически и физически возможные миры и обосновывать, что это не совпадающие множества [Pruss, 2003]. Наша гипотеза состоит в том, что сознание должно быть обусловлено физикой конкретного мира (базовыми условиями — законами природы) в том случае, если оно есть в этом мире [Карпенко, 2021]. В таком случае все мыслимое оказывается обусловленным этими базовыми условиями и оно возможно, и, следовательно, ничего невозможного помыслить нельзя (в том смысле, что если мы мыслим нечто невозможное, например круглый квадрат или вечный двигатель, то мы на самом деле не их мыслим, а нечто нам более привычное — представляем двигатель внутреннего сгорания, квадрат и вписанный в него круг — правда в таком случае остается вопрос: но что-то мы все же имеем в виду, говоря об этих несуществующих объектах?)[5]. В разных фундаментальных условиях могут формироваться принципиально разные типы мышления (а также логика и математика), и может оказаться так, что мыслимое в одном мире немыслимо в другом. Однако в рамках многомировой теории всего можно говорить о «мышлении вообще». Таким образом, предполагаем, что логические и физические возможные миры совпадают.

5. Паранепротиворечивость

Отказ от принципа «из противоречия следует все что угодно» и попыток любой ценой избежать противоречий обсуждался довольно давно, но первые отчетливые попытки построить системы, допускающие противоречия появились в XX в. [Jaśkowski, 1969]. Паранепротиворечивая логика допускает противоречия, т.е. она противоречива — но в ней отвергается одно из главных контринтуитивных следствий классической логики: множество формул и теорем в ней не совпадает, несмотря на противоречивость [Szmuc et al., 2018]. Действительно, такая теория, в которой выводится абсолютно все, что можно построить с помощью определения формулы, заданного в этой теории, кажется бессмысленной[6].

Отказ от закона непротиворечия требует отказа от одного (или сразу обоих) из двух правил: введение дизъюнкции иди дизъюнктивного силлогизма, интуитивная приемлемость которых также находится под вопросом (см. [Béziau, 2000] и [Priest, 2002]).

Метод доказательства от противного в паранепротиворечивой логике должен применяться с осторожностью: с одной стороны, с его помощью нельзя доказать любое утверждение, с другой стороны, отрицание любого исходного утверждения может быть доказано, если мы получили какое угодно противоречие в ходе доказательства — что также представляется сомнительным в плане интуитивной приемлемости.

С паранепротиворечивыми логиками связаны интуиционистская и релевантные логики. В релевантной логике только такая импликативная формула может быть теоремой, в которой антецедент и консеквент имеют общее содержание. Поэтому принцип «из противоречия следует все что

[5]См. статью Карпенко А.С. [Карпенко, 2015].

[6]Хотя, как обсуждалось выше, в логике «многомировой теории всего» как раз и должно выводиться все, что угодно (т.е. то, что возможно). Но непонятно, как работать с такой логикой, не ясна ее эффективная применимость.

угодно» в релевантной логике не работает ($(A \wedge \bar{A}) \to B$ не может быть теоремой), и, таким образом, релевантные логики можно рассматривать как паранепротиворечивые.

Связь с интуиционистской логикой более сложная, в ней закон исключенного третьего ($A \vee \bar{A}$) не эквивалентен истине, а в паранепротиворечивой логике противоречие ($A \wedge \bar{A}$) не эквивалентно лжи, следовательно, интуиционистская и паранепротиворечивые логики дуальны по отношению друг к другу (но они не совпадают, см. [Brunner, Carnielli, 2005]).

По сравнению с классической логикой паранепротиворечивая логика оказывается более слабой, поскольку позволяет делать меньше пропозициональных выводов.

В нашем случае важно, что в паранепротиворечивой логике $A \wedge \bar{A}$ не является формулой, из которой обязательно следует любое высказывание. Более того, это утверждение может оказываться истинным.

6. Требование противоречивости

Большинство логических систем строится на основе функций истинности, которые предполагают наличие, как правило, двух базовых значений «и» и «л» (либо 1 и 0). Значений может быть больше, может быть и бесконечное их число.

Это оправдано тем, что любой факт можно оценивать либо как имеющий место, либо как нет. Можно сказать: «Заряд электрона имеет значение N» (которое, допустим, соответствует наблюдаемому $1{,}602176634 \cdot 10^{-19}$ Кл). Это утверждение истинно. Противоречивым по отношению к нему будет высказывание «Неверно, что заряд электрона имеет значение N». Здесь важно акцентировать, что утверждение о наличии у электрона какого-то другого заряда не будет формально противоречивым по отношению к исходному, только его отрицание, т.е. утверждение о том, что электрон не имеет конкретно такой заряд.

Конъюнкция этих двух утверждений, очевидно, будет противоречием, и в ряде логических систем, в первую очередь классической логике, из нее будет следовать все, что угодно, т.е. любое произвольное утверждение, которое можно построить в языке этой системы. Это легко доказать, используя правила исключения конъюнкции, введения дизъюнкции и дизъюнктивный силлогизм. Как уже отмечалось, такая теория, в которой выводится все, является тривиальной и, в силу этого, бесполезной — любое утверждение в ней является теоремой.

Интуитивно на первый взгляд избегание противоречий кажется приемлемым — в самом деле, утверждения о том, что электрон имеет определенный заряд и в то же время его не имеет, кажутся несовместимыми по крайней мере в условиях существования единственной вселенной, в которой, как предполагается, электрон повсюду имеет один и тот же заряд.

Ситуация меняется в случае мультивселенной, например, в модели струнного ландшафта (согласно которой каждому ложному вакууму соответствует свой набор вселенных, а их число очень велико [Ashok, Douglas, 2004]), где могут быть реализованы любые физические возможности[7].

Если модель верна и наша вселенная не единственная, то конъюнкция «Заряд электрона имеет значение N» и «Неверно, что заряд электрона имеет значение N» не будет противоречием, из которого следует все, что угодно. Первое утверждение будет частично истинным, поскольку среди возможных зарядов такой заряд имеется в некоторых вселенных (по крайней мере одной). Второе утверждение будет частично ложным[8], по той же причине — где-то это так, а где-то не так. Но в любом случае, какое бы значение ни приняла их конъюнкция, принцип «из противоречия следует все, что угодно» не работает. Можно записать утверждения в языке логики предикатов: первое будет тогда $\exists w P(w, N)$, второе $\exists v \neg P(v, N)$. В таком случае появляется необходимость различать миры, чтобы не было противоречия, но речь идет как раз о возможности универсального описания, а не рассмотрения частных ситуаций, из которых слагается «многомировая теория». Волновая функция в квантовой механике означает, что значение может быть не только 1 или 0, но и 1 и 0 одновременно (то есть нельзя сказать, что на самом деле значение 1 в одном месте, а 0 в другом, именно значение кубита будет сразу 1 и 0). Важно также отметить, что речь не идет о модальностях ($\diamond N \wedge \diamond \neg N$), так как имеет место скорее необходимость — все возможные исходы должны реализовываться (в случае многомирового подхода). Отдельный вопрос, что должно следовать из этой конъюнкции в «многомировой теории», но чтобы дать ответ, нужно построить соответствующую формальную логическую систему.

Этот подход (принятие противоречий и отказ от принципа «из противоречия следует все, что угодно») в большей степени кажется нам интуитивно-приемлемым[9], чем исходный классический принцип. Именно в случае многомирового подхода требование непротиворечивости теории представляется нам контринтуитивным (и избыточным). Факт, который в

[7] Мы наблюдаем определенное значение космологической постоянной, однако (помимо того, что результат, полученный в экспериментах, противоречит предсказаниям теории) оно может быть каким угодно (см. [Weinberg, 1987; Barrow, Shaw, 2011]).

[8] Возможно, что логика, построенная на основе многомировых моделей, должна стать логикой, в которой истинностные значения отсутствуют (так как может оказаться так, что полностью ложных фактов не будет).

[9] Возникает смелое предположение, что наша интуиция в своей основе многомировая, но пока доказать это не представляется возможным.

мире А является невозможным, возможен в мире В. Для фундаментальной теории, которая описывает все возможные миры как равноправные, нет предпочтительных миров и, следовательно, фактов. Поэтому универсальные утверждения, которые являются теоремами в рамках всей теории, а не отдельного мира, не должны быть непротиворечивыми. Напротив, они вполне могут быть противоречивыми — это будет подтверждать полноту теории. По крайней мере, инструмент паранепротиворечивой логики позволит решить часть парадоксов [Woods, 2003].

7. Заключение

Целью настоящей работы было показать, что многомировые модели выдвигают новые требования к принципам научной теории и ее основополагающим критериям, вроде непротиворечивости и других, связанных с ней. В качестве рабочей модели за основу бралась гипотетическая «многомировая теория всего», основанная на существующих моделях мультивселенной современной физики и космологии. Многомировая теория всего должна описывать в буквальном смысле все — все физически (и логически) возможное — как равноправное. В таком случае у нее может не оказаться инструментов для получения параметров какого-то избранного, выделенного мира, потому что такого мира не существует (раз все миры равноправны). По крайней мере не ясно, что может играть роль такого инструмента, но классический эксперимент на эту роль не подходит в силу привязки эксперимента к миру, в котором он ставится.

Это приводит к предположению, что ряд представлений, которые вызывают сомнения относительно их интуитивной приемлемости, не верны, потому что построены на одномировой трактовке реальности, в то время как принятие многомировой снимает эти проблемы.

Строго говоря, эксперимент не позволяет узнать универсальные параметры, потому что вместо них есть много разных. Но он может быть важен как средство доказательства того, что другие вселенные существуют, кроме того, без него не может быть реализована техника — значения фундаментальных констант, необходимых для работы современной электроники, мы получаем из опыта, а не из теории, которая не может их предсказать (но может, если теория полна, предсказать все возможные значения). В результате многомировая теория не может быть обоснована с помощью классического эксперимента, если она верна. Это означает, что нужно либо менять и расширять понятие эксперимента, закона, теории и т.д., либо считать достаточным какой-то другой способ обоснования — например, математический [Bangu, 2020].

Второй вывод работы состоит в том, что требование непротиворечивости может являться не только не обязательным, а напротив, лишним, и от него следует отказаться при построении «многомировой теории всего». Вероятно, «многомировая теория» должна строиться на нетипичной логической основе, где предполагается отказ от этого и ряда других классических представлений, которые порождают контринтуитивные следствия. Представляется, что паранепротиворечивая логика (совместно с квантовой, если получится обеспечить такую совместимость) как раз и сможет стать основой, которая позволит построить интуитивно приемлемое описание теории нового типа (или по крайней мере стимулировать развитие интеллектуальной интуиции в правильном направлении). Таким образом, следующий этап — построение соответствующей семантики для многомировой теории всего. Очевидно, могут быть возражения в том плане, что приведенные здесь аргументы можно формализовать в классической логике (например, в логике предикатов) в непротиворечивом виде. Но по этому поводу уже было возржание, что это так, если мы говорим не об универсальной «многомировой теории всего». При формальном подходе этот момент не совсем очевиден, однако он становится таковым при физической оптике — как уже отмечалось, местоположения, скорости и параметры элемантарных частиц могут быть разными одновременно («электрон находится в А и электрон находится не в А» — истинно, и все, что угодно следовать отсюда не может; а «электрон находится в А и неверно,что электрон находится в А» — ложно, но только потому что он находится повсюду (до момента измерения), и отсюда опять же не следует все, что угодно, что электрон, например, находится в С (да, он находится там, но не по причине противоречия)). Именно интуиция, основанная на принятии таких фактов как очевидных, и представляется нам более приемлемой по сравнению с классической.

Литература

Васюков, 2005 – *Васюков В.Л.* Квантовая логика. М.: ПЕР СЭ, 2005. 191 с.

Декарт, 1989 – *Декарт Р.* Сочинения. В 2 т. / Под ред. В.В. Соколова. Т. 1. М.: Мысль, 1989. 654 с.

Карпенко, 2015 – *Карпенко А.С.* В поисках реальности: Исчезновение // Философия науки. 2015. Т. 20. С. 36–72.

Карпенко, 2021 – *Карпенко И.А.* Критика солипсизма в контексте многомировых моделей // Философия науки и техники. 2021. Т. 26. № 1. С. 78–90.

Ashok, Douglas, 2004 – *Ashok S., Douglas M.* Counting flux vacua // Journal of High Energy Physics. 2004. Vol. 1. P. 60.

Balaguer, 1998 – *Balaguer M.* Platonism and Anti-Platonism in Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 1998. 240 p.

Bangu, 2020 – *Bangu S.* Mathematical Explanations of Physical Phenomena // Tandf: Australasian Journal of Philosophy. 2020. URL: `https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00048402.2020.1822895?journalCode=rajp20` (дата обращения: 31.08.2022).

Barrow, 2008 – *Barrow J.* New Theories of Everything. Oxford: Oxford University Press, 2008. 272 p.

Barrow, Shaw, 2011 – *John D.B., Douglas J.Sh.* The value of the cosmological constant // General Relativity and Gravitation. 2011. Vol. 43. No. 10. P. 2555–2560.

Béziau, 2000 – *Béziau J.-Y.* What is Paraconsistent Logic? // Frontiers of Paraconsistent Logic / Ed. by D. Batens et al. Baldock: Research Studies Press, 2000. P. 95–111.

Birkhoff, Neumann, 1936 – *Birkhoff G., Neumann von J.* The Logic of Quantum Mechanics // Annals of Mathematics. 1936. Vol. 37. P. 823–843.

Brunner, Carnielli, 2005 – *Brunner A., Carnielli W.* Anti-intuitionism and paraconsistency // Journal of Applied Logic. 2005. Vol. 3. No. 1. P. 161–184.

Chudnoff, 2020 – *Chudnoff E.* In Search of Intuition // Australasian Journal of Philosophy. 2020, Vol. 98. No. 3. P. 46–480.

Colyvan et al., 2005 – *Colyvan M., Garfield J., Priest G.* Problems with the Argument from Fine Tuning // Synthese. 2005. Vol. 145. P. 325–338.

Côté, 2013 – *Côté G.* Mathematical Platonism and the Nature of Infinity // Open Journal of Philosophy. 2013. Vol. 3. No. 3. P. 372–375.

Everett, 2015 – *Everett H.* The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics / Ed. by B. DeWitt. Princeton: Princeton University Press, 2015. 263 p.

Filler, 2009 – *Filler A.* The History, Development and Impact of Computed Imaging in Neurological Diagnosis and Neurosurgery: CT, MRI, and DTI // Nature Precedings. 2009. Vol. 7. No. 1. P. 1–76.

Gödel, 2001 – *Gödel K.* Kurt Gödel Collected works / Ed. by S. Feferman. Oxford: Oxford University Press. 2001. Vol. 1. 504 p.

Hilbert, 1902 – *Hilbert D.* Mathematical Problems // Bulletin of the American Mathematical Society. 1902. Vol. 8. No. 10. P. 437–479.

Jaśkowski, 1969 – *Jaśkowski S.* Propositional calculus for contradictory deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.

Linde, 1982 – *Linde A.* A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems // Physics Letters B. 1982. Vol. 108. No. 6. P. 389–393.

Linde, 1983 – *Linde A.* Chaotic inflation // Physics Letters B. 1983. Vol. 129. No. 3–4. P. 177–181.

Lloyd, 2013 – *Lloyd S.* The Universe as Quantum Computer. 2013. URL: `https://arxiv.org/pdf/1312.4455.pdf` (дата обращения: 23.01.2023).

Nagashima, 2013 – *Nagashima Y.* Elementary Particle Physics: Foundations of the Standard Model. Vol. 2. Wiley: New York, 2013. 646 p.

Oriti, 2009 – *Oriti D.* Approaches to Quantum Gravity. Toward a New Understanding of Space, Time and Matter. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 604 p.

Panza, Sereni, 2013 – *Panza M., Sereni A.* Plato's Problem: An Introduction to Mathematical Platonism. London: Palgrave-Macmillan, 2013. 322 p.

Priest, 2002 – *Priest G.* Paraconsistent Logic // Handbook of Philosophical Logic / Ed. by D. Gabbay and F. Guenthner. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Vol. 6 (2nd ed.), 2002. P. 287–393.

Pruss, 2003 – *Pruss A.R.* Actuality, Possibility, and Worlds. London: Continuum, 2011. 320 p.

Rees, 2001 – *Rees M.* Just Six Numbers: The Deep Forces That Shape The Universe. New York: Basic Books, 2001. 208 p.

Susskind, 2003 – *Susskind L.* The anthropic landscape of string theory. 2003. URL: `https://arxiv.org/pdf/hep-th/0302219.pdf` (дата обращения: 31.08.2022).

Szmuc et al., 2018 – *Szmuc D., Pailos F., Barrio E.* What is a Paraconsistent Logic? // Contradictions, from Consistency to Inconsistency / Ed. by J. Malinowski. and W. Carnielli. Berlin: Springer, 2018. P. 89–108.

Tegmark, 1988 – *Tegmark M.* Is 'the Theory of Everything' Merely the Ultimate Ensemble Theory? // Annals of Physics. 1988. Vol. 270. No. 1. P. 1–51.

Tieszen, 2011 – *Tieszen R.* After Godel: Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic. Oxford: Oxford University Press, 2011. 245 p.

Tieszen, 2015 – *Tieszen R.* Arithmetic, Mathematical Intuition, and Evidence // Inquiry: An Interdisciplinary Journal of Philosophy. 2015. Vol. 58. No. 1. P. 28–56.

Van-Quynh, 2019 – *Van-Quynh A.* The Three Formal Phenomenological Structures: A Means to Assess the Essence of Mathematical Intuition // Journal of Consciousness Studies. 2019. Vol. 26. No. 5–6. P. 219–241.

Weinberg, 1987 – *Weinberg S.* Anthropic bound on the cosmological constant // Physical Review Letters. 1987. Vol. 59. P. 2607–2610.

Weinberg et al., 2001 – *Weinberg J.M., Nichols S., Stich S.* Normativity and Epistemic Intuitions // Philosophical Topics. 2001. Vol. 29. No. 1. P. 429–460.

Witten, 1995 – *Witten E.* String theory dynamics in various dimensions // Nuclear Physics B. 1995. Vol. 443. No. 1. P. 85–126.

Woods, 2003 – *Woods J.* Paradox and Paraconsistency: Conflict Resolution in the Abstract Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 382 p.

Yau, Nadis, 2010 – *Yau S., Nadis S.* The Shape of Inner Space: String Theory and the Geometry of the Universe's Hidden Dimensions. New York: Basic Books, 2010. 400 p.

Ivan A. Karpenko

Some Preliminary Conditions for the Creation of the 'Many-Worlds Theory of Everything' and the Development of Intellectual Intuition

Ivan A. Karpenko
National Research University Higher Scool of Economics,
11 Pokrovsky Bulvar, 109028, Moscow, Russian Federation.
E-mail: gobzev@hse.ru

Abstract: The article questions some of the classical principles of thinking based on traditional intellectual intuition. In particular, the intuitive acceptability of the requirement of consistency, of the "anything follows from a contradiction" principle, of the law of the excluded middle, and some others are under challenge.

The literature, especially logical one, devotes many studies to this problem during the 20th–21st centuries. This paper formulates a new approach based on the "many-worlds theory of everything" hypothesis which states the idea of recognizing the multiverse as an actual reality. Such a hypothesis challenges the existing approaches to scientific research, the concept and the criteria of scientific theory. It requires the rejection as counterintuitive of several traditional ideas, for example, the role of experiment in substantiating a theory.

The work proceeds from the assumption that the multiverse is an objective reality. Which of the currently widespread many-worlds models is close to reality is irrelevant to substantiate the main idea here. The only thing that matters is that such a model should result from current research in modern physics and cosmology (for example, the many-worlds interpretation of quantum mechanics, the string landscape, the chaotic inflation, and some others).

The corresponding to an accurate description of the world intellectual intuition is suggested as based on a many-worlds approach since this very approach allows to remove some unresolved problems as counterintuitive ones. The article substantiates that paraconsistent and quantum logics can become the appropriate logical basis for such a theory as these use intuitive representations close to the actual state of the world (the fundamental structure of the world) as their basics.

Keywords: consistency, paraconsistent logic, multiverse, theory of everything, cosmology, intuition, experiment

For citation: Karpenko I.K. "Nekotorye predvaritel'nye usloviya dlya sozdaniya «mnogomirovoi teorii vsego» i razvitiya intellektual'noi intuitsii" [Some Preliminary Conditions for the Creation of the 'Many-Worlds Theory of Everything' and the Development of Intellectual Intuition], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 1, pp. 9–29. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-9-29 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is supported by Russian Science Foundation, project No. 22-18-00450, https://rscf.ru/project/22-18-00450/

References

Ashok, Douglas, 2004 – Ashok, S., Douglas, M. "Counting flux vacua", *Journal of High Energy Physics*, 2004, Vol. 1, p. 60.

Balaguer, 1998 – Balaguer, M. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1998. 240 pp.

Bangu, 2020 – Bangu, S. "Mathematical Explanations of Physical Phenomena", *Tandf: Australasian Journal of Philosophy*, 2020. [`https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00048402.2020.1822895?journalCode=rajp20`, accessed on 31.08.2022]

Barrow, 2008 – Barrow, J. *New Theories of Everything*. Oxford: Oxford University Press, 2008. 272 pp.

Barrow, Shaw, 2011 – Barrow, J.D., Shaw, D.J. "The value of the cosmological constant", *General Relativity and Gravitation*, 2011, Vol. 43, No. 10, pp. 2555–2560.

Béziau, 2000 – Béziau, J.-Y. "What is Paraconsistent Logic?", *Frontiers of Paraconsistent Logic*, ed. by D. Batens et al. Baldock: Research Studies Press, 2000, pp. 95–111.

Birkhoff, Neumann, 1936 – Birkhoff, G., Neumann von, J. "The Logic of Quantum Mechanics", *Annals of Mathematics*, 1936, Vol. 37, pp. 823–843.

Brunner, Carnielli, 2005 – Brunner, A., Carnielli, W. "Anti-intuitionism and paraconsistency", *Journal of Applied Logic*, 2005, Vol. 3, No. 1, pp. 161–184.

Chudnoff, 2020 – Chudnoff, E. "In Search of Intuition", *Australasian Journal of Philosophy*, 2020, Vol. 98, No. 3, pp. 46–480.

Colyvan et al., 2005 – Colyvan, M., Garfield, J., Priest, G. "Problems with the Argument from Fine Tuning", *Synthese*, 2005, Vol. 145, pp. 325–338.

Côté, 2013 – Côté, G. "Mathematical Platonism and the Nature of Infinity", *Open Journal of Philosophy*, 2013, Vol. 3, No. 3, pp. 372–375.

Descartes, 1989 – Descartes, R. *Sochineniya, 2 t.* [Essays, 2 vols], ed. by V. Sokolov. Vol. 1. Moscow: Mysl, 1989, 654 pp. (In Russian)

Everett, 2015 – Everett, H. *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, ed. by B. DeWitt. Princeton: Princeton University Press, 2015, 263 pp.

Filler, 2009 – Filler, A. "The History, Development and Impact of Computed Imaging in Neurological Diagnosis and Neurosurgery: CT, MRI, and DTI", *Nature Precedings*, 2009, Vol. 7, No. 1, pp. 1–76.

Gödel, 2001 – Gödel, K. *Kurt Gödel Collected works*, ed. by S. Feferman. Oxford: Oxford University Press, Vol. 1, 2001, 504 pp.

Hilbert, 1902 – Hilbert, D. "Mathematical Problems", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1902, Vol. 8, No. 10, pp. 437–479.

Jaśkowski, 1969 – Jaśkowski, S. "Propositional calculus for contradictory deductive systems", *Studia Logica*, 1969, Vol. 24, pp. 143–157.

Karpenko, 2015 – Karpenko, A.S. "V poiskah real'nosti: Ischeznovenie" [In Search of Reality: Disappearance], *Filosofija nauki* [Philosophy of Science], 2015, Vol. 20, pp. 36–72.

Karpenko, 2021 – Karpenko, I.A. “Kritika solipsizma v kontekste mnogomirovyh modelej” [Criticism of Solipsism in the context of many world models], *Filosofija nauki i tehniki* [Philosophy of Science and Technology], 2021, Vol. 26, No. 1, pp. 78–90.

Linde, 1982 – Linde, A. “A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems”, *Physics Letters B*, 1982, Vol. 108, No. 6, pp. 389–393.

Linde, 1983 – Linde, A. “Chaotic inflation”, *Physics Letters B*, 1983, Vol. 129, No. 3–4, pp. 177–181.

Lloyd, 2013 – Lloyd, S. “The Universe as Quantum Computer”, *Arxiv* 2013. [`https://arxiv.org/pdf/1312.4455.pdf`, accessed on 23.01.2023]

Nagashima, 2013 – Nagashima, Y. *Elementary Particle Physics: Foundations of the Standard Model*. Vol. 2. Wiley: New York, 2013. 646 pp.

Oriti, 2009 – Oriti, D. *Approaches to Quantum Gravity. Toward a New Understanding of Space, Time and Matter*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 604 pp.

Panza, Sereni, 2013 – Panza, M., Sereni, A. *Plato’s Problem: An Introduction to Mathematical Platonism*. London: Palgrave-Macmillan, 2013. 322 pp.

Priest, 2002 – Priest, G. “Paraconsistent Logic”, *Handbook of Philosophical Logic*, ed. by D. Gabbay and F. Guenthner. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Vol. 6 (2nd ed.), 2002, pp. 287–393.

Pruss, 2003 – Pruss, A.R. *Actuality, Possibility, and Worlds*. London: Continuum, 2011, 320 pp.

Rees, 2001 – Rees, M. *Just Six Numbers: The Deep Forces That Shape The Universe*. New York: Basic Books, 2001. 208 pp.

Susskind, 2003 – Susskind, L. “The anthropic landscape of string theory”, *Arxiv*, 2003. [`https://arxiv.org/pdf/hep-th/0302219.pdf`, accessed on 31.08.2022]

Szmuc et al., 2018 – Szmuc, D., Pailos, F., Barrio, E. “What is a Paraconsistent Logic?”, *Contradictions, from Consistency to Inconsistency*, ed. by J. Malinowski. and W. Carnielli. Berlin: Springer, 2018, pp. 89–108.

Tegmark, 1988 – Tegmark, M. “Is ‘the Theory of Everything’ Merely the Ultimate Ensemble Theory?” *Annals of Physics*, 1988, Vol. 270, No. 1, pp. 1–51.

Tieszen, 2011 – Tieszen, R. *After Godel: Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press, 2011. 245 pp.

Tieszen, 2015 – Tieszen, R. “Arithmetic, Mathematical Intuition, and Evidence”, *Inquiry: An Interdisciplinary Journal of Philosophy*, 2015, Vol. 58, No. 1, pp. 28–56.

Van-Quynh, 2019 – Van-Quynh, A. “The Three Formal Phenomenological Structures: A Means to Assess the Essence of Mathematical Intuition”, *Journal of Consciousness Studies*, 2019, Vol. 26, No. 5–6, pp. 219–241.

Vasyukov, 2005 – Vasyukov, V. *Kvantovaya logika* [Quantum logic]. Moscow: PER SE, 2005. 191 pp. (In Russian)

Weinberg, 1987 – Weinberg, S. “Anthropic bound on the cosmological constant”, *Physical Review Letters*, 1987, Vol. 59, pp. 2607–2610.

Weinberg et al., 2001 – Weinberg, J.M., Nichols, S., Stich, S. "Normativity and Epistemic Intuitions", *Philosophical Topics*, 2001, Vol. 29, No. 1, pp. 429–460.

Witten, 1995 – Witten, E. "String theory dynamics in various dimensions", *Nuclear Physics B*, 1995, Vol. 443, No. 1, pp. 85–126.

Woods, 2003 – Woods, J. *Paradox and Paraconsistency: Conflict Resolution in the Abstract Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 382 pp.

Yau, Nadis, 2010 – Yau, S., Nadis, S. *The Shape of Inner Space: String Theory and the Geometry of the Universe's Hidden Dimensions*. New York: Basic Books, 2010. 400 pp.

Логические исследования
2023. Т. 29. № 1. С. 30–42
УДК 16

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 1, pp. 30–42
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-30-42

История логики
History of Logic

А.С. Алексеева

Терминология и толкование в «Логике» Макария Пе́тровича*

Алина Сергеевна Алексеева
Русская Христианская гуманитарная академия.
Российская Федерация, 191011, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 15.
E-mail: alevtina.sergeevna@gmail.com

Аннотация: В статье рассматривается один из приемов оформления толкований в «Логике» Макария Пе́тровича — глоссирование заимствованного понятия разного происхождения при помощи союза или. На примере четырех сочетаний (*копула* vs *связка*, *термин* vs *связка*, *метод* vs *(философское) расположение, анализис* vs *разбирание понятий* vs *произведение или формование идей*) показано, что вторым компонентом пары является лексема со славянским корнем, которая освоена русским языком. Подобная модель лишь в редких случаях соотносится с латиноязычными источниками приведенных сочетаний: *Institutiones philosophiae rationalis methodo Wolfii conscripta* (1735 г.) и *Elementa philosophiae recentiorisusibus juventutis scholasticae accommodata* (1747 г.) Ф.Х. Баумайстера — практически всегда добавления Пе́тровича являются продуктом его оригинального творчества. При построении объяснений о. Макарий использует как лексику русского языка, так и полонизмы, причем словообразовательные модели польского языка (например, прилагательные на *-ичный: криптичный, аналитичный, гипотетичный*) характерны для всего текста «Логики». Сопоставление лексем с историческими словарями русского языка и текстами XVIII в. и ранее из Национального корпуса русского языка показало, что некоторые слова (*копула*, *еротематический*, *формование*, *формовать*, *диспутовать*, *криптичный*, *аналитичный*, *гипотетичный*) или их варианты впервые употребляются именно в «Логике» Макария Пе́тровича.

Ключевые слова: история логики, Макарий Пе́трович, Славяно-греко-латинская академия, история понятий, терминология, перевод с латинского языка, перевод с древнегреческого языка, русский язык XVIII в.

Для цитирования: *Алексеева А.С.* Терминология и толкование в «Логике» Макария Пе́тровича // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 1. С. 30–42. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-30-42

* Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 18-78-10051 «Византийский фактор в формировании русской логической традиции».

1. Макарий Пе́трович и логические штудии

В середине XVIII в. появляется первое пособие по логике, составленное на русском языке — «Логика» Макария Пе́тровича[1]. Этот текст, как предполагается, связан по содержанию с дициплиной, читавшейся о. Макарием в Славяно-греко-латинской академии после пострига [Гончарко и др., 2022, с. 63]. Тематически курс распадается на четыре части (в первых трех обсуждаются «действия разума», в четвертой — теория аргументации), которые дополнены обширным предисловием: о философии и о представленном труде. По своему характеру «Логика» Пе́тровича представляет собой компиляцию из переведенных на русский язык книг вольфианца Фридриха Христиана Баумайстера [Baumeister, 1735; Baumeister, 1747] и картезианца Эдмона Пуршо [Pourchot, 1695], [Гончарко и др., 2022, с. 63–64] с авторскими дополнениями.

На данный момент сочинение известно в 3 списках[2]: 1) *Д* (РНБ. Ф. 573, № 206)[3], 2) *Б* (ГИМ. Барс. 2149)[4], 3) *С* (РНБ. Ф. 550, Q.III.186)[5]. Наиболее полным, как пишут О.Ю. Гончарко и М.В. Семиколенных, является список Д, который не содержит пропусков и завершается надписью «Конец

[1] Сведения о биографии Пе́тровича, а также истории создания «Логики» и ее историческом контексте см. в [Гончарко и др., 2022, с. 61–64].

[2] В статье используется система сигл, принятая в издании «Логики» (в печати): в основу публикации положен список Д, к которому подведены разночтения из *Б* и *С*.

[3] А.С. Родосский считает, что рукопись писана «четкой и красивой скорописью начала 2-й половины XVIII века» (полное описание см. в [Родосский, 1894, с. 218–220], попутно отмечая сходство почерка Д и рукописи № 88, писанной студентом тверской семинарии Андрея Протопопова, который изложил в форме стихов лекции о. Макария по догматическому богословию [Там же, с. 219]. Н.К. Гаврюшин, ссылаясь на А.М. Пентковского, датирует создание периодом после 1766 г., т.к. «водяной знак бумаги типа [33, №771] (1765 г.) <имеется в виду альбом С.А. Клепикова [Клепиков, 1959] — А.А.> показывает, что она написана не ранее смерти сочинителя» [Гаврюшин, 1986, с. 144]. О.Ю. Гончарко и М.В. Семиколенных [Гончарко и др., 2022] датируют рукопись 1758-м годом, опираясь на ее заглавие: «Логика, собранная из разных авторов и удобным порядком расположенная на российском языке для употребления в Москве 1758 г. московской Академии иеромонахом Макарием».

[4] Без части предисловия, обрывается на полуслове 3-й части пособия. По водяным знакам, описанным Н.К. Гаврюшиным, список можно отнести к 1780-м гг.: рожок в гербовом щите с литерами ВФСТ и датой 1782, герб Ярославля с датой 1779, Pro Patria с литерами NP [Гаврюшин, 1986, с. 144]. О.Ю. Гончарко и М.В. Семиколенных [Гончарко и др., 2022] датируют рукопись по году, упомянутому в названии — 1759: «Логика феорическая, собранная из разных авторов и удобным порядком расположенная. Переведена… иеромонахом Макарием 1759-го года для употребления, в Москве» [Там же, с. 64].

[5] Без начала и конца; заглавие отсутствует. Описание см. в [Бычков, 1900, с. 144–145]. В статье [Гончарко и др., 2022, с. 65] датирована 1789 г. без объяснения причины. Водяные знаки не исследованы.

логике» [Гончарко и др., 2022, с. 65]. При этом, по наблюдению исследовательниц, наличие общих ошибок[6] в Д и С позволяет высказать предположение об их общем протографе. Последний список к тому же имеет больше помет и примечаний и, вероятно, использовался чаще[7].

Метод работы с источниками, а также самая идея — создание первого пособия — не могли не отразиться на языке оригинального сочинения и способе подачи материала. Во многом являясь первопроходцем, Пе́трович пополняет словарь философских терминов за счет употребления новых лексем, существенная часть которых впервые фиксируется в истории русского языка. Изучению логической терминологии на примере понятийного ряда *опыт — искус — експериенция — експеримент — эмпейрия* посвящена недавняя статья О.Ю. Гончарко и М.В. Семиколенных [Гончарко и др., 2022]. Не вдаваясь в подробный разбор работы и итогов исследования, отметим нехватку теоретической базы (например, отсутствие ссылок на работы Е.М. Смирновой[8] и — самое важное! — исторические словари) и не всегда корректное использование лингвистических терминов[9].

Продолжая эстафету по изучению терминологии в «Логике» Макария Пе́тровича, рассмотрим один из приемов построения толкований — глоссирование понятия при помощи союза *или*. Ниже будет рассмотрено несколько примеров подобных сочетаний в списке *Д* (с привлечением разночтений по *Б* и *С*), интерпретация которых предложена с опорой на словари русского языка и Национальный корпус русского языка [НКРЯ].

2. ***Копула* vs *связка*, *термин* vs *связка***

Во второй части «Логики» для обозначения модального глагола употребляется пара *копула* vs *связка*:

(1) То, чем подтверждается, или отрицается, или[10] слывет <u>копула</u>[11] или <u>связка</u> (§ 62)[12].

[6]К сожалению, в статье отсутствуют примеры, поэтому предположение о соотношении списков в настоящей работе не используется.

[7]Гипотеза о связи проставленных в тексте ударений и предназначении рукописи для чтения вслух, на наш взгляд, маловероятна, т.к. акцентуация в рукописях XVIII в. имеет массовый характер и связана с подражанием книжной (церковнославянской) традиции.

[8]См., например, диссертацию о концепте опыт в истории русской культуры [Смирнова, 2013] и ее источники.

[9]Авторы смешивают понятия *калькирование* и *заимствование, транскрипция* и *транслитерация*.

[10]Описка под влиянием расположенных рядом союзов. В *Б* и *С* отсутствует.

[11]Здесь и далее в цитатах из источников выделения при помощи подчеркивания мои. — *А.А.*

[12]Цитирование осуществляется по изданию «Логики» (в печати). Орфография упрощена, знаки пунктуации расставлены в соответствии с правилами современного русского языка.

Слово *копула* обнаруживается в тексте трижды; два других примера расположены в той же главе:

(2–3) Которая предложения явно положенной субъект, предикат и копулу [*Б, на полях*: подлежащее, сказуемое и связка] имеют, те называются логическия и совершенныя, а в которых субъект, предикат или копула утаевается, те называются несовершенными или криптичным (§ 64).

Цитата (1) является переводом фрагмента из *Institutiones philosophiae*, однако в первоисточнике употреблен только один термин — непосредственно *copula*: Vox illa quae subiectum praedicato coniungit, siue, quae nexum subiecti et praedicati indicat, dicitur copula (Institutiones philosophiae, § 193). Пéтрович транслитерирует лат. *copula* 'веревка', в результате чего появляется новое понятие, ранее нигде не отмеченное в данном значении (лексема отсутствует в [СлРЯ; СлДРЯ; СлXVIII] и источниках НКРЯ XVIII столетия [НКРЯ]). Единственный пример обнаруживается в «Скифской истории» (1692 г.) Андрея Лызлова: Посреди же храма копуля [*на полях:* Копуля — свод или сень] на шестинадесяти столпех мрамурных возставлена [множае, и болши, и выше, нежели святаго Петра в Риме], сверху покрыта вся оловом [НКРЯ] — но он нерелевантен, т.к. *копула* обозначает материальный предмет. В качестве пояснания к латинизму о. Макарий выбирает слово со славянским корнем *-вяз-* (ср. с лат. *copulo* 'связать') — связка. Надо заметить, что связка, в свою очередь, появляется в паре с понятием *термин*, которое широко употребительно в «Логике» и в данном случае имеет значение 'слово'[13]:

(4) Связка или термин, которой сходство субъекта с предикатом показует, есть етот глагол есть, которому ежели предпишем частицу не, показует понятий разлучение (§ 62).

Этот фрагмент также является переводом из "Institutiones philosophiae", где обнаруживается пара *copula* vs *terminus*: Copula autem siue terminus, qui nexum subiecti et praedicati indicat, est uox EST. Cui si particula non praesigitur, indicator notionum separatio (*Institutiones philosophiae, § 193*).

Попутно отметим, что примере (2–3) отмечается пара *несовершенный* vs *криптичный* (в книге Ф.Х. Баумейстера фрагмент отсутствует). Если слово "несовершенный" уже знакомо русскому языку, то второе понятие является *hapax legomenon*, который восходит к греч. *κρυπτός* 'скрытый, тайный' через посредство лат. *crypticus* 'крытый, потайной'.

При этом нельзя обойти вниманием склонность Пéтровича к использованию прилагательных на *-ичн-*, в то время как русскому языку знакомы однокоренные слова с суффиксом *-ическ-*; ср. *аналитический* [СлXVIII,

[13]Вопрос о значениях понятия *термин* в «Логике» требует отдельного исследования.

1994/1, с. 64] / *аналитичный* (§ 155), *гипотетический* [СлXVIII, 1989/5, с. 116] / *гипотетичный* (§ 110) и др. Подобные образования, как кажется, следует связывать с влиянием польского языка, а именно — форманта прилагательного *-iczny/-yczny*.

К лексическим единицам *субъект, предикат* и *копула* в (2–3) по списку *Б* на полях подведены толкования из славянских по происхождению слов: *подлежащее, сказуемое* и *связка* соответственно. *Подлежащее* и *сказуемое* в значении ‘главный член предложения’ хорошо известны русскому языку (см., например, словарную статью в [СлXVIII, 2013/20, с. 221]) и наравне со *связкой* (проверить наличие данного слова в [СлXVIII] не представляется возможным ввиду его неполноты) встречаются в других частях «Логики» и по списку *Д*.

3. *Метод* vs *(философское) расположение*

В двух параграфах употребленное 7 раз слово *метод (мефод)* разъясняется как *расположение* (в одном случае — с определением *философский*):

(5) Понеже философ доказывает вещи, для того к тому должно употребить пристойной порядок; порядок етот называется философским расположением или методом [*Б* мефодом] (§ 7).

(6) Когда уже о методе [*Б* мефоде] или расположении говорили, то должно еще упомянуть и о штиле (§ 8).

Вторая часть (5) восходит к учебнику Ф.Х. Баумейстера: Ordo, quo philosophus in tradendis dogmatibus utitur, dicitur methodus philosophica *(Elementa, § 32)*. Сочетание *methodus philosophica* разбивается в «Логике» на две части, причем прилагательное у Пе́тровича получает новое определяемое слово: *философическое расположение и метод*. Придаточное предложение в (6), со снятым определением, принадлежит перу самого о. Макария, т.к. Ф.Х. Баумейстер начинает соответствующий параграф в “Elementa” с того, что содержится в главной части: Haec igitur prima les stili philosophici sanciatur… *(Elementa, § 15)*.

Понятие *метод (метода, методия)* от греч. *μέθοδος* ‘путь вслед за чем; исследование научное; способ исследования, метод; наука’ используется с самого начала XVIII в., входя в русский язык через посредство лат. *methodus*, фр. *méthode*, нем. *Methode*. Хронологическое распределение вариантов таково: *метода* (с 1718 г.), *метод* (с 1721 г.), *методия* (с 1735 г.) [СлXVIII, 2001/12, с. 159]. Как видно, первые фиксации появляются задолго до «Логики», но о. Макарий все равно приводит пару со славянским корнем.

Слово *расположение* может быть связано по происхождению с польским языком. Первое употребление, хотя и являющееся эквивалентом бесприставочного существительного, содержится в «Похождении в Святую землю князя Радивила Сиротки», переводе с польского издания 1628 г.: О расположении града Кандии... занеже иные доволно о немъ писали, азъ оставлю (o położeniu miasta Kandyi) [СлРЯ, 1997/22, с. 30]. Лексема *rozpołożenie* в словаре старопольского языка, впрочем, имеет иное значение — 'осторожность, благоразумие, такт' [Arct, 1920, II, с. 49], но это не является препятствием для гипотезы. Что касается корня *философ-*, он отмечается уже в Супрасльской рукописи (XI в.): от греч. *φιλόσοφος* 'любящий мудрость; ученый человек') [ЭСРЯ, 1987/4, с. 194] и далее активно используется в текстах на русском языке.

Рассмотрим примеры без пояснения. С комментарием *способу* на полях существительное *метод* упомянуто в предисловии, которое могло быть написано после основного текста и лишь в чистовом варианте заняло первую позицию:

(7) Я во всем старался его прошению удоволствовать: держался на местах во всем методу [*на полях*: способу; *Б, С* мефоду] а новых философов (Предисловие).

Возвращаясь к § 7, отметим, что после пары *метод* vs *расположение* (5), следуют 2 фиксации первого слова без пояснения:

(8) Етие все правила также и математическому методу [*Б* мефоду] служат, откуду видно, что математической тот же, что и философической метод [*Б* мефод] (§ 7).

В данном случае Пе́трович следует учебнику Ф.Х. Баумейстера, в котором отсутствуют пояснения: Ex his patet, methodi mathematicae easdem esse leges, quae sunt methodi philosophicae *(Institutiones philosophiae, § 35)*. Далее в тексте «Логики» употребляется только термин *метод* или его вариант *мефод*. Вариант с *ф* присутствует в *Д* исключительно в главе 10 «Как диспутоватся»:

(9) Когда диспуты чрез вопросы и ответы бывают, то сей мефод называется еротематическим и сократическим, которым мефодом удобно или сопротивник ответствующаго или ответствующей сопротивника может обмануть (§ 208).

Фрагмент является довольно точным переводом из *Institutiones philosophiae*: Disputatur nonnunqnam per quaestiones et responsiones, quae methodus dicitur erotematica, item socratica (Institutiones philosophiae, § 527). Попутно отметим, что слово *еротематический* (от др.-греч. *ἐρωτηματικός* 'вопросительный'), во-первых, отсутствует в Словаре русского языка XI–XVII вв.[СлРЯ] и НКРЯ [НКРЯ] и, вероятно, не обнаружится в Словаре русского языка XVIII в. [СлXVIII] после его окончания[14], а во-вторых, отклоняется от тенденции к образованию прилагательных с суффиксом *-ичн-*.

Что касается разночтений, в списке *Б* (предисловие и § 7–8; § 208 утрачен) употребляется исключительно вариант *мефод*, в списке *С* — *мефод* в предисловии и *метод* в § 7–8 (§ 208 также утрачен). Первичный вариант в настоящее время установить невозможно, потому что вопрос о соотношении списков еще нуждается в исследовании.

4. *Анализис* vs *разбирание понятий* vs *произведение* или *формование идей*

В первой части «Логики» (глава 1 «О понятиях или идеях») находится предложение, которое заключает в себе пары *произведение* vs *формование идей* и *анализис* vs *разбирание понятий*:

(10) Такое идей совершенных произведение или формование называется у философов Анализис [*Б* Анализис] //л. 16 об.// или разбиранием понятий; понеже в таком случае вещи разбираем по частям, а части опять на свои особливыя части так точно, как и анатомики делают, которые тело человеческое разделяют на части, а части опять разбирают по частям (§ 27).

Начало предложения заимствовано из учебника Ф.Х. Баумейстера: formatio idearum adaequatarum dicitur philofophis analysis notionum *(Institutiones philosophiae, § 96)*. Как видно, ученый использует только одно сочетание понятий: *formatio idearum* vs *analysis notionum* — каждый компонент которого получает отдельное толкование в труде о. Макария. *Formatio idearum* соотносится в «Логике» с однокоренной единицей *формование (идей)*, которая заимствована из польского языка — ср. с *formowanie* (с 1621 г.) от *formować* ‘формировать, образовывать’ (с 1656–1688 гг.) [ESJP]. Глагол с тем же корнем отмечается в главе 3 («О категориях», § 41) первой части и в главе 3 («О свойствах предложений», § 70) второй части и также является полонизмом в отличие от совр. формировать из нем. *formieren* ‘формировать, образовывать’:

(11) Мы выше § 32 говорили, что универсалныя идеи формуются чрез отвлечения (§ 41).

(12) Так, например, ежели формуешь себе понятие пресовершеннаго разума, то ты формуешь чрез хотетелное совокупление: понеже ты знаешь,

[14] В настоящее время нужный том еще не опубликован, но под буквой *е* нет сноски с указанием искать статью в отрезке на э-.

что ето разум, и что пресовершенный, так помышлением совокупляешь обе идеи, чтоб зделалось едино понятие пресовершеннаго разума (§ 41).

(13) Когда ты хочешь чрез етое совокупление себе формовать идеи, примечай, ежели они возможны, то суть и истинны, как разум пресовершенны и протч. (§ 41).

(14) Примечай, мы когда етакие предложения формуем, случается часто, что приписуем способ, как какой-нибудь предикат приличествует субъекту, и такие предложения называются образителные, а четыре имеют способа (§ 70).

Аналогичным полонизмом из (14) является глагол *приписовать*: ср. с совр. *przypisywać* ‘приписывать’[15]. Интересно, что именно такое спряжение чаще всего появляется в произведениях знающих польский язык: Андрея Лызлова (Егда же от оных зборщиков отрочата будут собрани и в Константинополь приведены, тогда приходит к ним ага и приписует имена их, и отечество, и страны (НКРЯ) [НКРЯ]) и Андрея Курбского (Азъ же сему зело удивихся и скорбию объятъ быхъ, ижь большая часть книгъ учителей нашихъ не преведена есть въ словенский языкъ, и некоторые преведенны непрямо отъ преводниковъ неискусныхъ, а нецыи отъ приписующихъ въконецъ испорчены (НКРЯ) [НКРЯ]). *Формование (идей)* истолковывается как *произведение*: это слово с допетровского времени имеет подходящее значение — ‘создание, сотворение’ [СлДРЯ, 2012/9, с. 67].

Понятие *analysis* переводится как *аналисис*, и здесь следует обратить внимание на написание слова. Лексема *анализис* (со звонким согласным в корне; именно такой вариант находится в списке *Б*) проникает в русский язык, по данным Словаря русского языка XVIII в. [СлXVIII, 1984/1, с. 64], с 1709 г.; позднее появляются варианты *аналисие* (1728 г.)[16], *анализия* (1727 г.) и *анализ* (1802 г.). По происхождению слово связано с греч. *ἀνάλυσις* ‘разложение, расчленение; анализ’, но русский язык заимствует его в том числе через посредство других языков: лат. *analysis*, нем. *Analysis*, фр. *analyse*, англ. *analysis*. Таким образом, написание *анализис* (*Б*) появляется в соответствии с правилами чтения латинского языка или же польским влиянием (ср. с *analiza* ‘анализ’), в то время как *аналисис* (*Д*) отражает греческое произношение. К слову Макарий Пéтрович подбирает толкование *разбирание (понятий)*[17], что является буквальным переводом с греческого языка.

[15] Также — *диспутовать* от *dysputować* ‘полемизировать, спорить, оспаривать; исследовать, изучать, аргументировать’ [Алексеева, 2022б, с. 132–133].

[16] Авторы словарной статьи не указывают, в каком источнике находится вариант.

[17] Вопрос о соотношении терминов *идея* и *понятие* в «Логике» нуждается в дополнительном исследовании.

5. Выводы

Одним из способов введения заимствованной терминологии в «Логике» является конструирование пары с союзом *или*, второй компонент которой представляет собой слово со славянским корнем (*копула — связка, метод — расположение, анализис — разбирание понятий*). В некоторых случаях при помощи другого слова истолковывается и славянизм — к примеру, *произведение* vs *формование (идей)* — что подчеркивает стремление о. Макария сделать свой текст максимально понятным читателю. О своей позиции он и сам пишет в Предисловии к читателю: Постарался я здесь, благ[склонный] чита[тель], сколко мог и сколко время мне допустило (понеже я иными обязан), как можно яснее и порядочнее, а к понятию удобнее написать правила. Однако далее, при упоминании понятия повторно, пояснение практически всегда снимается, что облегчает чтение и работу с материалом.

