Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 29. Number 2

Moscow
2023

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 29. Номер 2

Москва
2023

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2023. Volume 29. Number 2

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the catalogue of Russian Post is ПН145

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com
Website: https://logicalinvestigations.ru

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2023. Том 29. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 гг.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «09.00.00 – философские науки»)

Подписной индекс каталога Почты России — ПН145

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 426

Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`

Сайт: `https://logicalinvestigations.ru`

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 2

TABLE OF CONTENTS

Philosophy and logic

Vladimir I. Shalack
A natural generalization of the Turing computability model 9

Symbolic logic

Mikhail Rybakov
A simple example of blocking the Craig trick 36

Non-classical Logic

Leonid Yu. Devyatkin
On the three-valued expansions of Kleene's logic 59

Alexander A. Pechenkin
Quantum logic in the context of the mathematical foundation of quantum mechanics 89

Natalya E. Tomova
On the question of the criteria for the paracompleteness of logics 104

Evgeny V. Borisov
A nonhybrid logic for crossworld predication 125

Vladimir L. Vasyukov
An axiomatization of quantum computational logic 148

Information for authors 164

В НОМЕРЕ

Философия и логика

В.И. Шалак
Естественное обобщение тьюринговой модели вычислимости 9

Символическая логика

М.Н. Рыбаков
Простой пример блокировки аргумента Крейга 36

Неклассическая логика

Л.Ю. Девяткин
О трехзначных расширениях логики Клини 59

А.А. Печенкин
Квантовая логика в контексте математического обоснования квантовой механики 89

Н.Е. Томова
К вопросу о критерии параполноты логик 104

Evgeny V. Borisov
A nonhybrid logic for crossworld predication 125

Vladimir L. Vasyukov
An axiomatization of quantum computational logic 148

Информация для авторов 163

Логические исследования
2023. Т. 29. № 2. С. 9–35
УДК 168.3

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 2, pp. 9–35
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-9-35

В.И. Шалак

Естественное обобщение тьюринговой модели вычислимости

Владимир Иванович Шалак
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: shalack@mail.ru

Аннотация: Тьюрингова модель вычислимости — это модель алгоритмических символьных преобразований, которые в принципе способны выполнить люди. Тезис Чёрча-Тьюринга — утверждение о полноте построенных ими формализмов относительно данной модели. Алгоритмические преобразования применимы не только к символам, но и к физическим предметам. Некоторые из таких преобразований можно представлять и анализировать средствами тьюрингова формализма путем специального символьного кодирования. В то же время существуют физические алгоритмы, которые выходят далеко за рамки стандартной тьюринговой модели. Примерами являются кулинарные рецепты, инструкции медицинских процедур, описания технологических процессов и пр. Их общей чертой является не только оперирование физическими предметами, но и обращение к внешним физическим процессам. Общему определению алгоритма, как предписания о последовательности действий для получения искомого результата, удовлетворяет явление целенаправленного поведения. Символьные вычисления — частный случай целенаправленного поведения.

Для анализа целенаправленного поведения могут быть использованы модели комбинированной временной и динамической логики. Такой анализ позволяет прийти к выводу, что существуют по крайней мере три вида элементарных правил, лежащих в основе сложного целенаправленного поведения: 1) пассивно-процессуальные — *«Если имеет место процесс P, то ничего не делай, а дождись, когда он сам приведет тебя к искомой цели G»*; 2) конструктивные — *«Если имеет место C, выполни действие d, непосредственный результат которого и есть искомая цель G»*; 3) конструктивно-процессуальные — *«Если имеет место C, выполни действие d, чтобы его непосредственный результат R инициировал процесс P, который и приведет к искомой цели G»*. Комбинированная логика позволяет определить условия корректности данных правил. Конструктивно-процессуальные правила обладают свойством универсальности, так как к ним редуцируемы два других вида правил.

В работе дано определение Т-машин (телеологических машин), реализующих сложное целенаправленное поведение, и проведен их сравнительный анализ с машинами Тьюринга. Показано, что в рамках обобщенной модели алгоритмической вычислимости существуют функции, которые вычислимы в ней, но не вычислимы по Тьюрингу. В новой модели алгоритмы обладают статусом законов природы, связанных с возникновением и эволюцией живых существ. Алгоритмическая модель целенаправленного поведения естественным образом применима для описания и анализа социальной сферы.

Ключевые слова: алгоритм, вычислимость, эффективная вычислимость, тезис Чёрча-Тьюринга, модель вычислимости, целенаправленное поведение, целенаправленная деятельность, логический анализ, временная логика, динамическая логика

Для цитирования: *Шалак В.И.* Естественное обобщение тьюринговой модели вычислимости // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 2. С. 9–35. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-9-35

Цель работы

На тему истории и основ теории вычислимости написано много книг и статей. Целью настоящей работы является логический анализ общего определения понятия алгоритма и алгоритмической вычислимости, а также ответ на вопрос о существовании функций, вычислимых в предлагаемой обобщенной модели, но невычислимых в тьюринговой. Какими особыми чертами обладают вычислительные процессы в новой модели? Каков философский смысл обобщенной модели и каковы ее приложения?

1. Тезис Чёрча-Тьюринга

Утверждение о полноте формализмов А. Чёрча и А. Тьюринга относительно возможных эффективных символьных преобразований получило название *тезиса Чёрча-Тьюринга* [Copeland, 2022]. В формулировке Чёрча он гласит, что *функция, определенная на натуральных числах, эффективно вычислима, е.т.е. она λ-определима* [Church, 1936, C. 356]. Поскольку было доказано, что множество λ-определимых арифметических функций совпадает с множеством арифметических функций, которые вычислимы на машинах Тьюринга, тезис можно переформулировать иначе, что *функция, определенная на натуральных числах, эффективно вычислима, е.т.е. она вычислима на универсальной машине Тьюринга.*

Понятие эффективной вычислимости в формулировке тезиса не является математически строгим, но интуитивно вполне определено, так как под ним математики того времени понимали вычисление значений функций с помощью карандаша на бумаге, не прибегая ни к чему другому. Когда К. Гёдель ознакомился с результатами Чёрча, которые были получены и опубликованы на несколько месяцев раньше статьи А. Тьюринга [Turing, 1936]], он не поспешил согласиться с тем, что λ-определимость равнозначна эффективной вычислимости, поскольку не нашел убедительных аргументов в пользу того, что формульные преобразования λ-исчисления Чёрча способны охватить все возможные эффективные символьные преобразования математических выражений. Лишь после публикации Тьюринга, где были детально проанализированы карандашно-бумажные манипуляции человека-вычислителя и доказана равносильность обоих формализмов, Гёдель принял данный тезис.

Несмотря на то, что объектом исследований Чёрча и Тьюринга были символьные математические преобразования, полученные ими результаты в некоторых случаях могут быть распространены и на другие области. Для этого используется метод кодирования объектов области D словами W некоторого алфавита. Кодирование – это просто эффективное соглашение о соответствии $\alpha : D \to W$ между объектами D и словами W. Обратным к α будет соглашение о декодировании $\alpha^{-1} : W \to D$ слов W объектами D.

Пусть f является функцией $f : D \to D$. Будем говорить, что *функция* $f^* : W \to W$ *кодирует функцию* f, если и только если существуют такие соглашения кодирования α и декодирования α^{-1}, что для всякого $d \in D$ имеет место $f(d) = \alpha^{-1}(f^*(\alpha(d)))$. Наглядным образом это можно представить в виде следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & D \\ W \arrow[r, "f^*"] & W \arrow[u, "\alpha^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Рис. 1. Кодирование вычислимых функций

Чтобы распространить понятие вычислимости на область D, будем говорить, что *функция* f *вычислима*, если и только если существует такая вычислимая по Тьюрингу функция f^*, что f^* кодирует функцию f.

Например, вместо того, чтобы непосредственно физически собирать кубик Рубика, мы можем закодировать его состояния с помощью символов и составить программу, которая будет оперировать такими представлениями, отображая все преобразования на экране монитора. При желании, зная функции кодирования α и α^{-1}, соответствующие преобразования можно повторить и с реальным физическим кубиком.

Случилось так, что тезис Чёрча-Тьюринга был искажен, получив чересчур расширительную трактовку [Copeland, 2022]. Тьюринг доказал, что среди определенных им машин существует машина (на самом деле таких машин бесконечно много), способная моделировать вычисления любых других определенных им машин и получившая название *универсальной.* К сожалению, многие, ознакомившись с результатами Тьюринга по вторичным источникам, а не по оригиналу, попали в ловушку языка и стали интерпретировать доказательство существования *универсальной машины Тьюринга*, как доказательство существования машины, способной выполнять абсолютно любые алгоритмы. Это заблуждение оказалось очень живучим и в чем-то напоминает историю с вульгарной трактовкой термина *общая теория относительности*, что все относительно.

Для доказательства того, что универсальная машина Тьюринга способна выполнить абсолютно любые алгоритмы, необходимо доказать, что для любой алгоритмически вычислимой функции f существует кодирующая ее и вычислимая по Тьюрингу функция f^*, как это представлено на Рис. 1. Насколько известно автору, такого доказательства не существует.

Чёрч и Тьюринг некоторыми своими высказываниями сами дали повод для возникновения заблуждений. Например, Чёрч в [Church, 1936, с. 356] писал, что *каждая функция, для которой существует алгоритм вычисления значений, эффективно вычислима.* Очевидно, что такое употребление термина «алгоритм» без уточнения области применения позволяет интерпретировать его относящимся к любым объектам, а не только к символьным математическим выражениям. Тьюринг в работе [Turing, 1948] писал, что *логические вычислительные машины (выражение Тьюринга для машин Тьюринга) могут делать все, что можно было бы описать как эмпирические или чисто механические правила.* Поскольку описание алгоритма приготовления яичницы вполне эмпирично, можно заключить, что, по мнению Тьюринга, оно представимо символьными преобразованиями.

В итоге все это привело, как пишет Дж. Копленд [Copeland, 2022], к возникновению мифа о том, будто с помощью машин Тьюринга можно имитировать поведение любого человека или устройства, следующих явно установленным правилам. Этот миф с пагубными последствиями проник в философию сознания, теоретическую психологию, когнитивистику, информатику, искусственный интеллект, искусственную жизнь и другие области.

2. За пределами модели Тьюринга

В 1963 г. В.А. Смирнов [Смирнов, 1963] предложил следующее общее определение понятия алгоритма:

«В интуитивном, содержательном смысле под алгоритмом понимают общепонятное и однозначное предписание, какие и в каком порядке производить действия, чтобы получить искомый результат».

Данное определение достаточно общее и под него подпадают не только алгоритмы карандашно-бумажных вычислений, но и описания различных процедур физических измерений, медицинские протоколы лечения, кулинарные рецепты и многое другое. Книга «О вкусной и здоровой пище» — это большой сборник *общепонятных и однозначных предписаний, какие и в каком порядке производить действия, чтобы получить искомый результат.*

Простейшим примером, нарушающим расширительную трактовку тезиса Чёрча-Тьюринга, является алгоритм измерения температуры тела, который известен всем нам еще с детских времен:

Если вам нужно измерить температуру тела и у вас есть ртутный градусник, возьмите его и вставьте в подмышку, после чего подождите десять минут, затем достаньте градусник и посмотрите, до какого деления шкалы поднялся столбик ртути. Это и есть температура вашего тела.

Воспроизвести результат выполнения этого алгоритма, т.е. получить численное значение температуры тела, не выходя в физический мир, а лишь путем манипуляций с символами на бумаге, невозможно. Иными словами, если функцию измерения температуры обозначить посредством f, то невозможно найти такие f^*, α и α^{-1}, чтобы диаграмма на Рис. 1 коммутировала. В то же время алгоритм измерения температуры вполне надежен и состоит из одних лишь *чисто механических правил.*

Успех и убедительность формализации Тьюринга опирались на интуитивно понятную модель вычислений с помощью карандаша и бумаги. Для построения обобщенной модели вычислимости требуется найти более общую, но столь же интуитивно прозрачную модель. Ею может быть целенаправленное поведение некоторого агента, которое очевидным образом подпадает под общее определение алгоритма. Искомый результат из определения — это цель, к которой стремится агент путем совершения заданной последовательности действий. Стоит оглянуться вокруг, и мы сразу увидим множество примеров целенаправленного поведения, которые одновременно с этим интуитивно алгоритмичны.

Помимо символьных манипуляций человека-вычислителя, примерами новой модели будут и движение парусника против ветра путем смены галсов, и приготовление кулинарных блюд, и медицинские процедуры, и многие другие явления, которые в общем случае характеризуются поочередным выполнением конструктивных механических действий и обращением к природным процессам. В случае измерения температуры *вставить градусник в подмышку* — это механические действия, а *подождать десять минут* —

это передача управления природе, когда и происходит самое важное в этой процедуре.

3. Логическое представление

Из самого термина «целенаправленное поведение» следует, что оно направлено на некоторую цель, и что существует агент, который для достижения поставленной цели совершает ряд вполне определенных действий. При этом, как видно из приведенных примеров, агент взаимодействует с окружающей средой, а не замкнут исключительно в мире символов. С логической точки зрения, это означает, что модель целенаправленного поведения должна описываться как минимум некоторой комбинацией моделей временной и динамической логик.