Пояснение может получить и понятие, которое освоено русским языком. В качестве примера приведем слово *термин* (с 1705 г.) от лат. *terminus* 'пограничный знак' через польск. *termin* [ЭСРЯ, 1987/4, с. 48], об иноязычном происхождении которого Пе́трович осведомлен — см. в Предисловии: Следователно [*на полях*: непременно], надобно было чужестранныя употреблять речи, которыя почти из прежних времен во употребление вошли, и которыя на чужестранном [*на полях*: употреблял же я такие речи] лучше можно разуметь, нежели ежели бы их на российской перевесть язык; как например: субъект, предикат, идея, <u>термин</u>, аргументация, силлогизм, сорит, категория и проч.

Примечательно, что о. Макарий использует лексику не только русского языка, но и активный состав польского лексического фонда (*формование, формовать, приписовать, диспутовать*; возм., *расположение*), а также образует ряд прилагательных по польской модели (*аналитичный, гипотетичный, криптичный*). Принимая во внимание значение польского языка для светской книжной традиции России XVIII в., можно подтвердить вывод о желании создателя представить свой курс логики как можно доступнее.

Литература

Алексеева, 2022а – *Алексеева А.С.* Освоение заимствованной терминологии в «Логике» Макария Пе́тровича // Вторая международная научная конференция «Византия, Европа, Россия: социальные практики и взаимосвязь духовных традиций», 22–24 сентября, Санкт-Петербург. СПб., 2022. С. 26–27.

Алексеева, 2022б – *Алексеева А.С.* Вопрос о полонизмах в «Логике» Макария Пе́тровича // Славянский мир: общность и многообразие. Тезисы конференции молодых ученых в рамках Дней славянской письменности и культуры. 24–25 мая 2022 г. М., 2022. С. 131–136.

Бычков, 1900 – *Бычков И.А.* Каталог собрания рукописей П.И. Савваитова, ныне принадлежащих Императорской публичной библиотеке. Вып. 1. СПб., 1900.

Гончарко и др., 2022 – *Гончарко О.Ю., Семиколенных М.В.* Лексические особенности терминологического аппарата в «Логике» Макария Пе́тровича // Логические исследования / Logical Investigations. 2022. Т. 28. № 1. С. 60–75.

Гаврюшин, 1986 – *Гаврюшин Н.К.* «Риторика» М.В. Ломоносова и «Логика» Макария Пе́тровича // Памятники науки и техники. 1985. М.: Наука, 1986. С. 131–154.

Клепиков, 1959 – *Клепиков С.А.* Филиграни и штемпели на бумаге русского и иностранного производства XVII–XX вв. М.: Изд-во Всесоюзной Книжной палаты, 1959.

НКРЯ – Национальный корпус русского языка. URL: `https://ruscorpora.ru` (дата обращения: 10.03.2023).

Родосский, 1894 – *Родосский А.С.* Описание 432-х рукописей, принадлежащих Санкт-Петербургской духовной академии. СПб.: Тип. А.О. Башкова, 1894.

СлРЯ – Словарь русского языка XI–XVII вв. М.: Наука, 1975.

СлXVIII – Словарь русского языка XVIII века. М.: Наука, 1984.

СлДРЯ – Словарь древнерусского языка (XI–XIV вв.). М.: Русский язык: Азбуковник, 1988.

Смирнова, 2013 – *Смирнова Е.М.* Концепт опыт в истории русской культуры: Автореф. дис. канд. культ. наук. СПб., 2013.

ЭСРЯ – *Фасмер М.* Этимологический словарь русского языка. М.: Прогресс, 1986–1987.

Arct, 1920 – *Arct M.* Słownik Staropolski. Warszawa, 1920.

Baumeister, 1735 – *Baumeister Fr.Chr.* Institutiones philosophiae rationales method Wolfii conscriptae. Wittenberg, 1735.

Baumeister, 1747 – *Baumeister Fr.Chr.* Elementa philosophiae recentioris usibus juventutis scholasticae accommodata. Gleditsch, 1747.

Pourchot, 1695 – *Purchotii E.* Institutiones philosophicae ad faciliorem veterum ac recentiorum philosophorum intelligentiam comparatae. Tomus primus. Complecteas Logicam et Metaphysicam. Paris, 1695.

ESJP – Elektromiczny słownik języka polskiego XVII i XVIII wieku. URL: `https://sxvii.pl/` (дата обращения: 10.03.2023).

Alina S. Alekseeva

Terminology and Their Meanings in Makariy Pétrovich's "Logic"

Alina S. Alekseeva
Russian Christian Humanitarian Academy,
Fontanka 15, Saint-Petersburg, 191011, Russia.
E-mail: `alevtina.sergeevna@gmail.com`

Abstract: The article focuses on one of the types of explications in Makariy Petrovich's "Logic" — glossing a loanword term of any origin with the conjunction или. The investigation of four combinations shows that the second component of the pair is a lexeme with a Slavic root well known Russian speakers. The model of constructions only in rare cases correlates with the Latin-language sources: *Institutionesphilosophiae rationalis methodo Wolfii conscripta* (1735) and *Elementa philosophiae recentiorisusibus juventutis scholasticae accommodata* (1747) by Fr.Chr. Baumeister. In his explanations Makariy Petrovich uses the vocabulary of Russian language, Polonisms and Polish lexical derivation model. The comparison with historical dictionaries of the Russian language and texts of the 18th century and earlier from the National Corpus of the Russian Language identifies the first fixation of some words in the "Logic".

Keywords: history of logic, Makariy Petrovich, The Slavic Greek Latin Academy, history of concepts, terminology, translation of Greek into Russian, translation of Latin into Russian, Russian language of the 18th century

For citation: Alekseeva A.S. "Terminologiya i tolkovanie v 'Logike' Makariya Pétrovicha" [Terminology and Their Meanings in Makariy Pétrovich's "Logic"], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 1, pp. 30–42. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-30-42 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is supported by Russian Science Foundation, project No. 18-78-10051, "Byzantine Roots of Russian Logical Tradition".

References

Alekseeva, 2022a – Alekseeva, A.S. "Osvoenie zaimstvovannoj terminologii v 'Logike' Makariya Petrovicha" [The Adaptation of the borrowed terminology in Makariy Petrovich's "Logic"], in: *Vtoraya mezhdunarodnaya nauchnaya konferenciya 'Vizantiya, Evropa, Rossiya: social'nye praktiki i vzaimosvyaz' duhovnyh tradicij', 22–24 sentyabrya, 2022, Sankt-Peterburg* [Second International Scientific Conference 'Byzantium, Europe, Russia: Social Practices and the Relationship of Spiritual Traditions', September 22–24, 2022]. Saint Petersburg: without edition, 2022, pp. 26–27. (In Russian)

Alekseeva, 2022b – Alekseeva, A.S. "Vopros o polonizmah v 'Logike' Makariya Pétrovicha" [The Problem of the polonisms in Makariy Petrovich's "Logic"], in: *Slavyanskij mir: obshchnost' i mnogoobrazie. Tezisy konferencii molodyh uchenyh v ramkah Dnej slavyanskoj pis'mennosti i kul'tury. 24–25 maya 2022 g.* [Slavic World: Commonality ans Diversity. Abstracts of the Conference of Young Scientists in the Days of Slavic Literature and Culture. May 24–25, 2022]. Moscow: Institut slavyanovedeniya RAN, 2022, pp. 131–136. (In Russian)

Arct, 1920 – Arct, M. *Słownik Staropolski.* Warszawa, 1920.

Baumeister, 1735 – Baumeister, Fr.Chr. *Institutiones philosophiae rationales method Wolfii conscriptae.* Wittenberg, 1735.

Baumeister, 1747 – Baumeister, Fr.Chr. *Elementa philosophiae recentioris usibus juventutis scholasticae accommodata.* Gleditsch, 1747.

Bychkov, 1900 – Bychkov, I.A. *Katalog sobraniya rukopisei P.I. Savvaitova, nyne prinadlezhashchikh Imperatorskoi publichnoi biblioteke* [Catalogue of P.I. Savvaitov manuscript collection, nowadays reposited in the Imperial Public Library]. Vol. 1. SPb., 1900. (In Russian)

ESJP – *Elektromiczny słownik języka polskiego XVII i XVIII wieku.* [`https://sxvii.pl`, accessed on 10.03.2023]

ESRYA – Fasmer, M. *Etimologicheskij slovar' russkogo yazyka* [Etymological Dictionary of the Russian Language]. Moscow: Progress, 1986–1987. (In Russian)

Gavryushin, 1986 – Gavryushin, N.K. "'Ritorika' M.V. Lomonosova i 'Logika' Makariya Pétrovicha" [M.V. Lomonosov's "Rhetorics" and Makariy Petrovich's "Logic"], in: *Pamyatniki nauki i tekhniki, 1985* [Records of Science and Technology, 1985]. Moscow: Nauka, 1986, pp. 131–154. (In Russian)

Goncharko, 2022 – Goncharko, O.Yu., Semikolennykh, M.V. "Leksicheskie osobennosti terminologicheskogo apparata v 'Logike' Makariya Petrovicha" [Characteristic Features of the Terminological Apparatus in Makariy Petrovich's "Logic"], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2022, Vol. 28, No. 1, pp. 60–75. (In Russian)

Klepikov, 1959 – Klepikov, S.A. *Filigrani i shtempeli na bumage russkogo i inostrannogo proizvodstva XVII–XX vv.* [Watermarks and Stamps on Russian and Foreign Paper of the 17th–20th Centuries]. Moscow: Izd-vo Vsesoyuznoj Knizhnoj palaty, 1959. (In Russian)

NKRYA – The Russian National Corpus. Electronic resource: https://ruscorpora.ru.

Pourchot, 1695 – Purchotii, E. *Institutiones philosophicae ad faciliorem veterum ac recentiorum philosophorum intelligentiam comparatae.* Tomus primus. Complecteas Logicam et Metaphysicam. Paris, 1695.

Rodosskij, 1894 – Rodosskij, A.S. *Opisanie 432-h rukopisej, prinadlezhashchih Sankt-Peterburgskoj duhovnoj akademii* [Description of 432 manuscripts belonging to the St. Petersburg Theological Academy]. Saint Petersburg: Tip. A.O. Bashkova, 1894. (In Russian)

SlRYA – *Slovar' russkogo yazyka XI–XVII vv.* [Dictionary of the Russian Language of the XI–XVII Centuries]. Moscow: Nauka, 1975.

SlXVIII – *Slovar' russkogo yazyka XVIII v.* [Dictionary of the Russian Language of the XVIII Century]. Moscow: Nauka, 1984.

SlDRYA – *Slovar' drevnerusskogo yazyka (XI–XIV vv.)* [Dictionary of the Old Russian Language (XI–XIV Centuries)]. Moscow: Russkij yazyk: Azbukovnik, 1988.

Smirnova, 2013 – Smirnova, E.M. *Koncept opyt v istorii russkoj kul'tury: Avtoref. dis. kand. kul't. nauk* [The concept 'opyt' in the history of Russian culture: Abstract of degree thesis]. Saint-Petersburg, 2013. (In Russian)

Логические исследования
2023. Т. 29. № 1. С. 43–69
УДК 160.1+003.341

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 1, pp. 43–69
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-43-69

Л.В. Спиридонова, А.В. Курбанов

Феофил Коридаллевс о природе логики и ее отличии от риторики*

Лидия Валентиновна Спиридонова
Русская христианская гуманитарная академия.
Российская Федерация, 191011, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 15, лит. А.
E-mail: lydia.spyridonova@gmail.com

Андрей Викторович Курбанов
Русская христианская гуманитарная академия.
Российская Федерация, 191011, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 15, лит. А.
E-mail: andrey.kurbanov@gmail.com

Аннотация: Феофил Коридаллевс (1574–1646), глава Патриаршей школы в Константинополе, был одним из ярчайших представителей одновременно как падуанской, так и греческой школы. Первое сочинение в своем логическом компендиуме Коридаллевс целиком посвящает исследованию природы логики. В первую очередь он доказывает, что логика не может являться *эпистеме* (ἐπιστήμη/*scientia*), а только *техне* (τέχνη/*ars*). Для этого он делает подробный обзор данных понятий у Аристотеля и показывает различие в их понимании современными и латинскими авторами. Коридаллевс не признает разделения логики на практическую (*utens*) и теоретическую (*docens*), что позволяло схоластам относить последнюю к *scientia*. Коридаллевс также не соглашается с положением стоиков, согласно которому логика является частью философии, он считает ее инструментом философии. Подробным образом он останавливается на предмете (ὑποκείμενον) логики, а точнее — ее материи (ὕλη) — поскольку логика является *техне*, то она имеет материю — а также ее целях, т.е. родительном и дательном *телосе* (τέλος). Таким образом, Коридаллевс пришел к выводу, что логика — это инструментальная *техне* философии, чью материю составляют означающие вещи и выраженные с помощью речевых единиц (φωναί) понятия (νοήματα); она дает нам правила, с помощью которых из значащих слов составляются логические инструменты — это и есть ее родительный *телос*, в свою очередь этими инструментами пользуется философия, что позволяет реализовать дательный *телос* — различение истины от лжи. Риторика, чью материю также составляют речевые единицы, отличается образом действия, узостью предмета и иной целью, которая заключается в убеждении аудитории. Отсюда риторика, выходящая из «Топики», является инструментом практической философии, целью которой является благо, тогда как логика — это инструмент теоретической философии, целью которой является познание истины.

* Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 18-78-10051 «Византийский фактор в формировании русской логической традиции».

Ключевые слова: Феофил Коридаллевс, неоаристотелизм, эпистеме, техне, телос, Аристотель, история логики, поствизантийская логика, Падуанский университет, Чезаре Кремонини

Для цитирования: *Спиридонова Л.В., Курбанов А.В.* Феофил Коридаллевс о природе логики и ее отличии от риторики // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 1. С. 43–69. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-43-69

1. Аристотель в Падуанском университете

В результате падения Константинополя в 1453 г. множество ученых греков было вынуждено бежать в Европу и, прежде всего, в ближайшую Венецианскую республику и Падую — ее университетский центр. Эта греческая иммиграция, с одной стороны, пробудила интерес падуанцев к оригинальным греческим философским текстам, а с другой стороны, предоставила достаточное количество специалистов, способных комментировать «настоящего» Аристотеля. Изначально же в Падуе, как и в других итальянских университетах, преподавание логики Аристотеля велось: (1) либо по классической схоластической системе, основанной на латинских комментариях Фомы Аквинского; (2) либо, начиная с XIII–XIV вв., в соответствии с арабскими комментариями Аверроэса. Арабская наука и латинская схоластика отходили от аристотелевского текста, заменяя его комментатором, а комментатора — учительскими тетрадями. Впрочем, и сами тексты, с которых делался латинский перевод, не только не отличались точностью, но и зачастую смешивали оригинал с неоплатоническими толкованиями, к этому же добавлялись ошибки переводчиков первых изданий XV в. В результате получался условный Аристотель, в котором уже мало что оставалось от оригинала. 4 апреля 1497 г. грек Николай Томей прочитал в Падуанском университете свой первый курс по греческому тексту Аристотеля (о нем см.: [Geanakoplos, 1985]). Это событие вызвало большой энтузиазм в среде итальянских интеллектуалов, Пьетро Бембо, знаменитый секретарь Папы Льва X, даже писал, что началась новая эра в философском учении [Morelli, 1821]. В это же время, благодаря греческим книжным справщикам, Венеция стала самым важным греческим печатным центром, где, наконец, научным образом были изданы греческие тексты Аристотеля. Таким образом, «правильные» тексты великого мыслителя стали доступны всему европейскому университетскому сообществу, как учителям, так и студентам. А Падуанский университет вместе с этим стал главным центром аристотелизма.

2. Феофил Коридаллевс и его влияние на греческую школу

Одним из ярких представителей падуанской греко-итальянской университетской среды был Феофил Коридаллевс, пожалуй, самый известный греческий интеллектуал XVII в. (о биографии и творчестве Феофила Коридаллевса см.: [Tsourkas, 1948], [Henderson, 1970, pp. 12–19], [Podskalsky, 1988, pp. 194–199], [Μαραζόπουλος, 2008]). Феофил родился в 1574 г. в Афинах с фамилией Скордалос, которую он позже изменил на Коридаллевс в честь пригорода Афин, откуда происходил его род. Свое образование он начал с Папской греческой коллегии св. Афанасия (1604–1608), откуда перешел в Падуанский университет (1609–1613), где учился у известного падуанского логика, друга Галилея и преемника Якопа Дзабареллы по кафедре — Чезаре Кремонини (1550–1631) (о Кремонини см. библиографию до 1975 г. [Lohr, 1975, pp. 728–729], а также последующую [Bergonzi, 1994; Kuhn, 1996; Riondato & Porri, 2000]). После окончания учебы Феофил работал учителем в различных греческих школах, а в 1622 г. патриарх Кирилл Лукарис (1572–1638) назначил его главой старейшей византийской высшей школы — Патриаршей школы в Константинополе. Впрочем, после насильственной смерти своего благодетеля он был отстранен от этой должности и сослан на митрополичью кафедру Навпакта и Арты с именем Феодосий (1640–1642), а позже в 1646 г. умер в тяжелых условиях и был похоронен в родных Афинах.

Как только Феофил Коридаллевс (1574–1646) был назначен главой Патриаршей школы в Константинополе в 1622 г., он внедрил учебный план, составленный им под влиянием программы Падуанского университета и идей своего учителя Чезаре Кремонини. По образцу Патриаршей школы в дальнейшем были реформированы и другие греческие образовательные учреждения на всех территориях Османской империи, которые посещали не только греки, но и румыны, болгары, албанцы, сербы и даже турки, использовавшие в то время греческий в качестве международного языка (см. [Tsourkas, 1948, pp. 113–117] и [Iorga, 1928, p. 119]), все эти студенты изучали логический корпус Аристотеля по компендиуму Коридаллевса или по пособиям, написанным согласно его принципам. Примечательно, что и турецкие школы Османской империи вплоть до начала XIX в. также использовали компендиум по логике Коридаллевса в переводе Николая Крития на турецкий, который был заказан лично визирем султана [Papadopoulos, 1952, p. 383]. Отсюда рукописные копии его работ сегодня можно найти сотнями во всех значимых библиотеках земель, ранее входивших в Османскую империю; в целом же его логический компендиум-комментарий на «Органон» Аристотеля передается по меньшей мере в 136 рукописях, датируемых XVII–XIX вв. [Tsiotras, 2000]. Таким образом, можно сказать, что Коридаллевс был самым популярным комментатором Аристотеля в XVII и XVIII вв.

3. Логические сочинения Феофила Коридаллевса

Самым главным логическим трудом Феофила Коридаллевса стал опубликованный в 1729 г. в Венеции фундаментальный компендиум-комментарий на «Органон» Аристотеля, состоящий из следующих сочинений [Corydaleus, 1729]:

I. Введение во все логическое учение (Προόμιον εἰς ἅπασαν τὴν λογικὴν πραγματείαν: σσ. 3–77).

II. Комментарий к «Исагоге» Порфирия (Εἰς Πορφυρίου Εἰσαγωγήν: σσ. 81–127).

III. Комментарий к «Категориям» Аристотеля (Εἰς τὰς τοῦ Ἀριστοτέλους Κατηγορίας: σσ. 133–289).

IV. О том, что следует после «Категорий» (Περὶ τῶν μετὰ τὰς Κατηγορίας: σσ. 292–298).

V. Комментарий к «Об истолковании» (Τὸ περὶ ἑρμηνείας: σσ. 299–361).

VI. Комментарий к «1-й Аналитике» (Εἰς τὰ πρότερα ἀναλυτικά: σσ. 362–433).

VII. Комментарий ко «2-й Аналитике» (Εἰς τὰ ὕστερα ἀναλυτικά: σσ. 435–499).

Помимо классического изложения логики, Феофил Коридаллевс составил также сочинение по логике в увлекательной вопросоответной форме, которое отчасти явилось конспектом вышеприведенного труда [Corydaleus, 1970].

I. Введение в логику (Προόμιον εἰς λογικὴν: σσ. 3–16).

II. Обзор того, что изучается в «Исагоге» Порфирия (Σύνοψις τῶν παραδιδομένων ἐπὶ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ Πορφυρίου: σσ. 16–56).

III. Обзор книги «О Категориях» (Σύνοψις τῆς περὶ Κατηγοριῶν βίβλου: σσ. 56–120).

IV. Обзор книги «Об истолковании» (Σύνοψις τοῦ περὶ ἑρμηνείας βιβλίου: σσ. 120–152).

V. Краткое изложение о силлогизме согласно «1-й Аналитике» (Σύνοψις περὶ συλλογισμοῦ ἐκ τῶν προτέρων ἀναλυτικῶν: σσ. 152–204).

VI. Из книг о дедуктивном доказательстве (Ἐκ τῶν περὶ ἀποδείξεων βιβλίων: σσ. 204–246).

VII. Краткое изложение «О софистических опровержениях» (Σύντομος ἔκθεσις περὶ σοφιστικῶν ἐλέγχων: σσ. 246–267).

В отличие от своих речей и других работ, Коридаллевс писал и даже преподавал логику на архаизированном литературном греческом языке и использовал терминологию Аристотеля, несмотря на очевидные сложности, с которыми сталкивались его студенты. Язык Аристотеля был техническим, и это избавляло Коридаллевса от многих трудностей и путаницы при интерпретации «Органона», что было неизбежно в латиноязычных западноевропейских университетах.

Другой особенностью логических текстов Феофила Коридаллевса стало негативное отношение их автора к средневековой латинской логике. Во-первых, Коридаллевс не был католиком, и поэтому, в отличие от своего учителя, изначально был не только чужд, но и явно враждебен схоластике, а также аверроизму и другим латинским системам [Corydaleus, 1797, p. 747]. Во-вторых, он боролся с любой попыткой дать логическому тексту Аристотеля богословскую интерпретацию или каким-либо образом смешать философию с религией. Схоластика же ему представлялась именно такой смесью, которая не является ни философией, ни богословием. Кроме того, он также был против и подмешивания в логику метафизики, а потому, несмотря на любовь к Платону, боролся с платонизирующими тезисами греческих комментаторов и последователей аверроизма [Tsourkas, 1948, p. 100].

4. Определение *эпистеме* и *техне* у Аристотеля и Коридалевса

Свое «Введение в логику» Коридаллевс полностью посвящает подробному разрешению проблем, связанных с предметом, целью и природой логики как дисциплины, это изложение занимает у него 77 страниц. Такой интерес Коридаллевса к этой теме не был случайным. Как показывают исследования [Poppi, 1970; Randall, 1961], в результате более глубокого анализа «Органона» Аристотеля и его аподиктики на первый план в Падуанском университете стали выдвигаться вопросы о природе логики, принципах и видах доказательства, а также о логике как общенаучном методе исследования, а не отдельной дисциплине. В этой связи падуанские ученые указывали, что и сам Аристотель никогда не использовал слово ἡ λογική ‘логика’ для обозначения того, что мы называем вслед за неоплатоническими комментаторами «Органона» «логикой Аристотеля». Аристотель писал, с одной стороны, о диалектике, противопоставленной риторике [Rhetorica, 1354a], а с другой — об аналитике [Rhetorica, 1359b.10], не объединяя эти две дисциплины под общим понятием «логика». Некоторые высказывания Аристотеля, например [Topica, I, 11, 104b.3], указывают на то, что он рассматривал диалектику скорее как инструмент (σύνεργον).

С точки зрения Коридаллевса, логика принадлежит к роду ἕξις/*habitus* (т.е. типу обладания знанием), к которому Аристотель относит:
(1) ἐπιστήμη/*scientia* — часто переводится как ‘наука’;
(2) τέχνη/*ars* — часто переводится как ‘искусство’ или ‘прикладная наука’;
(3) σοφία/*sapientia* — философская мудрость, знание конечных причин;
(4) φρόνησις/*prudentia* — практическая мудрость, этическое знание;
(5) νοῦς/*intelligentia* — интеллект, схватывание принципов как способность быстрого интуитивного поиска [Ethica Nicomachea, 1139b] (через косую черту мы приводим перевод Боэция).

Для Коридаллевса логика с очевидностью не может являться ни мудростью, которая есть знание конечных истин, ни интеллектом, ведь последний оперирует изначальными, общими и врожденными понятиями [Corydaleus, 1970, p. 7], ни тем более этикой. Таким образом, логику остается отнести либо к ἐπιστήμη/*scientia*, либо к τέχνη/*ars* — дилемма, решение которой вызывало на протяжении веков споры латинских философов, одни из которых считали, что логика является *scientia*, другие — *ars*, а третьи — и тем, и другим одновременно. Латинский перевод данных терминов нередко вводит современных читателей в заблуждение: современная концепция *ars* ‘искусство’ весьма отличается от античной или средневековой и обычно ассоциируется у нас с предметами, имеющими эстетическую ценность, в отличие от *scientia* ‘наука’, которая в нашем представлении занимается систематизацией знаний о мире. Отсюда предмет споров античных и средневековых ученых об отнесении логики к *ars* или *scientia* становится непонятным и странным. Ввиду несоответствия этих греческих понятий современные исследователи стараются переводить эти термины с помощью глосс, каждый раз выбирая нужный смысл из контекста, но чаще предпочитая передавать их в транслитерации (см. [Johansen, 2022]); мы также решили последовать этому пути, несмотря на то, что *техне* может неправильно ассоциироваться у нас с чем-то техническим, а *эпистеме* с эпистемой Мишеля Фуко.

Итак, что же греки, в частности Аристотель и Коридаллевс, подразумевали под словом *эпистеме* и *техне*? Как известно, во многих языках одному русскому глаголу ‘знать’ могут соответствовать несколько глаголов, что создает трудности при трансляции философских текстов в нашу языковую среду. Например, это осложняет перевод «Археологии знания» Мишеля Фуко, исходящего в своем рассуждении из возможностей французского языка, в котором различается *savoir* и *connaître*. Греки выделяли три вида состояния обладания знанием: εἴδησις, γνῶσις, ἐπιστήμη, а также вдобавок к ним использовали с несколько другими оттенками значений субстантивированные глаголы с этими же корнями: εἰδέναι, ἐπίστασθαι, γινώσκειν, γνωρίζειν. Платон, особенно в «Теэтете», обращался к толкованию каждого из этих слов, стараясь сделать их границы более четкими. Аристотель в свою очередь превратил их во «Второй Аналитике» [Analytica posteriora, 71b] в технические термины. Несмотря на значительные сложности понимания его определения [Burnyeat, 2011; Burnyeat, 2012; Morison, 2019; Lesher, 2001][1], можно утверждать, что под обладанием *эпистеме* Аристотель имел в виду глубокое общее знание чего-либо, начиная с самых фундаментальных основ, которое было получено и подтверждено на основе логических правил.

Коридаллевс поясняет читателям, что в «Метафизике» [Metaphysica, 1025b–1026a] Аристотель делит *эпистеме* на: (1) теоретическую (θεωρητική), которая дает представления о том, что необходимо и вечно, и которая занимается созерцательными вещами, как физика, математика и богословие [Ibid., 1064b]; (2) практическую (πρακτική), которая наделяет знанием о том, как действовать, как, например, этика; (3) творительную (ποιητική), которая предоставляет знание о том, как создавать что-либо (например, здоровье пациента, здание или скульптуру) [Corydaleus, 1729, p. 30].

Теоретическая *эпистеме* является также и *эпистеме* в узком смысле слова, поэтому, когда Аристотель [Ethica Nicomachea, VI, 1139b], а вслед за ним и Коридаллевс, говорит об *эпистеме* без уточнения, он обычно имел в виду именно теоретическую *эпистеме*, в отличие от творительной (под которой понималась им *техне*), а также практической (или *фронесис*).

Несмотря на различия, и *техне*, и теоретическая *эпистеме* могут являться науками в современном смысле слова, поскольку они являются *эпистеме* в широком смысле слова, предполагают рассуждение от общего к частному, использование подтвержденного метода, а также глубокое знание «причин» [Metaphysica, I. 918a.30], что является основной характеристикой *эпистеме*.

---

[1] См. следующую сноску.

5. Предмет и конечная цель *эпистеме* и *техне* по Коридаллевсу

Для того чтобы отнести логику к *эпистеме* или *техне*, Коридаллевс размышляет над различиями обеих и, прежде всего, останавливается на особенностях их предмета (ὑποκείμενον) и конечной цели (τέλος). Резюмировать его размышления (см. [Corydaleus, 1729, σσ. 31–40] и [Corydaleus, 1970, pp. 9–10]) можно следующим образом. Исследователь, занимающийся *эпистеме*, знает заранее, что познаваемый предмет существует и что существуют исследуемые πάθη 'претерпевания/аффекты' этого предмета. Таким образом, исследователь занимается познанием (γνῶσις) того, что уже существует само по себе, а он является лишь внешним созерцателем. Предмет исследования должен быть вечным (ἀΐδιον) и совершенным (ἀδιάπτωτον), все претерпеваемые им изменения состояния не случайны, поскольку они происходят по всем законам, правилам, аксиомам и т.д., которые существуют в данной дисциплине. Исследователь может заранее предвидеть различные состояния предмета изучения в зависимости от определенных параметров на основании правил и законов. Например, в геометрии предметом являются количественные отношения в пространстве, а в физике — тело. На основе законов геометр может построить определенный треугольник, а физик — рассчитать массу/скорость тела. Чистое познание истины о предмете является единственной конечной целью *эпистеме*, но при этом цель не определяет конкретную *эпистеме*, и только предмет является тем, что отличает одну *эпистеме* от другой.

В *техне* же перед исследователем первоначально стоит конечная цель, а потом в соответствии с ней подбирается предмет. Целью *техне* является некий конечный результат (ἀποτέλεσμα), который может быть физическим или виртуальным. Технический предмет не подчиняется всем методам, схемам, существующим в данной *техне*; предмет может изменяться (μεταβλητόν); предметов может быть много; а сам предмет *техне* правильнее называть материей. И самое главное — для определения *техне* предмет не так важен, как цель. Именно цель отделяет одну *техне* от другой.

Таким образом, фокус *эпистеме* направлен на познание естественного предмета, который уже существует, а фокус *техне* направлен на создание еще не существующего предмета, т.е. искусственного. Отсюда становится понятным, что для античного и средневекового человека искусство — это система знаний, которая позволяет создать что-то новое, чего нет в природе; поэтому к нему относятся как все прикладные науки, так и архитектура со скульптурой, реализация которых в те времена также требовала научных знаний и умения проводить эксперименты. А если мы вспомним творчество гениев Ренессанса, то мы получим и яркую иллюстрацию к такому подходу.

Коридаллевс утверждает, что логика — это творительный метод (μέθοδος ποιητική) или *техне*, и это, с его точки зрения, подтверждает Аристотель. Он приводит следующие аргументы в пользу такового тезиса:

— Любое 'обладание <знанием>' (ἕξις), которое дает нам правила и метод для создания, а не созерцания чего-либо, является *техне*.

— Любое 'обладание <знанием>' (ἕξις), результатом (ἀποτέλεσμα) которого является создание чего-либо, а не познание истины о существующем предмете, является *техне*.

Логика (ἕξις λογική) дает правила и показывает нам метод составления силлогизмов и дедуктивного доказательства; результатом логического метода является построение силлогизмов, силлогистических доказательств и других логических инструментов (ὄργανα). Отсюда логика, с точки зрения Коридаллевса, является *техне*(см. [Corydaleus, 1729, σ. 64] и [Corydaleus, 1970, p. 7]).

Другое его замечание основано на крайне сложном определении *эпистеме* у Аристотеля [Analytica posteriora, 71b], который утверждал, что занимающийся *эпистеме* получает знание посредством 'дедуктивного доказательства' (ἀπόδειξις), под которым понимается 'эпистемологический' (ἐπιστημονικόν) силлогизм[2]. Коридаллевс считал, что результат работы ло-

[2]Соответствующее определение из «Второй Аналитики» вызывает значительные затруднения в переводе у исследователей и порождает многочисленные дебаты [Burnyeat, 2011; Burnyeat, 2012; Morison, 2019; Lesher, 2001] (Аристотель использует не существительное *эпистеме*, а субстантивирует глагол ἐπίστασθαι): «Мы думаем, что *понимаем/знаем* (ἐπίστασθαι — глагол от *эпистеме*) что-либо абсолютно (ἁπλῶς), а не как софисты, которые делают это относительно (κατὰ συμβεβηκός), именно тогда, когда мы думаем, что знаем (γινώσκειν) причину, вследствие которой это есть, а также, что она есть причина этого, и знаем, что иначе не может быть. Очевидно, что таковое и означает заниматься *эпистеме* (τὸ ἐπίστασθαί — субстанитивированный глагол от *эпистеме*) <…> Позже мы обсудим, существует ли и другой способ 'обладать *эпистеме*' (ἐπίστασθαι), но сейчас мы утверждаем, что мы действительно получаем знание (εἰδέναι) посредством 'дедуктивного доказательства' (ἀπόδειξις). Под дедуктивным доказательством я понимаю 'эпистемологический' (ἐπιστημονικόν) силлогизм, а под ним — то, с помощью которого мы 'получаем *эпистеме*' (ἐπιστάμεθα). Если же 'занятие *эпистеме*' (τὸ ἐπίστασθαι) таково, как мы предположили, то необходимо, чтобы дедуктивная *эпистеме* (ἐπιστήμη) исходила от вещей истинных, первичных, непосредственных, более известных, предшествующих заключению и объясняющих его» (Ἐπίστασθαι δὲ οἰόμεθ᾽ ἕκαστον ἁπλῶς, ἀλλὰ μὴ τὸν σοφιστικὸν τρόπον τὸν κατὰ συμβεβηκός, ὅταν τήν τ᾽ αἰτίαν οἰώμεθα γινώσκειν δι᾽ ἣν τὸ πρᾶγμά ἐστιν, ὅτι ἐκείνου αἰτία ἐστί, καὶ μὴ ἐνδέχεσθαι τοῦτ᾽ ἄλλως ἔχειν. δῆλον τοίνυν ὅτι τοιοῦτόν τι τὸ ἐπίστασθαί ἐστι <…> Εἰ μὲν οὖν καὶ ἕτερος ἔστι τοῦ ἐπίστασθαι τρόπος, ὕστερον ἐροῦμεν, φαμὲν δὲ καὶ δι᾽ ἀποδείξεως εἰδέναι. ἀπόδειξιν δὲ λέγω συλλογισμὸν ἐπιστημονικόν· ἐπιστημονικὸν δὲ λέγω καθ᾽ ὃν τῷ ἔχειν αὐτὸν ἐπιστάμεθα. εἰ τοίνυν ἐστὶ τὸ ἐπίστασθαι οἷον

гика не основан на эпистемологическом силлогизме [Corydaleus, 1729, σ. 64], а потому она не может быть *эпистеме*.

6. Предмет и цель логики в современных Коридаллевсу доктринах

Проведя это различие в *эпистеме* и *техне*, Коридаллевс не сразу подходит к изложению собственного понимания предмета логики, а сначала разоблачает и борется с суждениями «младших» (νεώτεροι), которые, как считает Коридаллевс, чужды строгой логической мысли Аристотеля. Всего он называет три основные теории (δόγματα), которые выдвинуты людьми, как он пишет, пользующимися большой известностью как современные философы (τρεῖς οὖν αὐταὶ δόξαι ἀνδρῶν ἐπὶ φιλοσοφίᾳ μέγιστον ὄνομα παρὰ τοῖς νεωτέροις εἰληφότων ὑπ᾽ ἀλλήλων περιεχόμεναι [Ibid., σ. 39]). Как обычно, он не указывает имена этих известных ему философов.

Первой из этих теорий он рассматривает ту, которая считает предметом логики и одновременно ее целью дедуктивное доказательство (ἀπόδειξις). Далее он переходит к той, которая называет предметом эпихейрему (ἐπιχείρημα), и, наконец, к той, в которой таковым является силлогизм (συλλογισμός) [Ibid., σσ. 40–42]. После тщательного рассмотрения Коридаллевс подробно опровергает все эти теории [Ibid., σσ. 42–44].

Вслед за этим он переходит к четвертой теории, согласно которой предметом логики является τὸ κατ᾽ ἐπίνοιαν ὄν (так Коридаллевс переводил *ens rationis*) [Ibid., σ. 45]. Что же это за результаты работы нашего мозга так называемые κατ᾽ ἐπίνοια, которые составляют предмет логики? Коридаллевс объясняет их как вторичные отношения (δευτέρας σχέσεις), предложения, силлогизмы и доказательства, результаты, которые завершают действие нашего интеллекта (λέγουσι δὲ κατ᾽ ἐπίνοιαν ὄντα καὶ δευτέρας σχέσεις (εἶναι), αἱ προτάσεις, οἱ συλλογισμοὶ και ἀποδείξεις, ἣ ταῦτα ἀποτελέσματα εἰσὶν εἰς ἃ ἀμεσως καὶ καθ᾽ αὐτὸ ἡ ἐνέργεια τοῦ νοὸς ἀποτελευτᾷ) [Ibid., σ. 53][3]. Безусловно, под вторичными отношениями Коридаллевс имеет в виду *secondes notiones*, как их называл, например, Якопо Дзабарелла, или *secondes intentiones*, как их называл Фома Аквинский. Известные падуанские логики — Марко Антонио Зимара (1460–1532), Якопо Дзабарелла (1533–1589), Алессандро Пикколомини (1508–1578), Бернардино Томитано

ἔθεμεν, ἀνάγκη καὶ τὴν ἀποδεικτικὴν ἐπιστήμην ἐξ ἀληθῶν τ᾽ εἶναι καὶ πρώτων καὶ ἀμέσων καὶ γνωριμωτέρων καὶ προτέρων καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος [Analytica posteriora, 71b.9–22]).

[3]Впрочем, Коридаллевс подробнее обсуждает эту тему в комментариях к «Об истолковании», поскольку там вторичные отношения рассматриваются детальнее [Corydaleus, 1729, p. 302].

(†1576) — придерживались именно этой точки зрения и учили, что логика является инструментом философии, с помощью которого мы исследуем не реальность (первичные понятия), а наши мысленные конструкции или же вторичные понятия [Zabarella, 1586; Piccolomini, 1551; Tomitano, 1558; Poppi, 1970].

Коридаллевс поясняет, что силлогизмы, дедуктивное доказательство и все вторичные понятия не могут быть предметом логики, так как они являются результатом и инструментом деятельности логика. Предметом должно быть то, что логик созерцает [Corydaleus, 1729, σσ. 43, 53], отсюда все вышеперечисленные теории следует отринуть.

7. Предмет логики по Коридаллевсу

Коридаллевс отмечает сложность и многогранность понятия ὑποκείμενον (подлежащее, предмет) в сочинениях Аристотеля и в греческом языке в целом. В «Категориях» Аристотель приводит рассуждения о теоретической концепции, частью которой является это понятие, а также подробно описывает некоторые правила отношений предикации, лежащие в его основе. При этом он не дает никаких критериев того, что можно считать ὑποκείμενον, приводя лишь примеры вещей, которые, по его утверждению, являются ὑποκείμενον, и других вещей, которые таковыми не являются. Коридаллевс поясняет, что ὑποκείμενον, дословно ‘подлежащее’ или ‘субъект’, используется у Аристотеля как в прямом значении (основа, фундамент для чего-либо; материал, которому придается форма для создания чего-то нового, например медь или бронза для статуи), так и в узком значении технического термина в логике (τελευταῖον/ἔσχατον/ὑποκείμενον, подлежащее категориальной предикации сущности и привходящих признаков), а также в грамматике (синтаксическое подлежащее) и, наконец, в физике. В случае с исследуемым вопросом Коридаллевс определяет предмет как то, чем занимается (καταγίνεται) дисциплина, но при этом продолжает использовать предмет и в других аристотелевских значениях, откуда, например, предмет *техне* составляет то, из чего занимающийся *техне* создает нечто новое.

Коридаллевс доказывает, что логика является *техне*, чей предмет принято называть материей (ὕλη). Синонимичность этих понятий может казаться непривычной для русскоязычного читателя, но она очевидна для грека (см. выше употребления этого слова у Аристотеля), что также можно наблюдать в современных европейских языках, в которых *subject/sujet/soggetto* может быть синонимично *matter/matière/materia*. Для ответа на вопрос, что есть материя логики, Коридаллевс обращается к логическому трактату Аристотеля «Об истолковании», и прежде всего к фундаментальному положению, с которого начинается это сочинение [Corydaleus, 1729, σσ. 55–56]:

> Существуют звукоречевые символы[4], отражающие впечатление души, и письменные символы, передающие звукоречевые символы. Как письменная речь у всех разная, так и устная, но при этом предшествующие им значения — впечатления души — у всех общие, они есть подобия вещей, которые одинаковы для всех.
>
> Ἔστι μὲν οὖν τὰ ἐν τῇ φωνῇ τῶν ἐν τῇ ψυχῇ παθημάτων σύμβολα, καὶ τὰ γραφόμενα τῶν ἐν τῇ φωνῇ. καὶ ὥσπερ οὐδὲ γράμματα πᾶσι τὰ αὐτά, οὐδὲ φωναὶ αἱ αὐταί· ὧν μέντοι ταῦτα σημεῖα πρώτων, ταὐτὰ πᾶσι παθήματα τῆς ψυχῆς, καὶ ὧν ταῦτα ὁμοιώματα πράγματα ἤδη ταὐτά [De interpretatione, 16a1–6].

Коридаллевс объясняет, что под воздействием бытия (ὄν, ὄντα) или вещей (πράγματα) в уме формируются понятия (νοήματα; они же суть впечатления души), которые являются изображениями и подобиями вещей. Эти понятия выражаются с помощью различных слов (φωναί), которые уже не есть подобия, а есть символы вещей, представленных в душе в качестве понятий. В свою очередь, буквы являются символами звуков, которые выражают понятия, формируемые в душе (см. [Corydaleus, 1729, σ. 59] и [Corydaleus, 1970, pp. 11, 13]).

Коридаллевс далее рассуждает следующим образом. Устная и письменная речь не имеют универсального значения по природе, они разные у разных народов, в то время как формируемые в душе несловесные понятия о вещах у всех народов одинаковые. Логический метод универсален, поэтому и предмет логики должен быть у всех одинаковым, значит, предметом логики не могут быть слова сами по себе, а, прежде всего, понятия вещей, предшествующие словам, и такие понятия, которые выражаются через значащие звуки речи [Corydaleus, 1729, σ. 57].

Коридаллевс пишет, что похожим образом рассуждали Аммоний и Порфирий [Ibid., σ. 56]. Аммоний понимал каждую из десяти категорий как родовое ‘слово’/‘глас’ (φωνή), обозначающее внеязыковую и внементальную реальность через процесс концептуализации, происходящий в человеческой душе; и считал, что «Категории» имеют дело с речевыми единицами (φωναί), которые обозначают вещи посредством понятий (σημαίνουσαι πράγματα διὰ μέσων νοημάτων). Таким образом, у него мы, действительно,

[4] Для Аристотеля символы (σύμβολα) являются конвенциональными знаками [De interpretatione, 16a.26–29].

находим похожую формулу о том, что логика имеет дело с речевыми единицами (φωναί), обозначающими вещи (πράγματα) через посреднические понятия (νοήματα) [Ammonius Cat., ll.17–18]. В отличие от последнего, Порфирий опускает уровень понятий (νοήματα) и говорит только о «простых значащих звуках речи в той мере, в какой они обозначают вещи» (φωναὶ σημαντικαὶ ἁπλαῖ καθὸ σημαντικαί εἶσι τῶν πραγμάτων) [Porphyrius Cat., ll.5–6]. Следует сказать, что Порфирию следовал и Симпликий, который в этой связи говорил о простых (ἁπλαῖ) лексемах (λέξεις) в той мере, в какой они являются значащими (καθὸ σημαντικαί εἶσιν) (см. [Simplicius Cat., ll.18–19] и [Hoffmann, 1987, pp. 61–90].

Коридаллевс также рассказывает, что есть «современники» и древние философы, одни из которых считают материей логики только речевые единицы (φωναί), а другие — только вещи (πράγματα), третьи же — только понятия (νοήματα). Так все-таки сами ли речевые единицы (φωναί) составляют материю логики или формируемые ими понятия? — спрашивает Коридаллевс. И отвечает, что только понятия, выраженные словами, составляют материю логики; что же касается самих речевых единиц, то они могут также служить материей в том случае, если они выражают понятия [Corydaleus, 1970, p. 7].

8. *Телос* логики по Коридаллевсу

Коридаллевс отмечает, что конечная цель логики, или ее *телос* (τέλος), не заключается в познании собственного предмета/материи, как это было бы в случае с *эпистеме*. Каков же тогда *телос*, к которому она стремится? С этим вопросом Коридаллевс подходит к проблеме, которая была очередной темой оживленных дебатов среди логиков того времени. Коридаллевс поясняет, что понятие *телос* (τέλος) у Аристотеля и в греческом языке неоднозначно. Так, согласно Аристотелю, *телос* может означать цель изменения или деятельности, но может означать и бенефициара, ради которого происходят изменения или совершается деятельность. Древние комментаторы иллюстрировали это различие на примере целеполагания деятельности врача: один *телос* — для здоровья, другой — ради пациента [Simplicius Physica, 303.28–32]. Данное разделение имеет грамматическую природу и исходит из греческого языка, сам Аристотель обозначает это различие с помощью родительного падежа и дательного падежа, используя разные грамматические построения (см. об этом: [Johnson, 2005]), Коридаллевс предпочитает употреблять из них τὸ οὗ ἕνεκα и τὸ ᾧ. Родительный в данном случае указывает на объект стремления (Genetivus objectivus), в то время как дательный воспринимается как дательный интереса (Dativus commodi et incommodi).

Наконец, объяснив два аспекта *телоса*, Коридаллевс показывает, что родительный *телос* логики, т.е. цель, в виду которой предпринимается действие, — это в первую очередь составление силлогизмов (общая цель), а затем построение из них дедуктивного доказательства (конкретная цель). Дательный же *телос* логики, т.е. ради которого или во имя которого предпринимается действие, состоит в различении правды от лжи. Таким образом, пишет Коридаллевс, «дело логики есть дедуктивное доказательство, и цель ее состоит в построении дедуктивного доказательства и предоставлении его знающему, чтобы он смог отличить с его помощью истину от лжи» (Ἡ λογικὴ ἐργάτις ἐστὶν ἀποδείξεως, καὶ τοῦτο τέλος ποιεῖται τὴν ἀπόδειξιν κατασκευάσασθαι καὶ τὸ τῷ ἐπιστήμονι παραδοῦναι, δι᾽ ἧς τὸ ἀληθὲς τοῦ ψεύδους διακρίνειν σχοίῃ) [Corydaleus, 1729, p. 65].

9. Логика в системе знаний

Как известно, логика впервые появилась в качестве части философии у стоиков, разделивших единую тогда философию на логику, физику и этику, а саму логику — на диалектику и риторику (см.: [Ierodiakonou, 1993]). Однако такую классификацию не приняли неоплатонические комментаторы «Органона», которые сформулировали ряд критических замечаний против стоической концепции логики как части философии (см.: [Hadot, 1990; Solmsen, 1929]). В целом эта критика вызвала широкую полемику в античности, начиная с Посидония (139/135–51/50 до н.э.) [Seneca, ep. 88.21–28], а также Александра Афродисийского (кон. II – нач. III в.), с которого размышление над этой темой становится частой темой у комментаторов «Первой Аналитики» и «Категорий».

Несмотря на критику термина «логика», Александр Афродисийский ввел его в качестве названия дисциплины для изучения (πραγματεία), однако в самом начале своего комментария к «Первой Аналитике» [Alexander AP, 1.8–2.33] привел доказательство того, что логика является не частью философии, а ее методом или инструментом, т.е. органоном (ὄργανον), объединяющим различные методы аподиктики, диалектики, пейрастики, эристики и софистики. Другой известный комментатор — Иоанн Филопон (ок. 490–570) — также придерживался пути Александра Афродисийского, вместе с тем он разделял философию на теоретическую и практическую: теоретическая философия занимается вопросами истины и лжи, практическая — вопросами добродетели и порока, и та, и другая нуждаются в инструменте, который мог бы обеспечить критерий для различения истинного и ложного, хорошего и плохого. Роль такого инструмента (органона) играет у Филопона логика ([Philoponus Met., 1–20], см. также [Philoponus AP, 6.19–9.24]).

Примерно также мыслили и остальные неоплатонические комментаторы[5], как Аммоний, сын Гермия (440–520) [Ammonius AP, 8.15–11.21], и Элий Александрийский (VI в.) [Elias AP, 134.4–138.13].

Александр Афродисийский нам также рассказывает, что были еще и некие ранние философы, различавшие одновременно теоретический аспект (= часть философии) и утилитарный аспект логики (= инструмент) и которые таким образом противостояли как стоикам, так и перипатетикам [Alexander AP, 2.33 et ff.]. С подобным же примирением выступал Боэций (ок. 480–524). Логика, с его точки зрения, имеет свою собственную цель, которая заключается в поиске и оценке *rationes*. Ввиду того, что только философия рассматривает эту цель, логика является частью философии. При этом логика является и инструментом философии, поскольку истина философией исследуется с помощью логики [Boethius, 142.17–143.7]. В средние века распространилось похожее представление Дунса Скота (1266–1308), который выделял отдельно *logica docens*, являвшуюся, с его точки зрения, *scientia*, и *logica utens*, относимую им к *ars*. Тем не менее под влиянием неоплатонических комментаторов большинство падуанских логиков отказалось от схоластической теории и стало учить, что логика не является ни прикладной дисциплиной, ни теоретической, ни даже чем-либо иным из пяти видов аристотелевских ἕξις/*habitus*). Так, падуанцы Марко Антонио Зимара (с. 1460–1532), Якопо Дзабарелла (1533–1589), Алессандро Пикколомини (1508–1578), Бернардино Томитано (†1576) считали, что логика является инструментом философии, а не *scientia* [Zabarella, 1586; Piccolomini, 1551; Tomitano, 1558; Poppi, 1970; Секундант, 2005], другой падуанец — Джироламо Балдуино (XVI в.) — пошел дальше, доказывая, что логика является не инструментом, а способностью создавать инструменты (*facultas organorum*) [Balduino, 1569].

Коридаллевс также не признает теорию стоиков о том, что логика является частью философии. Он доказывает, что философия, действительно, пользуется логикой, но при этом логика не является частью философии, и даже Платон не считал ее частью философии [Corydaleus, 1729, σ. 73].

[5]Несколько иначе смотрел на проблему Плотин (204/205–270), который предложил различать аристотелевско-стоическую логику (λογικὴ πραγματεία) и платоновскую диалектику (διαλεκτική). Логика, согласно Плотину [Enneades, I, cap. 3, § 4.19; § 5.18], имеет своим объектом предпосылки и силлогизмы, она предстает как набор формальных теорем и правил. Диалектика же — это не абстрактная теория дискурса, а практика дискурса, которая не нуждается в знании логических правил, ибо она в самом своем осуществлении спонтанно практикует правила, установленные логикой [Ibid., I, cap. 3, § 4.1–4]. Отсюда диалектика, в отличие от логики, является не инструментом философии [Ibid., I, cap. 3, § 5.9], а частью философии, причем самой благородной ее частью [Ibid., I, cap. 3, § 5.23].

Если бы логика была бы частью философии, то, с его точки зрения, у нее должен был быть общий предмет и общая цель, но это не так.

Коридаллевс не признает и различие «современных» философов между логикой *utens* (χρωμένη), которую те относят к *техне*, и логикой *docens* (διδάσκουσα), которую те относят к *эпистеме*. И полагает, что абсурдно и смешно разделять логику на две части только для того, чтобы одну из них отнести к благородной *эпистеме*. Он рассуждает, что различное по роду не может быть едино по виду, а различное по виду не может быть едино по числу. *Техне* и *эпистеме*, действительно, различны по роду, а значит, относящиеся к ним логические дисциплины не могут быть едины в отношении вида и числа. Следовательно, невозможно разделение логик на разные дисциплины с тем, чтобы обе они оставались логикой, ведь вообще невозможно, чтобы одна дисциплина была бы одновременно *техне* и *эпистеме*. Кроме того, если логики разные и принадлежат к разным родам обладаний знаний (ἕξις), то у них, следовательно, должна быть разная деятельность/энергия (ἐνέργεια), однако это не так, кроме того, они могли бы существовать одна без другой, а это невозможно, ведь, наоборот, они показывают сопричастность друг другу [Corydaleus, 1729, σσ. 67–71].

Коридаллевс предлагает также выяснить, к какому типу *техне* относится логика. Он поясняет, что различные *техне* бывают инструментальными (τέχναι ὀργανικαί) и архитектурными (ἀρχιτεκτονικαί). Первые имеют целью служить другой *техне* или *эпистеме*, тогда как цель вторых не подчинена другой *техне* или *эпистеме*. Отсюда очевидно, что логика — это инструментальная *техне*, поскольку она служит философии и предоставляет в ее распоряжение свой продукт — дедуктивное доказательство, позволяющее философу отличить истину от лжи. Именно поэтому, пишет Коридаллевс, логику называют «инструментом философии» (ὄργανον φιλοσοφίας) [Ibid., σ. 67]. Логика, помимо этого, дает философии методы, которые предшествуют дедуктивному доказательству: метод деления, определения силлогизма и анализа; философы называют их инструментами и методами. Противоположные же утверждения современников являются, с его точки зрения, пустословием (ματαιολογίαι τῶν νεωτέρων) [Ibid.].

В ходе своего рассуждения Коридаллевс рассмотрел и вопрос о том, является ли логика чем-то врожденным (ἔμφυτος) и, как считал Платон, присущим самой человеческой природе (ἕξις ἔμφυτος τῇ ἀνθρωπίνῃ φύσει) или приобретенным (ἐπίκτητος). В итоге своего рассуждения он пришел к выводу, что и *техне*, и различные виды *эпистеме* не являются врожденными, а приобретаются привычкой и разумом (Αἱ Τέχναι καὶ Ἐπιστῆμαι, οὐκ εἰσὶν ἔμφυτοι, ἀλλ᾽ ἐπίκτητοι ἐθισμῷ καὶ λόγῳ πoριζόμεναι [Ibid., σ. 31]).

Наконец, после подробного изложения вышеупомянутых аргументов и доказательства того, что логика — это *техне* и метод, а не *эпистеме*, причем *техне* инструментальная, Коридаллевс дает такое определение в вопросоответной эпитоме: «Логика — это инструментальная *техне* философии, имеющая дело с единицами речи, обозначающими вещи через понятия, и дающая нам правила, с помощью которых составляются из таковых речевых единиц логические инструменты, которыми пользуется философия для различения истины от лжи» (Ἡ λογικὴ ἕξις τέχνη ἐστὶ φιλοσοφίας ὀργανική, περὶ φωνὰς καταγινομὲνη, δηλωτικὰς τῶν πραγμάτων διὰ τῶν νοημάτων, παραδίδουσα ἡμῖν κανόνας, καθ᾽ οὓς ἐκ τῶν τοιούτων φωνῶν κατασκευάζεται τὰ λογικὰ ὄργανα, οἷς κέχρηται ἡ φιλοσοφία εἰς διάκρισιν ἀληθείας καὶ ψεύδους [Corydaleus, 1970, p. 13]). А в пространной версии такое, где под «впечатлениями» подразумеваются «понятия»: «Логический метод, согласно доказанному, есть инструментальная *техне* философии, которая главным образом занимается впечатлениями мыслительных сил нашей души, имея своей конкретной целью знание и составление доказательства, а своей общей целью — силлогизм» (Ἡ Λογικὴ μέθοδος, κατὰ τὰ δεδειγμένα, Τέχνη ἐστὶ Φιλοσοφίας ὀργανική, περὶ τὰ παθήματα τῶν διανοητικῶν δυνάμεων τῆς ἡμετέρας ψυχῆς πρώτως καταγινομένη, τέλος ἔχουσα σκοπιμώτατον μὲν τὴν γνῶσιν, καὶ σύνθεσιν τῆς ἀποδείξεως, γενικώτερον δὲ τὸν συλλογισμόν [Corydaleus, 1729, σ. 67]).

10. Отличия логики от риторики

Поскольку предметом, или материей, логики являются речевые единицы (φωναί), чем же она тогда отличается от других дисциплин, таких как грамматика и риторика, которые работают с той же материей? Коридаллевс показывает, что логика использует речевые единицы лишь постольку, поскольку они означают понятия, формируемые в нашем уме под воздействием окружающего мира, тогда как риторика использует их, заботясь не об их значении, а лишь о красоте и убеждении, грамматика же занимается их значениями, но имеет своей целью лишь правильность речи и письма (ἡ λογικὴ κέχρηται τῷ ἐν τῇ φωνῇ λόγῳ <...> ἧπερ ἐστὶν ἑρμηνευτικὸς τῆς ἰδιότητος καὶ τάξεως τῶν ἐν τῇ ψυχῇ παθημάτων τῆς ἡμετέρας γνωστικῆς δυνάμεως. Ρητορικὴ δὲ κέχρηται καὶ αὕτη ταῖς φωναῖς ἀναγκαίως, οὐ πολυπραγμονεῖ δὲ τὴν σημασίαν αὐτῶν, ἀλλὰ τὸ εὐφραδὲς καὶ πειθήνιον <...> ἡ δὲ Γραμματικὴ καθ᾽ αὑτὸ καταγίνεται περὶ τὴν σημασίαν τῶν φωνῶν, τέλος ποιοῦσα τὴν ἐν τῷ λέγειν καὶ γράφειν ὀρθότητα (см. [Corydaleus, 1970, pp. 13–14] и [Corydaleus, 1729, σ. 74]).

Во-первых, Коридаллевс отмечает, что теоретической основой риторики является «Топика» Аристотеля, а не логические трактаты, учащие правильной дедукции. Во-вторых, он утверждает, что риторика является инструментом практической философии, целью которой является благоденствие ей следующих (εὐζωΐα τῶν ὑπηκόων). Тогда как логика, с его точки зрения, — это инструмент теоретической философии, а целью теории, т.е. созерцания, является познание истины [Corydaleus, 1729, σ. 75]). Отсюда он выделяет три основных аспекта (τρόπος), отличающие риторику от логики:

— назначение/цель (τέλος): целью риторики является убеждение аудитории, тогда как цель логики состоит в предоставлении философии инструмента различения истины от лжи, что и делает ее инструментом теоретической философии;

— материя/предмет (ὕλη): риторика занимается в основном дискурсами, прежде всего политическими, что ее и делает инструментом практической философии;

— образ действия (ἐνεργεία): риторика, в отличие от логики, использует убеждающие силлогизмы (πιθανὸς συλλογισμός), под которыми он понимает диалектические силлогизмы, посылки которых, в отличие от аподиктических силлогизмов, являются не научными истинами, а лишь общепризнанными мнениями.

Заключение

Важность ученичества Феофила Коридаллевса у Чезаре Кремонини и его зависимость от падуанской школы нередко преувеличивалась вольфианцами XVIII в. [Δημητρακόπουλος, 2011; Agiotis, 2019]. Между тем благодаря проведенному анализу можно утверждать, что Коридаллевс развил собственную теорию, не опираясь на достижения своего учителя и падуанской школы. Если мы обратимся к посмертному изданию логики Кремонини, то обнаружим там весьма краткое рассмотрение изученных нами вопросов, написанное в несколько аверроистском ключе, поскольку логика у Кремонини хоть и являлась *modus sciendi*, но предметом логики был метафизический *ens quatenus ens*, такой же как у метафизики, диалектики и софистики [Cremonini, 1663, pp. 3–6]. Воздавая должное своему учителю, Коридаллевс приводит в конце сочинения производимое Кремонини деление логики на две части: общую и частную (первая посвящена силлогизму в целом и элементам, которые способствуют его формированию, таким как категории и истолкования, а вторая рассматривает виды силлогизмов, дедуктивное доказательство, общие места и опровержения софизмов). Тем не менее он не называет логикой только первую часть, а диалектикой вторую, как это делает Кремонини, обвинивший Аристотеля в том, что тот смешал логику с диалектикой [Cremonini, 1663, p. 3].

В целом же можно утверждать, что Феофил Коридаллевс, в отличие от своих предшественников, создал последовательную теорию о природе логики, которая согласовывалась с логическими сочинениями Аристотеля. Его греческие последователи и сторонники аристотелизма зависели в гораздо большей степени от схоластических и современных им авторов. Например, мы встречаем совершенно иной взгляд на определение логики, не согласовывавшийся с текстами Аристотеля, у Герасима Влаха (1605/7–1685), главы Греческой школы в Венеции, а также у известных учеников последнего: Софрония Лихуда, составившего учебник для Славяно-греколатинской академии [Спиридонова & Курбанов, 2022], и Георгия Сугдуриса, написавшего самый популярный греческий учебник по логике в XVIII–XIX вв. [Σουγδουρῆς, 1792]. Так, согласно теории Герасима Влаха, которую транслировали его ученики, дидактическая (διδακτική/*docens*) логика является *эпистеме*, а прикладная (κεχρωμένη/κεχρημένη/*utens*) логика не является *эпистеме*, но «образным *техне*» (τέχνη τροπική), при этом предметом логики у них, вслед за многими падуанскими логиками, являлись вторичные понятия (см. рукопись из *Biblioteca Nazionale Marciana*, gr. IV. 60, а также [Τατάκης, 1973, σσ. 96–133], [Спиридонова & Курбанов, 2022, с. 85–91], [Спиридонова & Курбанов, 2021]).

Литература

Секундант, 2005 – *Секундант С.* Трактат Джакомо Забареллы “De natura logicae” // Sententiae. 2005. Т. 12. № 1. С. 245–276.

Спиридонова & Курбанов, 2021 – *Спиридонова Л.В., Курбанов А.В.* Неизданные логические сочинения Герасима Влаха // Философский журнал. 2021. Т. 14. № 4. С. 144–156.

Спиридонова & Курбанов, 2022 – *Спиридонова Л.В., Курбанов А.В.* Источники Логики Софрония Лихуда // Логические исследования / Logical Investigations. 2022. Т. 28. № 1. С. 76–97.

Agiotis, 2019 – *Agiotis N.* Greek Aristotelianism in the seventeenth century: uncovering Cesare Cremonini in the works of Theophilos Korydalleus // Byzantine and Modern Greek Studies. 2019. Vol. 43. No. 1. P. 105–116.

Alexander AP – Alexandri in Aristotelis analyticorum priorum librum i commentarium / Ed. M. Wallies [= Commentaria in Aristotelem Graeca, 2.1]. Berlin: Reimer, 1883.

Ammonius AP – Ammonii in Aristotelis analyticorum priorum librum i commentarium / Ed. M. Wallies [= Commentaria in Aristotelem Graeca, 4.6]. Berlin: Reimer, 1899.

Ammonius Cat. – *Ammonius.* In Aristotelis Categorias Commentarius / Ed. A. Busse [= Commentaria in Aristotelem Graeca 4.4]. Berlin: Reimer, 1895.

Analytica posteriora – Aristotelis analytica priora et posteriora / Ed. W.D. Ross. Oxford: Clarendon Press, 1964.

Balduino, 1569 – *Balduino G.* Variis generis in logica quaesita. Padova, 1569.

Bergonzi, 1994 – *Bergonzi E.* Cremonini scrittore gli anni padovani e le opere della maturità // Aevum. 1994. Vol. 68. No. 3. P. 607–633.

Boethius – In Isagogen Porphyrii commenta / Ed. S. Brandt [= Corpus Scriptorum Ecclesiasticorum Latinorum, 48]. Vienna: Tempsky, 1906.

Burnyeat, 2011 – *Burnyeat M.* Episteme // Episteme, etc.: Essays in Honour of Jonathan Barnes / Eds. B. Morison & K. Ierodiakonou. Oxford: Oxford University Press, 2011. P. 3–29.

Burnyeat, 2012 – *Burnyeat M.* Aristotle on understanding knowledge // *Burnyeat M.* Explorations in Ancient and Modern Philosophy. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. P. 115–144.

Corydaleus, 1729 – *Θεόφιλου τοῦ Κορυδαλέως.* Εἰς Ἅπασαν τήν Λογικήν τοῦ Ἀριστοτέλους ὑπομνήματα καί ζητήματα. Βενετία: παρὰ Νικολάῳ Γλυκεῖ τῷ ἐξ Ἰωαννίνων, 1729.

Corydaleus, 1797 – *Θεόφιλου τοῦ Κορυδαλέως.* Ἐπιστολὴ δογματικὴ πρὸς Σωφρόνιον Ποκζάσκι Ῥέκτορα τῆς ἐν Κιαιβίῳ Σχολῆς // Ἀδάμ Ζοιρνικαβίου Βορούσσου. Περὶ ἐκπορεύσεως τοῦ Ἁγίου Πνεύματος ἐκ μόνου τοῦ Πατρός; Μάρκου Ἐφέσσιου τοῦ Εὐγενικοῦ; Θεόφιλου τοῦ Κορυδαλέως / ὑπὸ Εὐγ. Βουλγάρεως. Πετρούπολις: Ἐν τῷ τυπογραφείῳ τῆς ἐν Πετρουπόλει Αὐτοκρατορικῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν, 1797. Τ. ΙΙ. Σ. 742–752.

Corydaleus, 1970 – *Théophile Corydalée.* Introduction à la logique / Texte grec établi par A. Papadopoulos; précédé par une étude de C. Tsourkas; trad. et prés. par C. Noica. Bucarest: Association internationale d'études du sud-est européen; Comité national roumain, 1970.

Cremonini, 1663 – Caesaris Cremonini Centensis olim in Gymnasio Patauino philosophi primae sedis Dialectica, addita in fine operis singularum lectionum paraphrasi a Troylo de Lancettis, auditore eiusdem. Venetiis: apud Guerilios, 1663.

De interpretatione – Aristotelis categoriae et liber de interpretatione / Ed. L. Minio-Paluello. Oxford: Clarendon Press, 1949.

Elias AP – *Westerink L.G.* Elias on the prior analytics // Mnemosyne. 1961. Vol. 14. No. 2. P. 134–139.

Enneades – Plotini Opera / Eds. P. Henry, H.-R. Schwyzer. 3 vols. [= Museum Lessianum. Series philosophica, 33–35]. Leiden: Brill, 1:1951; 2:1959; 3:1973.

Ethica Nicomachea – Aristotelis Ethica Nicomachea / Ed. P.I. Bywater. Oxford: Clarendon Press, 1894.

Geanakoplos, 1985 – *Geanakoplos D.J.* The career of the little-known Renaissance Greek scholar Nicholas Leonicus Tomaeus and the ascendancy of Greco-Byzantine Aristotelianism at Padua University (1497) // Byzantina. 1985. Vol. 13. P. 357–372.

Hadot, 1990 – *Hadot P.* La logique, partie ou instrument de la philosophie? // Simplicius Commentaire sur les Catégories. Leiden: Brill, 1990. P. 183–188.

Henderson, 1970 – *Henderson G.P.* The Revival of Greek Thought, 1620–1830. Albany: State University of New York Press, 1970.

Hoffmann, 1987 – *Hoffmann Ph.* Catégories et langage selon Simplicius: la question du 'skopos' du traité aristotélicien des Catégories // Simplicius: Sa vie, son œuvre, sa survie / Ed. I. Hadot. Berlin: De Gruyter, 1987. P. 61–90.

Ierodiakonou, 1993 – *Ierodiakonou K.* The Stoic Division of Philosophy // Phronesis. 1993. Vol. 38. P. 57–74.

Iorga, 1928 – *Iorga N.* Istoria învăţământului românesc. Bucarest, 1928.

Johansen, 2022 – Productive Knowledge in Ancient Philosophy: The Concept of Techne / Ed. T.K. Johansen. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.

Johnson, 2005 – *Johnson M.R.* Aristotle on Teleology [= Oxford Aristotle Studies]. Oxford: Oxford University Press, 2005.

Kuhn, 1996 – *Kuhn H.C.* Venetischer Aristotelismus im Ende der aristotelischen Welt: Aspekte der Welt und des Denkens des Cesare Cremonini (1560–1631). Frankfurt am Main, 1996.

Lesher, 2001 – *Lesher J.H.* On Aristotelian Ἐπιστήμη as 'Understanding' // Ancient Philosophy. 2001. Vol. 21. No. 1. P. 45–55.

Lohr, 1975 – *Lohr C.H.* Renaissance Latin Aristotle Commentaries: Authors C. // Renaissance Quarterly. 1975. Vol. 28. No. 4. P. 689–741.

Metaphysica – Aristotle's metaphysics / Ed. W.D. Ross. Oxford: Clarendon Press, 1924.

Morelli, 1821 – *Morelli J.* Intorno ad un orazione greca inedita del Cardinale Pietro Bembo alla Signoria di Venezia // Memorie del Regale Istituto del Regno Lombardo-Veneto. T. II. Milan, 1821. P. 251–262.

Morison, 2019 – *Morison B.* Theoretical Nous in the Posterior Analytics // Manuscrito. 2019. Vol. 42. No. 4. P. 1–43.

Papadopoulos, 1952 – *Papadopoulos T.* Studies and Documents Relating to the History of the Greek Church and People Under Turkish Domination. Brussels, 1952.

Philoponus AP – Ioannis Philoponi in Aristotelis analytica priora commentaria / Ed. M. Wallies [= Commentaria in Aristotelem Graeca, 13.2]. Berlin: Reimer, 1905.

Philoponus Met. – Ioannis Philoponi in Aristotelis meteorologicorum librum primum commentarium / Ed. M. Hayduck [= Commentaria in Aristotelem Graeca, 14.1]. Berlin: Reimer, 1901.

Piccolomini, 1551 – *Piccolomini A.* L'instrumento de la filosofia. Roma, 1551.

Podskalsky, 1988 – *Podskalsky G.* Griechische Theologie in der Zeit der Türkenherrschaft 1453–1821. Die Orthodoxie im Spannungsfeld der nachreformatorischen Konfessionen des Westens. Munich, 1988.

Poppi, 1970 – *Poppi A.* Introduzione all'aristotelismo padovano. Padova: Editrice Anteriore, 1970.

Porphyrius Cat. – Porphyrii Isagoge et In Aristotelis Categorias Commentarium / Ed. A. Busse [= Commentaria in Aristotelem Graeca 4.1]. Berlin: Reimer, 1887.

Randall, 1961 – *Randall J.N.* The School of Padua and the emergence of modern science. Padova: Editrice Antenore, 1961.

Rhetorica – Ars rhetorica / Ed. W.D. Ross. Oxford: Clarendon Press, 1959.

Riondato & Porri, 2000 – Cesare Cremonini: Aspetti del pensiero e scritti / Eds. E. Riondato, A. Poppi. Padua, 2000.

Seneca – *Seneca.* Epistles. Vol. II: Epistles 66–92 [= Loeb Classical Library, 76]. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1920.

Simplicius Cat. – Simplicii in Aristotelis categorias commentarium / Ed. K. Kalbfleisch [= Commentaria in Aristotelem Graeca 8]. Berlin: Reimer, 1907.

Simplicius Physica – Simplicii in Aristotelis physicorum libros octo commentaria / Ed. H. Diels, 2 vols. [= Commentaria in Aristotelem Graeca 9 & 10]. Berlin: Reimer, 9:1882; 10:1895.

Solmsen, 1929 – *Solmsen F.* Die Entwicklung der aristotelischen Logik und Rhetorik, Berlin: Weidmann, 1929.

Topica – Topica et Sophistici Elenchi / Ed. W.D. Ross. Oxford: Clarendon Press, 1958.

Tsiotras, 2000 – *Tsiotras V.I.* The manuscripts of Theophilos Korydalleus' commentaries on Aristotle's Logic // Cesare Cremonini: Aspetti del pensiero e scritti (Atti del Convegno di Studio-Padova, 26–27 Febbraio 1999). Padua, 2000. P. 219–248.

Tsourkas, 1948 – *Tsourkas Cl.* Les débuts de l'enseignement philosophique et de la libre pensée dans les Balkans: La vie et l'oeuvre de Théophile Corydalée (1550–1646). Bucarest, 1948.

Tomitano, 1558 – Lectiones Ordinariae Excellentissimi Physici ac medici Domini Bernardini Tomitani super primo libro Posteriorum Aristotelis. Patavii, 1558.

Zabarella, 1586 – *Zabarella G.* De natura logica // Iacobi Zabarellae Patauini Opera logica. Venetiis: apud Paulum Meietum bibliopol. Patauinum, 1586.

Δημητρακόπουλος, 2011 – *Δημητρακόπουλος I.A.* Рецензия на: Ευγενίου Βουλγάρεως: Λογική. Προλεγόμενα – επιμέλεια – ευρετήρια: Κ.Θ. Πέτσιος (Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων 2010) // Κριτικά. 2011. Αρ. 7. Σ. 1–8.

Μαραζόπουλος, 2008 – *Μαραζόπουλος Π.Χ.* Θεόφιλος Κορυδαλέας: Ὁ πρωτοφιλόσοφος τοῦ Ἑλληνικοῦ Νεοαριστοτελισμοῦ. Ἀθήνα, 2008.

Σουγδουρῆς, 1792 – *Σουγδουρῆς Γ.* Εἰσαγωγὴ Λογική: ἤτοι προδιοίκησις εἰς ἅπασαν τὴν λογικὴν μέθοδον τοῦ Ἀριστοτέλους / Συντεθεῖσα μὲν παρά τοῦ Γεωργίου Σουγδουρῆ τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων. Βιέννη: Ἰωσὴφ Βαουμάιστερ, 1792.

Τατάκης, 1973 – *Τατάκης Β.* Γεράσιμος Βλάχος ο Κρής (1605/7–1685), φιλόσοφος, θεολόγος, φιλόλογος. Βενετία, 1973.

Lydia V. Spyridonova, Andrey V. Kurbanov

Theophilos Corydalleus on the Nature of Logic and its Distinction from Rhetoric

Lydia V. Spyridonova
The Russian Christian Academy of the Humanities,
Fontanka River emb., 15, St. Petersburg, 191011.
E-mail: lydia.spyridonova@gmail.com

Andrey V. Kurbanov
The Russian Christian Academy of the Humanities,
Fontanka River emb., 15, St. Petersburg, 191011.
E-mail: andrey.kurbanov@gmail.com

Abstract: Theophilos Corydalleus (1574–1646), head of the Patriarchal School in Constantinople, was one of the brightest figures of both the Paduan and Greek schools. Corydalleus devotes the first work in his Compendium of Logic entirely to a study of the nature of logic. First of all, he proves that logic cannot be an *episteme*, but only a *techne*. To this purpose he makes a detailed survey of the meaning of these concepts in Aristotle, which shows the difference in their understanding by modern and Latin authors. He does not recognize the distinction between practical and theoretical logic, which allowed the Scholastics to classify the latter as *scientia*. Corydalleus also disagrees with the position of the Stoics that logic is part of philosophy, he considers it to be an instrument of philosophy. He focuses on the subject of logic, or rather on its matter (since logic is a *techne*, it has matter) as well as its ends, i.e. the genitive and dative *telos* of Aristotle. Corydalleus summarizes that logic is the instrumental *tehne* of philosophy, whose matter is concepts (νοήματα), expressed in meaningful words (φωναί); logic gives us the rules by which we can construct logical tools from meaningful words — this is its genitive *telos*, these instruments are used by philosophy, which enables the dative *telos* — the distinction between truth and falsehood. Rhetoric, which also consists of words, differs in the way of action, narrowness of subject and goal, which is to convince the audience.

Keywords: Theophilos Corydalleus/Corydaleus/Korydalleus, neo-Aristotelianism, episteme, techne, telos, Aristotle, history of Logic, post-Byzantine logic, University of Padua, Cesare Cremonini

For citation: Spyridonova L.V., Kurbanov A.V. "Feofil Koridallevs o prirode logiki i ee otlichii ot ritoriki" [Theophilos Corydalleus on the Nature of Logic and its Distinction from Rhetoric], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 1, pp. 43–69. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-43-69 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is supported by Russian Science Foundation, project No. 18-78-10051, "Byzantine Roots of Russian Logical Tradition".

References

Sekundant, 2005 – Sekundant, S. "Traktat Dzhakomo Zabarelly 'De natura logicae'", *Sententiae*, 2005, Vol. 12, No. 1, pp. 245–276. (In Russian)

Spyridonova & Kurbanov, 2021 – Spyridonova, L.V., Kurbanov, A.V. "Neizdannye logicheskie sochineniya Gerasima Vlakha" [Unpublished Gerasimos Vlachos's logical works], Filosofskii zhurnal [Philosophy Journal], 2021, Vol. 14, No. 4, pp. 144–156. (In Russian)

Spyridonova & Kurbanov, 2022 – Spyridonova, L.V., Kurbanov, A.V. "Istochniki Logiki Sofroniya Likhuda" [The sources of Sophronius Leichoudes' Logic], Logicheskie Issledovaniya [Logical Investigations], 2022, Vol. 28, No. 1, pp. 76–97. (In Russian)

Agiotis, 2019 – Agiotis, N. "Greek Aristotelianism in the seventeenth century: uncovering Cesare Cremonini in the works of Theophilos Korydalleus", *Byzantine and Modern Greek Studies*, 2019, Vol. 43, No. 1, pp. 105–116.

Alexander AP – *Alexandri in Aristotelis analyticorum priorum librum i commentarium*, ed. M. Wallies [= Commentaria in Aristotelem Graeca, 2.1]. Berlin: Reimer, 1883.

Ammonius AP – *Ammonii in Aristotelis analyticorum priorum librum i commentarium*, ed. M. Wallies [= Commentaria in Aristotelem Graeca, 4.6]. Berlin: Reimer, 1899.

Ammonius Cat. – Ammonius. In Aristotelis Categorias Commentarius, ed. A. Busse [= Commentaria in Aristotelem Graeca 4.4]. Berlin: Reimer, 1895.

Analytica posteriora – *Aristotelis analytica priora et posteriora*, ed. W.D. Ross. Oxford: Clarendon Press, 1964.

Balduino, 1569 – Balduino, G. *Variis generis in logica quaesita.* Padova, 1569.

Bergonzi, 1994 – Bergonzi, E. "Cremonini scrittore gli anni padovani e le opere della maturità", *Aevum*, 1994, Vol. 68, No. 3, pp. 607–633.

Boethius – *In Isagogen Porphyrii commenta*, ed. S. Brandt [= Corpus Scriptorum Ecclesiasticorum Latinorum, 48]. Vienna: Tempsky, 1906.

Burnyeat, 2011 – Burnyeat, M. "Episteme", in: *Episteme, etc.: Essays in Honour of Jonathan Barnes*, eds. B. Morison & K. Ierodiakonou. Oxford: Oxford University Press, 2011, pp. 3–29.

Burnyeat, 2012 – Burnyeat, M. "Aristotle on understanding knowledge", in: *Explorations in Ancient and Modern Philosophy.* Cambridge: Cambridge University Press, 2012, pp. 115–144.

Corydaleus, 1729 – Θεόφιλου τοῦ Κορυδαλέως. *Εἰς Ἅπασαν τήν Λογικήν τοῦ Ἀριστοτέλους ὑπομνήματα καί ζητήματα.* Βενετία: παρὰ Νικολάῳ Γλυκεῖ τῷ ἐξ Ἰωαννίνων, 1729.

Corydaleus, 1797 – Θεόφιλου τοῦ Κορυδαλέως. "Ἐπιστολὴ δογματικὴ πρὸς Σωφρόνιον Ποκζάσκι Ῥέκτορα τῆς ἐν Κιαιβίῳ Σχολῆς", in: *Ἀδάμ Ζοιρνικαβίου Βορούσσου. Περὶ ἐκπορεύσεως τοῦ Ἁγίου Πνεύματος ἐκ μόνου τοῦ Πατρός; Μάρκου Ἐφέσσιου τοῦ Εὐγενικοῦ; Θεόφιλου τοῦ Κορυδαλέως,* ὑπὸ Εὐγ. Βουλγάρεως. Πετρούπολις: Ἐν τῷ τυπογραφείῳ τῆς ἐν Πετρουπόλει Αὐτοκρατορικῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν, 1797, t. II, pp. 742–752.

Corydaleus, 1970 – Théophile Corydalée. *Introduction à la logique,* texte grec établi par A. Papadopoulos; précédé par une étude de C. Tsourkas; trad. et prés. par C. Noica. Bucarest: Association internationale d'études du sud-est européen; Comité national roumain, 1970.

Cremonini, 1663 – *Caesaris Cremonini Centensis, olim in Gymnasio Patauino philosophi primae sedis Dialectica*, addita in fine operis singularum lectionum paraphrasi a Troylo de Lancettis, auditore eiusdem. Venetiis: apud Guerilios, 1663.

De interpretatione – *Aristotelis categoriae et liber de interpretatione*, ed. L. Minio-Paluello, Oxford: Clarendon Press, 1949.

Elias AP – Westerink, L.G. "Elias on the prior analytics", *Mnemosyne*, 1961, Vol. 14, No. 2, pp. 134–139.

Enneades – *Plotini Opera*, ed P. Henry, H.-R. Schwyzer. 3 vols. [= Museum Lessianum. Series philosophica, 33–35]. Leiden: Brill, 1:1951; 2:1959; 3:1973.

Ethica Nicomachea – *Aristotelis Ethica Nicomachea*, ed. P.I. Bywater. Oxford: Clarendon Press, 1894.

Geanakoplos, 1985 – Geanakoplos, D.J. "The career of the little-known Renaissance Greek scholar Nicholas Leonicus Tomaeus and the ascendancy of Greco-Byzantine Aristotelianism at Padua University (1497)", *Byzantina*, 1985, Vol. 13, pp. 357–372.

Hadot, 1990 – Hadot, P. "La logique, partie ou instrument de la philosophie?", in: *Simplicius Commentaire sur les Catégories*. Leiden: Brill, 1990, pp. 183–188.

Henderson, 1970 – Henderson, G.P. *The Revival of Greek Thought, 1620–1830.* Albany: State University of New York Press, 1970.

Hoffmann, 1987 – Hoffmann, Ph. "Catégories et langage selon Simplicius: la question du 'skopos' du traité aristotélicien des Catégories", in: Simplicius: Sa vie, son œuvre, sa survie, ed. I. Hadot. Berlin: De Gruyter, 1987, pp. 61–90.

Ierodiakonou, 1993 – Ierodiakonou, K. "The Stoic Division of Philosophy", *Phronesis*, 1993, Vol. 38, pp. 57–74.

Iorga, 1928 – Iorga, N. *Istoria învăţământului românesc.* Bucarest, 1928.

Johansen, 2022 – *Productive Knowledge in Ancient Philosophy: The Concept of Techne*, ed. T.K. Johansen. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.

Johnson, 2005 – Johnson, M.R. *Aristotle on Teleology* [= Oxford Aristotle Studies]. Oxford: Oxford University Press, 2005.

Kuhn, 1996 – Kuhn, H.C. *Venetischer Aristotelismus im Ende der aristotelischen Welt: Aspekte der Welt und des Denkens des Cesare Cremonini (1560–1631).* Frankfurt am Main, 1996.

Lesher, 2001 – Lesher, J.H. "On Aristotelian Ἐπιστήμη as 'Understanding'", *Ancient Philosophy*, 2001, Vol. 21, No. 1, pp. 45–55.

Lohr, 1975 – Lohr, C.H. "Renaissance Latin Aristotle Commentaries: Authors C.", *Renaissance Quarterly*, 1975, Vol. 28, No. 4, pp. 689–741.

Metaphysica – *Aristotle's metaphysics*, ed. W.D. Ross. 2 vols., Oxford: Clarendon Press, 1924.

Morelli, 1821 – Morelli, J. “Intorno ad un orazione greca inedita del Cardinale Pietro Bembo alla Signoria di Venezia”, in: *Memorie del Regale Istituto del Regno Lombardo-Veneto*, t. II. Milan, 1821, pp. 251–262.

Morison, 2019 – Morison, B. “Theoretical Nous in the Posterior Analytics”, *Manuscrito*, 2019, Vol. 42, No. 4, pp. 1–43.

Papadopoulos, 1952 – Papadopoulos, T. *Studies and Documents Relating to the History of the Greek Church and People Under Turkish Domination.* Brussels, 1952.

Philoponus AP – *Ioannis Philoponi in Aristotelis analytica priora commentaria*, ed. M. Wallies [= Commentaria in Aristotelem Graeca, 13.2]. Berlin: Reimer, 1905.

Philoponus Met. – *Ioannis Philoponi in Aristotelis meteorologicorum librum primum commentarium*, ed. M. Hayduck [= Commentaria in Aristotelem Graeca, 14.1]. Berlin: Reimer, 1901.

Piccolomini, 1551 – Piccolomini, A. *L'instrumento de la filosofia.* Roma, 1551.

Podskalsky, 1988 – Podskalsky, G. *Griechische Theologie in der Zeit der Türkenherrschaft 1453–1821. Die Orthodoxie im Spannungsfeld der nachreformatorischen Konfessionen des Westens.* Munich, 1988.

Poppi, 1970 – Poppi, A. *Introduzione all'aristotelismo padovano.* Padova: Editrice Anteriore, 1970.

Porphyrius Cat. – Porphyrii Isagoge et In Aristotelis Categorias Commentarium, ed. A. Busse [= Commentaria in Aristotelem Graeca 4.1]. Berlin: Reimer, 1887.

Randall, 1961 – Randall, J.N. *The School of Padua and the emergence of modern science.* Padova: Editrice Antenore, 1961.

Rhetorica – *Aristotelis Ars rhetorica,* ed. W.D. Ross. Oxford: Clarendon Press, 1959.

Riondato & Porri, 2000 – *Cesare Cremonini: Aspetti del pensiero e scritti*, eds. E. Riondato, A. Poppi, 2 vols. Padua, 2000.

Seneca – Seneca. *Epistles.* Vol. II: Epistles 66-92 [= Loeb Classical Library, 76]. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1920.

Simplicius Cat. – Simplicii in Aristotelis categorias commentarium, ed. K. Kalbfleisch [= Commentaria in Aristotelem Graeca 8]. Berlin: Reimer, 1907.

Simplicius Physica – Simplicii in Aristotelis physicorum libros octo commentaria, ed. H. Diels, 2 vols. [= Commentaria in Aristotelem Graeca 9 & 10]. Berlin: Reimer, 9:1882; 10:1895.

Solmsen, 1929 – Solmsen, F. *Die Entwicklung der aristotelischen Logik und Rhetorik*, Berlin: Weidmann, 1929.

Topica – *Aristotelis Topica et Sophistici Elenchi*, ed. W.D. Ross. Oxford: Clarendon Press, 1958.

Tsiotras, 2000 – Tsiotras, V.I. “The manuscripts of Theophilos Korydalleus' commentaries on Aristotle's Logic”, in: *Cesare Cremonini: Aspetti del pensiero e scritti* (Atti del Convegno di Studio-Padova, 26–27 Febbraio 1999). Padua, 2000, pp. 219–248.

Tsourkas, 1948 – Tsourkas, Cl. *Les débuts de l'enseignement philosophique et de la libre pensée dans les Balkans: La vie et l'oeuvre de Théophile Corydalée (1550–1646).* Bucarest, 1948.

Tomitano, 1558 – *Lectiones Ordinariae Excellentissimi Physici ac medici Domini Bernardini Tomitani super primo libro Posteriorum Aristotelis.* Patavii, 1558.

Zabarella, 1586 – Zabarella, G. "De natura logica", in: *Iacobi Zabarellae Patauini Opera logica.* Venetiis: apud Paulum Meietum bibliopol. Patauinum, 1586.

Δημητρακόπουλος, 2011 – Δημητρακόπουλος, I.A. "Review: Ευγενίου Βουλγάρεως: Λογική. Προλεγόμενα – επιμέλεια – ευρετήρια: Κ.Θ. Πέτσιος (Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων 2010)", *Κριτικά*, 2011, αρ. 7, pp. 1–8.

Μαραζόπουλος, 2008 – Μαραζόπουλος, Π.Χ. *Θεόφιλος Κορυδαλέας: Ὁ πρωτοφιλόσοφος τοῦ Ἑλληνικοῦ Νεοαριστοτελισμοῦ.* Αθήνα, 2008.

Σουγδουρῆς, 1792 – Σουγδουρῆς, Γ. *Εἰσαγωγὴ Λογική: ἤτοι προδιοίκησις εἰς ἅπασαν τὴν λογικὴν μέθοδον τοῦ Ἀριστοτέλους, Συντεθεῖσα μὲν παρά τοῦ Γεωργίου Σουγδουρῆ τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.* Βιέννη: Ἰωσὴφ Βαουμάιστερ, 1792.

Τατάκης, 1973 – Τατάκης, Β. *Γεράσιμος Βλάχος ο Κρής (1605/7–1685), φιλόσοφος, θεολόγος, φιλόλογος.* Βενετία, 1973.

Логические исследования
2023. Т. 29. № 1. С. 70–83
УДК 161.12

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 1, pp. 70–83
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-70-83

Л.Г. Тоноян

Логическая операция деления у Иоанна Дамаскина и Никифора Влеммида*

Лариса Грачиковна Тоноян
Санкт-Петербургский государственный университет.
Российская Федерация, 191011, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.
Русская христианская гуманитарная академия.
Российская Федерация, 191011, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 15.
E-mail: tonoyan2003@list.ru

Аннотация: В статье исследуется влияние логики Аристотеля, в частности методов определения и деления на византийскую мысль. Для анализа мы выбрали два популярных в Византии пособия по логике, один из которых принадлежит Иоанну Дамаскину, а другой — Никифору Влеммиду. Св. Иоанн Дамаскин (ок. 675 – ок. 750) в своем «Источнике знания» постоянно и активно пользуется логическими методами, в особенности дихотомическим делением, подробно разбирая то, что позже было названо Древом Порфирия. В нарушение принципа дихотомического деления при делении одушевленной [сущности] у него получаются три понятия: животные, зоофиты и растения. В статье показано, что эти и другие особенности в его изложении операции деления восходят к поздним неоплатоникам, которых он, правда, не называет. Труд Дамаскина в XII в. был переведен на латинский язык, а позднее неоднократно переводился на славянский и русский языки, способствуя знакомству с логикой Аристотеля и возникновению на Руси логической терминологии. В отличие от труда Дамаскина сочинение известного в Византии ученого Никифора Влеммида (1197–1272) до сих пор не переведено с греческого ни на один из современных языков и остается малоисследованным. В данной статье мы анализируем две главы его «Логики», посвященные логической операции деления и анализу древа Порфирия. Выявлены некоторые отличия в привычном изложении древа Порфирия также и в компендиуме Никифора Влеммида. В частности, Влеммид не отходит от принципа дихотомического деления: он объединяет зоофиты и растения в один разряд непередвигающихся и убирает деление разумных существ на смертных и бессмертных.

Ключевые слова: логика в Византии, учение о делении, Древо Порфирия, логика в России

Для цитирования: *Тоноян Л.Г.* Логическая операция деления у Иоанна Дамаскина и Никифора Влеммида // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 1. С. 70–83. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-70-83

* Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 18-78-10051 «Византийский фактор в формировании русской логической традиции».

Введение

Разработанные в античности логические операции деления и определения во многом сформировали рационалистический характер западной средневековой философии. В нашей статье «Эволюция Древа Порфирия в средние века» [Тоноян, 2021] мы рассмотрели возникновение и развитие этой основной классификационной схемы античной и средневековой философии преимущественно в латинских трактатах. В данной статье мы рассмотрим развитие логического учения о делении на Востоке, в византийских трактатах. Для анализа мы выделили два популярных учебника, излагающих логику Аристотеля: автором первого из них был живший в конце VII – сер. VIII в. св. Иоанн Дамаскин, а автором второго — византийский ученый и богослов Никифор Влеммид, многочисленные сочинения которого создавались в XIII в. «Источник знания» св. Иоанна Дамаскина сыграл большую роль не только в становлении византийского богословия, но и славянского и русского: рукописи этого трактата неоднократно переводились на славянские языки начиная с XI в. Во многом благодаря многочисленным спискам рукописей «Диалектики» Дамаскина в славянских переводах русские читатели знакомились с логикой и философией Аристотеля [Гаврюшин, 1984]. В XVI в. князь Андрей Курбский выполнил с помощниками новый перевод «Диалектики» Иоанна Дамаскина, правда, не с греческого, а с латинского языка. Перевод ближе к русскому языку, но не следует прежней переводческой традиции. По-видимому, трудности перевода подвигли Андрея Курбского перевести и издать первую на русском языке отдельную печатную книгу по логике, вышедшую в 1586 г.: «От другие диалектики Иона Спанинбергера о силогизме вытолковано». Свой перевод князь сопроводил несколькими послесловиями: «Сказ Андрея чего ради сии написаны», «Андрея Курпского сказ о лоике», а также «Толкования на дщицу кафегорий» (со схемой логического квадрата и разбором отношений в нем) и, что для нашего исследования представляет особый интерес, отдельное «Сказание о древе Порфирия» с рисунком дерева и его разбором [Там же, с. 64].

В отличие от сочинения Дамаскина, другой источник, «Логика» Никифора Влеммида [Blemmydes, 1885], по всей видимости, не был известен на Руси; впрочем, он и до сих пор не переведен с греческого ни на один из современных языков и не включен в историко-логический контекст.

Краткий обзор истории операции логического деления уместно начать с упоминания Платона. Платон был первым из философов, который активно использовал в своих «Диалогах» метод дихотомического деления. Общеизвестным стало применение им этого метода деления при определении человека как *обитающего на суше двуногого животного без перьев*

(«Политик»). А, например, в диалоге «Софист» он множество раз предлагает разделить предмет рассмотрения надвое. Весь диалог «Софист» можно представить в виде последовательной дихотомической схемы деления «искусства» на 78 подчиненных ему понятий.

Вклад Аристотеля в учение о делении понятий был, несомненно, основополагающим. Стагирит ввел строгую иерархию сущностей: высший род — промежуточные роды — ближайший род — конечные (неделимые) сущности. Дихотомическим делением категории сущность Аристотель определяет человека как *телесную, одушевленную, чувствующую, разумную, смертную сущность.* Этот метод определения понятий посредством дихотомического деления лег в дальнейшем в основу биологической и всякой иной систематики. Логическое учение Аристотеля о делении («Категории», «О частях животных» и др. трактаты) в его неоплатонической обработке (речь идет прежде всего об Аммонии Гермии и Порфирии) оказало значительное влияние и на западных, и на византийских мыслителей.

Неоплатоник Порфирий (ок. 233–304) во «Введении к “Категориям”» Аристотеля методически разработал аристотелевский метод родовидового деления, в результате чего появилась первая известная наглядная схема классификации в виде т.н. Древа Порфирия. Впрочем, во «Введении» Порфирия, насколько нам известно, этой схемы нет, она возникла значительно позже и получила название в честь заслуг Порфирия. В своих «Комментариях к Порфирию» и в трактате «О делении» Боэций (480–525) еще более методично изложил учение о делении; неслучайно в Средние века многие считали именно Боэция создателем «Древа Порфирия», или «Древа познания».

В сохранившихся рукописях самые ранние из рисунков Древ Порфирия датируются IX–XII вв., они встречаются именно в переводах Боэция «Введения Порфирия» и в его комментариях на «Введение». В печатных изданиях первый рисунок древа мы также встречаем у Боэция, в «Комментарии к Порфирию», в книге третьей «О виде», в «Патрологии» Миня. В рисунке отражены два вида деления: деление рода на виды — по существенному признаку — проводится вертикально (ствол дерева), а деление конечного вида на индивиды (вид *человек* делится на *Сократа*, *Платона* и т.д.) — по привходящему признаку — проводится горизонтально (под стволом древа). Рисунки первоначально не были разработаны в форме настоящих деревьев: у них не было ствола, веток, листьев и т.п. XIII в. внес ощутимые изменения в изображение схемы Порфирия. Широкое распространение рисунок древа Порфирия получил в рукописях «Суммы логики» Петра Испанского (XIII в.). В многочисленных списках этого труда схема превратилась в рисунок, изображающий природное дерево и впервые названный именем

Порфирия [Verboon, 2014, p. 100]. Принципиальных изменений западная традиция изложения древа Порфирия со времен Боэция вплоть до XVII в. не претерпела. В XVIII в. делались попытки изменить схему Порфирия в соответствии с христианским взглядом на сотворение мира. Так, картезианец Эдмон Пуршо (латинизированное имя — Пурхоций) в раннем, 1711 г., издании своего учебника помещает обычное древо Порфирия (Arbor Porphyrii secundum doctrinam Aristotelis et Peripateticorum / древо Порфирия согласно учению Аристотеля и перипатетиков) [Pourchot, 1711, p. 62], а в издании 1733 г. помещает свое собственное Древо Пурхоция (Arbor Purchotii ad mentem Platonis et Cartesianorum / древо Пурхоция по мысли Платона и картезианцев) [Pourchot, 1733, p. 834]. В его схеме нет асимметрии, т.е. нет отрицательных признаков, в ней найдено место и для Бога как духовной сущности, и для человека как двусоставной сущности, телесной и духовной, для земли, неба и т.д. [Тоноян, 2021, с. 421].

В XIX в. мы замечаем видоизменение Древа Порфирия соответственно научным представлениям эпохи. Это нашло отражение, например, в том, что в Древе Порфирия окончательно исчезло деление разумных животных на смертных и бессмертных. В таком виде эта схема, как правило, приводится в учебниках и в наши дни. Обратимся теперь к византийской традиции изложения операции деления.

1. «Философские главы» («Диалектика») св. Иоанна Дамаскина

«Источник знания», как известно, состоит из трех частей: «Философских глав», книги «О ересях вкратце» и богословского трактата «Точное изложение православной веры». Последний издается часто отдельно, но задумывался этот труд Дамаскиным, по видимости, как трехчастный. Применение им логических методов при исследовании богословских проблем сделало это сочинение образцом византийской схоластики. Патриарх Никифор, Феодор Студит, Иоанн Итал и др. богословы поздневизантийского периода также стали включать в свои богословские сочинения логические разделы. Трактат «О ересях», входящий в трилогию «Источник знания», является попыткой соблюсти правила деления при классификации перечисленных им 100 ересей.

Св. Иоанн Дамаскин в «Философских главах» постоянно пользуется логическими операциями, в особенности дихотомическим делением. Состав «Философских глав» следующий: в главах 1–8 наиболее активно используются операции деления понятий; они не имеют прямого соответствия в трактатах Аристотеля, главы 9–30 охватывают содержание «Введения» Порфирия, главы 31–62 соотносятся с текстом «Категорий» Аристотеля, главы 63–68 также не имеют прямого соответствия в трактатах Аристотеля. Метод дихотомического деления Дамаскин активно использует в главах 3, 4, 5, 6, 10, 46 и 47. Приступим к их рассмотрению.

В главе 3 «О философии» несколько раз производится деление философии, в результате которого получаются шесть основных определений философии. Философия есть: 1) познание (γνῶσις) сущего как такового; 2) познание божественных и человеческих вещей, 3) помышление о смерти; 4) уподобление Богу, 5) искусство из искусств и наука из наук, 6) любовь к мудрости [Иоанн Дамаскин, 2006, с. 11]. Это деление встречается уже у Аммония Гермия в толкованиях к «Первой Аналитике» Аристотеля и повторяется у многих неоплатоников.

В главе 4 «О сущем, субстанции и акциденции» Дамаскин отмечает, что сущее разделяется надвое, на субстанцию и акциденцию, но не как категория, а всего лишь как общее имя для всего существующего.

Глава 5 «О звуке» является дополнением к тексту Аристотеля и Порфирия; параллельные места встречаются у других писателей того времени [Слинин, 2006, с. 297], например у Давида Анахта [Давид Анахт, 1975, с. 106–107]. Здесь методом последовательного дихотомического деления понятия «звук» получаются пять известных предикабилий («пять звучаний»). А именно: звук бывает знаменательный/незнаменательный, знаменательный бывает членораздельным/нечленораздельным, членораздельный — общим/частным, общий — существенным/несущественным. Наконец, из существенных звуков выделяются род, вид, разность, из несущественных — свойство и акциденция. В.В. Воробьев [Воробьев, 2022, с. 55], полагая, что перевод последних трех предикабилий, сделанный в 1913 году, устарел, опубликовал в своей статье отредактированный перевод данной главы, где заменил их терминами, соответствующими переводу на русский язык терминов Аристотеля и Порфирия, а именно: разность — различающий признак, свойство — собственный признак, акциденция — привходящий признак.