В работе [Шалак, 2022] уже была сформулирована минимальная комбинированная временная и динамическая логика ***USD*** и доказана ее полнота относительно модельных структур, в которых на отношение временного порядка не налагается никаких ограничений. В настоящей работе мы слегка изменим определение модельной структуры, чтобы семантика лучше соответствовала излагаемым идеям.

3.1. Язык

1. $Prop$ — множество пропозициональных переменных;
2. Act — множество элементарных действий $\{d_0, d_1, d_2, ...\}$;
3. $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$ — логические связки;
4. $\boldsymbol{U}$ — двухместный временной оператор;
5. $)$, $($, $\rangle$, $\langle$ — технические символы.

Дескриптивные термины языка, предназначенного для описания целенаправленного поведения, помимо пропозициональных переменных включают конечный набор констант d_0, $d_1, \ldots,$ d_n для представления элементарных действий, которые человек может производить непосредственно, а именно — перемещать свое тело или его части в пространстве и прилагать усилия к предметам. Среди действий мы выделяем константу d_0 для представления воздержания от каких-либо действий. Напомним, что у Тьюринга элементарными были действия:

1. Ps — напечатать символ s;
2. E — стереть текущий символ;

3. R — переместиться на клетку вправо;

4. L — переместиться на клетку влево.

Для представления временных отношений и развивающихся во времени процессов мы включили в число исходных символов двухместный временной оператор ***U** (Until)*, смысл которого довольно прост. На стреле времени h истинность формулы ***U**(A,B)* в мире w означает, что *до тех пор, пока в некотором будущем относительно w мире v не станет истинно A, будет иметь место B*. Это можно проиллюстрировать следующим образом:

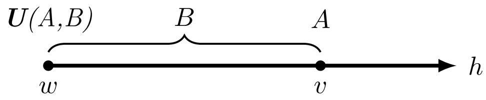

Рис. 2. Семантика формулы $\boldsymbol{U}(A, B)$

Определение 1. Понятие формулы определим следующим образом:

$A = p \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \supset B) \mid (A \equiv B) \mid \boldsymbol{U}(A, B) \mid \langle d \rangle A$, где $p \in Prop$, $d \in Act$.

Определение 2. Расширим язык посредством определений:

1. $\boldsymbol{F} A =_{def} \boldsymbol{U}(A, A \vee \neg A)$ — оператор *“когда-нибудь будет A”*;

2. $\boldsymbol{G} A =_{def} \neg \boldsymbol{F} \neg A$ — оператор *“всегда будет A”*;

3. $[d]\, A =_{def} \neg \langle d \rangle \neg A$ — оператор *“всякий раз после выполнения действия d истинно A”*;

4. $\boldsymbol{U}_r(A, B) =_{def} A \vee (B \wedge \boldsymbol{U}(A, B))$ — рефлексивный оператор *Until* [Goranko, Rumberg, 2022];

5. $\Box A =_{def} A \wedge \boldsymbol{G} A$ — диодорово определение оператора необходимости.

Замечание. Для краткого обозначения в метаязыке логических связок и кванторов будем использовать следующие символы:

1. «...&...» — «...и...»;

2. «...$\dot{\vee}$...» — «...или...»;

3. «... $\Rightarrow$ ...» — «если..., то...»;

4. «... $\Leftrightarrow$ ...» — «...если и только если...»;
5. «$\exists v$...» — «существует такой v, что...»;
6. «$\forall v$...» — «для всякого v имеет место...».

3.2. Модельная структура

Модельной структурой будем называть тройку $\langle W, <\ Br\rangle$, где

1. W — непустое множество возможных миров;
2. $< \subseteq W \times W$ — бинарное отношение временной достижимости на мирах;
3. $Br \subset W \times 2^W$ — множество путей возможного развития событий, удовлетворяющее следующим ограничениям:

   $< w, h > \in Br \Leftrightarrow w \in h \,\&\, \forall v(v \in h \Rightarrow w < v) \,\&\, \forall v \forall u(v \in h \,\&\, u \in h \Rightarrow v < u \dot{\vee} u < v \dot{\vee} v = u) \,\&\, \forall g((< w, g > \in Br \,\&\, h \subseteq g) \Rightarrow h = g)$.

   Пара $< w, h >$ принадлежит множеству путей Br, если и только если w предшествует в смысле временного отношения $<$ всем другим мирам множества h, все миры множества h сравнимы в смысле отношения $<$, и h максимально. В дальнейшем принадлежность $< w, h > \in Br$ будем для удобства записывать в виде $Br(w, h)$.

Наглядно модельную структуру можно изобразить следующим образом:

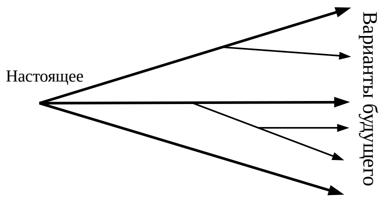

Рис. 3. Общий вид модельной структуры

Различные пути будущего развития событий имеют разную вероятность реализоваться. Физически возможный и наиболее вероятный вариант представлен жирной стрелкой. Тонкие стрелки сверху и снизу представляют физически маловероятные, но логически возможные варианты будущего развития, которые могут реализоваться с той или иной вероятностью при подходящем для этого стечении обстоятельств, в том числе и благодаря действиям агента целенаправленного поведения.

3.3. Модель

Модель $M = \langle W,\ <,\ Br,\ I\rangle$ — это четверка, где

1. $\langle W,\ <,\ Br\rangle$ — модельная структура;
2. I — функция интерпретации дескриптивных терминов языка:
   - $I(p) \subseteq W$;
   - $I(d_i) \subseteq <$, где $1 \leq i$;
   - $I(d_0) = \{\langle w, w\rangle\, |w \in W\}$.

3.4. Истинность в модели

Обозначим посредством $M, w \vDash A$ отношение «*формула A истинна в возможном мире w модели* $M = \langle W,\ <,\ Br,\ I\rangle$», задав его следующим образом:

1. Для логических связок стандартно;
2. $M, w \vDash\ \langle d\rangle\, A \Leftrightarrow_{def} \exists h(Br(w, h)\ \&\ \exists v \in h(\langle w, v\rangle \in I(d)\ \&\ M, v \vDash A))$ — в мире w истинна формула $\langle d\rangle\, A$, е.т.е. существует такой выходящий из w путь развития событий h и принадлежащий ему мир v, что v достижим из w посредством действия *I(d)* и в этом мире истинна формула A;
3. $M, w \vDash \boldsymbol{U}(A, B) \Leftrightarrow_{def} \exists h(Br(w, h) \,\&\, \exists v \in h(w < v \,\&\, M, v \vDash A \,\&\, \forall u(w < u < v \Rightarrow M, u \vDash B))$ — в мире w истинна формула $\boldsymbol{U}(A, B)$, е.т.е. существует такой выходящий из w путь развития событий h и принадлежащий ему мир v, что в v истинна формула A, а во всех предшествующих ему мирах истинна формула B.

Также зададим следующие отношения:

- $M \vDash A \Leftrightarrow_{def} \forall w(M, w \vDash A)$ — формула A истинна в модели M;
- $\vDash A \Leftrightarrow_{def} \forall M(M \vDash A)$ — формула A общезначима;
- $\exists M \exists w(M, w \vdash A)$ — формула A выполнима.

Можно показать, что имеет место следующая лемма.

Лемма.

1. $\exists h(Br(w,h) \,\&\, \exists v \in h(\langle w,v\rangle \in I(d) \,\&\, M,v \vDash A)) \Leftrightarrow \exists v(w < v \,\&\, \langle w,v\rangle \in I(d) \,\&\, M,v \vDash A))$;
2. $\exists h(Br(w,h) \,\&\, \exists v \in h(w < v \,\&\, M,v \vDash A \,\&\, \forall u(w < u < v \Rightarrow M,u \vDash B)) \Leftrightarrow \exists v(w < v \,\&\, M,v \vDash A \,\&\, \forall u(w < u < v \Rightarrow M,u \vDash B))$.

Из данной Леммы следует, что понятие максимального пути в определении модельной структуры и в понятии истинности в модели не добавляет ничего принципиально нового, и мы могли бы обойтись одним лишь отношением достижимости $<$, как в [Шалак, 2022]. Однако, понятие пути позволяет более наглядно представить взаимосвязь временного порядка возможных миров и действий агента, и потому в иллюстративных целях мы его сохраним.

4. Правила целенаправленного поведения

Целенаправленное поведение предполагает, что существует агент этого поведения, который в определенной последовательности совершает некоторые действия d, тем самым реализуя поведение для достижения поставленной цели G. Если агент всего один, а мы будем рассматривать именно этот случай, то его можно явным образом не указывать.

Цель G можно представлять в виде описания возможного будущего состояния окружающей среды, к которому стремится агент, т.е. некоторой формулой логики. В недетерминированной модели времени это состояние может реализоваться на одной или нескольких уходящих в будущее ветвях. Если вы пришли за покупками в магазин, но он еще закрыт, вы можете довериться наиболее вероятному пути развития событий и просто, ничего не делая, подождать открытия магазина. Но может оказаться, что ваша цель лежит на боковых маловероятных путях. Например, вам нужен кипяток, чтобы заварить чай. Если вы останетесь пассивны, то чайник сам по себе никогда не закипит. Тогда вы решаете изменить естественный ход событий, наливаете в чайник воду и ставите на огонь. В зависимости от характера цели и ее расположения на ветвях событий выделим три вида правил, которым может следовать агент.

4.1. Пассивно-процессуальные pp-правила

Вы хотите отправиться на прогулку, но на улице идет сильный ливень P. Вы знаете, что любой ливень рано или поздно закончится, и поэтому на основном пути развития событий формируете промежуточную цель G — *дождаться окончания ливня.*

Правило, которому вы собрались следовать для достижения поставленной цели G, можно сформулировать следующим образом: *«Если имеет место процесс P, то ничего не делайте, а дождитесь, когда он сам приведет вас к искомой цели G»*. Для краткости это правило мы можем записать в виде:

$$P \Rightarrow d_0 : P : G.$$

Эта запись не является формулой в языке заданной выше логики, а служит всего лишь сокращением выделенного курсивом предложения.

Необходимым условием его правильности является знание, что если имеет место процесс P, то через некоторое время он приведет к состоянию G. Это можно записать в виде формулы логики:

$$\Box(P \supset \boldsymbol{U}_r(G, P)).$$

Логическим обоснованием данного правила является следование:

$$P,\ \Box(P \supset \boldsymbol{U}_r(G, P)) \vDash \boldsymbol{U}_r(G, P)).$$

Правила такого вида будем называть *пассивно-процессуальными* или *pp-правилами*, поскольку они используют знание о законах природы, но не требуют от агента активных действий. В pp-правилах проявляется важная особенность целенаправленного поведения — включать и использовать в своих целях естественные природные процессы.

4.2. Конструктивные c-правила

Перед вами стоит стакан с водой C, и вы хотите ее выпить G. Сколько бы вы ни смотрели на воду, она скорее испарится, чем утолит вашу жажду. Это значит, что целевое состояние, к которому вы стремитесь, находится не на основном пути развития событий, а на боковом. Но в ваших силах изменить течение событий. Для этого достаточно совершить простые действия — взять стакан, поднести его ко рту и выпить воду. Действия d по достижению этой цели конструктивны, поскольку вы их полностью контролируете и их непосредственный результат совпадает с искомой целью G.

Правило, которому вы решили следовать, можно сформулировать следующим образом: *«Если имеет место C, то выполните действие d, непосредственный результат которого и есть искомая цель G»*. Это правило мы может записать в виде:

$$C \Rightarrow d : G.$$

Необходимым условием его правильности является знание, что всегда непосредственным результатом действия d является состояние G:

$$\Box(C \supset [d]\, G).$$

Логическим обоснованием данного правила является следование:

$$C,\ \Box(C \supset [d]\, G) \vDash [d]\, G.$$

Правила такого вида назовем *конструктивными*, или *c-правилами.* Их отличительной особенностью является то, что искомая цель G достигается сразу после выполнения действий d. Если вспомнить машины Тьюринга, все их правила конструктивны. Результат выполнения каждого из них достигается сразу после выполнения печати символа или перемещения по рабочей ленте.

4.3. Конструктивно-процессуальные cp-правила

Вас знобит, и вы хотите измерить температуру. Ни pp-правила, ни c-правила поведения не способны привести вас к желаемой цели. Но вам известен простейший алгоритм получения искомого результата. Достаточно *взять градусник, вставить его в подмышку, пассивно подождать 10 минут, а затем вынуть его и посмотреть, до какого деления шкалы поднимется столбик ртути.* Такой способ реализации целенаправленного поведения, являясь комбинацией конструктивных и пассивных правил, заслуживает того, чтобы быть выделенным в отдельный вид.

Правило, которому вы должны следовать, можно сформулировать следующим образом: *«Если имеет место C, выполните действие d, чтобы его непосредственный результат R инициировал процесс P, который и приведет к искомой цели G»*. Для краткости это правило мы можем записать в виде:

$$C \Rightarrow d : R : P : G.$$

Необходимые условия его правильности включают:

1. $\Box(C \supset [d]\, R)$ — знание, что выполнение действия d при условии C приводит к результату R;

2. $\Box(R \supset P)$ — знание, что R инициирует процесс P;

3. $\Box(P \supset \boldsymbol{U}_r(G, P))$ — знание, что в ходе протекания процесса P будет достигнуто целевое состояние G.

В случае с градусником и измерением температуры действия d заключаются в том, чтобы взять градусник и вставить его в подмышку, непосредственным результатом R которого станет контакт градусника с телом. В результате контакта начнется процесс теплопереноса P между телом и градусником и увеличение объема ртути $\Box(R \supset P)$. Через десять минут наступит тепловое равновесие и цель G измерения температуры тела будет достигнута $\Box(P \supset \boldsymbol{U}_r(G,P))$.

Логическим обоснованием данного вида правил будет следование:

$$C,\ \Box(C \supset [d]\, R),\ \Box(R \supset P),\ \Box(P \supset \boldsymbol{U}_r(G,P)) \vDash [d]\ \boldsymbol{U}_r(G,P).$$

Правила такого вида назовем *конструктивно-процессуальными*, или *cp-правилами.* Их важнейшей отличительной особенностью является то, что они предполагают знание эмпирических или теоретических закономерностей вида $\Box(R \supset P)$ и умение их инициировать и использовать. Возведение стен кирпичного дома предполагает не только умение складывать кирпичи, но и укрепление их цементным раствором, который требует времени для надежного затвердевания. Это еще один пример использования cp-правил.

Интересно, что и в животном мире мы можем найти примеры использования cp-правил. Например, медведи умеют ловить рыбу, но если они не сильно голодны, то не всегда съедают ее сразу. Вместо этого оставляют рыбу лежать на берегу, чтобы начавшиеся процессы разложения сделали ее более легко усваиваемой желудком. Здесь вряд ли можно говорить о каком-то знании. Скорее, это результат выработки и усвоения сложных конструктивно-процессуальных форм инстинктивного поведения.

Еще одной важной особенностью пассивно-процессуальных и конструктивно-процессуальных правил является то, что следование им не гарантирует достижения цели G в ходе протекания процесса P, а говорит лишь о возможности этого. Объясняется это тем, что любой природный процесс протекает в окружении других процессов, которые могут влиять друг на друга самым непредсказуемым образом. Вы можете ударить по мячу, чтобы забить гол в ворота, но вратарь окажется достаточно проворным и перехватит мяч. Вы можете поставить котелок на костер, чтобы вскипятить воду, но отвлечетесь и забудете о необходимости подбрасывать дрова. В результате костер потухнет, и вода не закипит. Это примеры целенаправленного поведения в соответствии с правилами, содержащими обращение к внешним процессам, которые не привели к желаемой цели. Заметим, что в примере с мячом агент, ударив по нему, уже никак не может изменить траекторию мяча. Ему остается лишь надеяться, что мяч окажется в сетке ворот. В примере с кипячением воды агент имеет возможность повлиять на то, чтобы цель все-таки была достигнута. Для этого нужно просто следить за огнем и подбрасывать дрова по мере необходимости. Иными словами, чтобы цель все-таки была достигнута, в ходе протекания процесса P агент должен его контролировать, осуществляя обратную связь с окружающей средой.

4.4. Редукция правил

Коль скоро cp-правила по смыслу являются комбинацией с-правил и pp-правил, можно предположить, что три вида правил целенаправленного поведения не являются независимыми. И это действительно так.

pp-правила

pp-правила отличаются от cp-правил лишь тем, что процесс P, который должен привести к достижению искомой цели G, в настоящее время уже протекает и потому нет никакой необходимости производить дополнительное действие d, результат R которого его бы инициировал. Это означает, что если в cp-правиле $C \Rightarrow d : R : P : G$ мы отождествим условие C с уже протекающим процессом P, выберем в качестве действия d воздержание от действий d_0, то получим правило $P \Rightarrow d_0 : P : P : G$, логическим обоснованием которого будет следование:

$$P,\ \Box(P \supset [d_0]\,P),\ \Box(P \supset P),\ \Box(P \supset \boldsymbol{U}_r(G,P)) \vDash [d_0]\ \boldsymbol{U}_r(G,P),$$

которое в силу общезначимости формул $\Box(P \supset [d_0]\,P)$ и $\Box(P \supset P)$ равносильно следованию для pp-правил

$$P, \Box(P \supset \boldsymbol{U}_r(G,P)) \vDash \boldsymbol{U}_r(G,P).$$

Таким образом, pp-правила $P \Rightarrow d_0 : P : G$ редуцируются к cp-правилам вида $P \Rightarrow d_0 : P : P : G$.

с-правила

Отличительной особенностью конструктивных правил является то, что непосредственный результат выполняемого агентом действия совпадает с искомым целевым состоянием. Это означает, что если в cp-правиле $C \Rightarrow d : R : P : G$ мы отождествим результат R действия d и P с целью G, то получим правило $C \Rightarrow d : G : G : G$, логическим обоснованием которого будет следование:

$$C,\ \Box(C \supset [d]\,G),\ \Box(G \supset G),\ \Box(G \supset \boldsymbol{U}_r(G,G)) \vDash [d]\ \boldsymbol{U}_r(G,G),$$

которое в силу общезначимости $\Box(G \supset G)$ и $\Box(G \supset \boldsymbol{U}_r(G,G))$, а также эквивалентности $\boldsymbol{U}_r(G,G) \equiv G$ равносильно следованию для с-правил

$$C,\ \Box(C \supset [d]\,G) \vDash [d]\,G.$$

Таким образом, с-правила $C \Rightarrow d : G$ редуцируются к ср-правилам вида $C \Rightarrow d : G : G : G$.

В результате мы получили, что конструктивно-процессуальные правила $C \Rightarrow d : R : P : G$ обладают свойством универсальности для представления элементарных шагов целенаправленного поведения.

5. Машины Тьюринга vs Телеологические машины

Как уже было сказано ранее, правила, описывающие функционирование машин Тьюринга, являются частным случаем рассмотренных нами конструктивных правил. Формальным отличием является то, что в правилах машин Тьюринга явным образом не указывается цель, ради которой они выполняются, поскольку цель всегда совпадает с непосредственным результатом действия. Например, результатом выполнения правила $C \Rightarrow Ps$ будет напечатанный в текущей клетке ленты символ s. Так как все действия выполняются в абстрактном математическом пространстве, никто и ничто не может помешать достичь цели, принимаемой по умолчанию. Для явного указания цели мы могли бы переписать это правило в формате конструктивных с-правил следующим образом:

$$C \Rightarrow Ps : \text{“\textit{в рабочей клетке содержится символ} } s\text{”}.$$

5.1. Машина Тьюринга

Программой машины Тьюринга MT является набор правил $Prog^{MT} = \{\dots, C_i \Rightarrow d_i, \dots\}$. Ее выполнение можно определить с помощью следующего псевдокода:

REPEAT
Найти правило $C_i \Rightarrow d_i$, условие которого C_i истинно, и выполнить предписанное действие d_i.
UNTIL Ни одно правило не найдено.

Результатом выполнения программы является состояние рабочей ленты после остановки.

5.2. Телеологическая машина (Т-машина)

По аналогии с машиной Тьюринга определим Т-машину, программой которой будем называть набор правил: $Prog^T : G = \{\dots, C_i \Rightarrow d_i : R_i : P_i : G_i, \dots\}$.

Программа телеологической машины содержит указание на цель G, ради которой она выполняется. Само же ее выполнение определим с помощью следующего псевдокода:

REPEAT
Найти правило $C_i \Rightarrow d_i : R_i : P_i : G_i$, условие которого C_i истинно, и выполнить следующие действия (d_i; ***while*** P_i *and not* G_i ***do*** d_0).
UNTIL Ни одно правило не найдено.
Если цель G имеет место, программа выполнена успешно.

Прокомментируем выполнение cp-правил вида $C_i \Rightarrow d_i : R_i : P_i : G_i$.

1. Если истинно условие C_i, выполняется действие d_i, результат которого R_i должен инициировать процесс P_i.

2. Машина переходит в состояние ожидания "***while*** P_i *and not* G_i ***do*** d_0" до тех пор, когда или процесс P_i прекратится, или будет достигнуто целевое состояние G_i.

3. В состоянии ожидания машина лишь контролирует внешнюю среду с точки зрения протекания процесса P_i и достижения целевого состояния G_i, а вся реальная работа выполняется внешними процессами. *Именно в этом пункте происходит выход за рамки тьюринговой вычислимости, поскольку результат перестает зависеть от непосредственных манипуляций агента и приобретает эмпирическое содержание, происходящее из внешнего мира.*

5.3. Сравнение машин Тьюринга и Т-машин

Формализм машин Тьюринга оказался настолько удачным, что на его основе удалось создать стройную математическую теорию вычислимости. Машины Тьюринга имеют конечный алфавит исходных символов, конечный набор элементарных действий и конечный набор правил. Это позволило задать единообразный способ их кодирования и декодирования (гёделизацию), что, в свою очередь, позволило доказать много важных теорем о свойствах вычислимых функций, в том числе доказать существование универсальной машины Тьюринга, способной моделировать вычисления любых других машин.

В случае с Т-машинами создание аналогичной универсальной машины невозможно по той причине, что их программы предполагают использование знаний о различных процессах окружающего мира, но эти знания всегда неполны и постоянно пополняются. Именно поэтому мы не можем создать одну Т-машину, способную выполнять любые алгоритмы целенаправленного поведения. Зато мы можем определить общую логическую схему (оболочку) Т-машин, что и было сделано в настоящей работе.

Анализ сложных форм целенаправленного поведения привел нас к формулировке абстрактной Т-машины, являющейся обобщением машины Тьюринга. Если физическими воплощениями машин Тьюринга в значительной степени являются компьютеры, то примерами Т-машин являются многочисленные роботизированные устройства и структуры, начиная с автоматических пылесосов и программируемых кухонных печей, и заканчивая сложными безлюдными производствами. Все они содержат в себе в качестве управляющих подсистем обычные вычислительные устройства, но главным для них является алгоритмически упорядоченное взаимодействие с окружающей средой путем обращения к внешним физическим процессам.

5.4. Функции, невычислимые по Тьюрингу

Простейшим примером таких функций является вычисление температуры тела, о котором уже было сказано ранее. Воспроизвести результат вычисления температуры путем каких-либо манипуляций с символами на бумаге невозможно. Этот пример подталкивает к более общему заключению, что подавляющее большинство процедур измерений в естественных науках является примерами функций, вычислимых в расширенной модели, но не вычислимых по Тьюрингу. Они так и называются процедурами, поскольку подпадают под определение алгоритма, но их результат невозможно получить на кончике пера, его знает только природа.

Во избежание недоразумений следует сразу заметить, что существование невычислимых по Тьюрингу, но вычислимых в расширенной модели функций не нарушает тезиса Чёрча-Тьюринга, поскольку упомянутый тезис относится лишь к символьным вычислениям, мы же расширили область вычислимости до более широкой области физических предметов и явлений.

5.5. Идеальные и реальные Т-машины

Описанная выше модель Т-машины может быть названа *идеальной*, поскольку предполагается, что она работает без каких-либо сбоев и достигает всех промежуточных целей. В этом случае достижение окончательной цели Т-программы зависит лишь от правильности ее составления. Такая модель удобна для изучения теоретических возможностей Т-машин. В физическом мире, а подавляющая часть примеров целенаправленного поведения относится именно к физическому миру, выполнение Т-программ может сталкиваться с различными препятствиями. *Реальные* Т-машины работают в окружении множества внешних физических процессов, и потому выполнение программ для достижения поставленных целей должно дополнительно контролироваться. В случае сбоев должны быть предусмотрены специальные действия, которые либо останавливают выполнение программы, и ее конечная цель не достигается, либо происходит выполнение корректирующих действий для продолжения выполнения программы.

Например, вы хотите прикурить с помощью зажигалки, крутите ее колесико, но оно застревает. В этом случае вы либо повторяете попытку, либо берете другую зажигалку или спички. Допустим, колесико зажигалки прокрутилось, но огонь не вспыхивает, нарушилась причинная связь между трением колесика о кремень и появлением искры. Это может быть связано с тем, что ваши пальцы оказались влажными, и эта влага попала на колесико. Вытираете пальцы и дуете на колесико, чтобы его просушить. Повторяете опыт. Искра появляется, газ загорается, но при попытке прикурить гаснет из-за ветра. Вы опять повторяете ту же последовательность действий, но теперь контролируете процесс горения, повернувшись к ветру спиной. Любой курильщик неоднократно находился в подобных ситуациях.

Если в идеальной Т-машине с каждым правилом связаны действия:

1. d;
2. ***while*** *P and not G* ***do*** d_0,

то в реальной Т-машине действия, связанные с правилами, могут быть детализированы следующим образом:

1. d;
2. *if not R then* ***CorrectOrExit***(R);
3. *if not P then* ***CorrectOrExit***(P);
4. ***while*** *P and not G* ***do Control***(P, G);
5. *if not G then* ***CorrectOrExit***(G).

Смысл подпрограмм ***CorrectOrExit*** понятен из приведенного выше примера с зажигалкой. Отдельно нужно остановиться на подпрограмме ***Control***, которая появилась вместо пустого действия d_0 и предназначена контролировать процесс P. Дело в том, что выполнение цикла ожидания "***while*** *P and not G* ***do*** d_0" не гарантирует достижения цели G. Цикл может прерваться по той причине, что прервется процесс P, а цель G так и не будет достигнута. Именно поэтому необходимо контролировать процесс P и вносить требуемые коррективы. При попытке прикурить от зажигалки на последнем шаге вы поворачиваетесь спиной к ветру, чтобы огонь не потух. Или другой пример. Вы запустили P ракету, чтобы поразить G самолет. Летчик обнаруживает ракету и совершает маневр уклонения. Если ракета продолжит лететь по прежней траектории, она промахнется. Чтобы этого не произошло, оборудование ракеты постоянно отслеживает траекторию цели, соотносит со своей и корректирует ее в случае необходимости. Такое поведение ракеты называется управлением на основе обратной связи.