В главе 6 «О разделении» Дамаскин подробно рассматривает возможные способы деления. «Все, подлежащее разделению, разделяется или само по себе, т.е. сообразно своей субстанции, или сообразно своим акциденциям». В итоге получается восемь основных способов деления: субстанция делится или как 1) род на виды, или как 2) вид на индивиды, или как 3) целое на части, или как 4) омонимное название на обозначаемые различия, или как 5) субстанция на акциденции, или как 6) акциденция на субстанции, или 7) как акциденция на акциденции, или как 8) предметы, принадлежащие и относящиеся к одному и тому же предмету (производные понятия). «Впрочем, некоторые не признают деления вида на индивиды за разделение, предпочитая называть его исчислением, потому что разделение имеет два, три, очень редко четыре члена; вид же разделяется на бесконечное множество членов; ибо отдельных людей, например, бесконечное множество» [Иоанн Дамаскин, 2006, с. 18–19]. Но у Боэция в «Комментарии к Порфирию» последний вид деления присутствует [Боэций, 1996, с. 17–18]. Впрочем, в своем отдельном трактате «О делении» Боэций гораздо более подробно рассмотрел все перечисленные Дамаскиным способы деления [Боэций, 2013, с. 298–321].

2. «Древо Порфирия» у Дамаскина

В главе 10 «О виде» дается подробное рассмотрение Древа Порфирия. Словесное описание Древа точно такое же, как у Боэция и др. и практически во всей средневековой латинской традиции. Впрочем, о том, что в сочинении Дамаскина мы не найдем ничего нового, говорит он сам, отмечая, что переложил то, «о чем сказано в различных местах у божественных и мудрых мужей». Ни названия древа, ни рисунка древа Порфирия в рукописях, по-видимому, не было.

В главе 46 «Разделение сущего» сущее снова разделяется на субстанцию и акциденцию, но «не как род на виды, а как омонимичное название или как то, что происходит от одного предмета и находится к нему в определенном отношении» [Иоанн Дамаскин, 2006, с. 48].

Наконец, в главе 47 «Разделение субстанции» мы встречаем разбор древа Порфирия с некоторыми добавлениями. В этой главе вновь дается схематическое разделение категории сущность. Рисунка древа нет, но ступенчатость деления имеет место [Migne, 1864, pp. 618–619], [Иоанн Дамаскин, 2006, с. 48].

Субстанция разделяется на тело и бестелесное,

тело — на	**одушевленное**	и неодушевленное;
одушевленное — на	1. **чувствующее** животное,	2. животно-растительное (животное) и 3. нечувствующее (растение)
чувствующее — на	**разумное**	и неразумное;
разумное — на	**смертное**	и бессмертное;
смертное — на	**человека**, вола, лошадь, собаку и т.п.;	
человек — на	**Петра, Павла и прочих единичных людей, которые суть индивиды, ипостаси, лица**	

Особенностью этого деления является нарушение дихотомии деления, а именно, одушевленное делится не на два, а на три вида:

1. чувствующее (животное),
2. животно-растительное (животное),
3. нечувствующее (растение).

Откуда возникло животно-растительное (животное)? В «Категориях» Аристотеля такого понятия мы не встречаем. Правда, в трактате «История животных» Аристотель говорит о некоторых смешанных, промежуточных видах животных (устрицы, губки), но термина «зоофиты» (животно-растительные) мы у него не заметили. У Аристотеля читаем: «По-видимому, и губка обладает каким-то ощущением; на это указывает то, что ее труднее оторвать, если движение не производится тихим образом, как это утверждают. Другие и прикреплены и отделяются, таким является один род так называемой акалефы: некоторые из них, отделяясь ночью, пасутся. Многие же, хотя и отделены, неподвижны, например, устрицы и так называемые голотурии» [Аристотель, 1996, кн. 1, гл. 1].

Неоплатоники (Дексипп, Аммоний Гермий) в IV–V вв. н.э. называют таких животно-растительных существ «зоофитами» (др.-греч. ζωόφυτα). Дексипп, например, полагал, что в природе нет таких жестких границ, как границы между категориями, и она должна была изобрести своего рода «промежуточную жизнь», или «зоофитов», чтобы объединить категории животных и растений. По-видимому, этим объясняется появление у Дамаскина вслед за неоплатониками промежуточного понятия «зоофиты» в древе деления.

Вторая особенность схемы Дамаскина в 47 главе состоит в том, что в ней при делении животных на смертных и бессмертных получается, что и лошадь, и человек — разумные смертные животные. «Смертное есть вид разумного и род человека. Смертное (делится) на человека, вола, лошадь, собаку и т.п. Человек — на Петра, Павла и прочих единичных людей, которые суть индивидуумы, ипостаси, лица. Человек есть самый низший вид, ибо человек есть вид в отношении смертного и вид же в отношении Петра и Павла. Согласно святым отцам, это и есть природа, форма и субстанция» [Иоанн Дамаскин, 2006, с. 48].

Но ведь разумность — видовое отличие человека от других животных. Каким образом появляются в схеме разумные лошади, волы, овцы и т.д.? В чем же субстанциальное, видовое отличие лошадей? К тому же смертность видообразующий признак не только разумных, но и остальных (неразумных, неощущающих) сущностей. Если смертность — видообразующий признак для разумных животных, то он тогда не может быть таковым у неразумных животных, они ведь тоже смертны. Выше, в главе 10 Дамаскин называл лошадь *неразумным* смертным животным:

> Если я возьму животное, которое служит для этих понятий родом, а также разумное и смертное, то я образую человека, ибо человек есть животное разумное и смертное. А если я возьму животное и прибавлю: неразумное, смертное, земное, то образую лошадь, собаку и т.п. А если возьму животное и присоединю: неразумное, смертное, водяное, то образую рыбу. Существенными же и естественными разностями эти понятия называются потому, что через них один вид отличается от другого вида и одна сущность от другой сущности и природы [Иоанн Дамаскин, 2006, с. 27].

Завершая обзор указанных глав «Диалектики» Дамаскина, отметим, что он излагает интерпретацию логики александрийской школы неоплатонизма. Иоанн Дамаскин не принимает аристотелевского деления сущности на «первую» и «вторую». Вместо выражения «первая сущность» он употребляет термины «ипостась» и «индивидуум», разумея под ними всякий единичный предмет. Он вводит в свое изложение такие добавления, которые помогают ему сформировать основные понятия христианской догматики. В «Диалектике» мы находим точное логическое объяснение почти всех тех богословских терминов, которые употреблялись восточными отцами как в догматических, так и в полемических, направленных против еретиков сочинениях.

3. Деление в «Логике» Никифора Влеммида

Никифор Влеммид — известный византийский ученый (1197–1272), учебник которого, состоящий из логики и физики, был одним из самых популярных пособий по философии на Востоке. Хотя сочинение названо «Сокращенная логика» (Ἐπιτομὴ λογικῆς), объем его не так уж мал: оно занимает страницы с 675 по 1005 в 142-м томе греческой «Патрологии» Миня и включает в себя предисловие и 40 глав. Общий обзор компендиума дан нами в статье «Никифор Влеммид и его ‘Логика’ [Тоноян, 2014]. Здесь мы рассмотрим подробно операцию деления, которой посвящены главы 2 и 20. Автор начинает изложение в своей «Логике» не с учения о категориях и «Введения» Порфирия, как это было принято в Средние века, а прямо с учения об определении и делении, учения, частью перипатетического, частью неоплатонического (глава 2 «О делении»). Он также активно использует метод дихотомического деления, разработанный Порфирием.

При этом Древо Порфирия, как и у Дамаскина, появляется в другом месте, только в главе 20 «О сущности», где излагается трактат Аристотеля «Категории».

В главе 2 перечисляются все виды деления. Оно бывает либо I. делением самой вещи, либо II. делением привходящих свойств.

- I.1. Деление самой вещи:
  - А) деление рода на виды
  - Б) деление вида на индивиды
  - В) деление целого на части
  - Г) от единого и к единому
- I.2. деление омонима на различные значения
- II. Деление согласно привходящим признакам:
  - II.1. деление сущности на привходящие [признаки]
  - II.2. деление привходящего на сущности
  - II.3. деление привходящего на привходящие

Источник этого учения о видах деления — Порфирий. Точно такое же учение о делении мы встречаем в трактате Боэция «О делении», у Давида Анахта и др. александрийцев, а также в трактате св. Иоанна Дамаскина. Боэций в предисловии к своему трактату в качестве источника указывает на сочинение перипатетиков о делении, которое издал Андроник Родосский, одобрил Плотин и прокомментировал, и даже включил в свое «Введение к «Категориям» Аристотеля» Порфирий.

В глава 20 «О сущности» мы встречаем Древо Порфирия с новыми особенностями. Схема деления у Влеммида следующая:

Сущность делится на
- телесную / бестелесную
- одушевленную / неодушевленную
- чувствующую / бесчувственную
- передвигающуюся / не передвигающуюся
- разумную / неразумную
- человек

В этой схеме тоже две особенности: 1) термина «зоофиты» здесь нет, но есть деление животных: на передвигающихся (μεταβατικόν — метабатикон) и *непередвигающихся*. Таким образом, сохраняется принцип дихотомического деления, который был нарушен в схеме у Дамаскина; 2) отсутствует деление на смертных и бессмертных, которое было в «Диалектике» Дамаскина и других авторов, но отсутствовало у Порфирия. Еще одна особенность данного древа деления: есть только ветви, т.е. видовые признаки, но нет ствола древа, т.е. нет родовидовых понятий, ствола древа.

Термин «метабатикон» мы можем встретить в трактате христианского психофизиолога Немезия Эмесского «О природе человека» (V век), где он *отождествляет* этот термин с зоофитами. «Потом Творец переходя по порядку далее: от растений к животным, — не сразу обратился к передвигающейся (μεταβατικήν) и чувствующей природе... Действительно, Аристотель передает, что губка, хотя и прирастает к скале, однако расширяется, как только чувствует, что кто-нибудь приближается (к ней). Поэтому, все сходное древние мудрецы обыкновенно называют зоофитами (ζωόφυτα). Затем, к раковинам и подобным им Творец присоединил род передвигающихся животных, но далеко идти не могущих, а движущихся вокруг одного и того же места. Таким образом, сообщая одним (существам) больше чувств, другим — большую силу движения (подвижности), Творец постепенно дошел до совершеннейших из неразумных животных: совершенными же я называю имеющих все чувства и способных к передвижению на большие расстояния» [Немезий, 2011]. К Немезию обращался и св. Иоанн Дамаскин, не называя его имени. Поздние неоплатоники пытались соотносить естественнонаучные знания со схемой древа Порфирия.

Заключение

Наш историко-логический анализ показал, что логическое учение о делении, разрабатываемое на Западе и на Востоке, имеет один источник и много общих черт. При этом имеются специфическое черты как в византийской, так и в западной традиций изображения и толкования Древа Порфирия. Связаны эти отличия, по-видимому, с разработкой в Византии Немезием, Дексипом и др. мыслителями александрийской неоплатонической школы христианской антропологии с использованием трактатов Аристотеля о животных. Различные представления Древа Порфирия позволяют судить о мировоззрении определенной эпохи, естественнонаучных и религиозных предпочтениях, взглядах мыслителей на сотворение мира, эволюцию живых существ, происхождении человека и т.д.

Славяно-русские переводы «Диалектики» Иоанна Дамаскина (в том числе перевод кн. Андрея Курбского), первые учебники по логике в Славяно-греко-латинской академии («Логика» Софрония Лихуда), объединяющие как восточную, так и западную традиции изложения логики, обогащают наши знания о развитии логики в Византии и на Руси.

Литература

Аристотель, 1996 – *Аристотель.* История животных / Пер. с древнегреч. В.П. Карпова; под ред. и с примеч. Б.А. Старостина. М.: Российск. гос. гуманит. ун-т, 1996. 528 с. URL: http://simposium.ru/ru/node/541 (дата обращения: 18.02.2023).

Боэций, 1996 – *Боэций.* Комментарий к Порфирию // «Утешение Философией» и другие трактаты. М.: Наука, 1996. С. 5–116.

Боэций, 2013 – *Боэций.* О делении [пер. с лат.] // *Тоноян Л.Г.* Логика и теология Боэция. СПб.: Изд-во РХГА, 2013. С. 298–321.

Воробьев, 2022 – *Воробьев В.В.* Иоанн Дамаскин. Диалектика: глава 5, обновленный перевод // Логические исследования. 2022. Т. 28. № 1. С. 50–59.

Гаврюшин, 1984 – *Гаврюшин Н.К.* Научное наследие А.М. Курбского // Памятники науки и техники. 1984. М., 1986. С. 210–236.

Гаврюшин, 2003 – *Гаврюшин Н.К.* Премудрая святая диалектика. «Философские главы» преподобного Иоанна Дамаскина на Руси. Нижний Новгород, 2003. 100 с.

Давид Анахт, 1975 – *Давид Анахт.* Сочинения. М.: Мысль, 1975. 262 с.

Иоанн Дамаскин, 2006 – *Иоанн Дамаскин.* Источник знания / Отв. ред. Я.А. Слинин. СПб.: Наука, 2006. 358 с.

Немезий, 2011 – *Немезий Эмесский.* О природе человека / Пер. с греч. Ф.С. Владимирского. Составление, послесловие, общая редакция М.Л. Хорькова. М.: Канон+ РООИ «Реабилитация». 2011. 464 с. https://predanie.ru/book/73613-o-prirode-cheloveka/#/toc1 (дата обращения: 18.02.2023).

Слинин, 2006 – *Слинин Я.А.* Богословие и логика в «Источнике знания» Иоанна Дамаскина. Послесловие // *Св. Иоанн Дамаскин.* Источник знания / Отв. ред. Я.А. Слинин СПб.: Наука, 2006. С. 289–357.

Тоноян, 2014 – *Тоноян Л.Г.* Никифор Влеммид и его «Логика» // Вестник РХГА. 2014. Т. 15. Вып. 4. С. 58–65.

Тоноян, 2021 – *Тоноян Л.Г.* Эволюция Древа Порфирия в средние века // Византия, Европа, Россия: социальные практики и взаимосвязь духовных традиций. Вып. 1. Материалы международной научной конференции (Санкт-Петербург, 1–2 октября 2021). СПб.: Изд-во РХГА, 2021. С. 409–423.

Blemmydes, 1885 – *Nicephori Blemmidae* opera Omnia 1885 // Patrologiae Cursus Completus. Series Græca / Ed. J.-P. Migne. Vol. 142. Paris. Col. 675–1004.

Migne, 1864 – *Migne J.-P.* Patrologiae Graecae. T. XCIV. Paris, 1864. P. 618–619.

Pourchot, 1711 – *Purchotii Edmudi* ad faciliorem veterum, ac recentiorum philosophorum lectionem comparatae Editio tertia locupletior. Tomus primus. Complecteas Logicam et Metaphysicam, Lugduni: Antonium Boudet, 1711.

Pourchot, 1733 – *Pourchot E.* Institutiones philosophicae ad faciliorem veterum et recentiorum philosophorum intelligentiam comparatae. Lyons: Bruyset, 1733.

Verboon, 2014 – *Verboon A.R.* The Medieval Tree of Porphyry: An Organic Structure of Logic, The Tree: Symbol, Allegory, and Mnemonic Device in Medieval Art and Thought / Ed. by P. Salonius and A. Worm. Turnhout: Brepols, 2014. P. 95–116.

Larisa G. Tonoyan

The Logical Operation of Division by John of Damascus and Nicephoros Blemmydes

Larisa G. Tonoyan
St. Petersburg State University,
7/9 Universitetskaya emb., St. Petersburg, 191011, Russian Federation.
Russian Christian Academy for Humanities,
15 Fontanka River emb., St. Petersburg, 191011, Russian Federation.
E-mail: tonoyan2003@list.ru

Abstract: The article examines the influence of Aristotle's logic, the methods of definition and division on Byzantine thought. For analysis, we have chosen two of the most popular textbooks on logic in Byzantium, which belong to John of Damascus and Nikephoros Blemmydes. St. John of Damascus (c. 675 – c. 750) in his *Source of Knowledge* constantly and actively uses logical methods, in particular, dichotomous division, analyzing in detail what was later called the Tree of Porphyry. In violation of the principle of dichotomous division, when dividing the animate, he gets three concepts: animals, zoophytes and plants. The article shows that these and other features in his presentation of the division operation go back to the late Neoplatonists, whom he does not name, though. The work of Damaskus was soon translated into Latin, and later repeatedly translated into Slavic and Russian, contributing to acquaintance with the logic of Aristotle and the emergence of logical terminology in Rus'. Unlike the work of Damascus, the work of the famous Byzantine scholar Nicephoros Blemmydes (1197–1272) has not yet been translated from Greek into any of the modern languages and remains little studied. In this article, we analyze two chapters of his *Logic* devoted to the logical operation of division and the analysis of the Porphyry tree. Some differences in the usual presentation of the Porphyry tree are also revealed in the compendium of Nicephoros Blemmydes. Nicephoros Blemmydes does not deviate from the principle of dichotomous division: he combines zoophytes and plants into one category of non-moving ones, while removing the division of rational beings into mortals and immortals.

Keywords: John of Damascus, Nicephoros Blemmydes, logic in Byzantium, the doctrine of division, the Tree of Porphyry

For citation: Tonoyan L.G. "Logicheskaya operatsiya deleniya u Ioanna Damaskina i Nikifora Vlemmida" [The Logical Operation of Division by John of Damascus and Nicephoros Blemmydes], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 1, pp. 70–83. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-70-83 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is supported by Russian Science Foundation, project No. 18-78-10051, "Byzantine Roots of Russian Logical Tradition".

References

Aristotle, 1996 – Aristotel'. "Istoriya zhivotnyh" [History of animals], trans. by V.P. Karpova, ed. by B.A. Starostina. Moscow: Rossijsk. gos. gumanit. un-t, 1996. 528 pp. (In Russian) [http://simposium.ru/ru/node/541, accessed on: 18.02.2023]. (In Russian)

Blemmydes, 1885 – "Nicephori Blemmidae opera Omnia 1885", *Patrologiae Cursus Completus. Series Græca*, ed. by J.-P. Migne. Vol. 142. Paris. Col. 675–1004.

Boecij, 1996 – Boecij. "Kommentarij k Porfiriyu" [Comments on Porphyry], *"Uteshenie Filosofiej" i drugie traktaty.* Moscow: Nauka, 1996, pp. 5–116. (In Russian)

Boecij, 2013 – Boecij. "O delenii" [About division], in: L.G. Tonoyan, *Logika i teologiya Boeciya* [Logic and theology of Boethius]. St. Petersburg: izd-vo RHGA 2013, pp. 298—321. (In Russian)

Vorob'ev, 2022 – Vorob'ev, V.V. "Ioann Damaskin. Dialektika: glava 5, obnovlennyj perevod" [John Damascene. Dialectica: chapter 5, elements of new translation], *Logicheskie issledovaniya*, 2022, Vol. 28, No. 1, pp. 50–59. (In Russian)

Gavryushin, 1984 – Gavryushin, H.K. "Nauchnoe nasledie A.M. Kurbskogo" [Scientific heritage of A.M. Kurbsky], *Pamyatniki nauki i tekhniki. 1984.* Moscow, 1986, pp. 210–236. (In Russian)

Gavryushin, 2003 – Gavryushin, H.K. *Premudraya svyataya dialektika. "Filosofskie glavy" prepodobnogo Ioanna Damaskina na Rusi* [The all-wise holy dialectic. The "Philosophical Chapters" of St. John of Damascus in Russia]. Nizhnij Novgorod, 2003. 100 pp. (In Russian)

David Anaht, 1975 – David Anaht. *Sochineniya* [Works]. Moscow: Mysl', 1975. 262 pp. (In Russian)

John Damascene, 2006 – John Damascene. *Istochnik znaniya* [Source of knowledge], ed. by YA.A. Slinin. St. Petersburg: Nauka, 2006. 358 pp. (In Russian)

Migne, 1864 – Migne, J.-P. *Patrologiae Graecae*, t. XCIV, Paris, 1864. pp. 618–619.

Nemezij, 2011 – Nemezij Emesskij. *O prirode cheloveka*, trans. by F.S. Vladimirskogo, ed. by M.L. Hor'kova. Moscow: Kanon+ ROOI "Reabilitaciya", 2011. 464 pp. [https://predanie.ru/book/73613-o-prirode-cheloveka/#/toc1, accessed on 18.02.2023]. (In Russian)

Pourchot, 1711 – *Purchotii Edmudi ad faciliorem veterum, ac recentiorum philosophorum lectionem comparatae.* Editio tertia locupletior. Tomus primus. Complecteas Logicam et Metaphysicam, Lugduni: Antonium Boudet, 1711.

Pourchot, 1733 – Pourchot, E. *Institutiones philosophicae ad faciliorem veterum et recentiorum philosophorum intelligentiam comparatae.* Lyons: Bruyset, 1733.

Slinin, 2006 – Slinin, Ya.A. *Bogoslovie i logika v "Istochnike znaniya" Ioanna Damaskina. Posleslovie* [Theology and Logic in the "Source of Knowledge" by John of Damascus. Afterword], in: Sv. Ioann Damaskin. *Istochnik znaniya* [Source of knowledge], ed. by Ya.A. Slinin. St. Petersburg: Nauka, 2006, pp. 289–357. (In Russian)

Tonoyan, 2014 – Tonoyan, L.G. "Nikifor Vlemmid i ego 'Logika'" [Nikifor Vlemmid and his 'Logic'], *Vestnik RHGA*, 2014, Vol. 15, No. 4, pp. 58–65. (In Russian)

Tonoyan, 2021 – Tonoyan, L.G. "Evolyuciya Dreva Porfiriya v srednie veka" [Evolution of the Porphyry Tree in the Middle Ages], *Vizantiya, Evropa, Rossiya: social'nye praktiki i vzaimosvyaz' duhovnyh tradicij*, Vyp. 1. Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii (Sankt-Peterburg, 1–2 oktyabrya 2021). St. Petersburg: Izd-vo RHGA, 2021, pp. 409–423. (In Russian)

Verboon, 2014 – Verboon, A.R. "The Medieval Tree of Porphyry: An Organic Structure of Logic", in: *The Tree: Symbol, Allegory, and Mnemonic Device in Medieval Art and Thought*, ed. by P. Salonius and A. Worm. Turnhout: Brepols, 2014, pp. 95–116.

Логические исследования
2023. Т. 29. № 1. С. 84–100
УДК 16+510.64

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 1, pp. 84–100
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-84-100

Неклассическая логика
Non-classical Logic

А.В. Конькова

О корректных силлогизмах основного варианта Воображаемой логики Н.А. Васильева

Антонина Викторовна Конькова
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: konkova@philos.msu.ru

Аннотация: В статье исследуется основной вариант известной во всем мире Воображаемой логики, первой неклассической логической теории, предложенной русским ученым Н.А. Васильевым. Для данной теории Т.П. Костюк и В.И. Маркиным была предложена реконструкция, осуществленная средствами современной логики. В рамках предложенной семантики проанализирована особая роль исключающих форм суждений, позволяющая существенно расширить понимание корректных (особого рода) модусов силлогизма, заключениями которых и является одна из исключающих форм. Рассмотрены все корректные в данной семантике силлогизмы (выделяемые ранее Васильевым). Осуществлен анализ ранее не рассматриваемой в основном варианте Воображаемой логики IV фигуры, семантически обоснованы корректные в этой фигуре силлогизмы. Представлен семантический вариант опровержения всех некорректных модусов посредством подбора контрмоделей.

Ключевые слова: Воображаемая логика, Н.А. Васильев, неклассическая логика, силлогистическая теория, IV фигура

Для цитирования: *Конькова А.В.* О корректных силлогизмах основного варианта Воображаемой логики Н.А. Васильева // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 1. С. 84–100. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-84-100

Введение

Ни у кого нет сомнения, что работы Н.А. Васильева, написанные в начале XX в., во многом опередили свое время и, несмотря на то, что долгий период времени оставались в тени, стали отправной точкой в развитии неклассических логик. Николай Александрович проделал огромную работу по анализу сложившегося движения против Аристотелевой логики. Одним из направлений являлась критика *закона противоречия.* По данному направлению Васильев выделяет работы Гегеля, А. Мейнонга, И.Г. Гамана, Я. Лукасевича и других. В книге В.А. Бажанова [Бажанов, 1986, с. 104–105] отдельное внимание уделено критике закона противоречия Я. Лукасевичом, вышедшей в том же году, что и первая работа Н.А. Васильева, посвященная логике. Работа Васильева «О частных суждениях, о треугольнике противоположностей, о законе исключенного четвертого» [Васильев, 1989, с. 12–53] была опубликована на основе его пробной лекции от 18 мая 1910 г. В ней еще не шла речь о Воображаемой логике, еще отсутствует прицельный анализ самого закона противоречия и не постулируется отказ от оного. Здесь Николай Александрович останавливается на уже устоявшейся оппозиции против деления суждений по количеству на общие, частные и единичные. Ученый обращает внимание на понятие частного суждения, которое оказывается двусмысленным по причине того, что само слово «некоторые» уже допускает двоякое прочтение: 1) некоторые, а может быть, и все; 2) некоторые, но не все, только некоторые. Он отмечает, что в большинстве случаев употребление слова «некоторые» фактически означает — «не все», однако Аристотель и его последователи придерживаются первого прочтения слова. Разобравшись с частными суждениями, Васильев заключает: «Нет частных суждений. Все суждения относительно понятий суть суждения общие» [Там же, с. 52]. Данные суждения являются общими потому, что в них полностью раскрывается объем субъекта (часть S входят в P, а все остальные не входят). Затем Васильев приходит к выводу о том, что суждения нужно разделить на два вида: суждения о фактах и суждения о понятиях, которые имеют совершенно разную логику. Для всякого суждения о понятии относительно приписываемого ему предиката выделяются три возможности: «1) Либо ему присущ данный предикат. 2) Либо ему присущ противоречащий предикат. 3) Либо ему присущ и тот и другой, т.е. не присущ ни один, а оба возможны, оба совместимы с данным понятием... Любой предикат может трояко относиться к любому субъекту (понятию): либо он для него необходим, либо невозможен, либо возможен» [Там же, с. 49]. С этого момента Николай Александрович активно разрабатывает идею неаристотелевой логики. Ученый занимается развитием концепции множественности новых логических систем, основой которой является новый принцип построения логики.

Уже в 1912 г. в свет выходит главный труд Васильева, благодаря которому его революционные идеи в области логики стали известны во всем мире — «Воображаемая (неаристотелева) логика» [Там же, с. 53–93]. В данной работе излагается логика силлогистического типа, но эта логика отличается от классической. Логика Аристотеля, по мнению Васильева, эмпирическая логика, так как является инструментом познания окружающего нас реального мира. Но мы можем мыслить и другие миры, отличные от нашего, в которых логические законы будут иными, а значит, и инструмент познания должен быть иным.

В Воображаемой логике ученый вносит еще более радикальные изменения в учение о суждении [Васильев, 1989, с. 70–72]. В отличие от Аристотелевой и традиционной, в Воображаемой логике суждения делятся по качеству не на два, а на три вида: утвердительные (содержащие связку «есть»), отрицательные (содержащие связку «не есть») и индифферентные (содержащие противоречивую связку «есть и не есть»). По количеству суждения разделены на три вида: единичные, общие и акцидентальные (определенно-частные).

Таким образом, в Воображаемой логике имеется три типа единичных суждений, различающихся по качеству: «S есть P», «S не есть P», «S есть и не есть P», где на месте S находится сингулярный термин.

Выделяется три вида общих суждений (утвердительные, отрицательные и индифферентные): «Все S есть P», «Все S не есть P», «Все S есть и не есть P».

А вот акцидентальные суждения распадаются на четыре разновидности: «Некоторые S есть P, а все остальные S не есть P», «Некоторые S есть P, а все остальные S есть и не есть P», «Некоторые S не есть P, а все остальные S есть и не есть P» и «Некоторые S есть P, некоторые S не есть P, а все остальные S есть и не есть P».

При построении самой системы Воображаемой логики Н.А. Васильев, как и Аристотель до него, исследует только такие силлогизмы, посылками которых являются общие или неопределенно-частные суждения (несмотря на скептическое отношение казанского логика к последним). Одно из отличий между традиционной силлогистикой и Воображаемой логикой состоит в том, что в язык первой включаются формы суждений двух качеств, а в язык второй — трех. Силлогизмы с единичными и акцидентальными посылками Васильев не рассматривает.

Особое место в Воображаемой логике (в учении об обращении и учении о силлогизме) занимают и так называемые исключающие формы суждений. Они, по Васильеву, представляют собой колебание между двумя качествами из трех [Там же, с. 71]:

1) Форма, исключающая утвердительное суждение: колебание между отрицательным и индифферентным.

2) Форма, исключающая отрицательное суждение: колебание между утвердительным и индифферентным.

3) Форма, исключающая индифферентное суждение: колебание между утвердительным и отрицательным.

В статье будет показано, что суждения исключающей формы являются заключением некоторых корректных модусов[1].

Н.А. Васильев в своей Воображаемой (неаристотелевой) логике подробно развивает учение о силлогизме. В своем рассмотрении силлогизмов он, следуя традиции Аристотеля, выделяет только три фигуры силлогизмов, в отличие от традиционной силлогистики.

В отечественной научной литературе имеется значительное количество трудов, посвященных идеям логика, но далеко не все они посвящены реконструкции, восстановлению и продолжению развития логической теории, предложенной ученым. Васильев предложил несколько интерпретаций новой логики, но подробно успел изложить только лишь основной вариант, первая реконструкция которого была осуществлена В.А. Смирновым [Васильев, 1989, с. 229–260]. Современная реконструкция основного варианта Воображаемой логики была осуществлена Т.П. Костюк и В.И. Маркиным на основе точных методов формальных семантик и логических исчислений [Костюк, Маркин, 1998]. Авторы реконструкции предложили адекватную идеям Васильева семантику и ее формализацию в исчислении **ВЛ(IL)**.

Данная статья посвящена ранее не рассмотренной IV фигуре силлогизма. Это связано с тем, что все, кто занимался Воображаемой логикой, следовали за ее создателем и иногда исходили из того, что по IV фигуре, как и по второй, невозможно сделать стандартный вывод. Тем не менее рассмотрение четвертой фигуры является важным моментом для рассмотрения Воображаемой логики как полной силлогистической системы. Поэтому автор данной статьи поставил своей задачей проверку всех возможных комбинаций посылок и вариантов выводов из них в IV фигуре. Особенно это стало интересным после изучения оригинальной статьи Н.А. Васильева «Логика и металогика», опубликованной в Международном ежегоднике по философии культуры Логос за 1912–1913 гг. [Васильев, 1912]. Лишь в одном предложении автор делает замечание (буквально брошенное на ходу) о существовании правильных силлогизмов в IV фигуре: «Вторая фигура силлогизма в Воображаемой логике невозможна, зато третья и четвертая возможны» [Там же, с. 67].

1. Система Воображаемой логики

Как уже говорилось выше, современная реконструкция основного варианта Воображаемой логики осуществлена Т.П. Костюк и В.И. Маркиным

[1] Из некоторых комбинаций посылок не следует стандартного заключения, однако при детальном рассмотрении всех возможных выводов оказалось, что существуют комбинации посылок, из которых логически следует одна из исключающих форм.

[Костюк, Маркин, 1998; Markin, 2013] на базе классической логики высказываний. Авторами реконструкции сформулирована интуитивно прозрачная семантика, заданы условия истинности формул (полностью адекватные идеям Васильева). Построено аксиоматическое исчисление ***IL***, а также доказаны непротиворечивость и полнота данной системы относительно предложенной семантики.

Определение 1. В языке силлогистической теории содержатся следующие символы:
1) бесконечный список общих терминов, в качестве метазнаков для них используются S, P, Q, M, S_1, P_1, Q_1, M_1, ...;[2]
2) A_1, A_2, A_3, I_1, I_2, I_3 — силлогистические константы для суждений Воображаемой логики;
3) $\neg$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $\&$ — пропозициональные связки;
4) (,) — левая и правая скобки.

Общие суждения A_n содержат в себе информацию обо всех объектах из определенного класса, а неопределенно-частные суждения I_n содержат информацию о некоторых объектах определенного класса, причем каждый из них имеет определенную связь с предикатом, выражаемую посредством нижнего индекса $_n$: ему либо присуще соответствующее свойство $_1$, либо не присуще это свойство $_2$, либо «зараз» присуще и не присуще $_3$.

Определение 2. Понятие формулы определено следующим образом:
1) Если S и P — общие термины, то выражения типа A_1SP, A_2SP, A_3SP, I_1SP, I_2SP, I_3SP являются формулами.
2) Если A и B — формулы, то $\neg A$, $(A\&B)$, $(A \supset B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B)$ — формулы.
3) Ничто иное не является формулой.

Определение 3. Модель представляет собой кортеж вида: $< D, \phi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 >$, где $D \neq \varnothing$, $\phi(v) \in D$, ψ_1, ψ_2, ψ_3 — функции, сопоставляющие значение каждому общему термину P некоторое непустое подмножество D и удовлетворяющие следующим условиям: $\psi_1(P) \subseteq D$, $\psi_1(P) \neq \varnothing$, $\psi_2(P) \subseteq D$, $\psi_3(P) \subseteq D$, $\psi_1(P) \cap \psi_2(P) = \varnothing$, $\psi_1(P) \cap \psi_3(P) = \varnothing$, $\psi_2(P) \cap \psi_3(P) = \varnothing$, $\psi_1(P) \cup \psi_2(P) \cup \psi_3(P) = D$.

[2] Н.А. Васильев в Воображаемой логике рассматривает и единичные суждения (в данных суждениях используются сингулярные термины), которые также включены и в язык ***IL***, однако в учении о силлогизмах они не используются. Так как мы анализируем силлогистику, предложенную Васильевым в основном варианте Воображаемой логики, в которой не выделяются силлогизмы с сингулярными посылками, то мы исключим сингулярные термины из дальнейшего рассмотрения.

В этой модели с каждым общим термином P связываются три экстенсиональные характеристики. Неформально, $\psi_1(P)$ трактуется как объем этого термина, $\psi_2(P)$ как его антиобъем, а $\psi_3(P)$ как противоречивая относительно P область. Накладывается условие пустоты попарного пересечения объема, антиобъема и противоречивой области относительно P.

Задается понятие значимости формул языка в модели. Формула A_1SP значима в данной модели ($| A |= 1$), если и только если $\psi_1(S) \subseteq \psi_1(P)$, то есть каждый объект из $\psi_1(S)$ входит в $\psi_1(P)$. Формула A_2SP значима в данной модели, если и только если $\psi_1(S) \subseteq \psi_2(P)$, т.е. каждый объект из объема S входит в антиобъем P. Формула A_3SP значима в данной модели, если и только если $\psi_1(S) \subseteq \psi_3(P)$, т.е. каждый объект из $\psi_1(S)$ входит в $\psi_3(P)$.

Если в объеме S найдутся объекты, принадлежащие объему P, то формула I_1SP будет значима в данной модели. Формула I_2SP значима в данной модели, если и только если существуют объекты из $\psi_1(S)$, которые входят в область $\psi_3(P)$. Формула I_3SP значима в данной модели, если и только если существуют объекты из $\psi_1(S)$, которые входят в противоречивую относительно P область. Ниже представлена формальная запись условий истинности формул в модели, которую предложили Т.П. Костюк и В.И. Маркин [Костюк, 1999, с. 86–87], [Костюк, Маркин, 1998; Markin, 2013] (табл. 1).

Таблица 1

Условия истинности формул в модели $< D,\ \phi,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3 >$

$\| A_1SP \|= 1$	$\Longleftrightarrow$	$\psi_1(S) \subseteq \psi_1(P)$	$\| I_1SP \|= 1$	$\Longleftrightarrow$	$\psi_1(S) \cap \psi_1(P) \neq \varnothing$
$\| A_2SP \|= 1$	$\Longleftrightarrow$	$\psi_1(S) \subseteq \psi_2(P)$	$\| I_2SP \|= 1$	$\Longleftrightarrow$	$\psi_1(S) \cap \psi_2(P) \neq \varnothing$
$\| A_3SP \|= 1$	$\Longleftrightarrow$	$\psi_1(S) \subseteq \psi_3(P)$	$\| I_3SP \|= 1$	$\Longleftrightarrow$	$\psi_1(S) \cap \psi_3(P) \neq \varnothing$

Выражение вида $| A |= 1$ читается как формула A истинна в модели $< D,\ \phi,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3 >$. В противном случае $| A |= 0$. Формула A общезначима, если и только если она $| A |= 1$ во всякой модели.

Т.П. Костюк было сделано важное предположение [Костюк, 1999, с. 65–69], что в качестве исключающих форм можно рассматривать отрицания соответствующих высказываний: в сильном смысле — неопределенно-частных, в слабом смысле — общих ($\neg I_nSP$ и $\neg A_nSP$). Данное предположение позволило выделить новые корректные рассуждения в некоторых фигурах.

В рамках предложенной реконструкции проанализированы и доказаны законы, выделяемые Васильевым [Костюк, 1999, с. 98–101]: законы тождества A_1SS и I_1SS являются теоремами данного исчисления (общезначимы в семантике IL). В $\boldsymbol{IL}$ доказуемо обращение суждений типа I_1: $I_1SP \supset I_1PS$, что легко обосновать и семантически. Условия истинности антецедента и консеквента равносильны, поскольку $\psi_1(S) \cap \psi_1(P) = \psi_1(P) \cap \psi_1(S)$. Общеутвердительное суждение обращается с ограничением: $A_1SP \supset I_1PS$. Действительно, из предположения $\psi_1(S) \subseteq \psi_1(P)$ с учетом принимаемого при определении модели условия $\psi_1(S) \neq \varnothing$ следует $\psi_1(P) \cap \psi_1(S) \neq \varnothing$, что соответствует учению об обращении данных суждений в традиционной силлогистике. Общие отрицательные и индифферентные суждения в $\boldsymbol{IL}$ обращаются, в соответствии с предположением Т.П. Костюк [Там же, с. 101], в исключающие формы, а именно в отрицания частных утвердительных суждений: $A_2SP \supset \neg I_1PS$ и $A_3SP \supset \neg I_1PS$. В то время как в традиционной силлогистике общеотрицательные высказывания обращаются без ограничений, а частноотрицательные высказывания вообще не обращаются. В $\boldsymbol{IL}$ принимаются законы подчинения для суждений всех трех качеств: $A_1SP \supset I_1SP$, $A_2SP \supset I_2SP$, $A_3SP \supset I_3SP$. Принимается закон исключенного четвертого для единичных суждений. Кроме того, Т.П. Костюк доказан закон исключенного четвертого для неопределенно-частных суждений — $I_1SP \vee I_2SP \vee I_3SP$ [Там же, с. 98–99].

2. Силлогизмы

Центральным моментом любой силлогистической теории является учение о силлогизме, а выделение корректных двухпосылочных силлогизмов является главной задачей этих теорий. В диссертации Т.П. Костюк доказала [Там же, с. 101–107], что в рамках предложенного ею исчисления все указанные Васильевым силлогизмы I–III фигур являются корректными. Для реализации задачи настоящей статьи покажем семантическими средствами языка $\boldsymbol{IL}$, что все доказанные в исчислении силлогизмы I–III фигур являются корректными. Некорректность остальных силлогизмов будет показана посредством подбора контрмодели. Далее аналогичным образом будут рассмотрены комбинации посылок IV фигуры, выделены корректные силлогизмы и приведены примеры контрмоделей, показывающие некорректность всех остальных возможных модусов.

Под силлогизмом в Воображаемой логике, как и в традиционной силлогистике, понимается двухпосылочное умозаключение, содержащее в посылках три термина, один из которых входит в обе посылки, и заключение, состоящее из разных терминов большей и меньшей посылок (с тем лишь изменением, что посылкой и заключением здесь могут выступать не четыре, а уже описанные выше шесть типов суждений). Под силлогизмом далее будем понимать не само конкретное умозаключение, а его логическую форму.

2.1. Силлогизмы I фигуры

В Воображаемой логике сохраняются общие формальные правила *I фигуры* традиционной силлогистики: 1) большая посылка должна быть общей; 2) меньшая посылка должна быть утвердительной.

В соответствии с этими правилами Васильев выделяет 6 правильных модусов в своей логике (табл. 2). Четыре модуса сохраняются из традиционной силлогистики[3]: $A_1A_1A_1$; $A_2A_1A_2$; $A_1I_1I_1$; $A_2I_1I_2$. Другие же два — новые модусы, которые становятся возможными лишь в Воображаемой логике: $A_3A_1A_3$ и $A_3I_1I_3$[4] [Васильев, 1989, с. 73–74].

Таблица 2

Силлогизмы I фигуры

$(A_1MP\&A_1SM) \supset A_1SP$	$(A_2MP\&A_1SM) \supset A_2SP$	$(A_3MP\&A_1SM) \supset A_3SP$
$(A_1MP\&I_1SM) \supset I_1SP$	$(A_2MP\&I_1SM) \supset I_2SP$	$(A_3MP\&I_1SM) \supset I_3SP$

Силлогизмы с обеими общими посылками можно представить в общем виде $(A_nMP\&A_1SM) \supset A_nSP$, а силлогизмы с меньшей частной посылкой в общем виде $(A_nMP\&I_1SM) \supset I_nSP$. Такая группировка силлогизмов позволяет рассмотреть доказательство корректности сразу нескольких модусов. Ниже приведен пример обоснования:

Пример 1. $\underline{(A_nMP\&A_1SM) \supset A_nSP}$

+1.	$\lvert A_nMP\&A_1SM\rvert = 1$	(допущение)
2.	$\lvert A_nMP\rvert = 1$	(из 1)
3.	$\lvert A_1SM\rvert = 1$	(из 1)
4.	$\psi_1(M) \subseteq \psi_n(P)$	(из 2 по у.и.)
5.	$\psi_1(S) \subseteq \psi_1(M)$	(из 3 по у.и.)
6.	$\psi_1(S) \subseteq \psi_n(P)$	(из 4,5)
7.	$\lvert A_nSP\rvert = 1$	(из 6 по у.и.)

Обоснование оставшихся правильных модусов проводится аналогичным образом в соответствии с условиями истинности формулы в модели.

[3]В традиционной силлогистике это модусы Barbara, Celarent и Darii.

[4]Данные модусы получаются заменой большей утвердительной посылки модусов Barbara и Darii на индифферентную, Васильев называет их Mindalin и Kindirinp соответственно.

Все остальные возможные модусы I фигуры в Воображаемой логике оказываются некорректными, что легко показать подбором контрмодели. Для модусов $A_1A_2A_2$ и $A_1I_2I_2$ подходит общая контрмодель:

$$\begin{array}{lll} \psi_1(S)=\{a\} & \psi_1(P)=\{b\} & \psi_1(M)=\{b\} \\ \psi_2(S)=\{b\} & \psi_2(P)=\{c\} & \psi_2(M)=\{a\} \\ \psi_3(S)=\{c\} & \psi_3(P)=\{a\} & \psi_3(M)=\{c\} \end{array}$$

Действительно, в этой модели при истинности посылок заключения A_2SP и I_2SP ложны. Для остальных опровергаемых Васильевым модусов контрмодель подбирается аналогичным образом.

2.2. Силлогизмы II фигуры

Формальные правила *II фигуры* несколько отличаются от традиционной силлогистики: сохраняется первое правило — большая посылка должна быть общей, второе же правило сформулировано так — обе посылки должны быть разного качества.

Однако в Воображаемой логике нельзя обосновать ни традиционные силлогизмы, ни подобные им с одной индифферентной посылкой и индифферентным заключением. Выше мы уже писали о важности и особой роли исключающих форм. Именно в этой фигуре Николай Александрович использует их в качестве возможных силлогистических выводов: «Единственное, что можно вывести по *II фигуре* в Воображаемой логике, это только то, что заключение не может быть утвердительным» [Васильев, 1989, с. 75].

Описанное выше предположение о рассмотрении исключающих форм в качестве отрицания утвердительных суждений позволило выделить во II фигуре 12 корректных силлогизмов (табл. 3), обосновывающих исключающую форму суждения. Из них 6 правильных модусов, где заключением является форма, исключающая частноутвердительное суждение, и 6, в которых заключением является форма, исключающая общеутвердительное суждение.

Таблица 3

Силлогизмы II фигуры

$(A_1PM\&A_2SM)\supset\neg I_1SP$	$(A_2PM\&A_1SM)\supset\neg I_1SP$	$(A_3PM\&A_1SM)\supset\neg I_1SP$
$(A_1PM\&A_3SM)\supset\neg I_1SP$	$(A_2PM\&A_3SM)\supset\neg I_1SP$	$(A_3PM\&A_2SM)\supset\neg I_1SP$
$(A_1PM\&I_2SM)\supset\neg A_1SP$	$(A_2PM\&I_1SM)\supset\neg A_1SP$	$(A_3PM\&I_1SM)\supset\neg A_1SP$
$(A_1PM\&I_3SM)\supset\neg A_1SP$	$(A_2PM\&I_3SM)\supset\neg A_1SP$	$(A_3PM\&I_2SM)\supset\neg A_1SP$

Ниже приведен пример обоснования корректности силлогизма с большей общеутвердительной и меньшей общеотрицательной посылками[5]:

Пример 2. $\underline{(A_1PM \& A_2SM) \supset \neg I_1SP}$

$+1.$	$\lvert A_1PM \& A_2SM\rvert = 1$	(допущение)
2.	$\lvert A_1PM\rvert = 1$	(из 1)
3.	$\lvert A_2SM\rvert = 1$	(из 1)
4.	$\psi_1(P) \subseteq \psi_1(M)$	(из 2 по у.и.)
5.	$\psi_1(S) \subseteq \psi_2(M)$	(из 3 по у.и.)
6.	$\psi_1(M) \cap \psi_2(M) = \varnothing$	(опр. модели)
7.	$\psi_1(S) \cap \psi_1(P) = \varnothing$	(из 4,5,6)
8.	$\lvert I_1SP\rvert = 0$	(из 7 по у.и.)
9.	$\lvert \neg I_1SP\rvert = 1$	(из 8)

Корректность остальных модусов II фигуры показывается аналогичным образом.

Подберем контрмодель, опровергающую модус *Camestres* $A_1A_2A_2$.

$$\begin{array}{lll} \psi_1(S) = \{b\} & \psi_1(P) = \{a\} & \psi_1(M) = \{a\} \\ \psi_2(S) = \{a\} & \psi_2(P) = \{c\} & \psi_2(M) = \{b\} \\ \psi_3(S) = \{c\} & \psi_3(P) = \{b\} & \psi_3(M) = \{c\} \end{array}$$

Из контрмодели видно, что заключением может быть лишь суждение «неверно, что некоторые S есть P».

2.3. Силлогизмы III фигуры

В III фигуре Васильев выделяет 6 правильных модусов $A_1A_1I_1$, $A_2A_1I_2$, $A_1I_1I_1$, $A_2I_1I_2$, $I_1A_1I_1$, $I_2A_1I_2$, совпадающих с корректными модусами традиционной силлогистики[6], и добавляет еще три новых $A_3A_1I_3$, $A_3I_1I_3$, $I_3A_1I_3$ (табл. 4) [Костюк, 1999, с. 106–107].

Для обоснования корректности силлогизмов их можно сгруппировать следующим образом: модусы $A_1A_1I_1$, $A_2A_1I_2$, $A_3A_1I_3$ представим в виде $(A_nMP \& A_1MS) \supset I_nSP$; $A_1I_1I_1$, $A_2I_1I_2$, $A_3I_1I_3$ — в виде $(A_nMP \& I_1MS) \supset I_nSP$; а $I_1A_1I_1$, $I_2A_1I_2$, $I_3A_1I_3$ — в виде $(I_nMP \& A_1MS) \supset I_nSP$. Ниже приведен пример обоснования:

[5]Обратим внимание на то, что отрицание частноутвердительного суждения в Воображаемой логике не эквивалентно утверждению общеотрицательного в традиционной силлогистике. В Воображаемой логике из общеутвердительной и общеотрицательной посылок логически следует лишь исключающая форма (неверно, что некоторые S есть P), тогда как в традиционной силлогистике из данных посылок получается правильный модус *Camestres*.

[6]В традиционной силлогистике это модусы Darapti, Felapton, Datisi, Ferison, Disamis и Bocardo.

Таблица 4

Силлогизмы III фигуры

$$\begin{array}{lll} (A_1MP\&A_1MS)\supset I_1SP & (A_1MP\&I_1MS)\supset I_1SP & (I_1MP\&A_1MS)\supset I_1SP \\ (A_2MP\&A_1MS)\supset I_2SP & (A_2MP\&I_1MS)\supset I_2SP & (I_2MP\&A_1MS)\supset I_2SP \\ (A_3MP\&A_1MS)\supset I_3SP & (A_3MP\&I_1MS)\supset I_3SP & (I_3MP\&A_1MS)\supset I_3SP \end{array}$$

Пример 3. $\underline{(A_nMP\&A_1MS)\supset I_nSP}$

+1.	$\lvert A_nMP\&A_1MS\rvert=1$	(допущение)
2.	$\lvert A_nMP\rvert=1$	(из 1)
3.	$\lvert A_1MS\rvert=1$	(из 1)
4.	$\psi_1(M)\subseteq\psi_n(P)$	(из 2 по у.и.)
5.	$\psi_1(M)\subseteq\psi_1(S)$	(из 3 по у.и.)
6.	$\psi_1(M)\neq\varnothing$	(опр. модели)
7.	$\psi_1(S)\cap\psi_n(P)\neq\varnothing$	(из 4,5,6)
8.	$\lvert I_nSP\rvert=1$	(из 7 по у.и.)

Обоснование корректности остальных модусов III фигуры проводится аналогичным образом.