Н. Винер в статье [Винер, 1983, с. 306] отождествляет полноценное телеологическое поведение с поведением, управляемым обратной связью. Столь категоричная точка зрения вполне объяснима, так как Винер занимался не только теорией, но и практической реализацией кибернетических систем.

6. Философское значение обобщенной модели вычислимости

Целенаправленное поведение как обобщение тьюринговой модели вычислимости поднимает ряд философски значимых вопросов и подталкивает к определенным заключениям.

6.1. Онтологический статус алгоритмов

Первый вопрос касается природы алгоритмов. Являются ли они математическим понятием или естественно-научным? Для поиска возможного ответа обратимся к понятиям закономерности и закона.

«Закономерности — относительно устойчивые и регулярные взаимосвязи между явлениями и объектами реальности, обнаруживающиеся в процессах изменения и развития. На знании закономерностей соответствующих явлений основываются как объяснения в науке, так и научные предвидения... Раскрытие новых законов — законов функционирования и поведения сложноорганизованных систем — ведет к изменениям в наших представлениях о структурной организации мира» [Сачков].

Если в качестве примеров выполнения алгоритмов в обобщенной модели взять приготовление блюд по кулинарным рецептам, различные медицинские процедуры и сельскохозяйственную деятельность, то все они характеризуются относительно устойчивыми и регулярными взаимосвязями между явлениями и объектами реальности и потому подпадают под определение закономерностей. Следуя рецепту приготовления окрошки, вы получите окрошку, а не борщ; сдав кровь на анализ, вы получите справку о ее биохимическом составе, а не рентгеновский снимок; посеяв весной зерна пшеницы, осенью вы соберете урожай пшеницы, а не кукурузы.

«Закон — (1) необходимая связь (взаимосвязь, отношение) между событиями, явлениями, а также между внутренними состояниями объектов, определяющая их устойчивость, выживание, развитие, стагнацию или разрушение; (2) утверждения, претендующие на отображение указанных связей и, как правило, входящие в состав научных теорий; (3) аксиомы и теоремы теории, предметом рассмотрения которых являются объекты, смысл и значение которых задается и эксплицируется самими этими теориями; (4) некоторые вырабатываемые и определенным образом поддерживаемые человеческим сообществом и его институтами требования и нормативные предписания, которые должны выполнять

физические, юридические лица и иные субъекты морали и права... Обычно специфика общественной жизни при уравнении исторических и природных закономерностей все-таки осознается. Их коренное отличие состоит в том, что вторые действуют стихийно, тогда как первые проявляются через деятельность людей, ставящих перед собой осознанные цели и задачи»[Сидоренко].

Описания конкретных алгоритмов, как заданной последовательности действий для получения искомого результата, подпадает под определение закона как утверждения, претендующего на отображение внутренних связей между состояниями объектов. Если в естественных науках общая логическая форма законов имеет вид $\forall x(Ax \supset Bx)$, и за связь между явлениями A и B отвечает природа, то отличительной характеристикой алгоритмов является то, что в них за связь между явлениями отвечает активный агент. Но этот агент существует не в потустороннем мире, а сам является неотъемлемой частью природы. Общая логическая форма алгоритмов, как законов, представлена в определении Т-машин и их выполнения.

Таким образом, понятие алгоритма обладает необходимым набором характеристик, чтобы претендовать на статус естественно-научного закона.

6.2. Происхождение алгоритмов

Открытым остается вопрос о происхождении алгоритмов. Являются ли они универсальной характеристикой природы, и потому гипотеза вычислительной Вселенной имеет право на жизнь [Ostroy, 2002; Schmidhuber, 1997; Zuse, 1970], или секрет их существования заключается в чем-то другом?

Жизнь на Земле от зарождения и до настоящего времени протекала в постоянно изменяющейся среде. Эти изменения зачастую несли угрозу существованию живых существ, которые, чтобы сохраниться, должны были вырабатывать и передавать по наследству эффективные реакции на различные благоприятные и неблагоприятные факторы внешней среды. Без этого жизнь на Земле, однажды появившись, быстро бы исчезла. Но этого не произошло, и сегодня мы наблюдаем огромное разнообразие живой природы.

За два года до смерти Ч. Дарвин опубликовал книгу [Дарвин, 1941], в которой описал реакции растений на внешние раздражители и их влияние на приспособление к условиям окружающей среды. Сегодня такие движения называют настиями и тропизмами. Пример настий — закрытие цветка ночью и раскрытие днем, а тропизмов — поворот подсолнуха вслед за солнцем. Особенностью тропизмов является то, что на одни и те же раздражители разные растения могут реагировать по-разному. Если подсолнух раскрывает лепестки навстречу солнцу, то в засушливых регионах листья эвкалипта поворачиваются ребром к солнцу, пропуская солнечные лучи мимо себя. Это говорит о том, что реакция на солнечные лучи не является универсальной для всех растений, что она направлена на достижение определенной цели. Кроме солнечных лучей (фототропизм), в качестве раздражителей могут выступать сила тяжести (геотропизм), химические соединения (хемотропизм), влага (гидротропизм), прикосновения (тигмотропизм) и др. Общая логическая форма настий и тропизмов может быть представлена в виде ср-правила "$C \Rightarrow d : R : P : G$". В случае подсолнухов C — это условие наличия солнечного света, d — поворот за солнцем, R — положение цветка перпендикулярно потоку света, P — процесс поглощения теплоты и лучей света, которые стимулируют рост растения G. Регулярность и массовость настий и тропизмов в мире растений позволяют говорить о специфичных для живой природы закономерностях. Но подобные реакции не ограничиваются одними растениями. Двигательные реакции существ, способных к перемещениям, называются таксисами. Как и в случае тропизмов и настий, выделяют фототаксис, хемотаксис, термотаксис, геотаксис, гидротаксис и др. Эти реакции также могут быть представлены в виде ср-правил "$C \Rightarrow d : R : P : G$". В качестве простейших примеров можно привести движение амеб, которые по-разному реагируют в зависимости от температуры воды и освещенности, реакцию комаров на свет лампы по вечерам и др.

Поведение более сложных живых существ изучается в теории рефлексов — опосредованных центральной нервной системой реакций на воздействия окружающей или внутренней среды организма. Рефлексы делят на безусловные и условные. Безусловные рефлексы наследуются генетически и характерны для всех особей данного вида. К ним относят пищевой рефлекс, оборонительный, половой, ориентировочно-исследовательский и др. Условные рефлексы возникают в ходе индивидуального развития, приводя к накоплению новых полезных навыков. Прикоснувшись к горячему чайнику, мы рефлекторно отдергиваем руку. Рефлексы также могут быть представлены в общей форме "$C \Rightarrow d : R : P : G$".

Последовательно нарастающая сложность и различия между настиями, тропизмами, таксисами и рефлексами говорит об их корреляции с эволюционными процессами живой природы.

Качественные изменения в алгоритмах целенаправленного поведения произошли с появлением Homo sapiens. Люди выделились из живой природы, когда вместо силы и быстроты движения конечностей стали опираться на свои мыслительные способности. Рефлексы никуда не делись, но в дополнение к ним люди научились создавать орудия труда, взяли в руки камень, палку, придумали топор, копье, лук и стрелы, стали использовать огонь. Огонь помогал выжить зимой, обогреть жилище, приготовить пищу, отпугнуть диких животных. Оседлав коней, люди научились быстро передвигаться. Чтобы не зависеть лишь от того, что дает сама природа, люди стали развивать земледелие и животноводство. Новые навыки также имели вид правил “$C \Rightarrow d : R : P : G$”, становились осознанными, фиксировались в языке и передавались другим людям посредством обучения. Отдельного упоминания заслуживает осознание и изучение различных закономерных связей $\Box(R \supset P)$ между природными явлениями, давшее начало наукам. Устойчивые алгоритмы сложной целенаправленной деятельности привели к возникновению технологий, ремесленному и промышленному производству.

Все сказанное позволяет высказать предположение, что современное понятие алгоритма возникло в результате абстракции от форм целенаправленного поведения живых существ, начиная с простейших и заканчивая людьми.

6.3. Алгоритмизация социальных процессов

Попытки сформулировать законы социальных изменений по образу и подобию законов естественных наук оказались малопродуктивными. Это можно объяснить тем, что социальные законы имеют дело не с пассивными атомами, как в естественных науках, а с активно действующими агентами, которыми могут выступать как отдельные люди, так и социальные структуры. Их общей характеристикой является осознанная целенаправленность, а не случайное броуновское блуждание. Именно благодаря целенаправленности мир людей коренным образом отличен от мира дикой природы.

С раннего детства нас учат ставить перед собой разумные цели, планировать их достижение и идти к ним. Вступая во взрослую жизнь, люди включаются в различные социальные структуры. Целостность и слаженное функционирование этих структур обусловлено тем, что составляющие их активные элементы подчиняются уже не физическим законам, а специальным нормам, обычно зафиксированным в соответствующих документах. В социальной сфере правила целенаправленного поведения сохраняют прежнюю форму “$C \Rightarrow d : R : P : G$”, но наполняются новым содержанием.

Проиллюстрируем это на простом примере. Вышестоящее в армейской иерархии лицо, отдавая устный или письменный приказ d, активирует один из нормативных документов R, который инициирует $\Box(R \supset P)$ со стороны подчиненных предписанные в нем реакции P, приводящие через некоторое время к достижению требуемой цели $\Box(P \supset \boldsymbol{U}_r(G, P))$. Сказанное об армии с определенными вариациями справедливо и для других социальных институтов. Функционирование учебных заведений, предприятий промышленного производства, научных учреждений осуществляется согласно нормативным документам, включающим уставы организаций, краткосрочные и долгосрочные планы деятельности, трудовые договоры. Это же относится и к регуляции межгосударственных отношений, где в роли активных агентов выступают отдельные государства или их коалиции.

Таким образом, общая схема алгоритмического (целенаправленного) поведения применима и в социальной сфере. Принципиальное отличие заключается лишь в том, что вместо элементарных физических действий $d_1, d_2, \ldots$ активный агент обращается к общепринятым социальным нормам (например, нормам морали) или нормативным документам, содержащим указания на права, обязанности и ответственность участников взаимодействия [Назарова, 1995; Шалак, 2021].

7. Заключение

Предложенная обобщенная модель вычислимости не противоречит подходу Тьюринга, а расширяет его. Тьюринг при построении своего формализма был в первую очередь заинтересован в решении проблемы разрешимости для логики предикатов первого порядка. Отсюда и его внимание именно к карандашно-бумажной алгоритмической вычислимости. Если бы в качестве интуитивно прозрачных моделей он рассматривал целенаправленную деятельность людей, то и формализм был бы более общим.

Понимание алгоритмов как законов природы, а не как чего-то искусственно придуманного Аль-Хорезми и другими математиками, делает более целостным наше представление об окружающем мире. Эволюция живой природы включает не только последовательные изменения строения живых существ, но и изменения правил, описывающих их поведение. Если *генами*, определяющими целенаправленное поведение, являются правила вида “$C \Rightarrow d : R : P : G$”, то Т-машины описывают *поведенческий генотип* живых существ. Предложенный вид правил поведения удобен для описания и анализа эволюционных изменений. То, что в правилах машин Тьюринга указание на цель отсутствует, а в обобщенных правилах необходимо, имеет важное значение. Достижение или недостижение поставленной цели G — это форма обратной связи с окружающей средой, которая может быть использована как статистическая оценка успешности правил в эволюционных механизмах. Это предоставляет новые средства для моделирования различных сфер живой природы и человеческого социума методами генетического программирования.

Литература

Винер, 1983 – *Винер Н.* Поведение, целесообразность и телеология // *Винер Н.* Кибернетика. М.: Наука, 1983. С. 297–307.

Дарвин, 1941 – *Дарвин Ч.* Способность к движению у растений // Сочинения. В 9 т. Т. 8. М.: Изд-во АН СССР, 1941.

Назарова, 1995 – *Назарова О.А.* Специфика объяснения в общественных науках. Дис. ... канд. филос. наук. М., 1995.

Сачков – *Сачков Ю.В.* Закономерности // Новая философская энциклопедия. URL: https://iphlib.ru/library/collection/newphilenc/browse/CL1/11 (дата обращения: 01.05.2023).

Сидоренко – *Сидоренко Е.А.* Закон // Новая философская энциклопедия. URL: https://iphlib.ru/library/collection/newphilenc/browse/CL1/11 (дата обращения: 01.05.2023).

Смирнов, 1963 – *Смирнов В.А.* Алгоритмы и логические схемы алгоритмов // Проблемы логики. М., 1963. С. 84–101.

Шалак, 2021 – *Шалак В.И.* Алгоритмическая модель социальных процессов // Философские проблемы информационных технологий и киберпространства. 2021. № 1. С. 46–62.

Шалак, 2022 – *Шалак В.И.* Телеология и целенаправленное поведение: логический анализ // Логические исследования. 2022. Т. 28. № 2. С. 9–39.

Church, 1936 – *Church A.* An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory // American Journal of Mathematics. 1936. Vol. 58. № 2. P. 345–363.

Copeland, 2022 – *Copeland B.J.* The Church-Turing Thesis // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / Edward N. Zalta (ed.). URL: https://plato.stanford.edu/entries/church-turing/ (дата обращения: 01.05.2023).

Goranko, Rumberg, 2022 – *Goranko V., Rumberg A.* Notes to Temporal Logic // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / Edward N. Zalta (ed.). URL: https://plato.stanford.edu/entries/logic-temporal/notes.html#note-4 (дата обращения: 01.05.2023).

Ostroy, 2002 – *Ostroy A.* God Is the Machine. URL: http://www.wired.com/2002/12/holytech/ (дата обращения: 01.05.2023).

Schmidhuber, 1997 – *Schmidhuber J.* A Computer Scientist's View of Life, the Universe, and Everything // Foundations of Computer Science. Lecture Notes in Computer Science. 1997. Vol. 1337. P. 201–208.

Turing, 1936 – *Turing A.M.* On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem // Proceedings of the London Mathematical Society. 1936–1937. Vol. 42. P. 230–265.

Turing, 1948 – *Turing A.M.* Intelligent Machinery // National Physical Laboratory Report, 1948.

Zuse, 1970 – *Zuse K.* Calculating Space. Cambridge, Mass: MIT Technical Translation AZT-70-164-GEMIT, Massachusetts Institute of Technology (Project MAC), 1970.

Vladimir I. Shalack

A natural generalization of the Turing computability model

Vladimir I. Shalack
Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: `shalack@mail.ru`

Abstract: The Turing computability model is a model of algorithmic symbolic transformations that can be performed by humans. The Church-Turing thesis is a statement about the completeness of their formalisms with respect to this model. Algorithmic transformations are applicable not only to symbols, but also to physical objects. Some of these transformations can be analyzed by means of Turing formalism by way of special character encoding. At the same time, there are physical algorithms that go far beyond the standard Turing model. Examples are recipes, medical procedures, technological processes, etc. Their common feature is not only the operation of physical objects, but also the appeal to external physical processes. The general definition of an algorithm as prescriptions for a sequence of actions to obtain the desired result is satisfied by well-known phenomena of goal-directed behavior. Symbolic calculations are a special case of goal-directed behavior.

Models of combined temporal and dynamic logic can be used to analyze goal-directed behavior. Such an analysis allows us to conclude that there are at least three types of elementary rules underlying complex purposeful behavior: 1) passively-processual — *«If there is a process P, then do nothing, but wait for it to lead you to the desired goal G»*; 2) constructive — *«If there is a C, perform action d, the immediate result of which is the desired goal G»*; 3) constructively-processual — *«If C takes place, perform action d so that its immediate result R initiates process P, which will lead to the desired goal G»*. The combined logic allows you to determine the conditions for the correctness of these rules. Constructively-processual rules have the property of universality, since two other types of rules are reduced to them.

In the paper we define a T-machine (teleological machine) that implements complex goal-directed behavior, and conduct a comparative analysis with Turing machines. It is shown that within the framework of the new algorithmic model there are functions that are computable in it, but not computable in the Turing model. In the new model, algorithms have the status of laws of living nature related to the emergence of life and evolution. The algorithmic model of goal-directed behavior can be naturally applied to describe and analyze many phenomena of the social sphere.

Keywords: algorithm, computability, effective computability, Church-Turing thesis, computability model, goal-directed behavior, goal-directed activity, logical analysis, temporal logic, dynamic logic

For citation: Shalack V.I. "Estestvennoe obobshchenie t'yuringovoj modeli vychislimosti" [A natural generalization of the Turing computability model], *Logicheskie Issledovaniya /*

Logical Investigations, 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 9–35. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-9-35 (In Russian)

References

Church, 1936 – Church, A. "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory", *American Journal of Mathematics*, 1936, Vol. 58, No. 2, pp. 345–363.

Copeland, 2022 – Copeland, B.J. "The Church-Turing Thesis", in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. by Edward N. Zalta, [`https://plato.stanford.edu/entries/church-turing/`, accessed on 01.05.2023]

Darvin, 1941 – Darvin, Ch. "Sposobnost' k dvizheniyu u rastenij" [The ability to move in plants], in: *Sochineniya. V 9 t.*, T. 8. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1941. (In Russian)

Goranko, Rumberg, 2022 – Goranko, V., Rumberg, A. "Notes to Temporal Logic", in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. by Edward N. Zalta. [`https://plato.stanford.edu/entries/logic-temporal/notes.html#note-4`, accessed on 01.05.2023]

Nazarova, 1995 – Nazarova, O.A. *Specifika ob'yasneniya v obshchestvennyh naukah* [The specifics of explanation in the social sciences]. Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni kandidata filosofskih nauk. Moscow, 1995. (In Russian)

Ostroy, 2002 – Ostroy, A. "God Is the Machine", [`http://www.wired.com/2002/12/holytech/`, accessed on 01.05.2023]

Sachkov – Sachkov, Yu.V. "Zakonomernosti" [Patterns], in: *Novaya filosofskaya enciklopediya*, [`https://iphlib.ru/library/collection/newphilenc/browse/CL1/11`, accessed on 01.05.2023] (In Russian)

Schmidhuber, 1997 – Schmidhuber, J. "A Computer Scientist's View of Life, the Universe, and Everything", *Foundations of Computer Science. Lecture Notes in Computer Science*, 1997, Vol. 1337, pp. 201–208.

Shalack, 2021 – Shalack, V.I. "Algoritmicheskaya model' sotsial'nykh protsessov" [Algorithmic model of social processes], *Filosofskiye problemy informatsionnykh tekhnologiy i kiberprostranstva*, 2021, No. 1, pp. 46–62.

Shalack, 2022 – Shalack, V.I. "Teleologiya i celenapravlennoe povedenie: logicheskij analiz" [Teleology and Goal-directed Behavior: A Logical Analysis], *Logicheskie issledovaniya*, 2022, Vol. 28, No. 2, pp. 9–39. (In Russian)

Sidorenko – Sidorenko, E.A. "Zakon" [Law], in: *Novaya filosofskaya enciklopediya*. [`https://iphlib.ru/library/collection/newphilenc/browse/CL1/11`, accessed on 01.05.2023] (In Russian)

Smirnov, 1963 – Smirnov, V.A. "Algoritmy i logicheskie skhemy algoritmov" [Algorithms and logical schemes of algorithms], in: *Problemy logiki*. Moscow, 1963, pp. 84–101. (In Russian)

Turing, 1936 – Turing A.M. "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1936–1937, Vol. 42, pp. 230–265.

Turing, 1948 – Turing, A.M. *Intelligent Machinery.* National Physical Laboratory Report, 1948.

Wiener, 1983 – Wiener, N. "Povedeniye, tselesoobraznost' i teleologiya" [Behavior, expediency and teleology], in: *Kibernetika*, ed. by Wiener N. Moscow: Nauka, 1983, pp. 297–307. (In Russian)

Zuse, 1970 – Zuse, K. *Calculating Space.* Cambridge, Mass: MIT Technical Translation AZT-70-164-GEMIT, Massachusetts Institute of Technology (Project MAC), 1970.

Логические исследования
2023. Т. 29. № 2. С. 36–58
УДК 16

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 2, pp. 36–58
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-36-58

Символическая логика
Symbolic logic

М.Н. Рыбаков

Простой пример блокировки аргумента Крейга*

Михаил Николаевич Рыбаков
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН.
Российская Федерация, 127051, г. Москва, Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Российская Федерация, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20.
E-mail: `m_rybakov@mail.ru`

Аннотация: Уильям Крейг сделал наблюдение, состоящее в том, что при довольно общих условиях выполняется следующее: если теория имеет рекурсивно перечислимую аксиоматику, то она имеет и рекурсивную аксиоматику. В работе обсуждаются эти условия и строится пример теории, когда условия теоремы Крейга не выполнены; в частности, построенная теория имеет рекурсивно перечислимую аксиоматику, но не имеет рекурсивной аксиоматики. При этом, добавив к правилам вывода построенной теории допустимое в ней правило, получаем теорию с тем же множеством теорем, но уже имеющую рекурсивную аксиоматику.

Ключевые слова: теорема Крейга, рекурсивная аксиоматика, рекурсивно перечислимая аксиоматика

Для цитирования: *Рыбаков М.Н.* Простой пример блокировки аргумента Крейга // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 2. С. 36–58. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-36-58

Введение

В 1953 г. Уильям Крейг представил наблюдение о рекурсивно перечислимых множествах [Craig, 1953], дающее интересное следствие для формальных теорий: при достаточно общих условиях теория, имеющая рекурсивно перечислимую аксиоматику, имеет и рекурсивную (т.е. разрешимую) аксиоматику. Отметим, что для многих теорий наличие рекурсивно перечислимой аксиоматики эквивалентно рекурсивной перечислимости множества всех теорем соответствующей теории. Действительно, рекурсивно перечислимая

* Работа выполнена при поддержке Научного фонда НИУ ВШЭ, проект № 23-00-022.

аксиоматика дает возможность[1] строить последовательно все выводы, откуда получаем рекурсивное перечисление всех теорем; а если множество теорем теории рекурсивно перечислимо, то его можно рассматривать как рекурсивно перечислимую аксиоматику. Таким образом, при достаточно общих условиях, рекурсивно перечислимые теории являются рекурсивно аксиоматизируемыми.

Рекурсивную аксиоматику удается получить из рекурсивно перечислимой, «встроив» в новые аксиомы натуральные числа, являющиеся в перечислении исходной аксиоматики номерами ее аксиом, эквивалентных в теории соответствующим аксиомам новой аксиоматики. Это можно сделать разными способами, выбор которых зависит как от языка теории, так и от имеющихся в ней правил вывода. Само наблюдение Уильяма Крейга — которое будем называть *теоремой Крейга* — состоит в следующем.

- Пусть C — замыкание рекурсивно перечислимого множества B по некоторому отношению R. Пусть существует такое примитивно рекурсивное отношение Q, что Q является симметричным подотношением R (т.е. если $Q(m, n)$, то $Q(n, m)$ и $R(m, n)$) и что для каждого $m \in B$ имеет место $Q(m, n)$ для бесконечно многих n. Тогда существует такое примитивно рекурсивное множество A, что C является замыканием A по R.[2]

Обоснование теоремы Крейга довольно короткое: достаточно заметить[3] что можно положить $A = \{n : \exists p\, (p \leqslant n \wedge Q(f(p), n)\}$, где $f\colon \mathbb{N} \to B$ — примитивно рекурсивная функция, перечисляющая B.

Описанный в приведенном доказательстве прием будем называть *приемом Крейга*, *аргументом Крейга*, или *трюком Крейга*[4].

Приведем примеры (некоторые из них взяты из [Craig, 1953]) техники применения аргумента Крейга в формальных теориях[5]. При этом требование примитивной рекурсивности функции $f\colon \mathbb{N} \to B$, перечисляющей B, заменим более слабым требованием рекурсивности.

[1] При выполнении некоторых (довольно часто выполненных) условий в отношении правил вывода.

[2] [Craig, 1953], с. 30, перевод автора.

[3] В [Craig, 1953], приводится подробное обоснование этого наблюдения; мы не приводим его здесь, т.к. в каждом конкретном случае ниже мы дадим свое простое обоснование каждого из сформулированных утверждений.

[4] Например, в [Kuznetsov et al., 2019] этот прием называется «Craig's trick».

[5] В этих примерах нужно учесть, что натуральными числами, фигурирующими в теореме Крейга, будут гёделевы номера формул языка соответствующей теории, в качестве R берется отношение выводимости в ней, а в качестве C — замыкание множества (гёделевых номеров) аксиом B этой теории по R.

Пусть F — множество формул языка некоторой теории T, имеющей рекурсивно перечислимую аксиоматику B; будем считать, что эта аксиоматика непуста. Тогда существует такая рекурсивная функция $f\colon \mathbb{N} \to B$, что

$$B = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Покажем, как можно изменить аксиоматику B, чтобы получить рекурсивную аксиоматику теории T.

Если язык теории T содержит $\wedge$, то аксиому $f(n)$ можно заменить на

$$g(n) = \underbrace{f(n) \wedge (f(n) \wedge \ldots (f(n) \wedge f(n)) \ldots)}_{n \text{ раз}}.$$

Тогда, если в теории T имеются правила вывода

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi},$$

то аксиоматику B можно заменить на аксиоматику

$$A = \{g(n) : n \in \mathbb{N}\},$$

и эта аксиоматика даст то же самое множество выводимых формул, поскольку формулы множества B выводимы из A, а формулы множества A выводимы из B. При этом A — рекурсивная аксиоматика. Действительно, чтобы выяснить, является ли произвольная формула φ аксиомой, можно сделать следующее. Сначала надо посмотреть, является ли φ кратной конъюнкцией одинаковых формул, в которой скобки ассоциированы вправо, и если да, то найти число таких конъюнктивных членов; пусть оно равно n. Затем нужно вычислить $f(n)$. Если $f(n)$ совпадет с повторяющимся конъюнктивным членом формулы φ, то φ — аксиома (аксиоматики A), поскольку $\varphi = g(n)$, а если не совпадает, то это не аксиома.