Для всех остальных комбинаций посылок легко подобрать контрмодели, опровергающие некорректные модусы. Ниже приведена общая контрмодель для модусов $A_1A_2I_2$, $A_1I_2I_2$ и$I_1A_2I_2$:

$$\begin{array}{lll} \psi_1(S)=\{a\} & \psi_1(P)=\{b\} & \psi_1(M)=\{b\} \\ \psi_2(S)=\{b\} & \psi_2(P)=\{c\} & \psi_2(M)=\{a\} \\ \psi_3(S)=\{c\} & \psi_3(P)=\{a\} & \psi_3(M)=\{c\} \end{array}$$

Действительно, в этой модели при истинности посылок заключение I_2SP оказывается ложным.

2.4. Силлогизмы IV фигуры

Как было сказано выше, Николай Александрович лишь обмолвился [Васильев, 1912], что в IV фигуре возможны корректные силлогизмы. Именно это указание ученого вызывает особый интерес к рассмотрению всех силлогизмов со всеми возможными вариантами заключения в данной фигуре.

Поскольку IV фигура не была рассмотрена Васильевым, то анализ и выявление корректных силлогизмов необходимо было начать с рассмотрения всех возможных 36 комбинаций посылок, 9 из которых сразу были исключены, так как вывод из двух частных суждений, как и в традиционной силлогистике, в Воображаемой логике невозможен. Оставалось рассмотреть 25 комбинаций посылок, при этом проверить 4 возможных заключения традиционной силлогистики, к которым добавляются по два индифферентных заключения. Всего было проверено 150 возможных модусов IV фигуры.

Посредством проверки было выявлено два корректных модуса с заключением традиционного вида $A_1A_1I_1$ и $I_1A_1I_1$[7]. Рассмотрим обоснование корректности получившихся силлогизмов:

Пример 4. $\underline{(A_1 PM \& A_1 MS) \supset I_1 SP}$

+1.	$\lvert A_1PM\&A_1MS\rvert = 1$	(допущение)
2.	$\lvert A_1PM\rvert = 1$	(из 1)
3.	$\lvert A_1MS\rvert = 1$	(из 1)
4.	$\psi_1(P) \subseteq \psi_1(M)$	(из 2 по у.и.)
5.	$\psi_1(M) \subseteq \psi_1(S)$	(из 3 по у.и.)
6.	$\psi_1(P) \neq \varnothing$	(о.м.)
7.	$\psi_1(S) \cap \psi_1(P) \neq \varnothing$	(4,5,6)
8.	$\lvert I_1SP\rvert = 1$	(из 7)

Пример 5. $\underline{(I_1 PM \& A_1 MS) \supset I_1 SP}$

+1.	$\lvert I_1PM\&A_1MS\rvert = 1$	(допущение)
2.	$\lvert I_1PM\rvert = 1$	(из 1)
3.	$\lvert A_1MS\rvert = 1$	(из 1)
3.	$\psi_1(P) \cap \psi_1(M) \neq \varnothing$	(из 2 по у.и.)
4.	$\psi_1(M) \subseteq \psi_1(S)$	(из 3 по у.и.)
5.	$\psi_1(S) \cap \psi_1(P) \neq \varnothing$	(из 3,4)
6.	$\lvert I_1SP\rvert = 1$	(из 5)

Рассмотрение всех остальных 23 комбинаций посылок показало, что ни одна из них не дает заключения традиционного вида. Возник вопрос: возможны ли в IV фигуре, как и во II, варианты силлогизмов с заключением в виде исключающей формы? Поэтому были проверены еще 69 возможных модусов. Проверка показала, что существует 6 корректных силлогизмов с таким заключением: 4 отрицающие общеутвердительное суждение $\neg A_1SP$ и 2 отрицающие частноутвердительное $\neg I_1SP$. Приведем общую схему обоснования некоторых силлогизмов[8]:

Пример 6. $\underline{(A_1 PM \& A_n MS) \supset \neg I_1 SP}$ для модусов $A_1A_2\neg I_1$ и $A_1A_3\neg I_1$:

+1.	$\lvert A_1PM\&A_nMS\rvert = 1$	(допущение)
2.	$\lvert A_1PM\rvert = 1$	(из 1)

[7] В традиционной силлогистике это модусы *Bramantip* и *Dimaris* IV фигуры.

[8] Напомним, что в традиционной силлогистике из общеутвердительной и общеотрицательной посылок в данной фигуре получается два правильных модуса *Camenes* и *Camenos*.

3.	$\|A_nMS\| = 1$	(из 1)
4.	$\psi_1(P) \subseteq \psi_1(M)$	(из 2 по у.и.)
5.	$\psi_1(M) \subseteq \psi_n(S)$	(из 3 по у.и.)
6.	$\psi_1(P) \subseteq \psi_n(S)$	(из 4,5)
7.	$\psi_1(S) \cap \psi_n(S) = \varnothing$	(о.м.)
8.	$\psi_1(S) \cap \psi_1(P) = \varnothing$	(из 6,7)
9.	$\|I_1SP\| = 0$	(из 8 у.и.)
10.	$\|\neg I_1SP\| = 1$	(из 10)

Пример 7. $\underline{A_nPM\&A_1MS) \supset \neg A_1SP}$ для модусов $A_2A_1\neg A_1$ и $A_3A_1\neg A_1$:

+1.	$\|A_nPM\&A_1MS\| = 1$	(допущение)
2.	$\|A_nPM\| = 1$	(из 1)
3.	$\|A_1MS\| = 1$	(из 1)
4.	$\psi_1(P) \subseteq \psi_n(M)$	(из 2 по у.и.)
5.	$\psi_1(M) \subseteq \psi_1(S)$	(из 3 по у.и.)
6.	$\psi_1(M) \cap \psi_n(M) = \varnothing$	(о.м.)
7.	$\psi_1(S) \subsetneq \psi_1(P)$	(из 4,5,6)
8.	$\|A_1SP\| \neq 1$	(из 7)
9.	$\|\neg A_1SP\| = 1$	(из 8 по у.и.)

Пример 8. $\underline{(A_nPM\&I_1MS) \supset \neg A_1SP}$ для модусов $A_2I_1\neg A_1$ и $A_3I_1\neg A_1$:

+1.	$\|A_nPM\&I_1MS\| = 1$	(допущение)
2.	$\|A_nPM\| = 1$	(из 1)
3.	$\|I_1MS\| = 1$	(из 1)
4.	$\psi_1(P) \subseteq \psi_n(M)$	(из 2 по у.и.)
5.	$\psi_1(M) \cap \psi_1(S) \neq \varnothing$	(из 3 по у.и.)
6.	$\psi_1(M) \cap \psi_n(M) = \varnothing$	(о.м.)
7.	$\psi_1(S) \subsetneq \psi_1(P)$	(из 4,5,6)
8.	$\|A_1SP\| \neq 1$	(из 7)
9.	$\|\neg A_1SP\| = 1$	(из 8 по у.и.)

В IV фигуре основного варианта Воображаемой логики корректны силлогизмы из таблицы 5:

Таблица 5

Силлогизмы IV фигуры

$(A_1PM\&A_1MS) \supset I_1SP$	$(A_2PM\&A_1MS) \supset \neg A_1SP$
$(I_1PM\&A_1MS) \supset I_1SP$	$(A_2PM\&I_1MS) \supset \neg A_1SP$
$(A_1PM\&A_2MS) \supset \neg I_1SP$	$(A_3PM\&I_1MS) \supset \neg A_1SP$
$(A_1PM\&A_3MS) \supset \neg I_1SP$	$(A_3PM\&A_1MS) \supset \neg A_1SP$

Теперь перейдем к опровержению некорректных модусов в данной фигуре. Для опровержения модусов традиционной силлогистики *Camenes* $A_1A_2A_2$ и $A_1A_2I_2$ предложим следующую контрмодель:

$$\begin{array}{lll} \psi_1(S)=\{c\} & \psi_1(P)=\{a\} & \psi_1(M)=\{a\} \\ \psi_2(S)=\{a\} & \psi_2(P)=\{b\} & \psi_2(M)=\{c\} \\ \psi_3(S)=\{b\} & \psi_3(P)=\{c\} & \psi_3(M)=\{b\} \end{array}$$

Приведем еще одну контрмодель, опровергающую модус $A_2I_1I_2$ (это модус *Fresison* в традиционной силлогистике):

$$\begin{array}{lll} \psi_1(S)=\{b\} & \psi_1(P)=\{a\} & \psi_1(M)=\{b\} \\ \psi_2(S)=\{a\} & \psi_2(P)=\{c\} & \psi_2(M)=\{a\} \\ \psi_3(S)=\{c\} & \psi_3(P)=\{b\} & \psi_3(M)=\{c\} \end{array}$$

Найти контрмодель для модусов с индифферентной посылкой и заключением не составляет труда. Ниже представлена контрмодель для модуса $A_3I_1I_3$:

$$\begin{array}{lll} \psi_1(S)=\{b\} & \psi_1(P)=\{a\} & \psi_1(M)=\{b\} \\ \psi_2(S)=\{a\} & \psi_2(P)=\{b\} & \psi_2(M)=\{c\} \\ \psi_3(S)=\{c\} & \psi_3(P)=\{c\} & \psi_3(M)=\{a\} \end{array}$$

3. Заключение

В статье рассмотрены основные отличия данного варианта логики от Аристотелевой и традиционной силлогистики. В рамках реконструкции основного варианта Воображаемой логики, предложенной Т.П. Костюк и В.И. Маркиным, было показано семантическое обоснование всех корректных силлогизмов I–III фигур, ранее доказанных в системе $\boldsymbol{IL}$, а также приведены примеры подбора контрмоделей для некорректных в данном исчислении модусов.

Реализована главная задача данной статьи, в предложенной семантике осуществлено рассмотрение IV фигуры, где, как оказалось, есть корректные силлогизмы как с традиционным заключением, так и с заключением, имеющим вид исключающей утвердительное суждение формы. Так, в основном варианте Воображаемой логики 17 корректных силлогизмов (I, III и IV фигуры) со стандартным заключением (к утвердительным и отрицательным добавляется индифферентное заключение) и 18 корректных силлогизмов (II и IV фигуры), заключение которых возможно лишь в форме, исключающей утвердительное суждение. Теперь можно с уверенностью сказать, что идея Николая Александровича Васильева о реализации неаристотелевой логики осуществима средствами современного логического аппарата и представляет собой законченную силлогистическую теорию особого типа.

Литература

Бажанов, 1986 – *Бажанов В.А.* Становление и развитие логических идей Н.А.Васильева // Филос. науки. 1986. № 3. С. 74–82.

Васильев, 1912 – *Васильев Н.А.* Логика и металогика // Международный Ежегодник по Философии Культуры Логос, русское издание. Книга первая и вторая. М.: Мусагетъ, 1912–1913. С. 53–81.

Васильев, 1989 – *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989.

Костюк, 1999 – *Костюк Т.П.* Реконструкция логических систем Н.А. Васильева средствами современной логики: диссертация кандидата философских наук: 09.00.07. М., 1999.

Костюк, Маркин, 1998 – *Костюк Т.П., Маркин В.И.* Формальная реконструкция Воображаемой логики Н.А. Васильева // Современная логика: теория, история и приложения в науке, труды V Всероссийской научной конференции. СПб.: Дом Санкт-Петербургского государственного университета, 1998.

Markin, 2013 – *Markin V.I.* What trends in non-classical logic were anticipated by Nikolai Vasiliev // Logical Investigations. 2013. Vol. 19. P. 122–135.

ANTONINA V. KONKOVA

On Correct Syllogisms of the Main Variant of Imaginary Logic of N.A. Vasiliev

Antonina V. Konkova
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: konkova@philos.msu.ru

Abstract: The article studies the main version of the world-famous Imaginary Logic, the first non-classical logical theory proposed by the Russian scientist N.A. Vasiliev. For this theory, T.P. Kostyuk and V.I. Markin proposed a reconstruction carried out by means of modern logic. Within the proposed semantics, a special role of the excluding forms of statements was analyzed. It allows us significantly expand the understanding of the correct (special kind) modes of the syllogism, the conclusions of which is one of the excluding forms. All the correct syllogisms in the given semantics (identified earlier by Vasiliev) were studied thoroughly. There was made an analysis of the figure IV in the imaginary logic, which hadn't been studied previously in the main version as well as correct syllogisms in that figure were semantically substantiated. A semantic version of the refutation of all incorrect modes is presented by selecting counter modes.

Keywords: imaginary logic, N.A. Vasilyev, non-classical logic, syllogistic theory, IV figure

For citation: Konkova A.V. "O korrektnykh sillogizmakh osnovnogo varianta Voobrazhaemoi logiki N.A. Vasil'eva" [On Correct Syllogisms of the Main Variant of Imaginary Logic of N.A. Vasiliev], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 1, pp. 84–100. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-84-100 (In Russian)

References

Bazhanov, 1986 – Bazhanov, V.A. "Stanovlenie i razvitie logicheskih idej N.A. Vasil'eva", *Filos. nauki*, 1986, No. 3, pp. 74–82. (In Russian)

Vasil'ev, 1912 – Vasil'ev, N.A. "Logika i metalogika", *Mezhdunarodnyj Ezhegodnik po Filosofii Kul'tury Logos, russkoe izdanie.* M.: Musaget, 1912–1913. Kniga pervaya i vtoraya, pp. 53–81. (In Russian)

Vasil'ev, 1989 – Vasil'ev, N.A. *Voobrazhaemaya logika. Izbrannye trudy.* M.: Nauka. 1989, 264 pp. (In Russian)

Kostyuk, 1999 – Kostyuk, T.P. Rekonstrukciya logicheskih sistem N.A. Vasil'eva sredstvami sovremennoj logiki: dissertaciya kandidata filosofskih nauk: 09.00.07. Moskva, 1999. (In Russian)

Kostyuk, Markin, 1998 – Kostyuk, T.P., Markin, V.I. "Formal'naya rekonstrukciya Voobrazhaemoj logiki N.A. Vasil'eva", *Sovremennaya logika: teoriya, istoriya i prilozheniya v nauke, trudy V Vserossijskoj nauchnoj konferencii*, SPb.: Dom Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta, 1998. (In Russian)

Markin, 2013 – Markin, V.I. "What trends in non-classical logic were anticipated by Nikolai Vasiliev", *Logicheskie issledovaniya*, 2013, Vol. 19, pp. 122–135.

Логические исследования
2023. Т. 29. № 1. С. 101–113
УДК 510.642

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 1, pp. 101–113
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-101-113

Dmitrij Skvortsov

On Finite Domains Based Slices in the Structure of Superintuitionistic Predicate Logics, Preview

Dmitrij Skvortsov
FRC "Computer Science and Control" RAS,
Vavilova str., 40, Moscow, 119333, Russian Federation.
E-mail: skvortsovd@yandex.ru

Abstract: The article presents a series of closely related papers that together make up a single piece of work, devoted to the description of a hierarchy of slices in the structure of superintuitionistic predicate logics and making probably the first attempt to transfer to the predicate case Hosoi's hierarchy of (finite) slices for the structure of superintuitionistic propositional logics.

Keywords: superintuitionistic predicate logics, hierarchy of slices, Jankov-style formulas, splittings

For citation: Skvortsov D. "On Finite Domains Based Slices in the Structure of Superintuitionistic Predicate Logics, Preview", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 1, pp. 101–113. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-101-113

Dedicated to the memory of Tsutomu Hosoi (12.03.1937–28.12.2020)

This text announces a series of closely related papers that together make up a single work presenting the results of our recent research (made in 2020).

Introduction

In this work we mainly deal with superintuitionistic predicate logics (see, e.g., [Gabbay et al., 2009, Sect.2.6, Definition 2.6.3]), but we also consider, when necessary, superintuitionistic propositional logics. However, we are interested not so much in individual logics *per se*, but would like to describe the entire structure they form.

Recall that the set of superintuitionistic logics forms a structure (i.e., a lattice) ordered by inclusion, with the operations of set-theoretic intersection $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ and logical sum $[\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2]$; the latter is the deductive closure of the union of logics $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$ (i.e., the least logic that extends both these logics). This structure has the bottom element — intuitionistic logic (**QH** in the predicate case or $\mathbf{H}$ in the propositional case). It also has the top element — the inconsistent logic $[\mathbf{QH}+\bot]$ or $[\mathbf{H}+\bot]$. For now, we denote the inconsistent logic, predicate or propositional (depending on the context) by $\mathbf{L}^{\bot}$.[1] It is well known that the structure of logics, both predicate and propositional, is complete: for every family $(\mathbf{L}_\theta : \theta \in \Theta)$ of logics there exists the intersection $\bigcap\limits_{\theta\in\Theta} \mathbf{L}_\theta$ and the logical sum $\sum\limits_{\theta\in\Theta} \mathbf{L}_\theta$, which is the deductive closure of $\bigcup\limits_{\theta\in\Theta} \mathbf{L}_\theta$.

Our work is inspired by (and based on) the work of two outstanding scientists who studied the structure of superintuitionistic propositional logics — Vadim Jankov and Tsutomu Hosoi.

In the early 1960s Vadim Jankov constructed [Jankov, 1963; Jankov, 1969] characteristic formulas for finite Heyting algebras whose top element has a unique predecessor. It is known that such algebras are just finite subdirectly irreducible Heyting algebras. In Kripkean terms, such algebras correspond to finite rooted propositional Kripke frames (partially ordered sets). Nowadays, characteristic formulas came to be known as *Jankov formulas*. We believe that Jankov formulas are not simply formulas (or the logics axiomatized by the formulas) but rather an embodiment of a fundamental idea bringing to light the various aspects of the structure of the superintuitionistic propositional logics. We briefly recall the crucial property of Jankov formulas later, in Subsection 0.3; the inexperienced reader can find a description of Jankov formulas and their main properties e.g. in [Gabbay et al., 2009, Section 1.13].

Around the same time in the 1960s (slightly later), Tsutomu Hosoi described[2] (see [Hosoi, 1967; Hosoi, 1969]) an important hierarchy in the structure of propositional superintuitionistic logics. Namely, he partitioned the structure of logics into an $(\omega+1)$-sequence of 'slices', generated by the decreasing sequence of the logics of finite chains. Each finite slice consists of logics lying between the logic $\mathbf{G}_n$ of the $(n+1)$-element finite chain, regarded as Heyting algebra, (i.e., which is the same, the logic of the n-element linear Kripke frame),[3] and the logic axiomatized by the Jankov formula of the $(n+2)$-element chain (i.e., the $(n+1)$-element linear Kripke frame).[4] The final, ω-slice consists of the logics lying between Dummett's logic $\mathbf{LC}$ (the intersection of all logics $\mathbf{G}_n$)

[1]Later, when considering our predicate hierarchy of slices, to achieve the uniformity of notation, we denote the inconsistent predicate logic by $\mathbf{QC}_0$.

[2]as Julius Caesar: veni, vidi, and described.

[3]these logics $\mathbf{G}_n$ were introduced by Gödel in [Gödel, 1933].

[4]More precisely, Hosoi used not Jankov formulas as such, but their slightly modified deductively equivalent versions (called n-th Pierce laws, for $n \geq 1$, while the 0-th slice consists of the inconsistent logic $\mathbf{G}_0$). Hosoi did not know about Jankov's results and formulas until the 1970s, so he independently re-establish Jankov's splitting properties for a particular case he was interested in.

and intuitionistic propositional logic **H**. This fundamental *hierarchy of (finite) slices* gives a global view of the structure of propositional superintuitionistic logics, as well as useful information about the logics themselves. E.g., all logics from Hosoi's finite slices enjoy the finite model property, and so they are Kripke complete (see e.g. [Komori, 1975]). Hosoi's classification also gives essential information about the formation of the entire structure of logics. E.g., every finite slice is embeddable (as a poset, and hence, as a lattice) into all the further slices; moreover, onto segments in those slices. The inexperienced reader can find a more explicit description of Hosoi's hierarchy of slices (in Kripkean terms), together with a more detailed formulation of some of its known properties, in [Gabbay et al., 2009, Section 1.15].[5]

By the way, note that there exist two other, almost equally fundamental, $(\omega+1)$-hierarchies of slices in the structure of superintuitionistic propositional logics. They are also generated by decreasing ω-sequences of finite Kripke frames (posets) leading to two pretabular logics other than Dummett's **LC** (see in [Maksimova, 1972]). One was described by H. Ono [Ono, 1972–1973]; the second hierarchy was noticed by the author in an unpublished note [Skvortsov, in preparation]. Neither hierarchy, however, is as elegant as Hosoi's; hence we do not discuss them here. We only point out that the three hierarchies together produce a three-dimensional picture of the structure of superintuitionistic propositional logics. In particular, a logic is tabular iff it belongs to finite slices of all three hierarchies; this simple observation sharpens and clarifies the mentioned result by Maksimova [Maksimova, 1972] on existence of exactly three pretabular superintuitionistic propositional logics.

The fundamental achievements by Jankov and Hosoi are closely related through the technically important lattice-theoretic notion of splitting (cf. e.g. [Galatos et al., 2007, Chapter 10]).

In the subsequent preambulus, we briefly present a general description of hierarchies of slices in the structure of logics. We hope that such a description could provide a framework that is more suitable for the predicate case studying in the announced work, as well as for possible future investigations. This perspective also helps us explain the role of splittings in Jankov's and Hosoi's considerations for the propositional case. Then, based on this description, as well as terminology and notions introduced in its course, we shall describe, at the end of our text, the contents of the whole work.[6]

[5] Although this presentation is somewhat hasty, and so rather sloppy and opaque in places.

[6] The numbering of Subsections 0.1, 0.2, etc. in the preamble aligns with that in the announced work, where the introductory section, Preamble, is Section 0, followed by Sections 1, 2, etc. (see Subsect. 0.7 in this text).

Preamble. Systems and hierarchies of slices: An overview

0.1. A subset $\mathcal{L}'$ of the structure $\mathcal{L}$ of (all) superintuitionistic logics (predicate or propositional) is called *convex* in $\mathcal{L}$ if it satisfies the following property:

$$\forall \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \in \mathcal{L}' \ \forall \mathbf{L}_0 \in \mathcal{L} \ (\mathbf{L}_1 \subseteq \mathbf{L}_0 \subseteq \mathbf{L}_2 \Rightarrow \mathbf{L}_0 \in \mathcal{L}').$$

This condition, in other words, means that:

$\mathcal{L}'$ is downward closed in $(\mathcal{L}')^{\supseteq} = \{\mathbf{L} \in \mathcal{L} \mid \exists \mathbf{L}' \in \mathcal{L}' \ (\mathbf{L}' \subseteq \mathbf{L})\}$

or equivalently, $\mathcal{L}'$ is upward closed in $(\mathcal{L}')^{\subseteq} = \{\mathbf{L} \in \mathcal{L} \mid \exists \mathbf{L}' \in \mathcal{L}' \ (\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}')\}$.

We are only interested in non-empty convex sets. We now mention two examples of convex subsets of $\mathcal{L}$.

A *segment* (a bounded convex set) is a complete sublattice of $\mathcal{L}$ of the form $[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = \{\mathbf{L} \mid \mathbf{L_1} \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{L_2}\}$ (for logics $\mathbf{L}_1$,$\mathbf{L}_2$ such that $\mathbf{L}_1 \subseteq \mathbf{L}_2$). An (open) *interval* is a subset of $\mathcal{L}$ of the form $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) = \{\mathbf{L} \mid \mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L} \subset \mathbf{L}_2\}$. Notice that the condition $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$ is necessary, but not sufficient, for the non-emptiness of $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$. The notion of convexity is essentially broader than these particular cases; convex sets may not be sublattices of $\mathcal{L}$ (e.g., every antichain in $\mathcal{L}$ is convex).

Clearly, a convex set is a segment if and only if it contains the greatest and the smallest elements. On the other hand, a subfamily of the structure $\mathcal{L}$ of logics is convex if and only if, whenever it contains two logics $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$, it also includes the segment $[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2]$.

By a *system of slices* in the structure $\mathcal{L}$ of logics we mean a partition of $\mathcal{L}$ into convex subsets. This means that these subsets are non-empty, disjoint, and their union is the whole structure $\mathcal{L}$. Of course, a system of slices is worth studying only if either the corresponding equivalence relation itself or the induced equivalence classes (i.e., slices) are interesting or meaningful. We suspect that in most cases, slices will turn out to be segments, although not always. Moreover, we cannot rule out systems containing slices that are not sublattices of $\mathcal{L}$.[7]

0.2. We now consider a more elegant and nicer type of systems of slices.

A *hierarchy of slices* in a structure $\mathcal{L}$ of logics is a system of slices equipped with an antimonotone map to ordinals. This means that its slices $\mathcal{L}_\mu$ are parametrized by ordinals $\mu \le \mu^*$ (for some ordinal $\mu^* \ge 0$) so that

$$\forall \mu_1, \mu_2 \le \mu^* \ \forall \mathbf{L}_1 \in \mathcal{L}_{\mu_1} \ \forall \mathbf{L}_2 \in \mathcal{L}_{\mu_2} \ (\mathbf{L}_1 \subseteq \mathbf{L}_2 \Rightarrow \mu_1 \ge \mu_2).$$

[7] However we do not forsee that in interesting systems their slices will be nontrivial (i.e., non-singleton) antichains etc.

In other words, this means that: $(\mathcal{L}_\mu)^{\supseteq} \subseteq \mathcal{L}_{\leq\mu}$ for every $\mu \leq \mu^*$,
or equivalently, $(\mathcal{L}_\mu)^{\subseteq} \subseteq \mathcal{L}_{\geq\mu}$ for every $\mu \leq \mu^*$,
where, naturally, $\mathcal{L}_{\leq\mu} = \bigcup\limits_{0\leq\mu'\leq\mu} \mathcal{L}_{\mu'}$ and $\mathcal{L}_{\geq\mu} = \bigcup\limits_{\mu\leq\mu'\leq\mu^*} \mathcal{L}_{\mu'}$.

Remark 1. In general, both these inclusions may be proper. Definitely, it is not hard to construct appropriate (artificial) examples; we do not, however, wish to be distracted by pathological cases.

A hierarchy $(\mathcal{L}_\mu : \mu \leq \mu^*)$ of this kind is called a *μ^*-hierarchy of slices*; this is a sequence of slices of length μ^*+1. Recall that the slices $\mathcal{L}_\mu$, for $\mu \leq \mu^*$, generate a partition of $\mathcal{L}$ (i.e., all the slices are non-empty, disjoint, and their union is $\mathcal{L}$).

Notice that similar hierarchies of the form $(\mathcal{L}_\mu : \mu < \mu^*)$ (of length μ^*) for <u>limit</u> ordinals μ^* are definitely impossible. Indeed, let $\mathbf{L}_\mu \in \mathcal{L}_\mu$ for all $\mu < \mu^*$, then the intersection $\bigcap\limits_{\mu<\mu^*} \mathbf{L}_\mu$ does not belong to $\bigcup\limits_{\mu<\mu^*} \mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}$.

0.3. We now can consider the notion of splitting (in a structure of superintuitionistic logics). To begin with, notice that there exists a single 0-hierarchy of slices; this trivial hierarchy consists of one slice $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$. Next, we say that a *pre-splitting* is just a 1-hierarchy of slices. So this is a 2-partition $\langle \mathcal{L}_+, \mathcal{L}_- \rangle$ of $\mathcal{L}$ in which $\mathcal{L}_+$ is upward closed and $\mathcal{L}_-$ is downward closed. Thus, every upward closed subset $\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}$ gives rise to a unique pre-splitting $\langle \mathcal{L}_+, \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_+ \rangle$ and, dually, every downward closed subset $\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}$ gives rise to a unique pre-splitting $\langle \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_-, \mathcal{L}_- \rangle$.

Obviously, the *lower* part (portion, component) $\mathcal{L}_-$ of a pre-splitting has the least logic (namely, intuitionistic logic, the least in the structure $\mathcal{L}$), and the *upper* part $\mathcal{L}_+$ has the greatest logic (the inconsistent logic, the greatest in $\mathcal{L}$). Now, a pre-splitting $\langle \mathcal{L}_+, \mathcal{L}_- \rangle$ is called a *splitting* if $\mathcal{L}_-$ contains the greatest logic (denoted by $\mathbf{L}_-$) and $\mathcal{L}_+$ contains the least logic (denoted by $\mathbf{L}_+$). In other words, a pre-splitting is a splitting iff both its parts are segments in $\mathcal{L}$; i.e.,

$$\mathcal{L}_- = [(\mathbf{Q})\mathbf{H}, \mathbf{L}_-] = \{\mathbf{L} \,|\, \mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}_-\}, \;\; \mathcal{L}_+ = [\mathbf{L}_+, \mathbf{L}^\perp] = \{\mathbf{L} \,|\, \mathbf{L}_+ \subseteq \mathbf{L}\}.$$

Thus a pre-splitting is just a partition of $\mathcal{L}$ into two convex sets, while a splitting is a partition of $\mathcal{L}$ into two segments.

One can easily see that a pair of logics $\langle \mathbf{L}_+, \mathbf{L}_- \rangle$ *generates a splitting* in $\mathcal{L}$ (or is a *splitting pair*, cf. e.g. [Galatos et al., 2007, Chapter 10, Section 10.1]) *iff* it satisfies *any of the following equivalent conditions*:

(*i*) $\forall \mathbf{L} \in \mathcal{L}$ [$(\mathbf{L}_+ \subseteq \mathbf{L}) + (\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}_-)$]

(where $+$ means the exclusive 'or', i.e., the logical sum modulo 2);

$(i)'$ $\forall \mathbf{L}\in\mathcal{L}\,(\,\mathbf{L}_+\subseteq\mathbf{L} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{L}\not\subseteq\mathbf{L}_-\,)$; $\quad(i)''$ $\forall \mathbf{L}\in\mathcal{L}\,(\,\mathbf{L}\subseteq\mathbf{L}_- \;\Leftrightarrow\; \mathbf{L}_+\not\subseteq\mathbf{L}\,)$;
(ii) $(\mathbf{L}_+\not\subseteq\mathbf{L}_-)$ and $\forall \mathbf{L}\in\mathcal{L}\,[(\mathbf{L}_+\subseteq\mathbf{L})\vee(\mathbf{L}\subseteq\mathbf{L}_-)]$.

V. Jankov [Jankov, 1963; 1969] proved that *every Jankov formula generates a splitting in the structure of propositional superintuitionistic logics.* In effect, he established that a logic axiomatized by a Jankov formula, together with the logic of the finite Heyting algebra (or the associated finite rooted propositional Kripke frame) to which that formula corresponds, form a splitting pair. Thereby, Jankov anticipated, for the structure of propositional superintuitionistic logics, the important construction of splitting, which was explicitly introduced about a decade later, in the 1970s, in a general lattice-theoretic setting, by McKenzie (cf. [Galatos et al., 2007, the beginning of Chapter 10]).

Moreover, it is known[8] that *all splittings in the structure of propositional superintuitionistic logics are generated, in the described way, by Jankov formulas.* In fact, this result immediately follows from a theorem of Jankov's, 1960s (namely, from the Theorem on conjunctively indecomposable formulas, see [Jankov, 1969, the beginning of § 3]).[9]

Indeed, let $\langle\mathbf{L}_+,\mathbf{L}_-\rangle$ be a splitting pair. Clearly, the logic $\mathbf{L}_+$ cannot be presented as a sum of its proper sublogics (since $\sum\limits_{\theta\in\Theta}\mathbf{L}_\theta\subseteq\mathbf{L}_-$ if all $\mathbf{L}_\theta\subset\mathbf{L}_+$). On the other hand, every logic is the sum of its finitely axiomatizable sublogics. Hence we conclude that the logic $\mathbf{L}_+$ is finitely axiomatizable; moreover, it is axiomatizable by a conjunctively indecomposable formula, i.e., by a Jankov formula (due to the mentioned theorem of Jankov's). ■

However, Jankov in the 1960s did not state such a result; perhaps, he never gave a thought to this important (from the modern standpoint) corollary of his theorem.[10]

Now, we say a few words on splittings in the structure of predicate (superintuitionistic) logics. Again, for any splitting pair $\langle\mathbf{L}_+,\mathbf{L}_-\rangle$ the logic $\mathbf{L}_+$ is finitely axiomatizable (since it cannot be presented as a sum of its proper sublogics), i.e., $\mathbf{L}_+ = [\mathbf{QH}+A^+]$ for a formula A^+ (this formula is unique up to the intuitionistic deductive equivalence, i.e., the mutual derivability). We call such formula A^+ the *characteristic formula* or the *Jankov-style formula* for a splitting (or for its splitting pair). Say that a splitting pair is *determined by* a frame F^- if $\mathbf{L}_-$ is the logic of F^-. In this case we may call the corresponding axiom A^+ (for $\mathbf{L}_+$) the Jankov-style formula for the frame F^-.

[8]E.g., this follows from a rather general algebraic McKenzie's theorem, 1970s.

[9]This rather straightforward argument has, probably, remained, for over half a century, unnoticed by specialists. Hence, we sketch it here.

[10]Perhaps, Jankov could not even conceive of such a question because at the time he was affiliated with the Moscow school of constructivism, hence such a non-constructive object as the entire structure of logics did not attract his attention.

The mentioned description of splittings for the propositional case shows that every splitting is determined by a finite rooted Kripke frame (i.e., a poset) there. On the other hand, *we cannot guarantee that every splitting in the structure of predicate logics is determined by a frame of any kind.* Although splittings considered in this work (as well as splittings which we envisage for our possible future investigations), are (or could be) determined by predicate Kripke frames, however we cannot see too far into the future; perhaps, generalized Kripke-type semantics, known for predicate logics, could be used by future researchers to identify new splittings or somewhat else (why not?).

By the way, in a future continuation of the presented work (On a 'perpendicular' system of slices in the structure of superintuitionistic predicate logics) we hope to show that all propositional Jankov formulas are Jankov-style formulas for predicate splittings determined by suitable predicate Kripke frames (over posets, to which Jankov formulas correspond).[11]

0.4. Now we consider applications of splittings to hierarchies of slices.

Let $(\mathcal{L}_\mu : \mu \le \mu^*)$ be a μ^*-hierarchy of slices. For every $\mu < \mu^*$ it generates a pre-splitting $\langle \mathcal{L}_{\le\mu}, \mathcal{L}_{\ge(\mu+1)} \rangle$ We call a hierarchy *μ-split* if this pre-splitting is a splitting. This means that the downward closed subset $\mathcal{L}_{\ge(\mu+1)} \subseteq \mathcal{L}$ contains the greatest logic $\mathbf{L}^{up}_{\mu+1}$ and the upward closed subset $\mathcal{L}_{\le\mu}$ contains the least logic $\mathbf{L}^{down}_\mu$. Then, obviously, $\mathbf{L}^{up}_{\mu+1}$ is the greatest element in $\mathcal{L}_{\mu+1}$, while $\mathbf{L}^{down}_\mu$ is the least element in $\mathcal{L}_\mu$. However, the existence of the greatest logic in $\mathcal{L}_{\mu+1}$ and the least logic in $\mathcal{L}_\mu$ is not sufficient for a μ-split hierarchy, since these logics in general need not be the greatest in $\mathcal{L}_{\ge(\mu+1)}$ and, respectively, the least in $\mathcal{L}_{\le\mu}$; cf. Remark 1 to the definition of hierarchies of slices in subsection 0.2.

Remark 2. A μ^*-hierarchy of slices gives rise to another kind of pre-splittings. Namely, for $0 < \mu \le \mu^*$, we obtain a pre-splitting $\langle \mathcal{L}_{<\mu}, \mathcal{L}_{\ge\mu} \rangle$ (where $\mathcal{L}_{<\mu} = \bigcup\limits_{0 \le \mu' < \mu} \mathcal{L}_{\mu'}$). However, these pre-splittings seem useless, as they do not lead to new splittings. Indeed, such a pre-splitting for $\mu+1$ is just the pre-splitting $\langle \mathcal{L}_{\le\mu}, \mathcal{L}_{\ge(\mu+1)} \rangle$. And if μ is a limit ordinal, then the pre-splitting $\langle \mathcal{L}_{<\mu}, \mathcal{L}_{\ge\mu} \rangle$ cannot be a splitting since $\mathcal{L}_{<\mu}$ does not have the least element.

[11]Some authors call logics $\mathbf{L}_+$ (from splitting pairs) splitting logics, while other authors use this name for logics $\mathbf{L}_-$. The author is inclined to the first option (position), since otherwise finitely axiomatizable (and hence convenient) logics $\mathbf{L}_+$ turn out to play a secondary, subservient role. In any case, to avoid misunderstanding, we do not use this term, opting instead for a more invariant notion of a splitting pair. Sometimes, logics axiomatized by arbitrary (perhaps infinite) families of Jankov formulas (or, in our case, Jankov-style formulas) are called join-splitting logics or union splitting logics. Again, until we have enough experience working with splittings in the structure of predicate logics, we prefer to avoid such terminology.

Let $(\mathcal{L}_\mu : \mu \leq \mu^*)$ be a μ^*-hierarchy of slices, and let $0 < \mu_0 \leq \mu^*$; put $\mu_0^+ = \mu_0$ if μ_0 is a limit ordinal and $\mu_0^+ = \mu_0 + 1$ otherwise. The hierarchy $(\mathcal{L}_\mu : \mu \leq \mu^*)$ is called $<\mu_0$-*split* if it is μ-split for all $0 \leq \mu < \mu_0$ (here we exclude the trivial case $\mu_0 = 0$; otherwise all hierarchies would be <0-split).

One can easily see that *a hierarchy is* $<\mu_0$-*split iff* it satisfies *the following four conditions*:

(1) every slice $\mathcal{L}_\mu$ for $0 \leq \mu < \mu_0$ contains the greatest logic $\mathbf{L}_\mu^{up}$ and the least logic $\mathbf{L}_\mu^{down}$, i.e., $\mathcal{L}_\mu = [\mathbf{L}_\mu^{down}, \mathbf{L}_\mu^{up}]$ (clearly, here $\mathbf{L}_0^{up}$ is the inconsistent logic; it is the greatest in $\mathcal{L}$ and is in the 0-th slice $\mathcal{L}_0$ as well);

(2) if μ_0 is not a limit ordinal, then the downward closed subset $\mathcal{L}_{\geq \mu_0}$ contains the greatest logic $\mathbf{L}_{\mu_0}^{up}$, i.e., $\mathcal{L}_{\geq \mu_0} = [(\mathbf{Q})\mathbf{H}, \mathbf{L}_{\mu_0}^{up}] = \{\mathbf{L} \mid \mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}_{\mu_0}^{up}\}$ (clearly, the logic $\mathbf{L}_{\mu_0}^{up}$ is the greatest in the slice $\mathcal{L}_{\mu_0}$ as well);

(3) both $\quad \forall \mu', \mu'' < \mu_0 \, (\mu' < \mu'' \Rightarrow \mathbf{L}_{\mu''}^{down} \subset \mathbf{L}_{\mu'}^{down})$

and $\quad \forall \mu', \mu'' < \mu_0^+ \, (\mu' < \mu'' \Rightarrow \mathbf{L}_{\mu''}^{up} \subset \mathbf{L}_{\mu'}^{up})$

(in other words, the lower logics $(\mathbf{L}_\mu^{down} : \mu < \mu_0)$ form a decreasing μ_0-chain and the upper logics $(\mathbf{L}_\mu^{up} : \mu < \mu_0^+)$ form a decreasing μ_0^+-chain);

(4) if μ_0 is a limit ordinal, then $\quad \forall \mu < \mu_0 \, \forall \mathbf{L} \in \mathcal{L}_{\geq \mu_0} \, (\mathbf{L} \subset \mathbf{L}_\mu^{up})$

(actually, due to (3), it is sufficient to check this condition only for arbitrarily large $\mu < \mu_0$).

Note that if, in a μ^*-hierarchy, every slice $\mathbf{L}_\mu$ for $\mu_0^+ \leq \mu < \mu^*$ has a top logic $\mathbf{L}_\mu^{up}$, then we can replace
the condition in (2) with: $\quad \forall \mu > \mu_0 \, [\mathbf{L}_\mu^{up} \subset \mathbf{L}_{\mu_0}^{up}]$,
and the condition in (4) with: $\quad \forall \mu \geq \mu_0 \, \forall \mu' < \mu_0 [\mathbf{L}_\mu^{up} \subset \mathbf{L}_{\mu'}^{up}]$.

A hierarchy of slices is called *split* (or *totally split*) if it is $<\mu^*$-split, i.e., if it is μ-split for every $\mu < \mu^*$ (i.e., for all its slices). Such a hierarchy is an assembled combination of splittings (coordinated in a suitable way).

0.5. Note that one can transform, in an obvious way, every $<\omega$-split μ^*-hierarchy of slices (with $\mu^* > \omega$) into a $<\omega$-split ω-hierarchy. Viz., one can replace all slices $\mathcal{L}_\mu$ with $\mu \geq \omega$ by their union $\mathcal{L}_{\geq \omega}$. The resulting hierarchy remains $<\omega$-split, and so, formally speaking, it becomes totally split. Nevertheless, it should be intuitively clear that a new hierarchy becomes worse than the original one: every gluing of succesive slices makes a hierarchy less expressive. Thus, we are interested in obtaining subtler hierarchies of slices, even if some formal properties (e.g., those related to splittings) are affected.

Now we briefly sketch an attempt to explicate these somewhat vague informal considerations.

Say that an (arbitrary) μ^*-hierarchy is constructed *along* (or *under*) a sequence $(\mathbf{L}^{up}_\mu : \mu < \mu_0)$ (for some $\mu_0 \leq \mu^*$) if every $\mathbf{L}^{up}_\mu$ is the greatest logic in the slice $\mathcal{L}_\mu$. As explained, every $<\mu_0$-split hierarchy is constructed along its decreasing μ_0^+-sequence $(\mathbf{L}^{up}_\mu : \mu < \mu_0^+)$. In particular, a totally split hierarchy is constructed along the sequence $(\mathbf{L}^{up}_\mu : \mu < (\mu^*)^+)$; note that this sequence includes all ordinals $\mu \leq \mu^*$ for the case of a non-limit μ^* and can omit (in general) the last ordinal μ^* in the limit case. However, if this last slice $\mathcal{L}_{\mu^*}$ has the top logic, then our μ^*-hierarchy is again constructed along the 'total' sequence $(\mathbf{L}^{up}_\mu : \mu \leq \mu^*)$.

A decreasing sequence $(\mathbf{L}_\mu : \mu < \mu_0)$ is *weakly* (or *locally*) *uninterrupted* in the lattice $\mathcal{L}$ if all the intervals $(\mathbf{L}_{\mu+1}, \mathbf{L}_\mu)$ between adjacent logics in this sequence are empty (for all $(\mu+1) < \mu_0$) and $\mathbf{L}_\mu = \bigcap\limits_{0 \leq \mu' < \mu} \mathbf{L}_{\mu'}$ for all limit ordinals $\mu < \mu_0$. Also, a decreasing sequence $(\mathbf{L}_\mu : \mu \leq \mu_0)$ (with the least element $\mathbf{L}_{\mu_0}$) is *strongly* (or *globally*) *uninterrupted* in $\mathcal{L}$ if $\{\mathbf{L} \mid \mathbf{L}_{\mu_\mathbf{0}} \subseteq \mathbf{L}\} = \{\mathbf{L}_\mu \mid \mu \leq \mu_\mathbf{0}\}$. Obviously, every strongly uninterrupted sequence is weakly uninterrupted. Moreover, every strongly uninterrupted sequence obviosly begins with $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}^\perp$ (the inconsistent logic, i.e., the top element of $\mathcal{L}$). By the way, one can notice that a weakly uninterrupted sequnce begins with $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}^\perp$ iff the condition $\mathbf{L}_\mu = \bigcap\limits_{0 \leq \mu' < \mu} \mathbf{L}_{\mu'}$ is extended to $\mu = 0$, besides (infinite) limit ordinals. We tend to believe this requirement to be too restrictive — a weakly uninterrupted sequence could begin with an arbitrary $\mathbf{L}_0$.

A hierarchy of slices is *uninterrupted* (in the weak or the strong sense) up to a slice $\mathcal{L}_{\mu_0}$ (or up to the corresponding ordinal μ_0) if it is constructed along an uninterrupted sequence $(\mathbf{L}^{up}_\mu : \mu < \mu_0)$ of the greatest logics in the corresponding slices.

It seems preferrable to construct uninterrupted (and split), as far as possible, hierarchies of slices, because they could clarify the formation of the structure of (superintuitinistic) logics. And clearly, the requirement of uninterruptedness prevents attempts to glue together adjacent slices in such a hierarchy.

Now, the reader familiar (even slightly) with Hosoi's hierarchy of finite slices for propositional superintuitionistic logics can recognize a split ω-hierarchy constructed along a strongly uninterrupted $(\omega+1)$-sequence of logics — namely, Gödel logics (i.e., the logics of finite chains) together with their intersection, Dummett's logic.

Remark 3 (**Warning**). The inexperienced reader could be tempted to try to apply the uninterruptedness condition to the sequence of lower logics

$(\mathbf{L}^{down}_{\mu} : \mu < \mu_0)$ in slices of a split hierarchy. However, this idea seems useless. E.g., for the Hosoi's hierarchy (and for similar ones), the sequence of lower logics is not even weakly uninterrupted; namely, for every $\mu < \omega$ there exist many logics between $\mathbf{L}^{down}_{\mu+1}$ and $\mathbf{L}^{down}_{\mu}$. Perhaps, this obstacle is crucial; deep regions of the structure of superintuitionistic logics are too saturated and do not allow for too long sequences of empty intervals between adjacent logics.

Now let us briefly conclude the considerations and observations from subsections 0.2 to 0.5.

We see that pre-splittings and splittings are particular cases of hierarchies of slices. They are very small: only one step beyond the degenerate case $\mu^* = 0$, so at first sight, they appear simple, even simplistic, plain, scanty, underdone. Nevertheless, when viewed adequately, they can be quite useful and productive for the study of the structure of (superintuitionistic) logics. These primitive, basic constructions are rather frequent; this is known for the propositional case, and we can only hope that the situation in the predicate case is not much worse. (Pre-)splittings can be regarded as building blocks for hierarchies of slices — moreover, for rather extensively split hierarchies of slices (perhaps, almost as good as the beautiful and elegant hierarchy of slices of Hosoi's for the propositional case).

0.6. In the presented work, we make probably the first attempt to transfer Hosoi's hierarchy of slices (and, less so, Jankov's approach) from the structure of propositional superintuitionistic logics to a richer and more complicated structure of predicate superintuitionistic logics.

Namely, we describe a hierarchy of slices constructed along an ω-sequence of logics of classical frames (i.e., predicate Kripke frames with a single world) with finite domains. More exactly, we use the decreasing $(\omega+1)$-sequence of logics

$$\mathbf{QC}_0 \supset \mathbf{QC}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{QC}_m \supset \mathbf{QC}_{m+1} \supset \ldots \supset \mathbf{QC}_\omega\,, \qquad (\overline{QC})$$

where $\mathbf{QC}_m$ (for $m < \omega$) is the classical logic of an m-element domain (in particular, $\mathbf{QC}_0$ is the inconsistent predicate logic, i.e., the logic of empty domain), and their intersection $\mathbf{QC}_\omega = \bigcap\limits_{m<\omega} \mathbf{QC}_m$ is the classical logic of all finite domains, with classical predicate logic $\mathbf{QC}$ (i.e., the classical logic of any infinite domain) ending this sequence.

To obtain this hierarchy, we introduce predicate counterparts of Jankov formulas for finite classical frames and establish that these formulas generate the corresponding splittings in the predicate structure; these coordinated splittings constitute a $<\omega$-split $(\omega+1)$-hierarchy $(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_\omega, \mathcal{L}_{\omega+1})$ (a sequence, of length $\omega+2$, of slices). Here $\mathcal{L}_m = \{\mathbf{L}\in\mathcal{L} \mid (\mathbf{L}\subseteq\mathbf{QC}_m, \mathbf{L}\not\subseteq\mathbf{QC}_{m+1})\}$ for $0\leq m\leq\omega$ (where $\mathbf{QC}_{\omega+1}$ means $\mathbf{QC}$).[12]

All slices apart from $\mathcal{L}_\omega$ are segments; i.e., all finite slices and the last, $(\omega+1)$-th slice $\mathcal{L}_{\omega+1} = [\mathbf{QH}, \mathbf{QC}]$ (the family of intermediate predicate logics, i.e., the segment between intuitionistic predicate logic $\mathbf{QH}$ and classical predicate logic $\mathbf{QC}$). We conjecture that this hierarchy is not ω-split (i.e., not totally split) and, moreover, it cannot be extended to an ω-split hierarchy.

Our version of counterparts of Jankov formulas allows us to prove that the sequence $(\overline{QC})$ of upper logics in the slices of this hierarchy is strongly uninterrupted; this means that the family of all proper extensions of the logic $\mathbf{QC}_\omega$ is just the ω-sequence $\{\mathbf{QC}_m \,|\, m<\omega\}$ of all classical logics of finite domains.

This also yields, for every finite m, an exact description of formulas that can axiomatize the classical logic $\mathbf{QC}_m$ over classical logic $\mathbf{QC}$ — these are just arbitrary formulas from $\mathbf{QC}_m\setminus\mathbf{QC}_{m+1}$, i.e., those formulas that are classically valid on the m-element domain and non-valid on the $(m+1)$-element domain.

0.7. We now briefly describe a plan of the whole our investigation that consists of three parts making up a single larger work with a single enumeration of sections, statements etc., with numerous cross-references, and with a single list of bibliographic references.

Part I (Sections 1–6) contains mainly non-semantical considerations; in the part we use only classical predicate models. *Section 1* contains necessary lattice-theoretic (and some other) preliminaries, as well as agreements on terminology and notation. *Section 2* introduces the hierarchy of slices studied in the work.

In *Section 3* the counterparts of Jankov formulas for finite classical domains are presented and their main properties are established. Most of these properties are parallel the well-known properties of propositional Jankov formulas; those properties are successfully transferred to the predicate case. The corollaries for the structure of superclassical logics (i.e., extensions of $\mathbf{QC}$), mentioned at the end of the previous subsection 0.6, are also obtained here. Finally, the constructed Jankov–style formulas allow us to describe (for every finite m) the family of logics whose negative fragment (i.e., the set of provable formulas of the form $\neg A$) coincides with the negative fragment of $\mathbf{QC}_m$. Recall that an analogous description of predicate logics with the classical negative fragment (i.e., those whose negative fragment is the same as that of $\mathbf{QC}$) was obtained by D. Gabbay in the 1970s [Gabbay, 1972]. This is an application of our predicate Jankov-style formulas that has no analogue in propositional logic; recall

[12] In the announced work, for clarity, the slices of this hierarchy are occasionally called *FD-slices* (i.e., *finite domains based* slices).

that by Glivenko's theorem, all consistent (i.e., intermediate) superintuitionistic propositional logics have the classical negative fragment.