Отметим, что можно применить похожий трюк, если $\wedge$ лишь ассоциативна и идемпотентна (и тогда замкнутость по указанным выше правилам не требуется). Но тогда вместо $\wedge$ можно сходным образом использовать $\vee$ (при условии ассоциативности и идемпотентности), что тоже позволит получить рекурсивную аксиоматику из рекурсивно перечислимой.

В случае языков с импликацией аргумент Крейга тоже может быть реализован. Пусть φ_0 — некоторая формула, выводимая в T. Пусть также в теории T имеются правила вывода

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi}{\psi \to \varphi}.$$

Тогда без ограничений общности можем считать что каждая формула $f(n)$ не имеет вид $\varphi_0 \to \psi$. В этом случае аксиому $f(n)$ можно заменить на

$$g'(n) \quad = \quad \underbrace{\varphi_0 \to (\varphi_0 \to \ldots (\varphi_0}_{n \text{ раз}} \to f(n)) \ldots).$$

Получающаяся при этом аксиоматика

$$A' \quad = \quad \{g'(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

является разрешимой аксиоматикой T.

Если в теории T имеется правило подстановки, то можно поступить еще проще: достаточно в аксиоме $f(n)$ переименовать переменные так, чтобы первая переменная имела индекс n. В этом случае мы также получим разрешимую аксиоматику для T. Это важно, например, в случае эквациональных теорий, когда в языке имеется бесконечно много переменных, а логические связки (в частности, $\wedge, \vee, \to$) отсутствуют.

Приведенные примеры показывают, что во многих естественных рекурсивно перечислимых теориях рекурсивно перечислимая аксиоматика может быть заменена на рекурсивную с помощью аргумента Крейга. Закономерно возникает вопрос о том, когда это сделать нельзя. Ниже будет показано, как такое возможно; в [Kuznetsov et al., 2019] читатель может найти более сложный содержательный пример теории, основанной на исчислении Ламбека [Lambek, 1991], в которой трюк Крейга не работает.

Мы опишем довольно простые исчисления, множество правил вывода в которых устроено таким образом, что нарушаются условия применимости аргумента Крейга; эти исчисления позволяют доказывать теоремы, связанные с разложением натуральных чисел, бо́льших единицы, в произведение простых сомножителей. Будет показано, как над ними можно построить теории, имеющие рекурсивно перечислимую аксиоматику, но не имеющие рекурсивной аксиоматики. Затем мы покажем, что тем не менее добавление некоторых допустимых правил вывода создает условия для применения аргумента Крейга; мы обсудим некоторые из таких правил и дадим описание соответствующих рекурсивных аксиоматик.

1. Примеры использования аргумента Крейга

Прежде чем говорить о контрпримерах, покажем, что описанный выше прием Крейга действительно позволяет доказывать существование рекурсивной аксиоматики там, где явное ее построение затруднено по каким-либо техническим причинам. Для этого рассмотрим модальные и суперинтуиционистские логики, определяемые семантически элементарно определимыми классами шкал Крипке.

Используя технику перевода неклассических формул в классический язык первого порядка [van Benthem, 1983], несложно показать, что многие неклассические логики (в том числе предикатные) рекурсивно погружаются в классическую логику предикатов с равенством [Рыбаков, Чагров, 2000], в частности, это верно для суперинтуиционистских и нормальных модальных предикатных логик, полных относительно элементарно определимых классов шкал Крипке [Gabbay et al., 2009, Proposition 3.12.8], а также ненормальных и квазинормальных [Рыбаков, 2018], причем даже не обязательно полных относительно элементарно определимых классов шкал Крипке [Rybakov, Shkatov, 2018; Rybakov, Shkatov, 2020]. С учетом того, что классическая логика предикатов с равенством является конечно аксиоматизируемой и как следствие, рекурсивно перечислимой (более точно, Σ^0_1-полной [Harel, 1986]), мы мгновенно получаем, что рекурсивно погружаемые в нее логики тоже рекурсивно перечислимы, и, в частности, как было отмечено выше, имеют рекурсивно перечислимую аксиоматику. Трюк Крейга гарантирует, что в этом случае имеется и рекурсивная аксиоматика, хотя доказательства, основанные на использовании таких переводов и погружений, не строят эту аксиоматику явно.

2. Договоренность об обозначениях

Будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел (с нулем), $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N}^{++} = \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$.

3. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества

Напомним понятия рекурсивного и рекурсивно перечислимого множества[6]. Нас будут интересовать множества формул. Отметим, что, говоря о рекурсивности или рекурсивной перечислимости множеств формул, часто имеют в виду соответствующие свойства множеств гёделевых номеров этих формул. Мы не будем обращаться к гёделевым номерам, а определим эти понятия для множеств формул непосредственно. Тем не менее нам придется оговорить один момент: мы будем считать, что все формулы строятся в некотором конечном алфавите, в частности, переменные и константы — это тоже слова в таком алфавите (это своего рода замена гёделевой нумерации). Читатель, желающий получить приводимые ниже определения в терминах гёделевых номеров формул, может просто заменить в этих определениях вычислимые функции, аргументами которых являются формулы, на рекурсивные функции, аргументами которых являются гёделевы номера этих формул.

[6] Читатель, желающий глубже изучить теорию алгоритмов и вычислимых функций, может обратиться, например, к [Верещагин, Шень, 2017].

Пусть F — множество формул некоторого языка. Подмножество T множества F будем называть *рекурсивным*, если существует такая алгоритмически вычислимая функция $f\colon F \to \{0,1\}$, что для всякой формулы $\varphi \in F$

$$f(\varphi) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \in T, \\ 0, & \text{если } \varphi \notin T. \end{cases}$$

Непустое[7] подмножество T множества F будем называть *рекурсивно перечислимым*, если существует такая алгоритмически вычислимая функция $f\colon \mathbb{N} \to F$, определенная на всем множестве $\mathbb{N}$, что

$$T \quad = \quad \{f(n) : n \in \mathbb{N}\};$$

функцию $f\colon \mathbb{N} \to F$ при этом будем называть *перечисляющей функцией* для T.

4. Язык и теории

Будем рассматривать эквациональные теории в языке с бинарной предикатной буквой $\equiv$ (в качестве равенства), бинарной функциональной буквой $\cdot$ (умножение), множеством констант $\{\ulcorner a \urcorner : a \in \mathbb{N}^+\}$, при этом считаем, что каждая константа — это десятичная запись соответствующего числа[8], т.е. непустое слово в алфавите, состоящем из цифр от 0 до 9, не начинающееся с цифры 0. *Термами* в этом языке являются константы и произведения термов, т.е. выражения вида $(t \cdot s)$, где s и t — термы. Далее при записи термов мы будем опускать внешние скобки и вместо $(t \cdot s)$ будем писать $t \cdot s$. *Формулами* в этом языке являются выражения вида $t \equiv s$, где s и t — термы. Такие выражения называем также *тождествами*, или *равенствами термов*.

Нас будут интересовать аксиоматические теории, поэтому нам понадобятся понятия аксиомы и правила вывода. *Аксиомами* могут быть любые тождества; мы будем считать, что все рассматриваемые ниже теории содержат в качестве аксиом формулы вида $t \equiv t$, где t может быть любым термом (при этом теории могут содержать и еще какие-то аксиомы).

Примером правила вывода называем фигуру вида

$$\frac{A_1 \ldots A_n}{B}, \tag{$*$}$$

где $A_1, \ldots, A_n$ и B — конкретные формулы. *Правилом вывода* называем любое множество примеров правил вывода. Ниже, для того, чтобы задать

[7] Пустое множество тоже считается рекурсивно перечислимым.

[8] Этим обеспечивается конечность алфавита, над которым строится язык.

правило вывода, мы будем описывать общий вид примера правила вывода, входящего в это правило; соответственно, мы будем рассматривать только такие правила вывода, которые допускают подобное описание. Кроме того, мы ограничимся рассмотрением лишь конечных множеств правил вывода. Говорим, что *формула B получается из формул $A_1, \ldots, A_n$ с помощью правила R*, если правило R содержит пример правила вывода $(*)$.

Теорией называем любое множество формул.

Понятие вывода и отношение выводимости формул в теории T определяем обычным образом. Именно, *IR-выводом в теории T* называем конечный список формул, каждая из которых принадлежит множеству T или получена из предыдущих формул этого списка по одному из правил вывода, входящему в IR. Тождество $t \equiv s$ называем *IR-выводимым в T*, если $t \equiv s$ является последним элементом в некотором IR-выводе. Если тождество $t \equiv s$ является IR-выводимым в T, то пишем $T \vdash_{IR} t \equiv s$.

Для теории T и множества правил вывода IR определим теорию $[T]_{IR}$ как множество IR-выводимых в T формул:

$$[T]_{IR} \quad = \quad \{t \equiv s : T \vdash_{IR} t \equiv s\}.$$

Пусть $[T]_{IR} = [T']_{IR}$. Если T' — рекурсивное множество формул, то называем T' *рекурсивной аксиоматикой* теории T над множеством правил IR; если T' — рекурсивно перечислимое множество формул, то называем T' *рекурсивно перечислимой аксиоматикой* теории T над множеством правил IR. Теорию T называем *рекурсивно аксиоматизируемой над множеством правил IR*, если существует рекурсивная аксиоматика теории T над IR.

Ниже мы приведем примеры теорий, которые имеют рекурсивно перечислимую аксиоматику над некоторым множеством правил вывода, но при этом не являются рекурсивно аксиоматизируемыми над этим же множеством правил. Это даст контрпримеры к возможности применения аргумента Крейга.

5. Тривиальный контрпример

Пусть A — нерекурсивное рекурсивно перечислимое подмножество множества $\mathbb{N}^{++}$; как известно [Роджерс, 1972], такие множества существуют. Рассмотрим теорию T, аксиомами которой являются тождества вида $t \equiv t$ и тождества вида $\ulcorner n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner$, где $n \in A$. В качестве множества правил вывода рассмотрим пустое множество. Тогда в этой теории не выводима ни одна формула, отличная от аксиом, т.е. $[T]_\varnothing = T$. Поскольку $[T']_\varnothing = T'$ для любой теории T', получаем, что другой аксиоматики над пустым множеством правил у теории T нет. Но тогда из того, что для любого $n \in \mathbb{N}^{++}$

$$\ulcorner n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner \in T \quad \Longleftrightarrow \quad n \in A,$$

получаем, что теория T нерекурсивна и не имеет рекурсивной аксиоматики над пустым множеством правил. С другой стороны, T рекурсивно перечислима, поэтому имеет рекурсивно перечислимую аксиоматику над пустым множеством правил.

Отсутствие правил вывода делает такую теорию неинтересной. Отметим, что добавление некоторых «слабых» правил вывода сохраняет отсутствие рекурсивной аксиоматизируемости. Например, правило

$$\frac{t \equiv s}{s \equiv t},$$

где t и s — произвольные термы, не меняет существенно ситуацию, т.к. при добавлении такого правила дополнительно становятся выводимыми лишь термы вида $\ulcorner 1 \urcorner \equiv \ulcorner n \urcorner$, где $n \in A$.

6. Контрпример

Рассмотрим более интересный контрпример, построив нетривиальную теорию с нетривиальным множеством правил вывода.

Пусть T_0 — эквациональная теория (в описанном выше языке) с аксиомами вида

$$t \equiv t,$$

где t — произвольный терм. Пусть IR_0 — множество, состоящее из следующих правил вывода:

$$(E) \qquad \frac{t \equiv s \quad u \equiv \ulcorner 1 \urcorner}{t \equiv u \cdot s};$$

$$(S) \qquad \frac{t \equiv s}{s \equiv t};$$

$$(C) \qquad \frac{t \equiv (u \cdot v) \cdot s}{t \equiv (v \cdot u) \cdot s}; \qquad (C') \qquad \frac{t \equiv u \cdot v}{t \equiv v \cdot u};$$

$$(A1) \qquad \frac{t \equiv ((u \cdot v) \cdot w) \cdot s}{t \equiv (u \cdot (v \cdot w)) \cdot s}; \qquad (A1') \qquad \frac{t \equiv (u \cdot v) \cdot w}{t \equiv u \cdot (v \cdot w)};$$

$$(A2) \qquad \frac{t \equiv (u \cdot (v \cdot w)) \cdot s}{t \equiv ((u \cdot v) \cdot w) \cdot s}; \qquad (A2') \qquad \frac{t \equiv u \cdot (v \cdot w)}{t \equiv (u \cdot v) \cdot w};$$

$$(R) \qquad \frac{t \equiv s \quad u \equiv v}{t \cdot u \equiv s \cdot v};$$

$$(P) \qquad \frac{t \equiv (\ulcorner a \urcorner \cdot \ulcorner b \urcorner) \cdot s}{t \equiv \ulcorner ab \urcorner \cdot s}; \qquad (P') \qquad \frac{t \equiv \ulcorner a \urcorner \cdot \ulcorner b \urcorner}{t \equiv \ulcorner ab \urcorner},$$

где t, s, u, v, w — термы и $a, b \in \mathbb{N}^{++}$.

Вместо $\vdash_{IR_0}$ будем писать $\vdash_0$.

Ниже мы будем рассматривать теории, расширяющие T_0. Кроме того, потом мы расширим и множество IR_0 новыми правилами вывода, причем без изменения множества IR_0-выводимых формул в расширениях теории T_0, и покажем, что это может существенно повлиять на наличие рекурсивной аксиоматики теорий, расширяющих T_0. Но прежде опишем некоторые свойства самой теории T_0.