Section 4 contains proofs of two crucial theorems on Jankov-style formulas postponed from Section 3 due to their technical character. They require a more elaborate consideration and special notation used only in these proofs. The first of them is the predicate analogue of the crucial Jankov's result on his formulas. The second one is a semantical completeness theorem for the logics $\mathbf{QC}_m$; they are axiomatized by our Jankov-style formulas over classical logic $\mathbf{QC}$.

Section 5 contains a predicate version of Hosoi's result mentioned in Introduction: every finite slice $\mathcal{L}_m$ is isomorphically embeddable in all the further slices $\mathcal{L}_{m'}$ (for $m<m'\leq(\omega+1)$); again, onto corresponding segments of those slices.

In *Section 6* we transfer the result on isomorphic embeddings to the infinite ω-slice $\mathcal{L}_\omega$. This consideration makes it necessary to introduce a subtler classification within this slice. Together with the hierarchy of finite slices, this gives us a non-hierarchical (i.e., not parametrized by ordinals) system of slices in the structure of predicate logics. The main obstacle in the way of the proof is the lack of the least logics in the new slices (these are called the 'subslices' of the ω-slice). Nevertheless, this obstacle is easily overcome, so the embedding result is extended to these subslices in a natural way.

Part II (Sections 7–9) describes and studies Kripke complete logics from finite and infinite slices of our hierarchy. *Section 7* contains semantical preliminaries, an extensive overview of Kripke semantics for superintuitionistic predicate logics. *Sections 8* and *9* are devoted to logics of Kripke frames with expanding and constant domains (respectively) in different slices of the hierarchy.

Part III (Sections 10–12) concludes the whole work. In *Section 11* we apply the semantics of Kripke sheaves (an introduction to this semantics is given in *Section 10*) to the proofs of Kripke incompleteness of various logics from finite slices. The final *Section 12* contains the proofs of main results on decidability, axiomatizability, and non-axiomatizability for some notable Kripke complete logics from finite and infinite slices. These theorems are stated in Sections 8 and 9 (from Part II), but their proofs are postponed because of special technical machinery required (as in Section 4, Part I).

We hope that this work could become a starting point for further investigations. First, some unsolved questions are formulated, and some suggestions and prospects for future research are mentioned throughout the text. Second, other, new systems of slices (in the structure of superintuitionistic predicate logics) — both hierarchical and non-hierarchical — may be found and explored. The experience obtained in Section 6 gives some hope for that. We are not yet ready to discuss these options, but we hope that somebody finds in our work inspiration for further studies in the field.

Acknowledgements. The author would like to express sincere gratitude to Dmitry Shkatov for editing the English text of the paper.

References

Gabbay, 1972 – Gabbay, D.M. "Application of trees to intermediate logics", *Journal of Symbolic Logic*, 1972, Vol. 37, pp. 135–138.

Gabbay et al., 2009 – Gabbay, D., Shehtman, V., Skvortsov, D. "Quantification in Nonclassical Logic", Vol. 1, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Vol. 153. Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 2009. Sections 1.13, 1.15, 2.6.

Galatos et al., 2007 – Galatos, N., Jipsen, P., Kowalski, T., Ono, H. "Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Vol. 151. Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 2007.

Gödel, 1933 – Gödel, K. "Über Unabhängigkeitsbeweise im Aussagenkalkül", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 1933, Vol. 4, pp. 9–10.

Hosoi, 1967 – Hosoi, T. "On intermediate logics, I", *Journal of the Faculty of Science of the University of Tokyo, Sect. I*, 1967, Vol. 14, No. 2, pp. 293–312.

Hosoi, 1969 – Hosoi, T. "On intermediate logics, II", *Journal of the Faculty of Science of the University of Tokyo, Sect. I*, 1969, Vol. 16, No. 1, pp. 1–12.

Jankov, 1963 – Jankov, V.A. "The relationship between deducibility in the intuitionistic propositional calculus and finite implicational structures", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, Vol. 151, pp. 1293–1294. (In Russian). English translation: *Soviet Mathematics, Doklady*, 1963, Vol. 4, pp. 1203–1204.

Jankov, 1969 – Jankov, V.A. "Conjunctively indecomposable formulas in propositional calculi", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR*, 1969, Vol. 33, pp. 13–38. (In Russian). English translation: *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, 1969, Vol. 3, pp. 17–35.

Komori, 1975 – Komori, Y. "The finite model property of the intermediate logics of finite slices", *Journal of the Faculty of Science of the University of Tokyo, Sect. I*, 1975, Vol. 22, pp. 117–120.

Maksimova, 1972 – Maksimova, L.L. "Pretabular superintuitionistic logics", *Algebra i Logika*, 1972, Vol. 11, No. 5, pp. 558–570. (In Russian). English translation: "Pretabular superintuitionist logic", *Algebra and Logic*, 1972, Vol. 11, No. 5, pp. 308–314.

Ono, 1972–1973 – Ono, H. "Some results on the intermediate logics", *Publications of RIMS, Kyoto University*, 1972–1973, Vol. 8, pp. 117–130.

Skvortsov, in preparation – Skvortsov, D. "On propositional Jankov formulas, II". In preparation.

Логические исследования
2023. Т. 29. № 1. С. 114–146
УДК 16

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 1, pp. 114–146
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-114-146

Символическая логика
Symbolic logic

М.Н. Рыбаков

Бинарный предикат, транзитивное замыкание, две-три переменные: сыграем в домино?*

Михаил Николаевич Рыбаков
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН.
Российская Федерация, 127051, г. Москва, Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Российская Федерация, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20.
E-mail: m_rybakov@mail.ru

Аннотация: Проблемы укладки домино являются удобным инструментом оценки алгоритмической сложности задач, возникающих в различных разделах математики, в том числе в логике. В работе описывается моделирование проблем домино с помощью средств языка логики предикатов, а также с помощью некоторых дополнительных средств, в том числе не выразимых элементарно. Это дает возможность получить как простые доказательства уже известных фактов о неразрешимости проблемы выполнимости формул различных фрагментов логики предикатов, так и некоторые новые результаты. Так, известно, что проблема выполнимости формул логики предикатов, содержащих не более двух предметных переменных, алгоритмически разрешима; известно также, что свойство транзитивности бинарного отношения и операция композиции двух бинарных отношений могут быть выражены в языке первого порядка с использованием трех переменных. В работе показано, что если добавить к языку первого порядка оператор проверки транзитивности бинарного отношения (или более сильное средство — оператор транзитивного замыкания) и оператор композиции, то получим язык с сильно неразрешимой проблемой выполнимости формул от двух переменных, построенных в сигнатуре с одной бинарной предикатной буквой и равенством.

Ключевые слова: логика предикатов, бинарный предикат, неразрешимость

Для цитирования: *Рыбаков М.Н.* Бинарный предикат, транзитивное замыкание, две-три переменные: сыграем в домино? // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 1. С. 114–146. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-114-146

* Работа выполнена в ИППИ РАН при поддержке РНФ, проект № 21-18-00195.

Введение

Известно, что классическая логика предикатов **QCl** алгоритмически неразрешима [Church, 1936; Turing, 1936][1]. Можно ли избежать неразрешимости в каких-то случаях? Что для этого нужно? Когда избежать неразрешимости не получится? Если логика неразрешима, является ли она рекурсивно перечислимой? Сейчас исследования подобных вопросов образуют целую область, известную как «классическая проблема разрешения» [Börger et al., 1997]: имеется огромное количество результатов, дающих как разрешимые, так и неразрешимые фрагменты логики **QCl**, классических теорий первого порядка, а также других формальных предикатных систем [Surányi, 1943; Kripke, 1962; Маслов и др., 1965; Mortimer, 1975; Motohashi, 1990; Gabbay, Shehtman, 1993; Grädel et al., 1997; Grädel, 1999; Рыбаков, Чагров, 2000; Hodkinson et al., 2000; Рыбаков, 2001; Hodkinson et al., 2001; Wolter, Zakharyaschev, 2001; Kontchakov et al., 2005; Kotikova, Rybakov, 2013; Рыбаков, 2014; Котикова, Рыбаков, 2016; Рыбаков, 2018a; Rybakov, Shkatov, 2021c; Rybakov, Shkatov, 2021d; Rybakov, Shkatov, 2022b], как, впрочем, не только предикатных [Urquhart, 1984; Kremer, 1997; Reynolds, Zakharyaschev, 2001; Hirsch et al., 2002; Gabelaia et al., 2005; Urquhart, 2007; Balbiani, Tinchev, 2014; Рыбаков, 2018b; Александров и др., 2021; Рыбаков, 2021; Rybakov, Shkatov, 2021b].

Так, чтобы доказать неразрешимость логики **QCl**, достаточно, чтобы ее язык содержал какие-либо из перечисленных ниже наборов средств:

- одну бинарную предикатную букву и бесконечно много предметных переменных (см. [Boolos et al., 2007, глава 21] или [Булос, Джеффри, 1994, глава 25]);

- одну бинарную предикатную букву, бесконечно много унарных предикатных букв и три предметные переменные [Surányi, 1943];

- и даже, как следует из [Tarski, Givant, 1987] (см. пункт (ii) раздела 4.8), лишь одну бинарную букву и три предметные переменные.

Примеры других неразрешимых фрагментов, в том числе определяемых кванторными приставками, читатель может найти в [Nies, 1996; Börger et al., 1997]. В то же время известно, что следующие фрагменты логики **QCl** являются разрешимыми:

[1] Более точно, Σ^0_1-полна, см. [Harel, 1986] и [Rybakov, Shkatov, 2021a, приложение]; см. также [Speranski, 2016], где обсуждается связь между неразрешимостью, Σ^0_1-полнотой и Π^0_1-полнотой.

- *монадический* фрагмент (т.е. содержащий лишь одноместные предикатные буквы), даже обогащенный равенством (см. [Boolos et al., 2007, глава 21] или [Булос, Джеффри, 1994, глава 25]);
- различные *охраняемые* фрагменты [Motohashi, 1990; Grädel, 1999];
- фрагмент с двумя предметными переменными [Grädel et al., 1997; Mortimer, 1975].

Неразрешимы также и многие первопорядковые теории (различные арифметические теории, теория групп, различные аксиоматические теории множеств и др.), в частности теории в языке лишь с одной бинарной предикатной буквой: например, теория симметричного иррефлексивного бинарного отношения [Speranski, 2016] (см. также [Nerode, Shore, 1980] и [Kremer, 1997, прил.]) и, как следствие, теория симметричного рефлексивного бинарного отношения. Что касается теорий конечных моделей, они могут даже не быть рекурсивно перечислимыми [Трахтенброт, 1950; Трахтенброт, 1953] (см. также [Rybakov, Shkatov, 2019a] и [Rybakov, Shkatov, 2021a, прил.]; похожие результаты для других языков можно найти, например, в [Bianchi, Montagna, 2015; Hájek, 1998]).

Для ряда приложений требуются средства, которые в языке классической логики предикатов невыразимы. Например, это оператор транзитивного (вариант: рефлексивно-транзитивного) замыкания бинарных отношений, оператор неподвижной точки, различные счетчики, обобщенные кванторы и др. Обогащение языка такими средствами, конечно, не приводит к разрешимости, более того, иногда приводит к неарифметичности и как следствие, к неперечислимости и отсутствию рекурсивной аксиоматики. Так, проблема выполнимости классических формул первого порядка попадает в арифметическую иерархию[2], а при добавлении оператора транзитивного замыкания получаем проблему выполнимости, выходящую за границы этой иерархии[3], т.е. существенно более сложную.

Изначально интерес автора состоял в том, чтобы получить простое доказательство неразрешимости логики бинарного предиката в языке с тремя предметными переменными [Tarski, Givant, 1987], что удалось сделать [Рыбаков, 2022] как раз с помощью проблемы домино. Попутно была получена неарифметичность[4] проблемы общезначимости формул в языке с двумя предметными переменными, равенством и бинарной предикатной буквой, обогащенном операторами композиции и транзитивного замыкания (см. также [Рыбаков, 2023]). В связи с последним результатом обратим

[2] Она Π^0_1-полна [Harel, 1986].

[3] Эта проблема Σ^1_1-трудна [Grädel et al., 1999].

[4] Более точно, Π^1_1-трудность.

внимание на три момента. Во-первых, оператор композиции можно выразить в языке первого порядка, правда, используя при этом три переменные: $x(R_1 \circ R_2)y = \exists z\,(xR_1z \wedge zR_2y)$. Во-вторых, оператор транзитивного замыкания бинарного отношения элементарно выразимым не является[5]. Наконец, в-третьих, известно [Grädel et al., 1999], что проблема общезначимости формул в языке с двумя предметными переменными, равенством и оператором проверки транзитивности бинарного отношения неразрешима; при этом предполагается, что в языке имеется бесконечно много унарных предикатных букв и дюжина бинарных. Условие транзитивности бинарного отношения элементарно выразимо: $\mathit{trans}(R) = \forall x \forall y \forall z\,(xRy \wedge yRz \to xRz)$. При этом, как и в случае композиции, требуются три предметные переменные. Возникает естественный вопрос: является ли алгоритмически разрешимой проблема общезначимости формул в языке с двумя переменными, бинарной буквой, равенством, оператором композиции и оператором проверки транзитивности? Используя проблему домино, мы покажем, как получить отрицательный ответ на этот вопрос.

Несмотря на заявленный результат, целью данной работы является также (и даже скорее) демонстрация двух техник: моделирования проблемы домино и моделирования бесконечного множества унарных букв языка с помощью одной бинарной при использовании всего двух-трех предметных переменных. Если первая техника хорошо известна и применялась многократно как в исследованиях свойств предикатных логик [Börger et al., 1997; Kontchakov et al., 2005; Rybakov, Shkatov, 2021c; Rybakov, Shkatov, 2021d; Rybakov, 2023], так и пропозициональных [Spaan, 1993; Reynolds, Zakharyaschev, 2001], то вторая перенесена из построений, возникших при исследовании алгоритмических свойств неклассических пропозициональных логик, где она применялась для моделирования всех пропозициональных переменных языка с помощью их конечного числа (не более двух), см. [Halpern, 1995; Chagrov, Rybakov, 2003; Rybakov, 2006; Рыбаков, 2007; Rybakov, 2007; Rybakov, 2008; Rybakov, Shkatov, 2021b; Rybakov, Shkatov, 2022a; Агаджанян, Рыбаков, 2022].

1. Разрешимость

Напомним вкратце понятия, связанные с разрешимостью множеств. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Множество A называется *алгоритмически разрешимым*, или *рекурсивным*, если его характеристическая функция

[5]Это, кстати, несложно понять, исходя из алгоритмических свойств проблемы общезначимости: в то время как проблема общезначимости формул первого порядка рекурсино перечислима, проблема общезначимости формул в языке первого порядка, обогащенном оператором транзитивного замыкания, не является арифметичной, в частности рекурсивно перечислимой.

$$\chi_A(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

вычислима; будем говорить, что A разрешимо, понимая при этом алгоритмическую разрешимость. Множества, не являющиеся разрешимыми, называем *неразрешимыми*. Множество A называется *рекурсивно перечислимым*, если оно пусто или является областью значений некоторой общерекурсивной функции. Нетрудно понять, что любое разрешимое множество является также и рекурсивно перечислимым.

Для понимания того, что будет говориться ниже об алгоритмической сложности проблем, этих понятий достаточно. Тем не менее в тексте будут даны сноски с более точным описанием степени сложности неразрешимых проблем в терминах арифметической и аналитической иерархий множеств. Читатель, желающий более подробно ознакомиться с этими иерархиями, может обратиться, например, к [Rogers, 1967]. Если не вдаваться в детали, то можно смотреть на Π^0_1-полную задачу как на неразрешимое множество с рекурсивно перечислимым дополнением, а на Σ^1_1-полную — как не просто на неразрешимую, но еще и неарифметичную.

Теперь сделаем замечание о разрешимости, рекурсивной перечислимости, арифметичности множеств формул. Множество формул Γ называем *разрешимым*, если разрешимо множество гёделевых номеров формул, входящих в Γ; аналогично Γ называем *рекурсивно перечислимым*, если рекурсивно перечислимо множество гёделевых номеров формул, входящих в Γ; то же самое для арифметичности и неарифметичности.

2. Проблемы укладки домино

Проблемы укладки домино являются удобным средством оприсания задач различной алгоритмической сложности. Нам будут интересны две из них, обе неразрешимые[6]. Приведем их точные формулировки.

Считаем, что все *плитки домино* имеют квадратную форму одного и того же фиксированного размера, причем для каждой такой плитки зафиксирована ориентация ее сторон: указано, какая именно сторона является *верхней*, *нижней*, *правой* и *левой*. Каждая плитка домино имеет некоторый *тип* t, полностью определяемый *цветами* сторон плиток этого типа; обозначим их $\boxed{\triangleright}t$ (цвет левой грани), $\boxed{\triangleleft}t$ (цвет правой грани), $\boxed{\triangledown}t$ (цвет верхней грани) и $\boxed{\vartriangle}t$ (цвет нижней грани). Частная *задача домино* определяется конечным набором $T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ типов плиток домино и состоит в том, что требуется выяснить, существует ли T-*укладка* плиток домино,

[6] Более точно, одна является Π^0_1-полной, а другая Σ^1_1-полной.

т.е. функция $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to T$, такая, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$ выполняются следующие условия:

$$(T_1) \quad \boxed{\lhd}\, f(i,j) = \boxed{\rhd}\, f(i+1,j);$$

$$(T_2) \quad \boxed{\triangledown}\, f(i,j) = \boxed{\vartriangle}\, f(i,j+1).$$

Основная *проблема домино*, которая нам будет интересна, формулируется следующим образом: по произвольной задаче домино T нужно выяснить, существует ли T-укладка плиток домино[7]. Известно, что эта проблема алгоритмически неразрешима[8].

Вторая проблема домино, к которой мы будем обращаться, определяется задачами домино, удовлетворяющими следующему дополнительному требованию к T-укладке:

$$(T_3) \quad \text{множество } \{j \in \mathbb{N} : f(0,j) = t_0\} \text{ является бесконечным.}$$

Условие (T_3) выражает тот факт, что в колонке с номером ноль (т.е. в крайней слева) имеется бесконечно много плиток типа t_0. Эта проблема домино тоже алгоритмически неразрешима, но она является также неарифметичной[9].

3. Классическая логика предикатов

Будем считать, что исходными символами *классического предикатного языка* $\mathcal{QL}$ являются следующие: счетное множество *предметных переменных*, счетное множество *предикатных букв* любой *валентности*, константа $\bot$, бинарная логическая связка $\to$, а также *кванторный символ* $\forall$; валентность предикатной буквы называем также ее *арностью*, или *местностью*, а предметные переменные называем также *индивидными*. Обогатим множество символов языка $\mathcal{QL}$ бинарным предикатным *символом равенства* $=$; получившийся язык будем обозначать $\mathcal{QL}^=$ и называть *классическим предикатным языком с равенством*.

Формулы языка $\mathcal{QL}^=$ определяются обычным образом: *атомарные* формулы имеют вид $\bot$, $x = y$ или $P(x_1, \ldots, x_n)$, где x, y и $x_1, \ldots, x_n$ — предметные переменные, P — n-местная предикатная буква, а более сложные — вид $(\varphi \to \psi)$ или $\forall x\, \varphi$, где φ и ψ — формулы, а x — предметная переменная. Определим $\neg$, $\top$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ и $\exists x$ как обычные сокращения. При записи формул будем опускать некоторые скобки; читатель сможет восстановить

[7] Как и с формулами, можно считать, что каждая задача домино кодируется некоторым натуральным числом.

[8] Является Π^0_1-полной [Berger, 1966].

[9] Более точно, Σ^1_1-полной [Harel, 1986, теорема 6.4].

их по контексту. Формулы языка $\mathcal{QL}^=$ называем также $\mathcal{QL}^=$-формулами. Формально под языком $\mathcal{QL}^=$ понимаем множество всех $\mathcal{QL}^=$-формул.

Язык $\mathcal{QL}$ определяем как фрагмент языка $\mathcal{QL}^=$, состоящий из формул, не содержащих вхождений символа равенства. Формулы языка $\mathcal{QL}$ называем также $\mathcal{QL}$-формулами.

Моделью языка $\mathcal{QL}^=$ называется набор $\boldsymbol{M} = \langle D, I\rangle$, где D — непустое множество *индивидов* модели $\boldsymbol{M}$, а I — *интерпретация предикатных букв* в D, т.е. функция, сопоставляющая каждой n-местной предикатной букве P некоторое n-местное отношение $I(P)$ на D; иначе говоря, $I(P) \subseteq D^n$.

Приписыванием в модели $\boldsymbol{M} = \langle D, I\rangle$ называется функция g, сопоставляющая каждой предметной переменной x некоторый индивид $g(x) \in D$. Будем использовать запись $g' \stackrel{x}{=} g$, если приписывание g' отличается от приписывания g, разве что значением на переменной x.

Истинность формулы φ в модели $\boldsymbol{M} = \langle D, I\rangle$ при приписывании g определяется рекурсивно:

$$\begin{array}{lcl}
\boldsymbol{M} \models^g P(x_1,\ldots,x_n) & \leftrightharpoons & \langle g(x_1),\ldots,g(x_n)\rangle \in I(P);\\
\boldsymbol{M} \models^g x = y & \leftrightharpoons & \langle g(x), g(y)\rangle \in \mathit{diag}_D;\\
\boldsymbol{M} \not\models^g \bot; & & \\
\boldsymbol{M} \models^g \varphi' \to \varphi'' & \leftrightharpoons & \boldsymbol{M} \not\models^g \varphi' \text{ или } \boldsymbol{M} \models^g \varphi'';\\
\boldsymbol{M} \models^g \forall x\, \varphi' & \leftrightharpoons & \boldsymbol{M} \models^h \varphi' \text{ для любого } h, \text{ такого, что } h \stackrel{x}{=} g,
\end{array}$$

где P — n-местная предикатная буква, а $\mathit{diag}_D = \{\langle a, a\rangle : a \in D\}$ — *диагональ* множества D.

Если φ — формула, то иногда будем использовать запись $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, чтобы указать, что в φ нет свободных переменных, отличных от $x_1,\ldots,x_n$.

Для формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ и индивидов $a_1,\ldots,a_n$ модели $\boldsymbol{M}$ будем писать $\boldsymbol{M} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$, если $\boldsymbol{M} \models^g \varphi(x_1,\ldots,x_n)$ для некоторого приписывания g, такого, что $g(x_1) = a_1,\ldots,g(x_n) = a_n$. Такое обозначение не приводит к двусмысленности, поскольку истинность формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ в $\boldsymbol{M}$ не зависит от значений переменных, отличных от $x_1,\ldots,x_n$.

Для модели $\boldsymbol{M}$ и формулы φ положим

$$\boldsymbol{M} \models \varphi \;\;\leftrightharpoons\;\; \boldsymbol{M} \models^g \varphi \text{ для любого } g.$$

Если $\boldsymbol{M} \models \varphi$, говорим, что φ *истинна* в $\boldsymbol{M}$; в противном случае говорим, что φ *опровергается* в $\boldsymbol{M}$. Формулу φ называем *общезначимой*, или *тождественно истинной*, если φ истинна в каждой модели. Определим *классическую логику предикатов* **QCl** и *классическую логику предикатов с равенством* $\mathbf{QCl}^=$ как соответственно множеств всех общезначимых $\mathcal{QL}$-формул и множество всех общезначимых $\mathcal{QL}^=$-формул.

4. Транзитивность, композиция, транзитивное замыкание

Расширим язык логики предикатов новыми средствами.

Свойство транзитивности бинарного отношения R выражается формулой $\forall x \forall y \forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \;\to\; R(x,z))$; эта формула содержит три переменные, при этом известно, что условие транзитивности не выразить формулами с меньшим числом переменных. Введем новое правило построения формул: для формулы $\varphi(x,y)$, свободными переменными которой являются только x и y, считаем формулой выражение $t_{xy}[\varphi(x,y)]$; при этом считаем, что $t_{xy}[\varphi(x,y)]$ уже не содержит свободных переменных. В моделях истинность такой формулы определяется следующим образом: если $\boldsymbol{M} = \langle D, I\rangle$ — модель, а g — приписывание, то полагаем

$$\boldsymbol{M} \models^g t_{xy}[\varphi(x,y)] \;\;\leftrightharpoons\;\; \text{отношение } \{\langle a,b\rangle \in D^2 : \boldsymbol{M} \models \varphi(a,b)\} \text{ является транзитивным.}$$

Как видим, истинность формулы $t_{xy}[\varphi(x,y)]$ не зависит от g и означает, что $\varphi(x,y)$ определяет транзитивное отношение в $\boldsymbol{M}$. В дальнейшем будем считать порядок переменных x и y таким, как в определении, и вместо $t_{xy}[\varphi(x,y)]$ будем писать $t[\varphi]$.

Для формул $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, свободными переменными которых являются только x и y, будем считать формулой их *композицию* $[\varphi(x,y) \circ^{xy} \psi(x,y)]$; при этом считаем, что x и y являются свободными переменными полученной формулы, даже если они не были свободными переменными формул $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$. Если $\boldsymbol{M} = \langle D, I\rangle$ — модель, g — приписывание, то полагаем

$$\boldsymbol{M} \models^g [\varphi(x,y) \circ^{xy} \psi(x,y)] \;\;\leftrightharpoons\;\; \boldsymbol{M} \models^g \exists z\,(\varphi(x,z) \wedge \psi(z,y)), \text{ где } z \text{ — переменная, не входящая ни в } \varphi(x,y), \text{ ни в } \psi(x,y).$$

Отметим, что хотя в правой части определения истинности композиции возникает формула, содержащая новую переменную z, сама переменная z не входит в формулу $[\varphi(x,y) \circ^{xy} \psi(x,y)]$. Считая, что порядок переменных зафиксирован, ниже мы будем опускать переменные и пользоваться обозначением $x[\varphi \circ \psi]y$, полагая, что соответствующее точное определение композиции будет понятным из контекста.

Для формулы $\varphi(x,y)$, свободными переменными которой являются только x и y, считаем формулами выражения $tc^{xy}[\varphi(x,y)]$ и $rtc^{xy}[\varphi(x,y)]$; при этом x и y являются свободными переменными полученных формул, даже если они не были свободными переменными формулы $\varphi(x,y)$. Если $\boldsymbol{M} = \langle D, I\rangle$ — модель, g — приписывание, то полагаем

$$\begin{array}{lcl}
\boldsymbol{M} \models^g tc^{xy}[\varphi(x,y)] & \leftrightharpoons & \boldsymbol{M} \models^g \varphi(x,y) \text{ или для некоторого } k \in \mathbb{N}^+ \\
& & \text{существуют такие } a_1,\ldots,a_k \in D, \text{ что} \\
& & \boldsymbol{M} \models^g \varphi(x,a_1),\ \boldsymbol{M} \models^g \varphi(a_i,a_{i+1}) \text{ для каж-} \\
& & \text{дого } i \in \{1,\ldots,k-1\} \text{ и } \boldsymbol{M} \models^g \varphi(a_k,y); \\
\boldsymbol{M} \models^g rtc^{xy}[\varphi(x,y)] & \leftrightharpoons & \boldsymbol{M} \models^g x = y \text{ или } \boldsymbol{M} \models^g tc^{xy}[\varphi(x,y)].
\end{array}$$

Будем считать, что порядок переменных x и y зафиксирован, как в определении, и вместо $tc^{xy}[\varphi(x,y)]$ и $rtc^{xy}[\varphi(x,y)]$ будем писать соответственно $\varphi^+(x,y)$ и $\varphi^*(x,y)$. Формулы $\varphi^+(x,y)$ и $\varphi^*(x,y)$ выражают отношения, соответствующие транзитивному и рефлексивно-транзитивному замыканию отношений, определяемых формулой $\varphi(x,y)$, поэтому tc^{xy} и rtc^{xy} будем называть соответственно *оператором транзитивного замыкания* и *оператором рефлексивно-транзитивного замыкания*.

Нетрудно понять, что при наличии в языке равенства оператор rtc^{xy} выражается через tc^{xy}, а оператор tc^{xy} выражается через rtc^{xy}. Кроме того, с помощью оператора tc^{xy} несложно выразить условие $t_{xy}[\varphi(x,y)]$: оно выражается формулой $\forall x \forall y\,(\varphi(x,y) \leftrightarrow \varphi^+(x,y))$. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся только рассмотрением языков, содержащих либо t_{xy}, либо tc^{xy}.

Введем в рассмотрение языки $\mathcal{QL}^\circ t^=$, $\mathcal{QL}tc$, $\mathcal{QL}^\circ tc^=$, которые состоят из формул, при построении которых используются соответствующие средства; пусть также $\mathcal{QL}wtc$, $\mathcal{QL}^\circ wtc^=$ — фрагменты языков $\mathcal{QL}tc$, $\mathcal{QL}^\circ tc^=$, в которых оператор транзитивного замыкания применяется только к атомарным формулам. Множества истинных в каждой модели формул этих языков обозначим $\mathbf{QCl^\circ t^=}$, $\mathbf{QCltc}$, $\mathbf{QCl^\circ tc^=}$, $\mathbf{QClwtc}$, $\mathbf{QCl^\circ wtc^=}$ соответственно.

5. Моделирование сетки $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Чтобы промоделировать проблему укладки домино, нам нужна сетка $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; чтобы описать ее в предметной области модели, введем некоторые сокращения.

Для этого зафиксируем бинарную предикатную R и с ее помощью определим формулы, описывающие нужные нам свойства и отношения. Будем считать, что в языке имеется равенство, а также необходимое нам число предметных переменных. Пусть

$$\begin{array}{rcl}
W(x) & = & R(x,x); \\
B(x) & = & \neg W(x);
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
x \approx y & = & W(x) \leftrightarrow W(y); \\
G(x) & = & \exists y\,(W(y) \wedge R(x,y)); \\
x \prec y & = & R(x,y) \wedge x \neq y \wedge \forall z\,(R(x,z) \wedge R(z,y) \to z = x \vee z = y); \\
x \prec_H y & = & x \prec y \wedge x \approx y; \\
x \prec_V y & = & x \prec y \wedge x \not\approx y,
\end{array}
$$

где $x \neq y$ и $x \not\approx y$ являются сокращениями для формул $\neg(x = y)$ и $\neg(x \approx y)$ соответственно. Подразумеваемый смысл введенных сокращений следующий:

$$
\begin{array}{rcl}
W(x) & — & x \text{ белый;} \\
B(x) & — & x \text{ черный;} \\
x \approx y & — & x \text{ и } y \text{ одного цвета (белого или черного);} \\
G(x) & — & x \text{ является элементом сетки;} \\
x \prec y & — & y \text{ следует за } x; \\
x \prec_H y & — & y \text{ находится непосредственно справа от } x; \\
x \prec_V y & — & y \text{ находится непосредственно над } x.
\end{array}
$$

Обратим внимание, что для того, чтобы определить $x \prec z$, надо в определении для $x \prec y$ одновременно заменить y на z и z на y: это позволит не вводить новую переменную, а использовать только x, y и z. Аналогично надо поступить и с определением $x \prec_H z$, $x \prec_V z$, $y \prec z$ и т.д.

Теперь можно описать сетку $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Отметим, что пока предполагается, что все элементы являются элементами сетки, т.е. для них выполняется свойство G, поэтому в формулах ниже на G можно не обращать внимания; тем не менее позже нам понадобятся и другие элементы, и тогда соответствующее свойство станет актуальным. Итак, описание сетки следующее:

$$
\begin{array}{rcl}
G_1 & = & \forall x\,(G(x) \to \exists y\,(G(y) \wedge x \prec_H y)); \\
G_2 & = & \forall x\,(G(x) \to \exists y\,(G(y) \wedge x \prec_V y)); \\
G_3 & = & \forall x \forall y\,(G(x) \wedge G(y) \to \\
 & & \quad \to (\exists z\,(x \prec_H z \wedge z \prec_V y) \leftrightarrow \exists z\,(x \prec_V z \wedge z \prec_H y))); \\
G_4 & = & \exists x\,(B(x) \wedge G(x)); \\
\mathit{Grid} & = & G_1 \wedge G_2 \wedge G_3 \wedge G_4.
\end{array}
$$

Дадим пояснения к этим формулам. Формула G_4 утверждает наличие хотя бы одного элемента сетки. Формулы G_1 и G_2 говорят, что для каждого элемента сетки имеется соседний справа и соседний сверху, а G_3 выражает условие, что из x можно попасть в y по пути «вправо-вверх» тогда и только тогда, когда это можно сделать по пути «вверх-вправо».

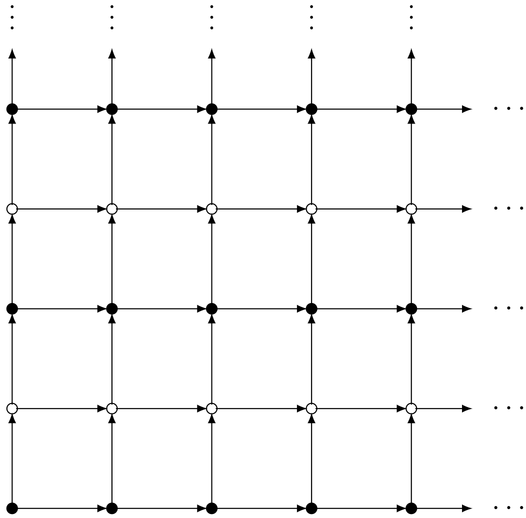

Рис. 1. Сетка для укладки домино

Поэтому нетрудно видеть, что если формула *Grid* истинна в некоторой модели $\boldsymbol{M} = \langle D, I\rangle$, то $\boldsymbol{M}$ содержит сетку $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, элементы первой строки которой состоят из «черных» предметов, второй — из «белых», третьей — из «черных» и т.д.; см. рис. 1.

6. Моделирование укладки домино

Опишем условие размещения плитки домино в сетке. Будем считать, что элемент сетки соответствует месту, куда помещается левый нижний угол плитки домино, см. рис. 2. Будем использовать унарные буквы $P_0, \ldots, P_n$, подразумевая, что если x — элемент сетки, то $P_k(x)$ означает, что на месте x лежит плитка домино, имеющая тип t_k.

Теперь мы можем описать свойства укладки. Положим

$$
\begin{array}{rcl}
T_0 & = & \forall x\,(G(x) \to \bigvee\limits_{i=0}^{n} (P_i(x) \wedge \bigwedge\limits_{j\neq i} \neg P_j(x)));\\
T_1 & = & \forall x\,(G(x) \to \bigwedge\limits_{i=0}^{n} (P_i(x) \to \forall y\,(G(y) \wedge x \prec_H y \to \bigvee\limits_{◨ t_i = ◧ t_j} P_j(y))));\\
T_2 & = & \forall x\,(G(x) \to \bigwedge\limits_{i=0}^{n} (P_i(x) \to \forall y\,(G(y) \wedge x \prec_V y \to \bigvee\limits_{⬒ t_i = ⬓ t_j} P_j(y))));\\
\mathit{Tiling}(T) & = & T_0 \wedge T_1 \wedge T_2.
\end{array}
$$

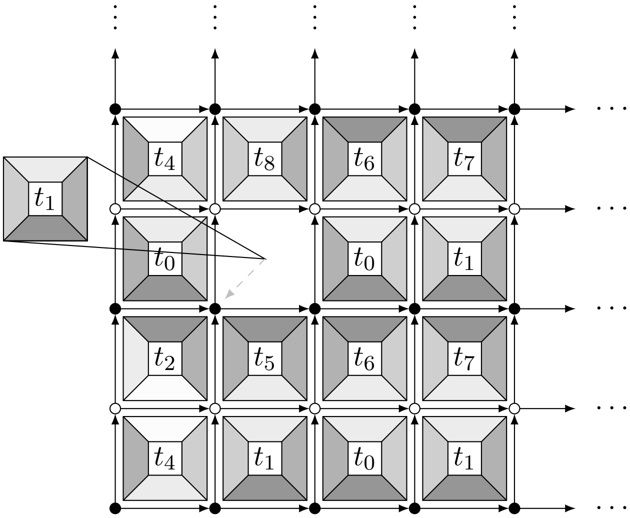

Рис. 2. Укладка плиток домино

Поясним эти формулы. Предположим, что уже имеется сетка $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тогда формула T_0 выражает условие, что в сетке на каждом месте лежит плитка ровно одного типа (что можно понимать как наличие в каждом элементе сетки ровно одной плитки), а формулы T_2 и T_3 утверждают, что соседние плитки соприкасаются гранями, имеющими одинаковые цвета, т.е. описывают в точности условия (T_1) и (T_2). Таким образом, формула $Tiling(T)$ фактически сообщает о требованиях к T-укладке.

Сформулируем и докажем утверждение, выражающее связь между построенными формулами и той задачей домино, по которой они построены.

Утверждение 1. Формула $Grid \wedge Tiling(T)$ выполнима тогда и только тогда, когда существует T-укладка плиток домино.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть формула $Grid \wedge Tiling(T)$ истинна в некоторой модели $\boldsymbol{M} = \langle D, I\rangle$; покажем, как определить T-укладку $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to T$. Для этого введем вспомогательную функцию $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to D$, задача которой — выбрать элементы из D, из которых можно сформировать сетку $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Согласно G_4, существует $a \in D$, такой, что $\boldsymbol{M} \models G(a) \wedge B(a)$; положим $g(0,0) = a$.

Пусть для всех $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ уже определены значения $g(i,j)$; определим для каждых $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ значение $g(m{+}1, j)$ и $g(i, m{+}1)$, а также определим значение $g(m+1, m+1)$.

Пусть b — элемент из D, такой, что $\boldsymbol{M} \models g(m, j) \prec_H b$ и $\boldsymbol{M} \models G(b)$; такой элемент существует согласно G_1. Положим $g(m+1, j) = b$.

Пусть b — элемент из D, такой, что $\boldsymbol{M} \models g(i, m) \prec_V b$ и $\boldsymbol{M} \models G(b)$; такой элемент существует согласно G_2. Положим $g(i, m+1) = b$.

Пусть b — элемент из D, такой, что $\boldsymbol{M} \models g(m, m+1) \prec_H b$, $\boldsymbol{M} \models g(m+1, m) \prec_V b$ и $\boldsymbol{M} \models G(b)$; такой элемент существует согласно G_1, G_2 и G_3. Положим $g(m+1, m+1) = b$.

Пусть $g(i, j) = b$ для некоторых $i, j \in \mathbb{N}$. Согласно T_0, существует единственное $k \in \{0, \ldots, n\}$, такое, что $\boldsymbol{M} \models P_k(b)$. Положим $f(i, j) = t_k$. Тогда из истинности формул T_1 и T_2 в $\boldsymbol{M}$ следует, что функция $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to T$ является T-укладкой плиток домино.

($\Leftarrow$) Пусть имеется T-укладка $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to T$. Чтобы получить модель, в которой истинна формула $\mathit{Grid} \wedge \mathit{Tiling}(T)$, достаточно взять сетку $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, см. рис. 1, где стрелки задают отношение, соответствующее букве R, и для каждой пары $a = (i, j)$ этой сетки сделать $P_k(a)$ истинным в точности тогда, когда $f(i, j) = t_k$. ■

7. О предстоящей элиминации унарных букв и переменных

Мы получили моделирование проблемы домино, но использовали более богатые средства, чем те, о которых говорилось в начале работы. Во-первых, наши формулы содержат три переменные, а не две. Во-вторых, они содержат также унарные буквы, причем для возможности моделирования каждой задачи домино указанным способом требуется, чтобы язык содержал бесконечно много унарных букв.

Сделаем следующее. Сначала элиминируем унарные буквы. Возникающая при этом конструкция потребует наличия в языке бесконечного множества предметных переменных. Затем покажем, как для этого использовать лишь три переменные. Наконец, мы элиминируем одну переменную, задействуя оператор композиции и оператор проверки транзитивности.

8. Элиминация унарных букв

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим формулу $\tau_k(x)$, которую затем будем использовать вместо формулы $P_k(x)$. Пусть

$$
\begin{array}{rcl}
\varepsilon(x) & = & \neg\exists x_{-1}\, R(x, x_{-1}); \\
\tau_0(x) & = & \exists x_0\, (\neg G(x_0) \wedge x \prec x_0 \wedge \varepsilon(x_0)); \\
\tau_{k+1}(x) & = & \exists x_{k+1}\, (\neg G(x_{k+1}) \wedge x \prec x_{k+1} \wedge \tau_k(x_{k+1})).
\end{array}
$$

Так, например,

$$\begin{aligned}\tau_3(x) \quad = \quad & \exists x_3\,(\neg G(x_3) \wedge x \prec x_3 \wedge \\ & \wedge \exists x_2\,(\neg G(x_2) \wedge x_3 \prec x_2 \wedge \\ & \wedge \exists x_1\,(\neg G(x_1) \wedge x_2 \prec x_1 \wedge \\ & \wedge \exists x_0\,(\neg G(x_0) \wedge x_1 \prec x_0 \wedge \neg \exists x_{-1}\, R(x_0, x_{-1}))))).\end{aligned}$$

Элемент x, для которого выполняется $\varepsilon(x)$, будем называть R-*максимальным*. Тогда формула $\tau_k(x)$ выражает следующее: существуют такие элементы $x_k, \ldots, x_0$ вне сетки, что $x \prec x_k \prec \ldots \prec x_0$, при этом x_0 является R-максимальным. Тогда, подставляя $\tau_k(x)$ вместо $P_k(x)$, можно промоделировать проблему домино без использования унарных предикатных букв.

Прежде чем перейти к точным формулировкам, заменим каждую формулу $\tau_k(x)$ на эквивалентную ей формулу, содержащую лишь три предметные переменные, и вместо $\tau_k(x)$ будем использовать ее. Пусть $\mathit{tile}_k(x)$ — формула, получающаяся из $\tau_k(x)$ заменой переменных с четными индексами на x, а с нечетными — на y; пусть $\mathit{tile}_k(y)$ — формула, получающаяся из $\tau_k(y)$ заменой переменных с четными индексами на y, а с нечетными — на x. Так, например,

$$\begin{aligned}\mathit{tile}_3(x) \quad = \quad & \exists y\,(\neg G(y) \wedge x \prec y \wedge \\ & \wedge \exists x\,(\neg G(x) \wedge y \prec x \wedge \\ & \wedge \exists y\,(\neg G(y) \wedge x \prec y \wedge \\ & \wedge \exists x\,(\neg G(x) \wedge y \prec x \wedge \neg \exists y\, R(x, y))))).\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что формула $\mathit{tile}_k(x)$, во-первых, эквивалентна формуле $\tau_k(x)$, а во-вторых, содержит лишь три переменные (поскольку она содержит подформулы $x \prec y$ и $y \prec x$, куда входит третья переменная z).

Пусть $\mathit{Tiling}_1(T)$ — формула, получающаяся из $\mathit{Tiling}(T)$ заменой[10] каждого вхождения формулы $P_k(x)$ на $\mathit{tile}_k(x)$ и каждого вхождения формулы $P_k(y)$ на $\mathit{tile}_k(y)$.

Справедлив факт, аналогичный утверждению 1.

Утверждение 2. Формула $\mathit{Grid} \wedge \mathit{Tiling}_1(T)$ выполнима тогда и только тогда, когда существует T-укладка плиток домино.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Достаточно повторить часть $(\Rightarrow)$ доказательства утверждения 1, заменяя в нем $P_k(x)$ на $\mathit{tile}_k(x)$.

$(\Leftarrow)$ Пусть имеется T-укладка $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to T$. Чтобы получить модель, в которой истинна формула $\mathit{Grid} \wedge \mathit{Tiling}_1(T)$, достаточно взять сетку $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, см. рис. 1, и для каждой пары (i, j) сетки сделать R-достижимым из (i, j)

[10] Фактически подстановкой; такая подстановка формул называется *непрямой*.

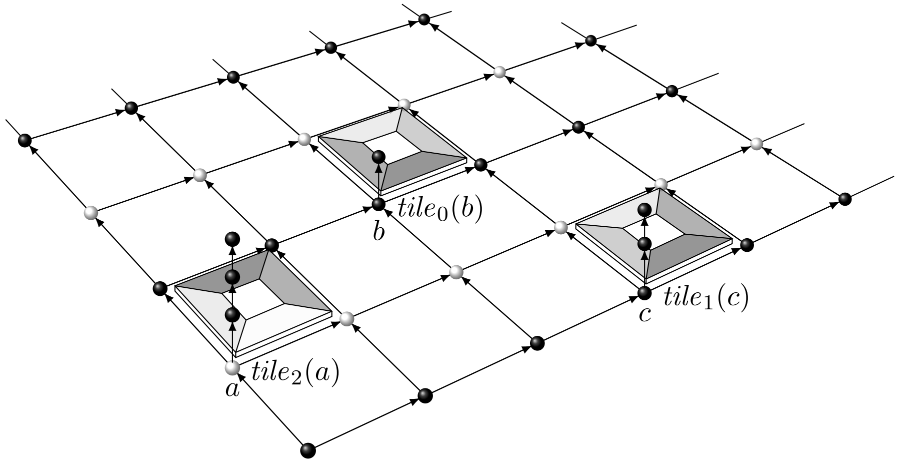

Рис. 3. Моделирование плиток домино

первый элемент R-последовательности «черных» элементов, число которых равно $k+1$, где k определяется условием $f(i,j) = t_k$, см. рис. 3. Тогда для элемента $a = (i,j)$ условие $tile_k(a)$ будет истинным в точности тогда, когда $f(i,j) = t_k$. Кроме того, условие $G(a)$ будет истинным в точности тогда, когда a является элементом сетки. ■

9. Теорема Чёрча

Описанная выше техника позволяет получить следующее известное [Tarski, Givant, 1987, пункт (ii) раздела 4.8] уточнение теоремы Чёрча [Church, 1936] о неразрешимости классической логики предикатов.

Теорема 1. *Логика* **QCl** *является* Σ^0_1*-полной в языке, содержащем бинарную предикатную букву и три предметные переменные.*

Доказательство. Согласно утверждению 2, формула $Grid \wedge Tiling(T)$ выполнима тогда и только тогда, когда существует T-укладка домино. Формула $Grid \wedge Tiling(T)$ не содержит предикатных букв, отличных от R, и предметных переменных, отличных от x, y и z. Поэтому как проблема выполнимости, так и проблема общезначимости формул соответствующего фрагмента неразрешимы; Σ^0_1-полнота мгновенно следует из Π^0_1-полноты проблемы домино, которую мы рассматриваем, и из принадлежности логики **QCl** классу Σ^0_1. ■

Заметим, что в доказательстве утверждения 2 можно обойтись использованием только *позитивных* формул, т.е. не содержащих вхождений константы $\bot$. Для этого достаточно заменить вхождения константы $\bot$ вхождениями формулы $\forall x \forall y\, R(x,y)$, а также заменить в утверждениях требование выполнимости формулы $\mathit{Grid} \wedge \mathit{Tiling}(T)$ на требование опровержимости формулы $\mathit{Grid}^{pos} \wedge \mathit{Tiling}_T^{pos} \to \forall x \forall y\, R(x,y)$, где Grid^{pos} и Tiling_T^{pos} получаются из Grid и $\mathit{Tiling}(T)$ соответственно заменой каждого вхождения константы $\bot$ вхождением формулы $\forall x \forall y\, R(x,y)$. Как следствие, получаем следующее уточнение теоремы 1.

Теорема 2. *Позитивный фрагмент логики* **QCl** *является* Σ_1^0*-полным в языке, содержащем бинарную предикатную букву и три предметные переменные.*

Итак, мы получили очень короткое доказательство неразрешимости классической логики предикатов в языке с одной бинарной буквой и тремя предметными переменными. Отметим, что усилить этот результат, пытаясь уменьшить валентность букв или число переменных, невозможно: как логика унарных предикатов (и даже с равенством), так и логика предикатов с двумя предметными переменными (и любым набором предикатных букв любой валентности) являются разрешимыми. Тем не менее ниже мы покажем, что при добавлении композиции и равенства число предметных переменных можно уменьшить до двух.

10. Добавление транзитивного замыкания

Покажем, что добавление транзитивного замыкания к языку классической логики предикатов с одной бинарной предикатной буквой и тремя предметными переменными приводит к Σ_1^1-трудной проблеме выполнимости, причем даже в слабом случае, когда оператор транзитивного замыкания применяется только к атомарным формулам.

Изменим определения для G, $\prec$, $\prec_H$ и $\prec_V$:

$$
\begin{array}{rcl}
G'(x) & = & \exists y\, (W(y) \wedge R^+(x,y)); \\
x \prec' \; y & = & R(x,y) \wedge x \not\simeq y \wedge \forall z\, (R^+(x,z) \wedge R^+(z,y) \to z \simeq x \vee z \simeq y); \\
x \prec'_H y & = & x \prec' y \wedge x \approx y; \\
x \prec'_V y & = & x \prec' y \wedge x \not\approx y.
\end{array}
$$

Введем следующее сокращение:

$$
L(x) \;\; = \;\; \neg \exists y\, y \prec'_H x.
$$

Если для x выполнено $L(x)$, то x не имеет непосредственного предшественника слева.

Заменим в *Grid* формулы G_1–G_4 на G'_1–G'_4, а также добавим G'_0 и G'_5:

$$\begin{array}{rcl}
G'_0 &=& \forall x \forall y\, (R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \to x \prec' y);\\
G'_1 &=& \forall x\, (G'(x) \to \exists y\, (G'(y) \wedge x \prec'_H y));\\
G'_2 &=& \forall x\, (G'(x) \to \exists y\, (G'(y) \wedge x \prec'_V y));\\
G'_3 &=& \forall x \forall y\, (G'(x) \wedge G'(y) \to\\
&& \to (\exists z\, (x \prec'_H z \wedge z \prec'_V y) \leftrightarrow \exists z\, (x \prec'_V z \wedge z \prec'_H y)));\\
G'_4 &=& \exists x\, (B(x) \wedge G'(x) \wedge L(x));\\
G'_5 &=& \forall x\, (G'(x) \wedge L(x) \to \forall y\, (G'(y) \wedge x \prec'_V y \to L(y));\\
\mathit{Grid}' &=& G'_0 \wedge G'_1 \wedge G'_2 \wedge G'_3 \wedge G'_4 \wedge G'_5.
\end{array}$$

Переопределим формулы вида $\mathit{tile}_k(x)$, а также формулы T_0, T_1, T_2, заменив в них $\prec$ на $\prec'$ и G на G'; получившиеся в результате такой замены формулы обозначим соответственно $\mathit{tile}'_k(x)$ и T'_0, T'_1, T'_2. Положим

$$\begin{array}{rcl}
T'_3 &=& \forall x\, (G'(x) \wedge L(x) \to\\
&& \to \exists y\, (x \not\approx y \wedge R^+(x,y) \wedge G'(y) \wedge L(y) \wedge \mathit{tile}'_0(y)));\\
\mathit{Tiling}'_T &=& T'_0 \wedge T'_1 \wedge T'_2 \wedge T'_3.
\end{array}$$

При условии истинности формулы Grid' формула T'_3 требует, чтобы в крайней левой колонке было бесконечно много плиток домино типа t_0, поэтому получаем следующее утверждение.

Утверждение 3. Формула $\mathit{Grid}' \wedge \mathit{Tiling}'_T$ выполнима тогда и только тогда, когда существует T-укладка плиток домино, удовлетворяющая условиям (T_1)–(T_3).

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 2, но в части $(\Rightarrow)$ нужно воспользоваться новыми конъюнктивными членами, которые обеспечат выполнение дополнительного условия (T_3). ∎

Теорема 3. *Логика* **QClwtc** *является* Π^1_1*-трудной в языке, содержащем бинарную предикатную букву и три предметные переменные.*

Доказательство. Следует из утверждения 3 и Σ^1_1-полноты проблемы укладки домино с условиями (T_1)–(T_3). ∎

Как следствие, логики, содержащие **QClwtc**, тоже имеют Π^1_1-трудный фрагмент с бинарной предикатной буквой и тремя предметными переменными.

Из теоремы 3 получаем, в частности, что классическая логика предикатов, обогащенная оператором транзитивного замыкания, не является арифметичной (в частности, рекурсивно перечислимой) уже в языке с одной бинарной буквой и тремя предметными переменными. Ниже мы покажем, что при добавлении композиции и равенства число предметных переменных можно уменьшить до двух.

11. Добавление композиции

Заменим G_0' условием, утверждающим, что R определяет антисимметричное отношение, при котором рефлексивными могут быть только «последние» элементы:

$$\begin{array}{rcl} G_0'' & = & \forall x \forall y\, (R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y) \wedge \\ & & \wedge\, \forall x\, (W(x) \to \forall y\, (R(x,y) \to x = y)). \end{array}$$

Пусть, как и раньше, $T = \{t_0, \ldots, t_n\}$. Мы будем использовать формулы вида $tile_k(x)$, кодирующие типы домино, а также новые формулы, похожие на формулы вида $tile_k(x)$:

$$\begin{array}{rcl} num_0^H(x) & = & \exists y\, (B(y) \wedge R(x,y) \wedge \exists x\, (W(x) \wedge R(y,x))); \\ num_1^H(x) & = & \exists y\, (R(x,y) \wedge num_0^H(y)); \\ num_0^V(x) & = & \exists y\, (R(x,y) \wedge num_1^H(y)); \\ num_1^V(x) & = & \exists y\, (R(x,y) \wedge num_0^V(y)), \end{array}$$

при этом считаем, что формулы $num_0^H(y)$, $num_1^H(y)$, $num_0^V(y)$, $num_1^V(y)$ получаются из $num_0^H(x)$, $num_1^H(x)$, $num_0^V(x)$, $num_1^V(x)$ одновременной заменой вхождений x на y и вхождений y на x. Главное отличие этих формул от формул вида $tile_k(x)$ состоит в том, что в конце R^+-цепи требуется наличие R-рефлексивного (т.е. «белого») элемента.

Далее, чтобы получить описание сетки $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ для укладки домино, будем придерживаться идей, изложенных в [Grädel et al., 1999]; основные отличия состоят в том, что, во-первых, вместо дюжины бинарных предикатных букв и бесконечного множества унарных используется лишь одна бинарная буква, а во-вторых, что мы задействуем композицию (которая частично восполнит «потери» в бинарных буквах).

Положим

$$\begin{array}{rcl} g_{00}(x) & = & num_0^H(x) \wedge num_0^V(x) \wedge \neg num_1^H(x) \wedge \neg num_1^V(x); \\ g_{01}(x) & = & num_0^H(x) \wedge num_1^V(x) \wedge \neg num_1^H(x) \wedge \neg num_0^V(x); \\ g_{10}(x) & = & num_1^H(x) \wedge num_0^V(x) \wedge \neg num_0^H(x) \wedge \neg num_1^V(x); \\ g_{11}(x) & = & num_1^H(x) \wedge num_1^V(x) \wedge \neg num_0^H(x) \wedge \neg num_0^V(x); \\ G''(x) & = & g_{00}(x) \vee g_{01}(x) \vee g_{10}(x) \vee g_{11}(x). \end{array}$$

Пусть также

$$\begin{array}{rcl}
x \lhd_0^H y & = & R(x,y) \wedge ((g_{00}(x) \wedge g_{10}(y)) \vee (g_{01}(x) \wedge g_{11}(y)));\\
x \lhd_1^H y & = & R(x,y) \wedge ((g_{10}(x) \wedge g_{00}(y)) \vee (g_{11}(x) \wedge g_{10}(y)));\\
x \lhd_0^V y & = & R(x,y) \wedge ((g_{00}(x) \wedge g_{01}(y)) \vee (g_{10}(x) \wedge g_{11}(y)));\\
x \lhd_1^V y & = & R(x,y) \wedge ((g_{01}(x) \wedge g_{00}(y)) \vee (g_{11}(x) \wedge g_{10}(y)));\\
x \lhd_H y & = & x \lhd_0^H y \vee x \lhd_1^H y;\\
x \lhd_V y & = & x \lhd_0^V y \vee x \lhd_1^V y.
\end{array}$$

Пусть $\varphi(x,y)$ — формула, свободными переменными которой являются только x и y. Будем считать, что $\varphi(y,x)$ получается из $\varphi(x,y)$ одновременной заменой вхождений x на y и наоборот. Положим

$$f_{xy}[\varphi(x,y)] \quad = \quad \forall x \,\neg(\exists y\, \varphi(x,y) \wedge \exists y\, \varphi(y,x)) \wedge t[\varphi(x,y) \vee \varphi(y,x) \vee x = y].$$

Тогда можно доказать (см. [Grädel et al., 1999]), что $f_{xy}[\varphi(x,y)]$ утверждает, что $\varphi(x,y)$ задает инъективное функциональное отношение, для которого область определения и область прибытия не пересекаются. Ниже мы будем использовать упрощенные обозначения, опуская в записи $f_{xy}[\varphi(x,y)]$ переменные.

Переопределим L:

$$L''(x) \quad = \quad \neg\exists y\, y \lhd_H x.$$

Теперь все готово для того, чтобы описать сетку $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; сделаем это (см. рис. 4):

$$\begin{array}{rcl}
G_1'' & = & \forall x\,(G''(x) \to \exists y\,(G''(y) \wedge x \lhd_H y));\\
G_2'' & = & \forall x\,(G''(x) \to \exists y\,(G''(y) \wedge x \lhd_V y));\\
G_3'' & = & \forall x\,(G''(x) \to \exists y\,(G''(y) \wedge x[\lhd_H \circ \lhd_V]y \wedge x[\lhd_V \circ \lhd_H]y));\\
G_4'' & = & \exists x\,(g_{00}(x) \wedge L''(x));\\
G_5'' & = & \forall x\,(G''(x) \wedge L(x) \to \forall y\,(G''(y) \wedge x \lhd_V y \to L(y));\\
G_6'' & = & f[\lhd_0^H] \wedge f[\lhd_1^H] \wedge f[\lhd_0^V] \wedge f[\lhd_1^V];\\
\mathit{Grid}'' & = & G_0'' \wedge G_1'' \wedge G_2'' \wedge G_3'' \wedge G_4'' \wedge G_5'' \wedge G_6''.
\end{array}$$

Поясним только формулу G_6'', поскольку она описывает новое условие. Эта формула требует, чтобы отношения, определяемые формулами $x \lhd_0^H y$, $x \lhd_1^H y$, $x \lhd_0^V y$ и $x \lhd_1^V y$, были функциональными, причем инъективными и не имеющими элементов в пересечении области определения и области прибытия каждого из них. В результате получаем четыре типа «дуг», соединяющих элементы сетки: два вида горизонтальных и два вида вертикальных.

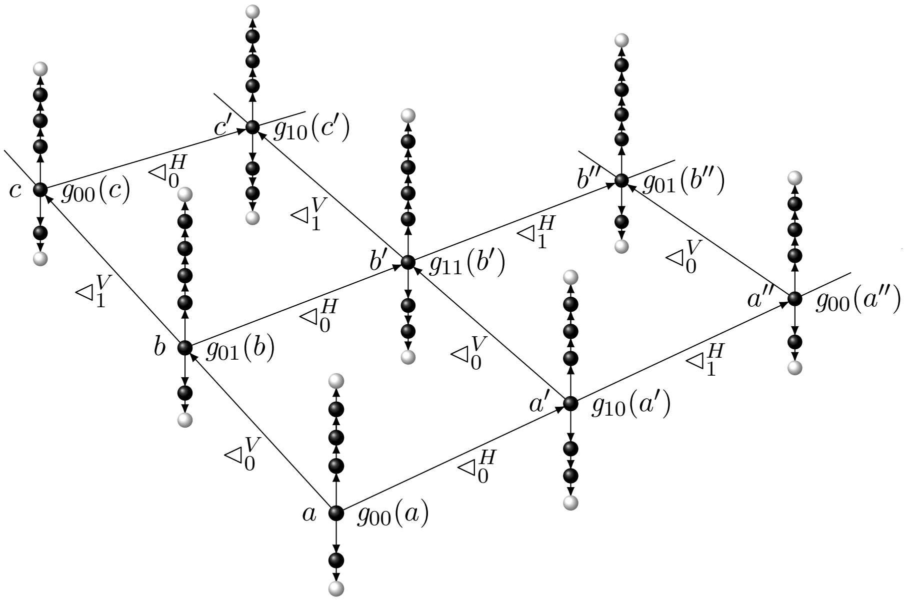

Рис. 4. Моделирование сетки $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Причем «дуги» этих типов чередуются, чтобы могли быть истинны формулы G_1'' и G_2''.

Осталось переопределить формулы, описывающие укладку плиток домино. Пусть $\mathit{tile}_k''(x)$ — формула, получающаяся из $\mathit{tile}_k(x)$ заменой G на G'' и $\prec$ на R в определении $\mathit{tile}_k(x)$. Заметим, что $\mathit{tile}_k''(x)$ содержит лишь две переменные. Положим

$$
\begin{aligned}
T_0'' &= \forall x\, (G''(x) \to \bigvee_{i=0}^{n} (\mathit{tile}_i''(x) \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg \mathit{tile}_j''(x)));\\
T_1'' &= \forall x\, (G''(x) \to \bigwedge_{i=0}^{n} (\mathit{tile}_i''(x) \to \forall y\, (G''(y) \wedge x \lhd_H y \to \bigvee_{\text{◨} t_i = \text{◧} t_j} \mathit{tile}_j''(y))));\\
T_2'' &= \forall x\, (G''(x) \to \bigwedge_{i=0}^{n} (\mathit{tile}_i''(x) \to \forall y\, (G''(y) \wedge x \lhd_V y \to \bigvee_{\text{⬒} t_i = \text{⬓} t_j} \mathit{tile}_j''(y))));\\
T_3'' &= \forall x\, (G''(x) \wedge L''(x) \to \exists y\, (R^+(x, y) \wedge G''(y) \wedge L''(y) \wedge \mathit{tile}_0''(y))).
\end{aligned}
$$

Пусть также

$$
\begin{aligned}
\mathit{Tiling}_T'' &= T_0'' \wedge T_1'' \wedge T_2'';\\
\mathit{Tiling}_T''' &= T_0'' \wedge T_1'' \wedge T_2'' \wedge T_3''.
\end{aligned}
$$

Заметим, что формулы $Tiling''_T$ и $Tiling'''_T$ содержат только две предметные переменные, при этом формула $Tiling''_T$ не содержит транзитивного замыкания.

Утверждение 4. Формула $Grid'' \wedge Tiling''_T$ выполнима тогда и только тогда, когда существует T-укладка плиток домино.

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 2. ■

Теорема 4. *Логика* $\mathbf{QCl^\circ t^=}$ *является* Σ^0_1*-трудной в языке, содержащем бинарную предикатную букву и две предметные переменные.*

Доказательство. Следует из утверждения 4 и Π^0_1-полноты проблемы укладки домино. ■

Как следствие, фрагменты с бинарной предикатной буквой и двумя переменными логик, содержащих $\mathbf{QCl^\circ t^=}$, тоже Σ^0_1-трудны.

Утверждение 5. Формула $Grid'' \wedge Tiling'''_T$ выполнима тогда и только тогда, когда существует T-укладка плиток домино, удовлетворяющая условиям (T_1)–(T_3).

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 2; см. также указание в доказательстве утверждения 3. ■

Теорема 5. *Логика* $\mathbf{QCl^\circ wtc^=}$ *является* Π^1_1*-трудной в языке, содержащем бинарную предикатную букву и две предметные переменные.*

Доказательство. Следует из утверждения 5 и Σ^1_1-полноты проблемы укладки домино с условиями (T_1)–(T_3). ■

Как следствие, фрагменты с бинарной предикатной буквой и двумя переменными логик, содержащих $\mathbf{QCl^\circ wtc^=}$, тоже Π^1_1-трудны; в частности, это относится к $\mathbf{QCl^\circ tc^=}$.

Теоремы 4 и 5 дают некоторое дополнение к общей картине. Так, логики $\mathbf{QCl^\circ wtc^=}$ и $\mathbf{QCl^\circ tc^=}$ неарифметичны (а значит, не имеют не только конечной, но даже рекурсивной аксиоматики) уже при одной бинарной предикатной букве и двух предметных переменных в языке.

12. Заключение

В заключение к представленным результатам и их обоснованиям сделаем несколько замечаний, связанных с возможностью применения описанной техники в других системах и их фрагментах.

Прежде всего отметим, что во всех описанных выше случаях можно обойтись позитивными формулами: как и в доказательстве теоремы Чёрча, можно заменить константу $\bot$ во всех используемых формулах формулой $\forall x \forall y\, R(x, y)$ и рассмотреть соответствующую проблему опровержимости вместо проблемы выполнимости (см. раздел 8).

Следующее замечание касается теоремы Трахтенброта [Трахтенброт, 1950; Трахтенброт, 1953] о неперечислимости теории (логики) конечных моделей. На конечные модели описанная техника переносится несложно. Достаточно учесть, что неразрешимость проблемы домино следует, например, из проблемы неостановки машин Тьюринга на пустой ленте, и каждый тип плитки домино при соответствующем моделировании соответствует либо символу в ячейке ленты, либо паре «символ и состояние», когда ячейка с символом обозревается кареткой в соответствующем состоянии. Тогда становится возможным описать условие, состоящее в том, что при имеющемся (конечном) множестве элементов возможна укладка конечной «прямоугольной» области, где не встречается плитка домино, соответствующая ситуации, когда символ в ячейке обозревается кареткой в заключительном состоянии. При этом дополнительно требуем, чтобы первый ряд плиток соответствовал начальной конфигурации машины Тьюринга с пустой лентой. Детали оставляем читателю и ограничимся лишь уточненной формулировкой теоремы Трахтенброта.

Пусть $\mathbf{QCl}_{\mathit{fin}}$ — логика конечных моделей, т.е. множество $\mathcal{QL}$-формул, истинных в каждой конечной модели.

Теорема 6. *Логика $\mathbf{QCl}_{\mathit{fin}}$ является Π^0_1-полной в языке, содержащем бинарную предикатную букву и три предметные переменные.*

Теорема останется справедливой, если рассматривать лишь позитивные формулы: для этого достаточно проделать манипуляции, направленные на элиминацию константы $\bot$, о которых сказано выше. Конечно же, результаты, аналогичные теореме 6, включая замечание о позитивных формулах, справедливы и для других рассмотренных здесь языков.

Еще одно замечание касается первопорядковых теорий бинарного отношения. В построениях мы требовали, чтобы отношение, соответствующее бинарной букве R, обладало определенными свойствами. Можно получить моделирование проблем домино, когда это отношение рефлексивно или иррефлексивно, симметрично или антисимметрично, транзитивно или интранзитивно, можно потребовать связность, серийность, а также другие свойства, например изучающиеся в теории графов: k-раскрашиваемость (для любого $k \geqslant 2$), двудольность, планарность и др. В итоге мы получим усиления представленных здесь теорем, распространив их на теории бинарного отношения с соответствующими свойствами. Некоторые из этих свойств уже допускаются предложенными формулами (т.е. не противоречат им), а для получения остальных достаточно немного изменить как формулы, так и модели, в которых проверяется истинность формул, при этом можно учитывать, что предложенные формулы и возможные их модификации определяют такие модели неоднозначно, в частности одни и те же формулы могут быть использованы в разных классах моделей.

13. Благодарности

Автор благодарит Дмитрия Шкатова и Станислава Сперанского за обсуждение вопросов, связанных с темой работы.

Литература

Агаджанян, Рыбаков, 2022 – *Агаджанян И.А., Рыбаков М.Н.* Сложность константного фрагмента слабой логики Гжегорчика. 2022. URL: arXiv: 2211.14571 (дата обращения: 11.03.2023).

Александров и др., 2021 – *Александров К.И., Рыбаков М.Н., Шкатов Д.П.* Сложность фрагментов произведений с логикой T в языке с одной переменной. 2021. URL: arXiv: 2112.03833 (дата обращения: 10.04.2023).

Булос, Джеффри, 1994 – *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994. (Перевод книги: *Boolos G.S., Jeffrey R.C.* Computability and Logic. Cambridge University Press, third edition, 1989.)

Котикова, Рыбаков, 2016 – *Котикова Е.А., Рыбаков М.Н.* Моделирование арифметики в языке первого порядка, обогащенном темпоральными кванторами // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 4. С. 5–19.

Маслов и др., 1965 – *Маслов С.Ю., Минц Г.Е., Оревков В.П.* Неразрешимость в конструктивном исчислении предикатов некоторых классов формул, содержащих только одноместные предикатные переменные // Доклады АН СССР. 1965. Т. 163. № 2. С. 295–297.

Рыбаков, 2001 – *Рыбаков М.Н.* Перечислимость модальных предикатных логик и условия обрыва возрастающих цепей // Логические исследования. 2001. Вып. 8. С. 155–167.

Рыбаков, 2002 – *Рыбаков М.Н.* Об алгоритмической выразительности модального языка с одной лишь одноместной предикатной буквой // Логические исследования. 2002. Вып. 9. С. 179–201.

Рыбаков, 2007 – *Рыбаков М.Н.* Сложность константного фрагмента пропозициональной динамической логики // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2007. № 5. С. 5–17.

Рыбаков, 2014 – *Рыбаков М.Н.* Неразрешимость логики квазиарных предикатов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 17–32.

Рыбаков, 2017 – *Рыбаков М.Н.* Неразрешимость модальных логик одноместного предиката // Логические исследования. 2017. Т. 23. № 2. С. 60–75.

Рыбаков, 2018a – *Рыбаков М.Н.* Аксиоматизируемость ненормальных и квазинормальных модальных предикатных логик первопорядково определимых классов шкал Крипке // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 81–94.

Рыбаков, 2018b – *Рыбаков М.Н.* Алгоритмические свойства линейно аппроксимируемых квазинормальных модальных логик // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 4. С. 87–97.

Рыбаков, 2021 – *Рыбаков М.Н.* Сложность проблемы равенства слов в многообразиях модальных алгебр // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 3. С. 5–17.

Рыбаков, 2022 – *Рыбаков М.Н.* Алгоритмическая сложность теорий бинарного предиката в языках с малым числом переменных // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. № 6. С. 61–65.

Рыбаков, 2023 – *Рыбаков М.Н.* Деревья как средство моделирования неразрешимых проблем // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 1. С. 5–23.

Рыбаков, Чагров, 2000 – *Рыбаков М.Н., Чагров А.В.* Стандартные переводы неклассических формул и относительная разрешимость логик // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН, XIV. М.: Институт философии РАН, 2000. С. 81–98.

Трахтенброт, 1950 – *Трахтенброт Б.А.* Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах // Доклады АН СССР. 1950. Т. 70. № 4. С. 569–572.

Трахтенброт, 1953 – *Трахтенброт Б.А.* О рекурсивной отделимости // Доклады АН СССР. 1953. Т. 88. № 6. С. 953–956.

Balbiani, Tinchev, 2014 – *Balbiani P., Tinchev T.* Definability and computability for PRSPDL // In Advances in Modal Logic. 2014. Vol. 10. P. 16–33.

Berger, 1966 – *Berger R.* The Undecidability of the Domino Problem // Volume 66 of Memoirs of AMS. AMS, 1966.

Bianchi, Montagna, 2015 – *Bianchi M., Montagna F.* Trakhtenbrot theorem and first-order axiomatic extensions of MTL // Studia Logica. 2015. Vol. 103. P. 1163–1181.

Boolos et al., 2007 – *Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C.* Computability and Logic. Cambridge University Press, fifth edition, 2007.

Börger et al., 1997 – *Börger E., Grädel E., Gurevich Y.* The Classical Decision Problem. Springer, 1997.

Chagrov, Rybakov, 2003 – *Chagrov A., Rybakov M.* How many variables does one need to prove PSPACE-hardness of modal logics? // P. Balbiani, N.-Y. Suzuki, F. Wolter, M. Zakharyaschev (eds.). Advances in Modal Logic. 2003. Vol. 4. P. 71–82.

Chagrov, Zakharyaschev, 1997 – *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.

Church, 1936 – *Church A.* A note on the “Entscheidungsproblem” // The Journal of Symbolic Logic. 1936. Vol. 1. P. 40–41.

Gabbay, Shehtman, 1993 – *Gabbay D., Shehtman V.* Undecidability of modal and intermediate first-order logics with two individual variables // The Journal of Symbolic Logic. 1993. Vol. 58. No. 3. P. 800–823.

Gabbay et al., 2009 – *Gabbay D., Shehtman V., Skvortsov D.* Quantification in Nonclassical Logic. Vol. 1. Series: Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol. 153. Elsevier, 2009. 640 p.

Gabelaia et al., 2005 – *Gabelaia D., Kurucz A., Wolter F., Zakharyaschev M.* Products of “transitive” modal logics // The Journal of Symbolic Logic. 2005. Vol. 70. No. 3. P. 993–1021.

Grädel, 1999 – *Grädel E.* On the restraining power of guards // Journal of Symbolic Logic. 1999. Vol. 64. No. 4. P. 1719–1742.

Grädel et al., 1997 – *Grädel E., Kolaitis P.G., Vardi M.Y.* On the decision problem for two-variable first-order logic // Bulletin of Symbolic Logic. 1997. Vol. 3. No. 1. P. 53–69.

Grädel et al., 1999 – *Grädel E., Otto M., Rosen E.* Undecidability results on two-variable logics // Archive for Mathematical Logic. 1999. Vol. 38. P. 313–354.

Hájek, 1998 – *Hájek P.* Trakhtenbrot theorem and fuzzy logic // G. Gottlob, E. Grandjean, and K. Seyr (eds.). International Workshop on Computer Science Logic. CSL98. Vol. 1584 of Lecture Notes in Computer Science. 1998. P. 1–8.

Halpern, 1995 – *Halpern J.Y.* The effect of bounding the number of primitive propositions and the depth of nesting on the complexity of modal logic // Artificial Intelligence. 1995. Vol. 75. No. 2. P. 361–372.

Harel, 1986 – *Harel D.* Effective transformations on infinite trees, with applications to high undecidability, dominoes, and fairness // Journal of the ACM. 1986. Vol. 33. P. 224–248.

Hirsch et al., 2002 – *Hirsch R., Hodkinson I., Kurucz A.* On modal logics between $\mathrm{K} \times \mathrm{K} \times \mathrm{K}$ and $\mathrm{S5} \times \mathrm{S5} \times \mathrm{S5}$ // The Journal of Symbolic Logic. 2002. Vol. 67. No. 1. P. 221–234.

Hodkinson et al., 2000 – *Hodkinson I., Wolter F., Zakharyaschev M.* Decidable fragments of first-order temporal logics // Annals of Pure and Applied Logic. 2000. Vol. 106. P. 85–134.

Hodkinson et al., 2001 – *Hodkinson I., Wolter F., Zakharyaschev M.* Monodic fragments of first-order temporal logics: 2000–2001 A.D. // R. Nieuwenhuis and A. Voronkov (eds.). Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning. LPAR 2001. Vol. 2250 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2001. P. 1–23.

Kontchakov et al., 2005 – *Kontchakov R., Kurucz A., Zakharyaschev M.* Undecidability of first-order intuitionistic and modal logics with two variables // Bulletin of Symbolic Logic. 2005. Vol. 11. No. 3. P. 428–438.

Kotikova, Rybakov, 2013 – *Kotikova E., Rybakov M.* First-order logics of branching time: on expressive power of temporal operators // Logical Investigations. 2013. Vol. 19. P. 68–99.

Kremer, 1997 – *Kremer P.* On the complexity of propositional quantification in intuitionistic logic // The Journal of Symbolic Logic. 1997. Vol. 62. No. 2. P. 529–544.

Kripke, 1962 – *Kripke S.* The undecidability of monadic modal quantification theory // Zeitschrift für Matematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1962. Vol. 8. P. 113–116.

Libkin, 2004 – *Libkin L.* Elements of Finite Model Theory. Springer, 2004.

Mortimer, 1975 – *Mortimer M.* On languages with two variables // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1975. P. 135–140.

Motohashi, 1990 – *Motohashi N.* A decision method for a set of first order classical formulas and its applications to decision problem for non-classical propositional logics // J. Math. Soc. Japan. 1990. Vol. 42. No. 1. P. 127–132.

Nerode, Shore, 1980 – *Nerode A., Shore R. A.* Second order logic and first order theories of reducibility ordering // J. Barwise, H.J. Keisler, and K. Kunen (eds.). The Kleene Symposium. 1980. P. 181–200.

Nies, 1996 – *Nies A.* Undecidable fragments of elementary theories // Algebra Universalis. 1996. Vol. 35. P. 8–33.

Papadimitriou, 1994 – *Papadimitriou C.H.* Computational Complexity. Addison-Wesley, 1994. 523 p.

Reynolds, Zakharyaschev, 2001 – *Reynolds M., Zakharyaschev M.* On the products of linear modal logics // Journal of Logic and Computation. 2011. Vol. 11. No. 6. P. 909–931.

Rogers, 1967 – *Rogers H.* Theory of Recursive Functions and Effective Computability. McGraw-Hill, 1967.

Rybakov, 2006 – *Rybakov M.* Complexity of intuitionistic and Visser's basic and formal logics in finitely many variables // G. Governatori, I.M. Hodkinson, and Y. Venema (eds.). Advances in Modal Logic 6. 2006. P. 393–411.

Rybakov, 2007 – *Rybakov M.* Complexity of finite-variable fragments of EXPTIME-complete logics // Journal of Applied Non-classical Logics. 2007. Vol. 17. No. 3. P. 359–382.

Rybakov, 2008 – *Rybakov M.* Complexity of intuitionistic propositional logic and its fragments // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2008. Vol. 18. No. 2–3. P. 267–292.

Rybakov, 2023 – *Rybakov M.* Predicate counterparts of modal logics of provability: High undecidability and Kripke incompleteness // To appear in Logic Journal of the IGPL (DOI: 10.1093/jigpal/jzad002).

Rybakov, Shkatov, 2019a – *Rybakov M., Shkatov D.* Trakhtenbrot theorem for classical languages with three individual variables // Proceedings of SAICSIT2019. ACM, 2019. Article No. 19.

Rybakov, Shkatov, 2019b – *Rybakov M., Shkatov D.* Undecidability of first-order modal and intuitionistic logics with two variables and one monadic predicate letter // Studia Logica. 2019. Vol. 107. No. 4. P. 695–717.

Rybakov, Shkatov, 2020 – *Rybakov M., Shkatov D.* Algorithmic properties of first-order modal logics of finite Kripke frames in restricted languages // Journal of Logic and Computation. 2020. Vol. 30. No. 7. P. 1305–1329.

Rybakov, Shkatov, 2021a – *Rybakov M., Shkatov D.* Algorithmic properties of first-order superintuitionistic logics of finite Kripke frames in restricted languages // Journal of Logic and Computation. 2021. Vol. 31. No. 2. P. 494–522.

Rybakov, Shkatov, 2021b – *Rybakov M., Shkatov D.* Complexity of finite-variable fragments of products with K // Journal of Logic and Computation. 2021. Vol. 31. No. 2. P. 426–443.

Rybakov, Shkatov, 2021c – *Rybakov M., Shkatov D.* Undecidability of QLTL and QCTL with two variables and one monadic predicate letter // Logical Investigations. 2021. Vol. 27. No. 2. P. 93–120.

Rybakov, Shkatov, 2021d – *Rybakov M., Shkatov D.* Algorithmic properties of first-order modal logics of linear Kripke frames in restricted languages // Journal of Logic and Computation. 2021. Vol. 31. No. 5. P. 1266–1288.

Rybakov, Shkatov, 2022a – *Rybakov M., Shkatov D.* Complexity of finite-variable fragments of products with non-transitive modal logics // Journal of Logic and Computation. 2022. Vol. 32. No. 5. P. 853–870.

Rybakov, Shkatov, 2022b – *Rybakov M., Shkatov D.* Undecidability of the logic of partial quasiary predicates // Logic Journal of the IGPL. 2022. Vol. 30. No. 3. P. 519–533.

Sipser, 2013 – *Sipser M.* Introduction to the Theory of Computation. Cengage Learning, 3rd edition, 2013. 504 p.

Spaan, 1993 – *Spaan E.* Complexity of Modal Logics. PhD Thesis. Amsterdam, 1993.

Speranski, 2016 – *Speranski S.* A note on hereditarily Π^0_1- and Σ^0_1-complete sets of sentences // Journal of Logic and Computation. 2016. Vol. 26. No. 5. P. 1729–1741.

Surányi, 1943 – *Surányi J.* Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktioskalküls // Mathematikai és Fizikai Lapok. 1943. Vol. 50. P. 51–74.

Tarski, Givant, 1987 – *Tarski A., Givant S.* A Formalization of Set Theory without Variables. American Mathematical Society, 1987. 318 p.

Turing, 1936 – *Turing A.M.* On computable numbers, with an application to the "Entscheidungsproblem" // Proceedings of the London Mathematical Society, 2 series, 1936. Vol. 42. P. 230–265.

Urquhart, 1984 – *Urquhart A.* The undecidability of entailment and relevant implication // Journal of Symbolic Logic. 1984. Vol. 49. No. 4. P. 1059–1073.

Urquhart, 2007 – *Urquhart A.* Four variables suffice // The Australasian Journal of Logic. 2007. Vol. 5. P. 66–73.

Wolter, Zakharyaschev, 2001 – *Wolter F., Zakharyaschev M.* Decidable fragments of first-order modal logics // The Journal of Symbolic Logic. 2001. Vol. 66. P. 1415–1438.

Mikhail Rybakov

Binary Predicate, Transitive Closure, Two-Three Variables: Shall We Play Dominoes?

Mikhail Rybakov
IITP of RAS,
19/1 Bolshoy Karetny per., Moscow, 127051, Russian Federation.
HSE University,
20 Miasnitskaya str., Moscow, 101000, Russian Federation.
E-mail: m_rybakov@mail.ru

Abstract: Tiling problems are a convenient tool for studying algorithmic complexity of problems arising in various branches of mathematics, including logic. The paper describes modelling of domino problems using the first-order language, as well as some additional language constructs, some of which are not elementary. This enables us both to obtain simple proofs of known facts about undecidability of satisfiability problems for various fragments of the first-order language and to obtain some new results. It is known that the satisfiability problem for the first-order formulas containing at most two individual variables is decidable; it is also known that the transitivity of a binary relation and the composition of binary relations are first-order definable with formulas of three individual variables. We show that addition of the operator of transitivity test for a binary relation (or a stronger tool, the transitive closure operator), together with the operator of composition, results in an undecidable satisfiability problem for formulas with two individual variables, a single binary predicate letter, and equality.

Keywords: first-order logic, transitive closure, undecidability

For citation: Rybakov M. "Binarniy predikat, trnzitivnoe zamykanie, dve-tri peremennye: sygraem v domino?" [Binary Predicate, Transitive Closure, Two-Three Variables: Shall We Play Dominoes?], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 1, pp. 114–146. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-114-146 (In Russian)

Acknowledgements. The work on this paper, carried out at Institute for Information Transmission Problems of Russian Academy of Sciences, has been supported by Russian Science Foundation, project 21-18-00195.

References

Agadzhanian, Rybakov, 2022 – Agadzhanian, I., Rybakov, M. "Complexity of the variable-free fragment of the weak Grzegorczyk logic", [arXiv: 2211.14571, accessed on 11.03.2023]. (In Russian)

Aleksandrov et al., 2021 – Aleksandrov, K., Rybakov, M., Shkatov, D. "Computational complexity of one-variable fragments of products with T", [arXiv: 2112.03833, accessed on 10.04.2023]. (In Russian)

Balbiani, Tinchev, 2014 – Balbiani, P., Tinchev, T. "Definability and computability for PRSPDL", *Advances in Modal Logic*, Vol. 10, 2014, pp. 16–33.

Berger, 1966 – *Berger, R.* The Undecidability of the Domino Problem, Vol. 66 of Memoirs of AMS. AMS, 1966.

Bianchi, Montagna, 2015 – Bianchi, M., Montagna, F. "Trakhtenbrot theorem and first-order axiomatic extensions of MTL", *Studia Logica*, Vol. 103, 2015, pp. 1163–1181.

Boolos, Jeffrey, 1994 – Boolos, G.S., Jeffrey, R.C. *Computability and Logic.* Cambridge University Press, third edition, 1989.

Boolos et al., 2007 – Boolos, G.S., Burgesss, J.P., Jeffrey, R.C. *Computability and Logic.* Cambridge University Press, fifth edition, 2007.

Börger et al., 1997 – Börger, E., Grädel, E., Gurevich, Y. *The Classical Decision Problem.* Springer, 1997.

Chagrov, Rybakov, 2000 – Rybakov, M.N., Chagrov, A.V. "Standartnye perevody neklassicheskih formul i otnositel'naya razreshimost' logik" [Standard translations of non-classical formulas and relative decidability of logics], *Trudy nauchno-issledovatel'skogo seminara Logicheskogo centra Instituta filosofii RAN*, XIV, Izdatel'stvo Instituta filosofii RAN, Moscow, 2000, pp. 81–98. (In Russian)

Chagrov, Rybakov, 2003 – Chagrov, A., Rybakov, M. "How many variables does one need to prove PSPACE-hardness of modal logics?", in: P. Balbiani, N.-Y. Suzuki, F. Wolter, M. Zakharyaschev (eds.), *Advances in Modal Logic*, Vol. 4, 2003, pp. 71–82.

Chagrov, Zakharyaschev, 1997 – Chagrov, A., Zakharyaschev, M. *Modal Logic.* Oxford University Press, 1997.

Church, 1936 – Church, A. "A note on the 'Entscheidungsproblem'", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 1, 1936, pp. 40–41.

Gabbay, Shehtman, 1993 – Gabbay, D., Shehtman, V. "Undecidability of modal and intermediate first-order logics with two individual variables", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 58, No. 3, 1993, pp. 800–823.

Gabbay et al., 2009 – Gabbay, D., Shehtman, V., Skvortsov, D. *Quantification in Nonclassical Logic, Volume 1*, Volume 153 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 2009.

Gabelaia et al., 2005 – Gabelaia, D., Kurucz, A., Wolter, F., Zakharyaschev, M. "Products of 'transitive' modal logics", *The Journal of Symbolic Logic*, 2005, Vol. 70, No. 3, pp. 993–1021.

Grädel, 1999 – Grädel, E. "On the restraining power of guards", *Journal of Symbolic Logic*, 1999, Vol. 64, No. 4, pp. 1719–1742.

Grädel et al., 1997 – Grädel, E., Kolaitis, P.G., Vardi, M.Y. "On the decision problem for two-variable first-order logic", *Bulletin of Symbolic Logic*, 1997, Vol. 3, No. 1, pp. 53–69.

Grädel et al., 1999 – Grädel, E., Otto, M., Rosen, E. "Undecidability results on two-variable logics", *Archive for Mathematical Logic*, Vol. 38, 1999, pp. 313–354.

Hájek, 1998 – Hájek, P. "Trakhtenbrot theorem and fuzzy logic", in G. Gottlob, E. Grandjean, and K. Seyr, (eds.), *International Workshop on Computer Science Logic. CSL98*, volume 1584 of *Lecture Notes in Computer Science*, 1998, pp. 1–8.

Halpern, 1995 – Halpern, J.Y. "The effect of bounding the number of primitive propositions and the depth of nesting on the complexity of modal logic", *Artificial Intelligence*, Vol. 75, No. 2, 1995, pp. 361–372.

Harel, 1986 – Harel, D. "Effective transformations on infinite trees, with applications to high undecidability, dominoes, and fairness", *Journal of the ACM*, Vol. 33, 1986, pp. 224–248.

Hirsch et al., 2002 – Hirsch, R., Hodkinson, I., Kurucz, A. "On modal logics between $\mathrm{K} \times \mathrm{K} \times \mathrm{K}$ and $\mathrm{S5} \times \mathrm{S5} \times \mathrm{S5}$", *The Journal of Symbolic Logic*, 2002, Vol. 67, No. 1, pp. 221–234.

Hodkinson et al., 2000 – Hodkinson, I., Wolter, F., Zakharyaschev, M. "Decidable fragments of first-order temporal logics", *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol. 106, 2000, pp. 85–134.

Hodkinson et al., 2001 – Hodkinson, I., Wolter, F., Zakharyaschev, M. Monodic fragments of first-order temporal logics: 2000–2001 A.D., in: R. Nieuwenhuis and A. Voronkov (eds.), Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning. LPAR 2001., Vol. 2250 of *Lecture Notes in Computer Science*, 2001, pp. 1–23.

Kontchakov et al., 2005 – Kontchakov, R., Kurucz, A., Zakharyaschev, M. "Undecidability of first-order intuitionistic and modal logics with two variables", *Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 11, No. 3, 2005, pp. 428–438.

Kotikova, Rybakov, 2013 – Kotikova, E., Rybakov, M. "First-order logics of branching time: on expressive power of temporal operators", *Logical Investigations*, Vol. 19, 2013, pp. 68–99.

Kotikova, Rybakov, 2016 – Kotikova, E.A., Rybakov, M.N. "Modelirovanie arifmetiki v yazyke pervogo poryadka, obogaschennom temporal'nymi kvantorami" [Modeling arithmetic in the first-order language enriched with temporal quantifiers], *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, No. 4, pp. 5–19. (In Russian)

Kremer, 1997 – Kremer, P. "On the complexity of propositional quantification in intuitionistic logic", *The Journal of Symbolic Logic*, 1997, Vol. 62, No. 2, pp. 529–544.

Kripke, 1962 – Kripke, S. "The undecidability of monadic modal quantification theory", *Zeitschrift für Matematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1962, Vol. 8, pp. 113–116.

Libkin, 2004 – Libkin, L. *Elements of Finite Model Theory.* Springer, 2004.

Maslov et al., 1965 – Maslov, S.Yu., Mints, G.E., Orevkov, V.P. "Nerazreshimost' v konstruktivnom ischislenii predikatov nekotorykh klassov formul, soderzhaschikh tol'ko odnomestnye predikatnye peremennye" [Insolvability in the constructive calculus of predicates of certain classes of formulae containing only one-place predicate variables]. *Doklady AN SSSR*, 1965, Vol. 163, No. 2, pp. 295–297. (In Russian)

Mortimer, 1975 – Mortimer, M. "On languages with two variables", *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1975, pp. 135–140.

Motohashi, 1990 – Motohashi, N. “A decision method for a set of first order classical formulas and its applications to decision problem for non-classical propositional logics”, *J. Math. Soc. Japan*, 1980, Vol. 42, No. 1, pp. 127–132.

Nerode, Shore, 1980 – Nerode, A., Shore, R.A. “Second order logic and first order theories of reducibility ordering”, in J. Barwise, H.J. Keisler, and K. Kunen (eds.), *The Kleene Symposium*, 1980, pp. 181–200.

Nies, 1996 – Nies, A. “Undecidable fragments of elementary theories”, *Algebra Universalis*, 1996, Vol. 35, pp. 8–33.

Papadimitriou, 1994 – Papadimitriou, C.H. *Computational Complexity.* Addison-Wesley, 1994.

Reynolds, Zakharyaschev, 2001 – Reynolds, M., Zakharyaschev, M. “On the products of linear modal logics”, *Journal of Logic and Computation*, 2001, Vol. 11, No. 6, pp. 909–931.

Rogers, 1967 – Rogers, H. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* McGraw-Hill, 1967.

Rybakov, 2001 – Rybakov, M.N. “Perechislimost’ modal’nykh predikatnykh logik i usloviya obryva vozrastayuschikh tsepey” [Enumerability of modal predicate logics and conditions of breaking increasing chains]. *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2001, Vol. 8, pp. 155–167. (In Russian)

Rybakov, 2002 – Rybakov, M.N. “Ob algoritmicheskoy vyrazitel’nosti modal’nogo yazy’ka s odnoy lish’ odnomestnoy predikatnoy bukvoy” [On algorithmic expressivity of modal language with just a single monadic predicate letter], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2002, Vol. 9, pp. 179–201. (In Russian)

Rybakov, 2006 – Rybakov, M. “Complexity of intuitionistic and Visser’s basic and formal logics in finitely many variables”, in G. Governatori, I.M. Hodkinson, and Y. Venema (eds.), *Advances in Modal Logic*, 2006, Vol. 6, pp. 393–411.

Rybakov, 2007a – Rybakov, M.N. “Slozhnost’ konstantnogo fragmenta propozitsional’noy dinamicheskoy logiki” [Complexity of the variable-free fragment of propositional dynamic logic], *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2007, No. 5, pp. 5–17.

Rybakov, 2007b – Rybakov, M. “Complexity of finite-variable fragments of EXPTIME-complete logics”, *Journal of Applied Non-classical Logics*, 2007, Vol. 17, No. 3, pp. 359–382.

Rybakov, 2008 – Rybakov, M. “Complexity of intuitionistic propositional logic and its fragments”, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2008, Vol. 18, No. 2–3, pp. 267–292.

Rybakov, 2014 – Rybakov, M.N. “Nerazreshimost’ logiki kvaziarnykh predikatov” [Undecidability of logic of quasiary predicates], *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, No. 4, pp. 17–32. (In Russian)

Rybakov, 2017 – Rybakov, M.N. “Nerazreshimost’ modal’nykh logik odnomestnogo predikata” [Undecidability of modal logics of a monadic prediddicate], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2017, Vol. 23, No. 2, pp. 60–75. (In Russian)

Rybakov, 2018a – Rybakov, M.N. "Aksiomatiziruemost' nenormal'nykh i kvazinormalnykh modal'nykh predikatnykh logik pervoporyadkovo opredelimykh klassov shkal Kripke" [Axiomatizability of non-normal and quasi-normal modal predicate logics of first-order definable classes of Kripke frames], *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, No. 3, pp. 81–94. (In Russian)

Rybakov, 2018b – Rybakov, M.N. "Algoritmicheskie svoystva lineyno approksimiruemykh kvazinormal'nykh modal'nykh logik" [Algorithmical properties of quasinormal modal logics with linear finite model property]. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, No. 4, pp. 87–97. (In Russian)

Rybakov, 2021 – Rybakov, M. "Slozhnost' problemy ravenstva slov v mnogoobraziyax modal'nykh algebr" [Computational complexity of the word problem in modal algebras], *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2021, No. 3, pp. 5–17. (In Russian)

Rybakov, 2022 – Rybakov, M. "Computational complexity of binary predicate theories with a small number of variables in the language", *Doklady Mathematics*, 2022, Vol. 106, No. 3, pp. 458–461.

Rybakov, 2023a – *Rybakov, M.* "Derev'ya kak sredstvo modelirovaniya nerazreshimykh problem" [Trees as a tool for modelling undecidable problems], *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2023, No. 1, pp. 5–23. (In Russian)

Rybakov, 2023b – *Rybakov, M.* "Predicate counterparts of modal logics of provability: High undecidability and Kripke incompleteness", To appear in *Logic Journal of the IGPL* (DOI: 10.1093/jigpal/jzad002).

Rybakov, Shkatov, 2019a – Rybakov, M., Shkatov, D. "Trakhtenbrot theorem for classical languages with three individual variables", in *Proceedings of SAICSIT2019*. ACM, 2019. Article No. 19.

Rybakov, Shkatov, 2019b – Rybakov, M., Shkatov, D. "Undecidability of first-order modal and intuitionistic logics with two variables and one monadic predicate letter", *Studia Logica*, 2006, Vol. 107, No. 4, pp. 695–717.

Rybakov, Shkatov, 2020 – Rybakov, M., Shkatov, D. "Algorithmic properties of first-order modal logics of finite Kripke frames in restricted languages", *Journal of Logic and Computation*, 2020, Vol. 30, No. 7, pp. 1305–1329.

Rybakov, Shkatov, 2021a – Rybakov, M., Shkatov, D. "Algorithmic properties of first-order superintuitionistic logics of finite Kripke frames in restricted languages", *Journal of Logic and Computation*, 2021, Vol. 31, No. 2, pp. 494–522.

Rybakov, Shkatov, 2021b – Rybakov, M., Shkatov, D. "Complexity of finite-variable fragments of products with K", *Journal of Logic and Computation*, 2021, Vol. 31, No. 2, pp. 426–443.

Rybakov, Shkatov, 2021c – Rybakov, M., Shkatov, D. "Undecidability of QLTL and QCTL with two variables and one monadic predicate letter", *Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 93–120.

Rybakov, Shkatov, 2021d – Rybakov, M., Shkatov, D. "Algorithmic properties of first-order modal logics of linear Kripke frames in restricted languages", *Journal of Logic and Computation*, 2021, Vol. 31, No. 5, pp. 1266–1288.

Rybakov, Shkatov, 2022a – Rybakov, M., Shkatov, D. "Complexity of finite-variable fragments of products with non-transitive modal logics", *Journal of Logic and Computation*, 2022, Vol. 32, No. 5, pp. 853–870.

Rybakov, Shkatov, 2022b – Rybakov, M., Shkatov, D. "Undecidability of the logic of partial quasiary predicates", *Logic Journal of the IGPL*, 2022, Vol. 30, No. 3, pp. 519–533.

Sipser, 2013 – Sipser, M. *Introduction to the Theory of Computation*. Cengage Learning, 3rd edition, 2013.

Spaan, 1993 – Spaan, E. *Complexity of Modal Logics*. PhD Thesis. Amsterdam, 1993.

Speranski, 2016 – Speranski, S. "A note on hereditarily Π^0_1- and Σ^0_1-complete sets of sentences", *Journal of Logic and Computation*, 2016, Vol. 26, No. 5, pp. 1729–1741.

Surányi, 1943 – Surányi, J. "Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktioskalküls", *Mathematikai és Fizikai Lapok*, 1943, Vol. 50, pp. 51–74.

Tarski, Givant, 1987 – Tarski, A., Givant, S. *A Formalization of Set Theory without Variables*. American Mathematical Society, 1987.

Trakhtenbrot, 1963 – Trakhtenbrot, B.A. "Impossibility of an algorithm for the decision problem in finite classes", *American Mathematica Society Translations*, 1963, Vol. 23, pp. 1–5. (Translation of: Trakhtenbrot B.A. Nevozmozhnost' algorifma dlya problemy razreshimisti na konuchnykh klassakh. [Impossibility of an algorithm for the decision problem in finite classes]. Doklady AN SSSR, 1950, Vol. 70, No. 4, pp. 569–572. (In Russian).)

Trakhtenbrot, 1953 – Trakhtenbrot, B.A. "O recursivnoy otdelimisti" [On recursive separability]. *Doklady AN SSSR*, 1953, Vol. 88, No. 6, pp. 953–956. (In Russian)

Turing, 1936 – Turing, A.M. "On computable numbers, with an application to the 'Entscheidungsproblem'", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2 series, 1936, Vol. 42, pp. 230–265.

Urquhart, 1984 – Urquhart, A. "The undecidability of entailment and relevant implication", *Journal of Symbolic Logic*, 1984, Vol. 49, No. 4, pp. 1059–1073.

Urquhart, 2007 – Urquhart, A. "Four variables suffice", *The Australasian Journal of Logic*, 2007, Vol. 5, pp. 66–73.

Wolter, Zakharyaschev, 2001 – Wolter, F., Zakharyaschev, M. "Decidable fragments of first-order modal logics", *The Journal of Symbolic Logic*, 2001, Vol. 66, pp. 1415–1438.

Логические исследования
2023. Т. 29. № 1. С. 147–163
УДК 16

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 1, pp. 147–163
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-147-163

Weijun Shi

A Topological-algebraic Approach to the Compactness Theorem of Classical Logic

Weijun Shi
Department of Philosophy, School of Humanities and Arts, Xidian University,
266 Xinglong Section of Xifeng Road, 710126, Shaanxi, the People's Republic of China.
E-mail: shiweijun@xidian.edu.cn

Abstract: There are some methods of proof of the compactness theorem for classical logic which bypass the completeness theorem. Among them are the purely topological one, the purely algebraic one, and the hybrid one. These methods make essential use of either Tychonoff's Theorem, the concept of ultraproducts or the concept of Cantor sets as topological spaces. Instead of these conceptual tools, the paper provides the theorem with a method of proof that appeals to the concept of Stone spaces of Boolean algebras. In connection with a classical logical system (a propositional calculus or a predicate calculus), the method consists of five components. Firstly, the problem of the compactness of the logical system is reduced to that of the compactness of some topological space. Secondly, what is called the Lindenbaum algebra of the system is set up, which is in fact a Boolean algebra. Thirdly, it has to be shown that the Stone space of the Boolean algebra is compact. Fourthly, the set of sentences whose equivalent classes are members of the Stone space is shown to be satisfiable or simultaneously true. Finally, a homeomorphism is constructed between the topological space and the compact Stone space. Additionally, the method admits of a natural generalisation to the proof of the compactness theorem for modal logic.