Лемма 1. *Пусть термы t и s отличаются друг от друга только порядком следования сомножителей и расстановкой скобок. Тогда $T_0 \vdash_0 t \equiv s$.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться аксиомами (т.е. формулами вида $t \equiv t$) и правилами (C), $(A1)$ и $(A2)$, а в случае термов с малым числом сомножителей — правилами (C'), $(A1')$ и $(A2')$. Технические детали доказательства мы оставляем читателю[9]. ■

Ввиду леммы 1 при записи термов мы можем опускать скобки и не учитывать порядок сомножителей. Опуская скобки, будем считать для определенности, что они ассоциированы вправо, т.е. запись $u \cdot v \cdot w$ является сокращением для терма $u \cdot (v \cdot w)$.

Лемма 2. *Имеют место следующие утверждения:*

- *если $T_0 \vdash_0 t \equiv \ulcorner a_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner a_k \urcorner \cdot s$, то $T_0 \vdash_0 t \equiv \ulcorner a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \urcorner \cdot s$;*
- *если $T_0 \vdash_0 t \equiv \ulcorner a_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner a_k \urcorner$, то $T_0 \vdash_0 t \equiv \ulcorner a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \urcorner$.*

Доказательство. Индукция по k. Базис тривиален, а индукционный шаг обеспечивается правилами (P) и (P'). ■

---

[9] На самом деле, вместо проверки правильности этого утверждения читатель может заменить в IR_0 правила (C), $(A1)$, $(A2)$, (C'), $(A1')$ и $(A2')$ следующим правилом перегруппировки сомножителей:

$$(RG) \quad \frac{t \equiv t}{t \equiv t'},$$

где t' может отличаться от t только порядком следования сомножителей и расстановкой скобок. Действительно, правила (C), $(A1)$, $(A2)$, (C'), $(A1')$ и $(A2')$ являются частными случаями правила (RG), а допустимость правила (RG) утверждает лемма 1. Поэтому вместо доказательства леммы 1 можно просто принять правило (RG), и в приводимых ниже построениях и рассуждениях по существу ничего не изменится. Цель использования правил (C), $(A1)$, $(A2)$, (C'), $(A1')$ и $(A2')$ как раз и состоит в том, чтобы обеспечить (RG) неким «минимальным» образом.

Для каждого терма t рекурсивно определим его *значение* $[\![t]\!]$ во множестве $\mathbb{N}^+$:

- $[\![\ulcorner a \urcorner]\!] = a$, где $a \in \mathbb{N}^+$;
- $[\![u \cdot v]\!] = [\![u]\!] \cdot [\![v]\!]$.

Для теории T_0 имеет место теорема об адекватности: в T_0 выводимы в точности те тождества, которые соответствуют верным равенствам произведений положительных натуральных чисел.

Утверждение 1. *Для любых термов t и s имеет место следующая эквивалентность:*

$$T_0 \vdash_0 t \equiv s \quad \Longleftrightarrow \quad [\![t]\!] = [\![s]\!].$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $T_0 \vdash_0 t \equiv s$. Если $t \equiv s$ — аксиома, то $t = s$, и значит, $[\![t]\!] = [\![s]\!]$. Осталось заметить, что правила вывода сохраняют равенство значений термов, поэтому если формула $t \equiv s$ получена по одному из правил, где в посылке стоят выводимые формулы, то тоже $[\![t]\!] = [\![s]\!]$.

($\Leftarrow$) Воспользуемся основной теоремой арифметики: каждое натуральное число, большее единицы, однозначно (с точностью до порядка следования сомножителей) представляется в виде произведения простых чисел.

Пусть $[\![t]\!] = [\![s]\!] = a$. Пусть (с точностью до порядка следования сомножителей и расстановки скобок)

$$t = \ulcorner b_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner b_n \urcorner \quad \text{и} \quad s = \ulcorner c_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner c_m \urcorner$$

для некоторых $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{N}^+$. Представим число a в виде произведения простых чисел, и пусть $q_1, \ldots, q_r$ — эти простые числа (возможно, с повторениями). Формула $\ulcorner q_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner q_r \urcorner \equiv \ulcorner q_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner q_r \urcorner$ является аксиомой. Согласно лемме 1, можно перегруппировать термы $\ulcorner q_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner q_r \urcorner$ в произведении $\ulcorner q_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner q_r \urcorner$ так, чтобы в получившемся терме последовательно стояли группы сомножителей-констант, соответствующих простым числам в разложениях на простые множители чисел $b_1, \ldots, b_n$, отличных от 1. Если какие-то из чисел $b_1, \ldots, b_n$ равны 1, то добавим нужное количество сомножителей $\ulcorner 1 \urcorner$, используя правило (E). Применяя лемму 2, получим вывод формулы $\ulcorner q_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner q_r \urcorner \equiv \ulcorner b_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner b_n \urcorner$. Далее по правилу (S) получаем формулу $\ulcorner b_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner b_n \urcorner \equiv \ulcorner q_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner q_r \urcorner$. Снова подходящим образом группируя сомножители, добавляя при необходимости сомножители вида $\ulcorner 1 \urcorner$ и применяя лемму 2, получим вывод формулы $\ulcorner b_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner b_n \urcorner \equiv \ulcorner c_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner c_m \urcorner$, а значит, $T_0 \vdash_0 t \equiv s$. ■

Перейдем к рассмотрению расширений теории T_0.

Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — возрастающая последовательность всех простых чисел. Для множества $A \subseteq \mathbb{N}^+$ положим

$$\begin{array}{lcl} Pr_A & = & \{p_n : n \in A\}; \\ T_A & = & T_0 \cup \{\ulcorner p \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner : p \in Pr_A\}. \end{array}$$

В частности, $Pr_{\mathbb{N}^+}$ — множество всех простых чисел, а также $T_\varnothing = T_0$.

Число $a \in \mathbb{N}^+$ называем *A-редуктом* числа $b \in \mathbb{N}^+$, если выполнены следующие условия:

- число b делится на число a;
- если число a делится на простое число p, то $p \notin Pr_A$;
- если $b = ac$ и c делится на простое число p, то $p \in Pr_A$.

Другими словами, a получается из b делением b на все простые делители числа b, содержащиеся в Pr_A (с учетом их степеней в разложении числа b на простые сомножители). Нетрудно понять, что для каждого $b \in \mathbb{N}^+$ его A-редукт определен однозначно; A-редукт числа b будем обозначать b_A.

С учетом основной теоремы арифметики, несложно понять, что $T_A \vdash_0 \ulcorner a \urcorner \equiv \ulcorner b \urcorner$ тогда и только тогда, когда A-редукты чисел a и b совпадают. Покажем это, для чего докажем более общее утверждение.

Утверждение 2. *Для любых термов t и s имеет место следующая эквивалентность:*

$$T_A \vdash_0 t \equiv s \iff [\![t]\!]_A = [\![s]\!]_A.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если $t \equiv s$ — аксиома теории T_A, то $[\![t]\!]_A = [\![s]\!]_A$. Кроме того, несложно убедиться, что правила вывода сохраняют равенство A-редуктов значений термов.

($\Leftarrow$) Пусть $[\![t]\!]_A = [\![s]\!]_A = a$. Тогда $[\![t]\!]$ и $[\![s]\!]$ получаются из a умножением на какие-то числа из Pr_A, т.е. существуют такие $q_1, \ldots, q_k, r_1, \ldots, r_j \in Pr_A$, что

$$[\![t]\!] = q_1 \cdot \ldots \cdot q_k \cdot a \quad \text{и} \quad [\![s]\!] = r_1 \cdot \ldots \cdot r_j \cdot a.$$

Разложим число a в произведение простых:

$$a = e_1 \cdot \ldots \cdot e_l.$$

Поскольку в теории T_A выводимы тождества

$$\ulcorner q_1 \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner, \ldots, \ulcorner q_k \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner, \ \ulcorner r_1 \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner, \ldots, \ulcorner r_j \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner,$$

применяя многократно правило (E) и один раз правило (S), получаем, что

$$T_A \ \vdash \ \ulcorner q_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner q_k \urcorner \cdot \ulcorner e_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner e_l \urcorner \equiv \ulcorner r_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner r_j \urcorner \cdot \ulcorner e_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner e_l \urcorner.$$

Пусть

$$t = \ulcorner b_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner b_n \urcorner \quad \text{и} \quad s = \ulcorner c_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner c_m \urcorner.$$

Тогда

- каждое из чисел $b_1, \ldots, b_n$ является произведением простых чисел, входящих в список $q_1, \ldots, q_k, e_1, \ldots, e_l$, или равно 1;
- каждое из чисел $c_1, \ldots, c_m$ является произведением простых чисел, входящих в список $r_1, \ldots, r_j, e_1, \ldots, e_l$, или равно 1.

Но тогда, перегруппировывая сомножители (в смысле леммы 1), добавляя при необходимости сомножители вида $\ulcorner 1 \urcorner$ и используя правила (P) и (P'), из тождества

$$\ulcorner q_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner q_k \urcorner \cdot \ulcorner e_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner e_l \urcorner \equiv \ulcorner r_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner r_j \urcorner \cdot \ulcorner e_1 \urcorner \cdot \ldots \cdot \ulcorner e_l \urcorner$$

можно вывести тождество $t \equiv s$. ■

Следствие 1. $T_A \vdash_0 \ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner \iff n \in A.$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Если $n \notin A$, то $[\![\ulcorner p_n \urcorner]\!]_A = p_n \neq 1 = [\![\ulcorner 1 \urcorner]\!]_A$, а значит, по утверждению 2, $T_A \nvdash_0 \ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner$.

$(\Leftarrow)$ Если $n \in A$, то $\ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner$ — аксиома теории T_A. ■

Введем обозначение: для произвольной теории T положим

$$[T]_0 \quad = \quad [T]_{IR_0} \quad = \quad \{t \equiv s : T \vdash_0 t \equiv s\}.$$

Лемма 3. *Пусть T — теория, причем $[T]_0 = [T_A]_0$ и $T \vdash_0 \ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner$. Тогда $\ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner \in T$ или $\ulcorner 1 \urcorner \equiv \ulcorner p_n \urcorner \in T$.*

Доказательство. Предположим, что $\ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner \notin T$ и $\ulcorner 1 \urcorner \equiv \ulcorner p_n \urcorner \notin T$.

Заметим, что тогда последним правилом, примененным в выводе тождества $\ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner$, могло быть только правило (S). Действительно, остальные правила, за исключением правила (P'), предполагают наличие сомножителей в заключении; правило (P') не могло быть применено для замены произведения термов на $\ulcorner 1 \urcorner$, поскольку $a \neq 1$ и $b \neq 1$. Но если было применено правило (S), то тождество $\ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner$ было получено с помощью этого правила из тождества $\ulcorner 1 \urcorner \equiv \ulcorner p_n \urcorner$.

Рассуждая аналогично тому, как указано выше, получаем, что тождество $\ulcorner 1 \urcorner \equiv \ulcorner p_n \urcorner$ тоже могло быть получено лишь с помощью правила (S), т.е. из тождества $\ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner$; в частности, правило (P') не могло быть применено, поскольку простое число p_n нельзя представить в виде произведения ab при $a \neq 1$ и $b \neq 1$.

Получили противоречие: ни одно из указанных тождеств не может встретиться в выводе впервые.

Следовательно, $\ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner \in T$ или $\ulcorner 1 \urcorner \equiv \ulcorner p_n \urcorner \in T$. ■

Теперь несложно построить теорию, для которой не работает теорема Крейга, если мы используем только правила вывода из множества IR_0: достаточно взять теорию T_A, где A — рекурсивно перечислимое множество, не являющееся рекурсивным.

Лемма 4. *Пусть A — рекурсивно перечислимое множество. Тогда теория $[T_A]_0$ рекурсивно перечислима и имеет рекурсивно перечислимую аксиоматику.*

Доказательство. Достаточно заметить, что T_A — требуемая рекурсивно перечислимая аксиоматика теории $[T_A]_0$, а рекурсивное перечисление $[T_A]_0$ получается за счет последовательного перечисления всех выводов из T_A, что возможно ввиду рекурсивной перечислимости множества A. Действительно, пусть $f\colon \mathbb{N} \to A$ — вычислимая функция, перечисляющая множество A. Тогда, чтобы рекурсивно перечислить все выводы из T_A, можно последовательно выполнять следующие шаги: на k-м шаге строим все выводы длины не более k, в которых встречаются термы с сомножителями вида $\ulcorner m \urcorner$ при $m \leqslant k$ и используются аксиомы вида $\ulcorner p_{f(m)} \urcorner = \ulcorner 1 \urcorner$, только если $m \leqslant k$. Множество выводов, которые будут построены на шаге k, всегда конечно. Кроме того, каждый вывод из T_A появится на некотором шаге. Чтобы получить перечисление теории $[T_A]_0$, остается взять последовательность, составленную из последних формул в этих выводах. ■

Лемма 5. *Пусть A — нерекурсивное множество. Тогда не существует рекурсивного множества T, для которого $[T]_0 = [T_A]_0$.*

Доказательство. Предположим, что такое рекурсивное множество T существует. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{array}{lcll} n \in A & \iff & T_A \vdash_0 \ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner & \text{(по следствию 1)} \\ & \iff & \ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner \in T \text{ или } \ulcorner 1 \urcorner \equiv \ulcorner p_n \urcorner \in T & \text{(по лемме 3).} \end{array}$$

Последнее условие проверяется алгоритмически ввиду рекурсивности множества T. Получаем, что множество A должно быть рекурсивным, что не так. Значит, такого рекурсивного множества T не существует. ■

Утверждение 3. *Существует рекурсивно перечислимая теория, не имеющая рекурсивной аксиоматики над множеством правил* IR_0.