Keywords: Topology, compactness, Boolean algebras, Stone spaces, classical logic

For citation: Shi WJ. "A Topological-algebraic Approach to the Compactness Theorem of Classical Logic", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 1, pp. 147–163. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-1-147-163

1. Introduction

The compactness theorem is the cornerstone of model theory. In connection with classical logic, this theorem is usually proven with the help of the completeness theorem, but the latter turns out to be unnecessary to the proof of the former. There are several methods of proving the former in the literature which dispense with the latter, for example, the renowned Henkin's method [Marker, 2003, pp. 35–39], and the less well-known method [Cowen, 1970], based on a combinatorial lemma [Rado, 1949]. Besides them, there are a purely algebraic one [Bell et al., 2006, p. 102], [Paseau, 2022, sec. 4c], a purely topological one [Bell et al., 2006, p. 46], [Paseau, 2022, sec. 5], [Beth, 1951], and a hybrid one [Frayne et al., 1962], which uses the algebraic notion of ultraproducts and the topological notion of Stone spaces.[1]

The paper shall provide a proof of the compactness theorem for classical logic which falls into the category of the just-mentioned hybrid method. However, our proof is distinguished from the one using this hybrid method in [Frayne et al., 1962] by the fact that it makes no use of the algebraic notion of ultraproducts. Moreover, it is also distinguished from the purely topological proofs in [Bell et al., 2006, p. 46], [Paseau, 2022, sec. 5], [Beth, 1951] by the fact that it appeals neither to Tychonoff's Theorem (or some principle weaker than the theorem) nor to the notion of compact Cantor set (as used in topology). In connection with classical logic, our proof uses the conceptual tool of Stone spaces of Boolean algebras instead. The proof can be adapted for use as a proof of the compactness theorem for modal logic, too, although I shall not offer a detailed proof of this. What runs through all of these proofs is the conceptual tool and this is what makes them stand out among others. Hence, our proofs are in themselves interesting from a methodological point of view although the results to be proven are altogether not completely original.

The paper is organised as follows. A number of preliminary notions and results concerning deductive systems, Boolean algebras, and topological spaces are stated in section 2 and section 3. I shall provide the compactness theorem of propositional logic with a proof using the above-mentioned conceptual tool in section 4, and that of (first-order) predicate logic in section 5. In section 6, besides some conclusive remarks, I shall give an outline of how to generalise the method used in our proof to modal logic.

2. Algebraic aspects

Suppose $(X, \leqslant)$ is a partially ordered pair, where X is a nonempty set and $\leqslant$ is a binary partial relation on X, i.e. a reflexive, antisymmetric, and transitive relation. For any subset Y of X, we use $sup(Y)$ to denote an element in X that is the supremum (the least upper bound) of Y if there is any. Similarly, if there is an element in X that is the infimum (the greatest lower bound) of Y, we use $inf(Y)$ to denote it.

Definition 1. $(X, \leqslant)$ is a lattice if and only if for each two element subset Y of X, $sup(Y)$ and $inf(Y)$ exist.

[1]For the development and history of the compactness theorems, see [Dawson, 1993], and for a detailed investigation of some of these methods and the related philosophical significance, see [Paseau, 2011].

Given a lattice $(X, \leqslant)$ and any $Y = \{x, y\} \subseteq X$, let $x \sqcup y$, called *the meet of x and y*, and $x \sqcap y$, called *the join of x and y*, be the supremum and infimum of Y, respectively. That is to say, $x \sqcup y = sup(Y)$ and $x \sqcap y = inf(Y)$.

For a partially ordered pair $(X, \leqslant)$, if there is an element $x \in X$ such that $y \leqslant x$ for all $y \in X$, then x is said to be a maximum of X. Similarly, if there is an element $x \in X$ such that $x \leqslant y$ for all $y \in X$, then x is said to be a minimum of X. We use 1 and 0 to denote the maximum and minimum of X, respectively, if they exist. As is easy to show, if a lattice has a maximum, then it is unique; in the same vein, if it has a minimum, it is also unique.

Definition 2. A lattice $(X, \leqslant)$ is complemented if and only if
(1)X has a maximum 1 and a minimum 0;
(2) for any $x \in X$, there is some $y \in X$ such that $x \sqcup y = 1$ and $x \sqcap y = 0$.

Such an element y is called *a complement of x.* A member of a complemented lattice does not necessarily have a unique complement. However, their complements are indeed unique if the lattice is distributive:

Definition 3. A lattice $(X, \leqslant)$ is distributive if and only if for any $x, y, z \in X$,
(1) $(x \sqcup y) \sqcap z = (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z)$.
(2) $(x \sqcap y) \sqcup z = (x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z)$.

In fact, if a lattice satisfies clause (1) of Definition 3, then it satisfies clause (2) thereof and verse versa. We use x^* to denote the unique complement of x in a distributive complemented lattice. Now a Boolean algebra is a distributive complemented lattice.

Besides the notion of Boolean algebras, we also need the notions of filters, ultrafilters, and quotient algebras. Suppose we have a lattice $(X, \leqslant)$ and a non-empty subset F of X.

Definition 4. 1. F is a filter in $(X, \leqslant)$ if and only if
(1.1) for any $x, y \in X$, if $x, y \in F$, then $x \sqcap y \in F$.
(1.2) for any $x \in F$ and any $y \in X$, if $x \leqslant y$, then $y \in F$.
2. F is an ultrafilter in $(X, \leqslant)$ if and only if
(2.1) F is a filter in the lattice.
(2.2) for any filter G in the lattice, F is not a proper subset of G.

Any filter F in the lattice $(X, \leqslant)$ is said to be proper if $F \neq X$. Similarly, any ultrafilter F in the lattice is said to be proper if $F \neq X$. From now on, whenever speaking of filters and ultrafilters, we always mean proper ones. It stands to reason that any ultrafilter in a Boolean algebra does not contain the minimum 0. For otherwise it would not be an (proper) ultrafilter. There is a lemma which tells if a filter is an ultrafilter.

Lemma 1. *If F is a filter in a Boolean algebra $(X, \leqslant)$, then F is an ultrafilter iff for each $x \in X$, either $x \in F$ or $x^* \in F$, but not both.*

Let F be a filter in a Boolean algebra $A = (X, \leqslant)$. We define a relation $\sim_F$ on the algebra A as follows:

For all $x, y \in X$, $x \sim_F y$ iff $x \sqcap f = y \sqcap f$ for some $f \in F$.

$\sim_F$ is a congruence relation on A. Now for $x \in X$, let $|x|$ be the equivalence class to which x belongs under the relation $\sim_F$. Moreover, let $A/F = \{|x| : x \in X\}$. The set can be given a structure of Boolean algebras as follows:

$|x| \sqcap |y| = |x \sqcap y|$,
$|x| \sqcup |y| = |x \sqcup y|$,
$|x|^* = |x^*|$.

This set with the structure is called the *the quotient algebra of A modulo F.* The function which maps each element x in X to $|x|$ is called *the canonical homomorphism* of A onto A/F. The following is a lemma concerning quotient algebras to be used later:

Lemma 2. *For any filter F in A, $|x| = 1$ in A/F, i.e. $|x|$ is the maximum in the quotient algebra, iff $x \in F$.*

Define a relation $\leqslant$ on the set $\{0, 1\}$ as follows: $0 \leqslant 0$, $0 \leqslant 1$, and $1 \leqslant 1$. $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \leqslant)$ is a Boolean algebra. Two Boolean algebras $(X, \leqslant)$ and $(Y, \leqslant)$ are called to be *isomorphic* if there is a bijection f from X to Y such that $f(x \sqcap y) = f(x) \sqcap f(y)$, $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)$, and $f(x^*) = f(x)^*$. Now we can formulate a very important theorem to be used in our proof of Theorem 7:

Theorem 1. *For any filter F in A, A/F and* $\mathbf{2}$ *are isomorphic iff F is an ultrafilter.*

For a detailed proof, see [Bell et al., 2006, p. 20].

3. Topological aspects

We have already introduced all required concepts and propositions in Boolean algebras. Now we need some concepts in topology. Let X be a set and $\mathcal{T}$ be a family of subsets of X.

Definition 5. $\mathcal{T}$ is a topology for X if $\mathcal{T}$ has the following three properties:
(1) $X \in \mathcal{T}$ and $\varnothing \in \mathcal{T}$.
(2) Any union of sets in $\mathcal{T}$ belongs to $\mathcal{T}$, i.e. for any subset $\mathcal{T}^0$ of $\mathcal{T}$, $\bigcup_{U \in \mathcal{T}^0} U \in \mathcal{T}$.
(3) Any intersection of two sets in $\mathcal{T}$ belongs to $\mathcal{T}$, i.e. $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ for any $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$.

The pair $(X, \mathcal{T})$ is called *a topological space*. For convenience, we refer to X as a topological space when its topology is clear from the context. The sets in $\mathcal{T}$ are called *open sets*, and any subset Y of X is called *a closed set* if the complement of Y in X is in $\mathcal{T}$, i.e. $X \setminus Y \in \mathcal{T}$.

Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space and B be a family of open subsets of X.

Definition 6. B is base for the topology $\mathcal{T}$ of X if every open subset of X is a union of sets in B, i.e. for every $U \in \mathcal{T}$, there is a subset B^0 of B such that $U = \bigcup\limits_{V \in B^0} V$.

An appeal can be made to the following theorem to judge if a given family of subsets of X is a base for some topology of X [Gamelin et al., 1999, p. 70].

Theorem 2. *A family $\mathcal{X}$ of subsets of the set X is a base for some topology of X if and only if $\mathcal{X}$ has the following two properties:*
(1) Each member $x \in X$ lies in at least one set in $\mathcal{X}$.
(2) For any $x \in X$ and any $U, V \in \mathcal{X}$, if $x \in U \cap V$, then there is some $W \in \mathcal{X}$ such that $x \in W \subseteq U \cap V$.

If $\mathcal{X}$ satisfies these two clauses, then it uniquely determines a topology for X, that is, there is some topology for X for which $\mathcal{X}$ is a base.

Separation properites are used to measure if there are enough open sets in a topological space. For our purpose, we only need the notion of T2-spaces or Hausdorff spaces.

Definition 7. A topological space $(X, \mathcal{T})$ is a Hausdorff space iff for each pair of distinct points $x, y \in X$, there are disjoint open sets $U, V \in \mathcal{T}$ (i.e. $U \cap V = \varnothing$) such that $x \in U$ and $y \in V$.

A subset $\mathcal{T}^0$ of the topology $\mathcal{T}$ is called *an open cover of* X if X is the union of all sets in the subset, i.e. $X = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{T}^0} V$. An open cover $\mathcal{T}^0$ of X is *a finite open cover* if it has only finite members.

Definition 8. A topological space $(X, \mathcal{T})$ is compact iff, if X has an open cover, then X has a finite open cover.

Definition 9. A topological space $(X, \mathcal{T})$ is a Boolean space iff it is a compact Hausdorff space with a base of open and closed sets.

There are two theorems about compact topological spaces to be used later in section 4 and 5. One of them is as follows:

Theorem 3. $(X, \mathcal{T})$ *is compact if and only if any collection of its closed sets having the finite intersection property has nonempty intersection, i.e. for any* $\mathcal{X} = \{U : X \setminus U \in \mathcal{T}\}$*, if the intersection of every finite subset of* $\mathcal{X}$ *is not empty, then the intersection of* $\mathcal{X}$ *is not empty.*

The other is that compactness is a topological property. To articulate it, we need the notion of homeomorphism:

Definition 10. Given two topological spaces $(X, \mathcal{T})$ and $(Y, \mathcal{T}')$, a function f from X to Y is a homeomorphism iff it has the following properties:
(1) f is a bijection.
(2) For any subset U of X, $U \in \mathcal{T}$ iff $f[U] \in \mathcal{T}'$, where $f[U] = \bigcup_{x \in U} \{f(x)\}$.

With this notion, we can put the just-mentioned theorem as follows:

Theorem 4. *If there is a homeomorphism from a topological space X to another topological space Y, then X is compact iff Y is compact* [Gamelin et al., 1999, p. 79].

The notion of Stone spaces is a combination of topological and algebraic ones. Suppose $A = (X, \leqslant)$ is a Boolean algebra. Let $S(A)$ be the set of all ultrafilters in A. For $x \in X$, let $u(x) = \{U \in S(A) : x \in U\}$, that is, $u(x)$ is the set of all ultrafilters in A containing x. So $u[X]$ is the set of all $u(x)$, that is, $u[X] = \{u(x) : x \in X\}$. According to Theorem 2, there is a topology $\mathcal{T}_s$ for $S(A)$ such that $u[X]$ is a base for the topology. $S(A)$ is called *the Stone space* of the Boolean algebra A. Regarding the relation between Boolean algebras and Stone spaces, we have the following theorem:

Theorem 5. *Given any Boolean algebra A, its Stone space $S(A)$ is a Boolean space.*

The Stone space is a Hausdorff space and is compact. For a proof of this fact, see [Bell et al., 2006, p. 26], [Dunn et al., 2001, p. 435]. Hence, it is, by Definition 9, a Boolean space. This theorem plays a pivotal role in our proofs to come in the following two sections.

4. The compactness of propositional logic

Let L be a language of propositional logic. We assume that it can have arbitrarily many k (any cardinal number larger than 0) propositional variables. It has $\neg$ and $\rightarrow$ as its only primitive connectives and the other familiar logical connectives are introduced in the canonical manner. Let *Sent* be the set of all

sentences (well-defined formulas) of L. We set up a propositional calculus SC with the following as its axioms:
$\phi \to (\psi \to \phi)$,
$(\chi \to (\phi \to \psi)) \to ((\chi \to \phi) \to (\chi \to \psi))$,
$(\neg\phi \to \neg\psi) \to ((\neg\phi \to \psi) \to \phi)$,
where $\phi, \psi, \chi \in Sent$. The only rule of reference of SC is Modus Ponens. The notions of proof, satisfiability, and theoremhood are defined in the usual way. The notation '$\vdash \phi$' is used to mean that ϕ is a theorem of SC.

If v is a valuation of the set of propositional variables, i.e. a function from the set to the set $\{0,1\}$ of truth-values, then it assigns a truth-value to any sentence of L. In other words, it can be extended to a function from Sent to $\{0,1\}$. Let $V_k = \{v : v : Sent \to \{0,1\}\}$ be the set of all such functions.[2]

Now let us equip the set V_k with a topology as follows. For any $\phi \in Sent$, define $U_\phi = \{v \in V_k : v(\phi) = 1\}$. So $B_k = \{U_\phi : \phi \in Sent\}$ is the set of all such U_ϕ. It can easily be shown that B_k satisfies the conditions listed in Theorem 2. Firstly, for any $v \in V_k$, there is some sentence ϕ such that $v(\phi) = 1$; hence, $v \in U_\phi$. Secondly, if $x \in U_\phi \cap U_\psi$ then $x \in U_{\phi\wedge\psi} \subseteq U_\phi \cap U_\psi$. Hence, there is a topology $\mathcal{T}_k$ for V_k with B_k as its base .

The compactness theorem of SC is this: a set Σ of sentences in $Sent$ is satisfiable iff each finite subset of Σ is satisfiable. The direction from left to right is obvious. Now the other direction is equivalent to the statement that if Σ is unsatisfiable, then there is an unsatisfiable finite subset Σ^{fin}. Σ is unsatisfiable iff for every $v \in V_k$ there is some $\phi \in \Sigma$ such that $v(\neg\phi) = 1$. $v(\neg\phi) = 1$ iff $v \in U_{\neg\phi}$. If follows that Σ is unsatisfiable iff for every $v \in V_k$ there is some $\phi \in \Sigma$ such that $v \in U_{\neg\phi}$. Hence, Σ is unsatisfiable iff $\{U_{\neg\phi} : \phi \in \Sigma\}$ is an open cover of V_k. Thus, to show the compactness of SC, it suffices to prove the following statement:

> If $\{U_{\neg\phi} : \phi \in \Sigma\}$ is an open cover of V_k, then there is a finite subset Σ^{fin} of Σ such that $\{U_{\neg\phi} : \phi \in \Sigma^{fin}\}$ is an open cover of V_k.

Now clearly, if the topological space V_k is compact, then by Definition 8, the antecedent of the statement implies its consequence. So the task of showing the compactness of SC boils down to showing the following:

Theorem 6. *The topological space* $(V_k, \mathcal{T}_k)$ *is compact.*

One topological way of proving Theorem 6 is as presented in [Bell et al., 2006, p. 46], [Paseau, 2022, sec. 5].[3] The gist of such a proof is as follows. Since L has k propositional variables, i.e. the cardinality of the set Var of

[2]The notation '$v : Sent \to \{0,1\}$' means that v is a function from $Sent$ to $\{0,1\}$.
[3]The topological proof in [Beth, 1951] uses the notion of compact Cantor sets.

all propositional variables is k, the cardinality of $Sent$ is the same as that of $\bigcup\{Var^{\xi} : \xi < \omega\}$, which is k.[4] Now we equip the set $\{0, 1\}$ with the discrete topology consisting of all subsets of $\{0, 1\}$. Trivially, the topological space is compact. Now consider the set $\{0, 1\}^k$ with the product topology [Gamelin et al., 1999, pp. 91–92]. This topological space is compact according to Tychonoff's Theorem. Moreover, V_k and $\{0, 1\}^k$ are homeomorphic and therefore, V_k is compact. So Theorem 6 gets proven. The proof is also viable if Tychonoff's Theorem is replaced by a weaker version of it, namely, that the product of compact Hausdorff spaces is also compact.

Let us provide a proof of Theorem 6 without using Tychonoff's Theorem or the just-mentioned weaker version. To do this, we have to construct a Boolean algebra by imposing a Boolean structure on the set $Sent$ of formulas of L. Define a relation $\sim$ on the set as follows:

Definition 11. For any $\phi, \psi \in Sent$, $\phi \sim \psi$ iff $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$, i.e. $\phi \leftrightarrow \psi$ is a theorem of SC.

This relation is an equivalence relation. Let $[\phi]$ be the equivalence class of ϕ under the relation, i.e. $[\phi] = \{\psi \in Sent : \vdash \phi \leftrightarrow \psi\}$. Moreover, let $Sent^{\sim} = \{[\phi] : \phi \in Sent\}$ be the set of equivalence classes of all sentences of L. We shall partially order the set by defining a partial relation $\leqslant$ on it.

Definition 12. For all $\phi, \psi \in Sent$, $[\phi] \leqslant [\psi]$ iff $\vdash \phi \to \psi$.

The ordered pair $(Sent^{\sim}, \leqslant)$ is called the *Lindenbaum algebra* of SC. According to Definition 1, Definition2, Definition3, and the properties of SC, $(Sent^{\sim}, \leqslant)$ is a Boolean algebra [Bell et al., 2006, pp. 41–42]. With respect to this algebra, the following lemma holds:

Lemma 3. *For any member $[\phi]$ and $[\psi]$ in $Sent^{\sim}$, the following hold:*
$[\phi] \sqcap [\psi] = [\phi \wedge \psi]$.
$[\phi] \sqcup [\psi] = [\phi \vee \psi]$.
$[\phi]^* = [\neg\phi]$.
$[\phi] = 1$ *iff* $\vdash \phi$.
$[\phi] = 0$ *iff* $\vdash \neg\phi$.

Let A be $(Sent^{\sim}, \leqslant)$. As said before, $(S(A), \mathcal{T}_s)$ is then the Stone space of A, whose base is $u[Sent^{\sim}] = \{u([\phi]) : [\phi] \in Sent^{\sim}\}$, where $u([\phi]) = \{U \in S(A) : [\phi] \in U\}$. The Stone space is, by Theorem 5, a Boolean space, which is, by Definition 9, compact.

[4]Here ω is the first limit ordinal and ξ is any ordinal number less than it. Var^{ξ} is the set of all sequences whose domain is ξ, i.e. the set of all functions from ξ to Var.

Now the compactness of SC will be shown if the following theorem is true:

Theorem 7. *There is a homeomorphism from* $(V_k, \mathcal{T}_k)$ *to* $(S(A), \mathcal{T}_s)$.

Proof. Let $h : V_k \to S(A)$ be such that for each $v \in V_k$,
$h(v) = \{[\phi] : v(\phi) = 1\}$. We claim that h is a bijection.

Firstly, we show that it is a function. For each v, it can be shown that $h(v)$ is an ultrafilter in A. By Lemma 1, it suffices to show that for each member $[\phi] \in Sent^{\sim}$, either $[\phi] \in h(v)$ or $[\phi]^* \in h(v)$ but not both. By Lemma 3, $[\phi]^* = [\neg\phi]$. Since either $v(\phi) = 1$ or $v(\neg\phi) = 1$ but not both, either $[\phi] \in h(v)$ or $[\phi]^* \in h(v)$ but not both.

Secondly, we show that h is one-one. If $v_1 \neq v_2$, then there is some ϕ such that $v_1(\phi) \neq v_2(\phi)$. Hence, $h(v_1) \neq h(v_2)$.

Finally, we show that h is onto. Each $U \in S(A)$ is an ultrafilter, so by Theorem 1, there is an isomorphism f from the quotient algebra A/U of A to $\mathbf{2}$; moreover, there is a homomorphism g from A to A/U such that $g([\phi]) = |[\phi]|$, i.e. the equivalence class of $[\phi]$ under the relation $\sim_U$; so there is a homomorphism $f \circ g$ (the composition function of f and g) from A to $\{0, 1\}$. We claim that (*) is true:
(*) For each ultrafilter U, there is a valuation v_U such that $h(v_U) = \{[\phi] : v_U(\phi) = 1\} = U$.
Let v_U be the composition $f \circ g$ of f and g. Then, Let us show that $h(v_U) = \{[\phi] : v_U(\phi) = 1\} = U$.

$[\phi] \in h(v_U)$ iff $[\phi] \in U$.

$v_U(\phi) = 1$ iff $[\phi] \in U$.

$f \circ g([\phi]) = 1$ iff $[\phi] \in U$.

This is, by Lemma 2, equivalent to that

$f(|[\phi]|) = 1$ iff $|[\phi]| = 1$.[5]

This statement is true because f, as an isomorphism, sends the maximum in A/U onto the maximum in $\mathbf{2}$. Hence, h is onto.

To show that the two spaces are homeomorphic, by Definition 10, it suffices to show that h maps open sets onto open sets. Suppose $Y \in \mathcal{T}_k$ is an open set. Then there must be a subset B of the base B_k for the topology $\mathcal{T}_k$ such that $Y = \bigcup_{U_\phi \in B} U_\phi$. So $h[Y] = \bigcup_{U_\phi \in B} h[U_\phi]$.

We claim that (**) is true:
(**) $h[U_\phi] = u([\phi])$.
Suppose $v \in U_\phi$ and $h(v) \in h[U_\phi]$. To show that $h[U_\phi] \subseteq u([\phi])$, it suffices to show that $[\phi] \in h(v)$, i.e. $v(\phi) = 1$. But this is obviously true because $v \in U_\phi$.

[5]Note that the 1 on the right is the maximum in the Boolean algebra, while the 1 on the left is a truth-value.

Suppose $U \in u([\phi])$. Hence, U is an ultrafilter and $[\phi] \in U$. By (*), there is a valuation v such that $v(\psi) = 1$ iff $[\psi] \in U$. So $v(\phi) = 1$ because $[\phi] \in U$. Consequently, $[\phi] \in h(v) \in h[U_\phi]$ and $U \in h[U_\phi]$. So $u([\phi]) \subseteq h[U_\phi]$.

Since $u([\phi])$ is an open set in $\mathcal{T}_s$, by Definition 5, $Y \in \mathcal{T}_s$.

Suppose $h[Y] \in \mathcal{T}_s$. Then there is some subset B of the base for $\mathcal{T}_s$ such that $h[Y] = \bigcup_{u([\phi])\in B} u([\phi])$. $Y = h^{-1} \circ h[Y] = \bigcup_{u([\phi])\in B} h^{-1}[u([\phi])]$. By (**), $Y = \bigcup_{u([\phi])\in B} U_\phi$. Since U_ϕ is an open set in $\mathcal{T}_k$, by Definition 5, it follows that $Y \in \mathcal{T}_k$. ■

By Definition 9 and Theorem 5, $S(A)$ is compact. Theorem 6 follows from Theorem 4 and the fact that $(V_k, \mathcal{T}_k)$ and $(S(A), \mathcal{T}_s)$ are homeomorphic.

Our proof applies to any propositional system P as long as it is at least as strong as SC, in the sense that both have the same theorems in common. This proof may not work any longer if P is weaker than SC; for the Lindenbaum algebra of P might not be a Boolean algebra. Indeed, as can be seen from the proof that the Lindenbaum algebra $(Sent^{\sim}, \leqslant)$ of SC is a Boolean algebra [Bell et al., 2006, pp. 41–42], the former would not be a Boolean algebra should some sentences, say, $\phi \wedge \psi \to \phi$, $\phi \wedge \psi \to \psi$, $\phi \vee \neg\phi$, or $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$, not be theorems of SC.

Unlike our proof, the purely topological proof mentioned above always works no matter what propositional systems are set up in the language L: it is entirely independent of systems. This is its advantage over our proof using the concept of Stone spaces of Boolean algebras.

5. The compactness of first-order logic

The method we used for the compactness of propositional calculus SC can be generalised to first-order predicate logic. Before showing how this generalisation can be carried out, we have to specify a first-order language $\mathcal{L}$ and some strong predicate calculus PC in it. There are no function letters in $\mathcal{L}$, but it has a (countable or empty) set of predicate letters P_n, a (countable or empty) set of individual constants a_n, and a nonempty set of individual variables x_n. These are all its extralogical constants and its logical constants are the familiar ones.

As in the case of propositional logic, PC must be strong enough for its Lindenbaum algebra to be a Boolean algebra. This strongness will be guaranteed if the axioms of SC are also axioms of PC: the results of replacing ϕ, ψ, and χ occurring in the axioms of SC by any well-defined formulas of $\mathcal{L}$ are axioms of PC. Of course, the rule of inference of PC should contain at least modus ponens.

The notions of proof, satisfiability, and theoremhood in connection with PC are defined in the usual way. The notation '$\vdash_{PC} \phi$' is used to mean that the (well-defined) formula ϕ of $\mathcal{L}$ is a theorem of PC.

The compactness theorem of PC says that a set of sentences (well-defined formulas without free variables) of $\mathcal{L}$ is satisfiable iff every finite subset of it is so. A formula ϕ of $\mathcal{L}$ is satisfiable iff there are a $\mathcal{L}$-structure M and a valuation v such that $M \vDash_v \phi$, i.e. v satisfies ϕ in M.[6] If ϕ is a sentence, then $M \vDash_v \phi$ iff $M \vDash \phi$, i.e. ϕ is true in M. Suppose Σ is a set of sentences thereof. Hence, the compactness of PC says that Σ is satisfiable iff every finite subset Σ^{fin} of Σ is so. The direction from left to right of this biconditional is, by the definition of satisfaction, obvious, so the compactness of PC follows if the following holds:

> (Com) For every finite subset Σ^{fin} of Σ, if there is a structure M such that $M \vDash \Sigma^{fin}$, then there is also a structure M' such that $M' \vDash \Sigma$.

The standard proof of (Com) is by dint of the famous Henkin constructions [Marker, 2003, pp. 35–36], which is neither algebraic nor topological. The purely algebraic proof of (Com) makes use of the Boolean algebraic notion of ultraproducts, as well as Łoś ultraproduct theorem [Bell et al., 2006, p. 102], [Paseau, 2022, sec. 4c]. The purely topological proof thereof [Beth, 1951] resorts to the compactness of Cantor set to show the compactness of such spaces after introducing the so-called 'reduced logic' (equivalent to propositional logic) into the language $\mathcal{L}$. The hybrid one [Frayne et al., 1962] makes an essential appeal to the Boolean algebraic notions of ultraproducts and ultralimits in its dealing with the compactness of certain related topological spaces. As is to be shown, a proof is available which dispenses with both the just-mentioned algebraic notions and compact Cantor sets.

There are two ways of constructing topological spaces required to prove (Com) [Baldwin et al., 1974]. The first is as follows. Let $[M]$ be the equivalent class of a $\mathcal{L}$-structure M under the relation of isomorphism[7]. Further, let $\mathcal{M}$ be the class of all $[M]$. For any sentence ϕ of the language, let U_ϕ be the class $\{[M] : M \vDash \phi\}$. It is easy to show that the class of all U_ϕ is a base

[6] Instead of structures of languages [Marker, 2003, p. 8], logicians also use the notion of interpretations of languages exactly in the same sense; they are the same. The notion is a commonplace in model theory. A $\mathcal{L}$-structure M consists of a pair (D, I), where D is called the 'domain' of M and I is an assignment function that assigns every constant of $\mathcal{L}$ some set-theoretic constructions of appropriate type on D. So, for example, if a_n is an individual constant, than I assigns it an element of D; if P_n is a n-place predicate letter, I assigns it a n-ary relation on D. Additionally, the notion of satisfaction is a commonplace, too. For its explicit definition, see, say [Ibid., p. 11].

[7] Here instead of isomorphism, the relation of elementary equivalence is also viable.

for $\mathcal{M}$. Moreover, each U_ϕ is a clopen (closed and open) set: U_ϕ is a closed set because $\mathcal{M} \setminus U_\phi = U_{\neg\phi}$ is an open set. Now suppose $\mathcal{M}$ is compact. It goes without saying that $\{U_\phi : \phi \in \Sigma^{fin}\}$ is a set of closed sets. Assume every Σ^{fin} is satisfiable. Then, there is some M such that $M \vDash \Sigma^{fin}$; consequently, $\bigcap\{U_\phi : \phi \in \Sigma^{fin}\} \neq \varnothing$ because M is a member thereof. Therefore, by Theorem 3, $\bigcap\{U_\phi : \phi \in \Sigma\} \neq \varnothing$. It follows that there is some $M^{'}$ such that $M^{'} \vDash \Sigma$. So (Com) holds if $\mathcal{M}$ is compact.

The second way is as follows. A $\mathcal{L}$-theory T, which is just a set of sentences of $\mathcal{L}$, is said to be maximal if for every sentence ϕ, either $\phi \in T$ or $\neg\phi \in T$. Let Th be the set of all maximal, satisfiable $\mathcal{L}$-theories. Moreover, for every sentence ϕ in $\mathcal{L}$, let U_ϕ be the set $\{T \in Th : \phi \in T\}$. Then, as is easy to show, the set of all such U_ϕ is a base for Th. We use $\mathcal{T}_{th}$ to denote the topology for Th uniquely determined by the base. Moreover, each U_ϕ is a clopen set.

Now we show that the following lemma is true:

Lemma 4. *If T is a satisfiable $\mathcal{L}$-theory, then there is a maximal, satisfiable $\mathcal{L}$-theory Γ such that $T \subseteq \Gamma$.*

Proof. Suppose T is satisfiable. So there is some $\mathcal{L}$-structure M such that $M \vDash T$. We claim that for each sentence ϕ in $\mathcal{L}$, either $T \cup \{\phi\}$ or $T \cup \{\neg\phi\}$ is satisfiable. If $T \cup \{\phi\}$ is unsatisfiable, then $M \nvDash \phi$. So $M \vDash \neg\phi$; consequently, $T \cup \{\neg\phi\}$ is satisfiable. Similarly, if $T \cup \{\neg\phi\}$ is unsatisfiable, then $T \cup \{\phi\}$ is satisfiable. Let $\{\psi_i : i < j\}$ $(j \leqslant k)$ be the set of all sentences of $\mathcal{L}$ (k is some ordinal number). We define Γ^i recursively as follows:
$\Gamma^0 = T$.
$$\Gamma^{i+1} = \begin{cases} \Gamma^i \cup \{\psi_i\} & \text{if } \Gamma^i \cup \{\psi_i\} \text{ is satisfiable;} \\ \Gamma^i \cup \{\neg\psi_i\} & \text{if } \Gamma^i \cup \{\neg\psi_i\} \text{ is satisfiable.} \end{cases}$$
Then, let Γ be the union $\bigcup_{i<j} \Gamma^i$. Due to its constructions, Γ is a maximal, satisfiable theory such that $T \subseteq \Gamma$. ■

Assume Th is compact. Suppose each Σ^{fin} is satisfiable. By Lemma 4, there is a maximal, satisfiable theory Γ such that $\Sigma^{fin} \subseteq \Gamma \in Th$. Hence, $\bigcap\{U_\phi : \phi \in \Sigma^{fin}\} \neq \varnothing$ because Γ is a member thereof. By Theorem 3, this implies that $\bigcap\{U_\phi : \phi \in \Sigma\} \neq \varnothing$. Therefore, there is some $T \in Th$ such that $\phi \in T$ for every $\phi \in \Sigma$. Since $T \in Th$ is satisfiable, so is Σ. So (Com) holds.

The two just-mentioned proofs of (Com) are premised on $\mathcal{M}$ and Th being compact. Now the problem is how to show their compactness. As promised, our way of showing this uses the notion of Stone spaces of Boolean algebras instead of those in the existing literature mentioned previously.

For that purpose, let us first construct the Lindenbaum algebra of PC in the same way that we used for SC. Let Fml be the set of all formulas (including sentences) of $\mathcal{L}$. Define an equivalence relation $\backsim$ on Fml in the same way as Definition 11: $\phi \backsim \psi$ iff $\vdash_{PC} \phi \leftrightarrow \psi$. Similarly, for $\phi \in Fml$, let $[\phi]$ be $\{\psi : \phi \backsim \psi\}$, i.e. its equivalence class under the equivalence relation. Let $Fml^{\backsim}$ be the class of all $[\phi]$. Then, define a relation $\leqslant$ on $Fml^{\backsim}$ in the same way as Definition 12: $[\phi] \leqslant [\psi]$ iff $\vdash_{PC} \phi \to \psi$. As can easily be shown, the Lindenbaum algebra $(Fml^{\backsim}, \leqslant)$ of PC is a Boolean algebra.

Now we construct a subalgebra of $(Fml^{\backsim}, \leqslant)$. Let $Sent$ be the set of all sentences of $\mathcal{L}$. Then, $Sent^{\backsim}$ is a proper subset of $Fml^{\backsim}$. It is not hard to see that $Sent^{\backsim}$ is closed under the operations of join, meet, and complementation.[8] Therefore, $(Sent^{\backsim}, \leqslant)$ is a subalgebra of $(Fml^{\backsim}, \leqslant)$ and is a Boolean algebra, too. Let $S(Sent^{\backsim})$ be the set of all ultrafilters in $Sent^{\backsim}$. For $[\phi] \in Sent^{\backsim}$, let $u([\phi]) = \{U \in S(Sent^{\backsim}) : [\phi] \in U\}$. Then, the set $\{u([\phi]) : [\phi] \in Sent^{\sim}\}$ is a base for $S(Sent^{\backsim})$ with some topology, say, $\mathcal{T}_s$ (this topology is unique). So we have a Stone space $(S(Sent^{\backsim}), \mathcal{T}_s)$.

There does not appear to be any one-one correspondences between $S(Sent^{\backsim})$ and $\mathcal{M}$. For there are at most k sentences in our language $\mathcal{L}$ because it contains at most k symbols. Nevertheless, the cardinality of $\mathcal{M}$ cannot be pinned down. In contrast, there indeed exists a one-one correspondence between $S(Sent^{\backsim})$ and Th, as shall be shown below.

In the case of SC, for any ultrafilter U, there is a valuation v such that $v(\phi) = 1$ if and only if $[\phi] \in U$, as is shown in (*). This has a counterpart in PC:

Lemma 5. *For any $U \in S(Sent^{\backsim})$ and $\phi \in Sent$, the set $V = \{\phi : [\phi] \in U\}$ is satisfiable.*

Proof. We claim that V is consistent. For otherwise there would be a sentence ψ such that ψ and $\neg\psi$ are derivable from V in S. Hence, there would be some finite $\phi_1, ..., \phi_n \in V$ such that $\{\phi_1, ..., \phi_n\} \vdash_{PC} \psi \wedge \neg\psi$. This together with the fact that $[\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n] \in U$ implies that $[\psi]$ and $[\neg\psi]$ are members of U. This, however, contradicts the fact that U is an ultrafilter.

At this point, we might be tempted to derive the satisfiability of V from its consistency straightforwardly. This is, however, not legitimate because the theorem of completeness is not presupposed here. We have to construct a model M for it instead.

Let D be the countable set of individual constants of $\mathcal{L}$. For any n-place predicate letter P (n is a natural number larger than 0) of the language, we assign it the n-ary relation R which is defined as follows: R holds between $a_1, ..., a_n$, if and only if $[P(a_1, ..., a_n)] \in U$. Moreover, for every constant a of $\mathcal{L}$,

[8]Suppose $[\phi], [\psi] \in Sent^{\backsim}$. Then, $[\phi] \sqcap [\psi] = [\phi \wedge \psi] \in Sent^{\backsim}$. Similarly, $[\phi \vee \psi] \in Sent^{\backsim}$, and $[\neg\phi] \in Sent^{\backsim}$.

we assign a to itself. The set D and the two assignments constitute a countable $\mathcal{L}$-structure M. Now we claim that (+) is true:
(+) $M \vDash p$ holds for every $\phi \in V$ i.e. M is a model of V.

This can be shown by induction on $num(\phi)$–the number of logical symbols ($\wedge$, $\neg$, and $\forall$) occurring in $\phi \in V$.

1. $num(\phi) = 0$.

Since ϕ is a sentence, ϕ is of the form $P(a_1, ..., a_n)$. $M \vDash \phi$ iff $(a_1, ..., a_n) \in R$ iff $[P(a_1, ..., a_n)] \in U$. But since $\phi \in V$, $[P(a_1, ..., a_n)] \in U$.

2. $num(\phi) = 1$.

In this case, ϕ is of the form (2.1) $\psi \wedge \chi$, or (2.2)$\neg\psi$, or (2.3) $\forall x P(a_1, ..., a_n, x)$, where ψ and χ are atomic sentences.

In case 2.1, $[\psi \wedge \chi] \in U$. Since $[\psi \wedge \chi]$ is less than $[\psi]$ and $[\chi]$ and U is a filter, both $[\psi]$ and $[\chi]$ are members of U. Hence, M is a model of ϕ.

In case 2.2, ϕ is $\neg\psi$. M is a model of ϕ iff $[\psi] \notin U$. Since U is an ultrafilter, $[\psi] \notin U$.

In case 2.3, M is a model of ϕ iff for every $a \in D$, $(a_1, ..., a_n, a) \in F$, iff for every n, $[P(a_1, ..., a_n, a)] \in U$. Since $\forall x P(a_1, ..., a_n, x) \rightarrow P(a_1, ..., a_n, a)$ is a theorem of PC and U is a filter, $[P(a_1, ..., a_n, a)] \in U$.

3. Suppose the claim (+) is true if $num(\phi)$ is less than k. We show that it is true when $num(\phi)$ is k.

3.1 ϕ is $\psi \wedge \chi$, where the sum of ψ and χ is k.
$[\psi]$ and $[\chi]$ are members of U. So by the supposition, M is a model of ψ and χ; hence, it is a model of $\psi \wedge \chi$.

3.2 ϕ is $\neg\psi$, where $num(\psi)$ is $k - 1$.
$[\psi] \notin U$. So by the supposition, M is not a model of ψ; hence, it is a model of $\neg q$.

3.3 ϕ is $\forall x \psi(x)$, where if there is any free variable occurring in the formula ψ, it is x, and $num(\psi(x)) = k - 1$. Recall that D is the set of all individual constants of $\mathcal{L}$. Thus, M is a model of ϕ iff it is a model of every $\psi(a)$, where $a \in D$ and $\psi(a)$ is the result of substituting a for all occurrences of x. Since $[\psi(a)] \in U$ holds for every $a \in D$ and $num(\psi(a)) = k - 1$, by the supposition, M is model of $\psi(a)$. ■

With all the topological and algebraic resources at our disposal, we come to prove the following theorem implying (Com):

Theorem 8. *There is a homeomorphism from $(Th, \mathcal{T}_{th})$ to $(S(Sent^{\frown}), \mathcal{T}_s)$.*

Proof. let h be such that for any $T \in Th$, $h(T) = \{[\phi] : \phi \in T\}$. We claim that $h(T) \in S(Sent^{\frown})$, that is, it is an ultrafilter in $S(Sent^{\frown})$. For every $[\phi] \in Sent^{\frown}$, either $[\phi] \in h(T)$ or $[\phi]^* \in h(T)$. For if neither $[\phi] \in h(T)$ nor $[\phi]^* \in h(T)$, then $\phi \notin T$ and $\neg\phi \notin T$, which contradicts the fact that T is a maximal theory. Moreover, it cannot be the case that both $[\phi] \in h(T)$ and $[\phi]^* \in h(T)$. For otherwise, $\phi \in T$ and $\neg\phi \in T$, which contradicts the fact that T is satisfiable. So by Theorem 1, $h(T)$ is an ultrafilter. Thus, h is a function from Th to $S(Sent^{\frown})$.

As can easily be shown, h is one-one (injective). We show that it is also onto, i.e. surjective. For any $U \in S(Sent^{\frown})$, the set $T = \{\phi : [\phi] \in U\}$ is mapped by h onto U if it is a member of Th. As is already shown in Lemma 5, T is consistent. Additionally, T is maximal. For if there were some sentence ϕ such that neither ϕ nor $\neg\phi$ are in it, then neither $[\phi]$ nor $[\neg\phi]$ would be in U. Nevertheless, this would contradict the fact that U is an ultrafilter. Since T is a maximal consistent set, it is, by Lemma 5, satisfiable. Hence, $T \in Th$.

Finally, we show that h maps open sets to open sets, that is, for any subset X of Th, $X \in \mathcal{T}_{th}$ iff $h[X] \in \mathcal{T}_s$. We just prove the direction from left to right of the biconditional and the other direction can be shown in a similar way. Suppose $X \in \mathcal{T}_{th}$. Then, there is subset B of the base of the topology such that $X = \bigcup_{U_\phi \in B} U_\phi$. $h[X] = \bigcup_{U_\phi \in B} h[U_\phi]$. We claim that $h[U_\phi] = u([\phi])$. For every $T \in U_\phi$, $h(T) \in u([\phi])$. This is so because $h(T)$ is an ultrafilter and $[\phi] \in h(T)$. So $h[U_\phi] \subseteq u([\phi])$. Additionally, for every $U \in u([\phi])$, U is an ultrafilter and $[\phi] \in U$. As shown in the last paragraph, $\{\psi : [\psi] \in U\} \in Th$. We claim that it is a member of U_ϕ, namely, $\phi \in \{\psi : \psi \in U\}$. This is so because $[\phi] \in U$. Due to the construction of h, $h(\{\psi : [\psi] \in U\}) = U$. Therefore, $U \in h[U_\phi]$. So $u([\phi]) \subseteq h[U_\phi]$. Thus, $h[U_\phi]$ is an open set in $\mathcal{T}_s$; consequently, by Definition 5, $X \in \mathcal{T}_s$. ■

By Definition 9 and Theorem 5, $S(Sent^{\frown})$ is compact. Since there is a homeomorphism from Th to $S(Sent^{\frown})$, Th is, by Theorem 4, compact. So (Com) holds.

6. Concluding remarks

Our proof of the compactness theorem for classical logic consists of several crucial steps. Firstly, the problem of the compactness of the logical system (SC or PC) is reduced to that of the compactness of some topological space. Secondly, the Lindenbaum algebra of the system is set up and is then shown to be a Boolean algebra. Thirdly, the Stone space of the algebra is shown to be compact. Fourthly, the set of sentences whose equivalent classes are members of an ultrafilter in the algebra is shown to be satisfiable (or all sentences of the set can be assigned the truth-value 1 simultaneously). Finally, a homeomorphism is constructed between the topological space and the compact Stone space.

This approach is easy to be generalized to the proof of the compactness theorem for (both propositional and predicate) modal logic. However, instead of providing a detailed argument in support of the viability of the generalisation, I shall rest content with giving an outline of the proof by taking any strong modal predicate system S as an example.[9] Such proof proceeds following the just-mentioned steps. Firstly, we reduce the issue of the compactness of S to that of the compactness of some topological space, which is the set of all maximal, satisfiable theories in the language of S. Secondly, we construct the Lindenbaum algebra of S in the same way that we used for classical logic previously. Thirdly, the Stone space of the algebra (which is a Boolean algebra) can be shown to be compact. Fourthly, we have to prove that the set of sentences whose equivalent classes are ultrafilters in the algebra is satisfiable. This can be done by appealing to the notion of canonical models [Cresswell et al., 1996, p. 261]. Finally, we show that the Stone space and the topological space are homeomorphic.

Compared with the already existing methods of proof of the compactness theorem for classical logic in the literature, which also bypass the completeness theorem, our method of proof has two merits. Firstly, it appeals neither to Tychonoff' Theorem nor to the notion of ultraproducts nor to the compactness of Cantor sets. Instead, it makes uniform use of the concept of Stone spaces of Boolean algebras. Secondly, it admits of a natural generalisation to modal logic. Nevertheless, our method also has a disadvantage: it presupposes strong logical systems.

Acknowledgements. The author disclosed receipt of the following financial support for the research of this article: This work was supported by "the Fundamental Research Funds for the Central Universities", grant No. 20103227626.

References

Baldwin et al., 1974 – Baldwin, J.T. and Plotkin, J.M. "A Topology for the Space of Countable Models of a First Order Theory", *Mathematical Logic Quarterly*, 1974, Vol. 20, pp. 173–178.

Bell et al., 2006 – Bell, J.L., Slomson, A.B. *Models and Ultraproducts: An Introduction.* New York: Dover Publications, 2006.

[9]Here by 'strong' is meant that all axioms of SC are theorems of S. To be more precise, for any axiom of SC, we replace propositional variables occurring in it by formulas in the language of S in a uniform way. The formulas obtained in this way must be theorems of S if S is strong.

Beth, 1951 – Beth, E.W. “A topological proof of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel”, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, series A*, 1951, Vol. 54, pp. 436–444.

Cowen, 1970 – Cowen, R.H. “A new proof of the compactness theorem for propositional logic”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1970, Vol. 11, pp. 79–80.

Cresswell et al., 1996 – Cresswell, M.J., Hughes, G.E. *A New Introduction to Modal Logic*. London: Routledge, 1996.

Dawson, 1993 – Dawson, J.W. “The Compactness of First-Order Logic:From Gödel to Lindström”, *History and Philosophy of Logic*, 1993, Vol. 14, pp. 15–37.

Dunn et al., 2001 – Dunn, J.M., Hardegree, G. *Algebraic Methods in Philosophical Logic*, Oxford: Oxford University Press, 2001.

Frayne et al., 1962 – Frayne, T., Morel, A.C., Scott, D.S. “Reduced Direct Products”, *Fundamenta Mathematicae*, 1962, Vol. 51, pp. 195–228.

Gamelin et al., 1999 – Gamelin, T.W., Greene, R.E. *Introduction to Topology*, 2nd, New York: Dover Publications, 1999.

Marker, 2003 – Marker, D. *Model Theory: An Introduction*, New York: Springer, 2003.

Paseau, 2011 – Paseau, A. “Proofs of the Compactness Theorem”, *History and Philosophy of Logic*, 2011, Vol. 32, pp. 73–98.

Paseau, 2022 – Paseau, A.C. “Compactness Theorem”, *Internet Encyclopedia of Philosophy*. 2022. [`https://iep.utm.edu/compactness-theorem/`, accessed on 11.10.2022].

Rado, 1949 – Rado, R. “Axiomatic Treatment of Rank in Infinite Sets”, *Canadian Journal of Mathematics*, 1949, Vol. 1, pp. 337–343.

Tarski, 1950 – Tarski, A. “Some Notions and Methods on the Borderline of Algebra and Metamathematics”, Cambridge: American Mathematical Society, 1950, Vol. 1, pp. 705–720.

Информация для авторов

• Журнал «Логические исследования» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики см. на сайте журнала `http://logicalinvestigations.ru`)

• Все статьи, планируемые к публикации в журнале «Логические исследования», проходят процедуру анонимного рецензирования.

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате $\LaTeX\,2_\varepsilon$

• При подготовке рукописи в $\LaTeX\,2_\varepsilon$ необходимо использовать стилевой класс `LIarticle.cls` и шаблон `LI_template.tex` (если рукопись на русском языке) или `LI_template_eng.tex` (если рукопись на английском языке), которые размещены в правилах предоставления рукописей на сайте `http://logicalinvestigations.ru`. Здесь же размещены подробные рекомендации по подготовке рукописи.

• Объем рукописи не должен превышать 25 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, списоки литературы, аннотации (на русском и английском языках).

Статьи следует направлять в электронном виде в редакцию через сайт
`http://logicalinvestigations.ru`

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: http://logicalinvestigations.ru)

• All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process.

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the LaTeX 2_ε format

• While typesetting a paper, the class file `LIarticle.cls` and the template `LI_template_eng.tex` should be used; both files can be accessed at http://logicalinvestigations.ru. Here you can also find detailed guidelines for preparing your paper.

• Papers should not exceed 25 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

Submissions should be sent in electronic form through the website:
http://logicalinvestigations.ru

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2023. Том 29. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: *ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.*

Подписано в печать с оригинал-макета 18.05.2023.
Формат 70 x 100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Для набора греческого текста использован пакет Teubner.
Усл. печ. л. 13,65. Уч.-изд. л. 9,4. Тираж 1 000 экз. Заказ № 13.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Разработка LaTeX-класса стилевого оформления оригинал-макета: *А.Е. Коньков*

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
http://logicalinvestigations.ru