Доказательство. Согласно леммам 4 и 5, в качестве такой теории можно взять T_A (или $[T_A]_0$), где A — нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество. ■

7. Модификации контрпримера

Приведенный контрпример существенно использует особенность правил вывода из множества IR_0: в возникающем отношении выводимости $\vdash_0$ нет требуемого в формулировке теоремы Крейга симметричного подотношения. За счет этого и не удается применить аргумент Крейга. Закономерно возникает вопрос о том, можно ли изменить набор правил так, чтобы, с одной стороны, это не привело к изменению множества тождеств, выводимых в теории T_A, а, с другой стороны, позволило бы построить рекурсивную аксиоматику. Оказывается, это сделать можно, причем несколькими способами. Мы обсудим некоторые из них.

7.1. Удаление единицы из произведения

Для любого $a \in \mathbb{N}^+$ имеет место равенство $a = 1 \cdot a$. Другими словами, мы можем как добавлять сомножитель 1 в произведение чисел, так и убирать его, и результат произведения от этого не изменится. Во множестве IR_0 имеется правило (E), позволяющее добавлять терм $\ulcorner 1 \urcorner$ в произведение термов, но нет правил, позволяющих удалять этот терм из произведения. Введем их:

$$(E') \qquad \frac{t \equiv (\ulcorner 1 \urcorner \cdot \ulcorner b \urcorner) \cdot s}{t \equiv \ulcorner b \urcorner \cdot s}; \qquad\qquad (E'') \qquad \frac{t \equiv \ulcorner 1 \urcorner \cdot \ulcorner b \urcorner}{t \equiv \ulcorner b \urcorner},$$

где t, s — термы и $b \in \mathbb{N}^{++}$.

Пусть IR_1 — множество правил вывода, получающееся добавлением ко множесву IR_0 правил (E') и (E'').

Вместо $\vdash_{IR_1}$ будем писать $\vdash_1$, вместо $[T]_{IR_1}$ будем писать $[T]_1$.

Лемма 6. *Для каждого* $A \subseteq \mathbb{N}^+$ *имеет место равенство* $[T_A]_0 = [T_A]_1$.

Доказательство. Поскольку $IR_0 \subseteq IR_1$, получаем, что $[T_A]_0 \subseteq [T_A]_1$.

Заметим, что правила вида (E') и (E''), где $b \in \mathbb{N}^+$ сохраняют равенство A-редуктов значений термов, входящих в тождества. Но любое тождество $t \equiv s$, для которого $[\![t]\!]_A = [\![s]\!]_A$, принадлежит $[T_A]_0$ согласно утверждению 2. Следовательно, $[T_A]_1 \subseteq [T_A]_0$.

Учитывая оба включения теорий, получаем, что $[T_A]_0 = [T_A]_1$. ■

Покажем, что для любого рекурсивно перечислимого множества A существует рекурсивная аксиоматика теории T_A над множеством правил IR_1.

Введем степени термов как обычные сокращения: для каждого терма t и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$t^0 = \ulcorner 1 \urcorner, \quad t^{n+1} = t \cdot t^n.$$

Пусть далее A — непустое рекурсивно перечислимое подмножество множества $\mathbb{N}^+$ и пусть $f\colon \mathbb{N} \to A$ — вычислимая функция, перечисляющая A. Определим теорию T'_A, положив

$$T'_A = T_0 \cup \{\ulcorner p_{f(n)} \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Лемма 7. $[T'_A]_1 = [T_A]_1$.

Доказательство. Поскольку A-редукты чисел $[\![\ulcorner p_{f(n)} \urcorner]\!]$ и $[\![\ulcorner 1 \urcorner^{n+1}]\!]$ равны (оба равны единице), по утверждению 2 получаем, что тождества вида $\ulcorner p_{f(n)} \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner^{n+1}$ принадлежат теории $[T_A]_0$, а значит, согласно лемме 6, и теории $[T_A]_1$. Таким образом, $[T'_A]_1 \subseteq [T_A]_1$.

Применяя правила (E') и (E'') к тождеству $\ulcorner p_{f(n)} \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner^{n+1}$ (с учетом леммы 1), можем получить тождество $\ulcorner p_{f(n)} \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner$, которое принадлежит теории T_A. Это дает нам, что $[T_A]_1 \subseteq [T'_A]_1$.

Учитывая оба включения, получаем, что $[T'_A]_1 = [T_A]_1$. ■

Следствие 2. $[T'_A]_1 = [T_A]_0$.

Доказательство. Следует из лемм 6 и 7. ■

Лемма 8. *Теория T'_A является рекурсивной.*

Доказательство. Опишем алгоритм, выясняющий принадлежность произвольного тождества $t \equiv s$ множеству T'_A.

- Шаг 1. Если $s = t$, то $t \equiv s$ — аксиома. Если нет, то переходим к шагу 2.

- Шаг 2. Если s не имеет вид $\ulcorner 1 \urcorner^k$, где $k \in \mathbb{N}^+$ то $t \equiv s$ — не аксиома. Иначе переходим к шагу 3.

- Шаг 3. Пусть n — натуральное число, для которого $s = \ulcorner 1 \urcorner^{n+1}$. Вычислим m, положив $m = f(n)$. Если $t = \ulcorner p_m \urcorner$, то $t \equiv s$ — аксиома, иначе $t \equiv s$ — не аксиома.

Нетрудно видеть, что описанный алгоритм решает вопрос принадлежности тождеств множеству T'_A, а значит, теория T'_A является рекурсивной. ■

Утверждение 4. *Если A — рекурсивно перечислимое подмножество множества $\mathbb{N}^+$, то теории, находящиеся между T_A и $[T_A]_0$, имеют рекурсивную аксиоматику над множеством правил IR_1.*

Доказательство. В качестве такой аксиоматики можно взять T'_A, что следует из лемм 6–8. ■

7.2. Сокращение одинаковых сомножителей

Для любых $a, b, c \in \mathbb{N}^+$ из равенства $c \cdot a = c \cdot b$ следует равенство $a = b$, т.е. левую и правую части равенства можно разделить на одно и то же число, и равенство сохранится. Добавим ко множеству правил IR_0 следующее правило сокращения:

$$(R') \quad \frac{u \cdot t \equiv u \cdot s}{t \equiv s}.$$

Пусть IR_2 — получившееся множество правил. Пишем $[T]_2$ вместо $[T]_{IR_2}$.

Используя добавленное правило, несложно построить рекурсивную аксиоматику теории T_A, где A — рекурсивно перечислимое множество. Именно, пусть $f \colon \mathbb{N} \to A$ — вычислимая функция, перечисляющая (непустое) множество A; положим

$$T''_A \;=\; T_0 \cup \{\ulcorner p_{f(n)} \urcorner^{n+2} \equiv \ulcorner p_{f(n)} \urcorner^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Читатель может убедиться, что тогда выполняются следующие утверждения:

- $[T''_A]_2 = [T_A]_0$;
- множество T''_A является рекурсивным.

Именно, достаточно заметить, что правило (R') сохраняет равенство A-редуктов значений эквивалентных термов, тождества теории T''_A выводятся в T_A с помощью правил из IR_0, а тождества теории T_A выводятся в T''_A с помощью правил из IR_2.

В итоге получаем следующее утверждение.

Утверждение 5. *Если A — рекурсивно перечислимое подмножество множества $\mathbb{N}^+$, то теории, находящиеся между T_A и $[T_A]_0$, имеют рекурсивную аксиоматику над множеством правил IR_2.*

Доказательство. В качестве такой аксиоматики можно взять T''_A. ■

7.3. Транзитивность равенства

Для любых $a, b, c \in \mathbb{N}^+$ из равенств $a = c$ и $c = b$ следует равенство $a = b$. Добавим ко множеству правил IR_0 следующее правило транзитивности:

$$(T) \quad \frac{t \equiv u \quad u \equiv s}{t \equiv s}.$$

Пусть IR_3 — получившееся множество правил. Пишем $[T]_3$ вместо $[T]_{IR_3}$.

Используя добавленное правило, тоже несложно построить рекурсивную аксиоматику теории T_A, где A — рекурсивно перечислимое множество. Пусть, как и раньше, $f\colon \mathbb{N} \to A$ — вычислимая функция, перечисляющая (непустое) множество A; положим

$$T_A''' \quad = \quad T_0 \cup \{\ulcorner p_{f(n)} \urcorner^{n+2} \equiv \ulcorner p_{f(n)} \urcorner^{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ulcorner p_{f(n)} \urcorner^{n+1} \equiv \ulcorner 1 \urcorner : n \in \mathbb{N}\}.$$

Читатель может убедиться, что тогда выполняются следующие утверждения:

- $[T_A''']_3 = [T_A]_0$;
- множество T_A''' является рекурсивным.

Именно, достаточно заметить, что правило (T) сохраняет равенство A-редуктов значений эквивалентных термов, тождества теории T_A''' выводятся в T_A с помощью правил из IR_0, а тождества теории T_A выводятся в T_A''' с помощью правил из IR_3. Чтобы обосновать рекурсивность аксиоматики, достаточно описать алгоритм, выясняющий принадлежность тождества $t \equiv s$ множеству T_A'''. Соответствующий алгоритм получается незначительной модификацией алгоритма, решающего вопрос принадлежности тождеств множеству T_A'; опишем его.

- Шаг 1. Если $s = t$, то $t \equiv s$ — аксиома. Если нет, то переходим к шагу 2.

- Шаг 2. Если $t \neq \ulcorner 1 \urcorner$, то переходим к шагу 3. Если $t = \ulcorner 1 \urcorner$, то проверяем, верно ли, что $s = \ulcorner p_m \urcorner^{n+1}$ для некоторых $m \in \mathbb{N}^+$ и $n \in \mathbb{N}$. Если нет, то $s \equiv t$ — не аксиома. Если да, то вычисляем $f(n)$ и проверяем, верно ли, что $m = f(n)$. Если да, то $s \equiv t$ — аксиома, а если нет, то $s \equiv t$ — не аксиома.

- Шаг 3. Проверяем, верно ли, что $t = \ulcorner p_m \urcorner^{n+1}$ для некоторых $m \in \mathbb{N}^+$ и $n \in \mathbb{N}$. Если нет, то $s \equiv t$ — не аксиома. Если да, то вычисляем $f(n)$ и проверяем, верно ли, что $m = f(n)$. Если нет, то $s \equiv t$ — не аксиома. Если да, то проверяем, верно ли, что $t = \ulcorner p_m \urcorner^{n+2}$. Если да, то $s \equiv t$ — аксиома, а если нет, то $s \equiv t$ — не аксиома.

Нетрудно видеть, что этот алгоритм решает вопрос принадлежности тождеств множеству T_A''', а значит, теория T_A''' является рекурсивной.

В итоге получаем следующее утверждение.

Утверждение 6. *Если A — рекурсивно перечислимое подмножество множества $\mathbb{N}^+$, то теории, находящиеся между T_A и $[T_A]_0$, имеют рекурсивную аксиоматику над множеством правил IR_3.*

Доказательство. В качестве такой аксиоматики можно взять T_A'''. ■

Обратим внимание, что на правило (T) можно смотреть как на правило сечения, где u является «высекаемым» термом.

7.4. Замена равных

Равенство обладает свойством замены равных: если a и b — произведения чисел и при этом $a = b$, то в любом произведении чисел, содержащем вхождение a в качестве сомножителя, можно это вхождение a заменить на вхождение произведения b, при этом значение исходного произведения не изменится. Это наблюдение позволяет добавить соответствующее допустимое правило вывода.

Пусть t, s, u — термы. Для $k \in \mathbb{N}^+$ определим терм $[s/u]_k t$ как получающийся из t заменой k-го слева вхождения терма u в терм t на терм s; если при этом терм t содержит менее чем k вхождений терма u, то полагаем $[s/u]_k t = t$. Добавим ко множеству правил IR_0 следующее правило замены равных:

$$(ER) \quad \frac{t \equiv u \quad v \equiv s}{t \equiv [s/v]_k u},$$

где $k \in \mathbb{N}^+$. Пусть IR_4 — получившееся множество правил. Пишем $[T]_4$ вместо $[T]_{IR_4}$.

Утверждение 7. *Если A — рекурсивно перечислимое подмножество множества $\mathbb{N}^+$, то теории, находящиеся между T_A и $[T_A]_0$, имеют рекурсивную аксиоматику над множеством правил IR_4.*

Доказательство. В качестве такой аксиоматики можно взять, например, теорию T_A'. Обоснуем это. Во-первых, заметим, что правило (ER) сохраняет равенство A-редуктов значений эквивалентных термов и в $[T_A]_0$ содержатся формулы множества T_A', т.к. они могут быть получены из формул множества T_A с помощью правила (E). Следовательно, $[T_A']_4 \subseteq [T_A]_0$. Во-вторых, с помощью правила (ER) из тождества вида $t \equiv \ulcorner 1 \urcorner^k$ можно получить тождество $t \equiv \ulcorner 1 \urcorner$, используя выводимость тождества $\ulcorner 1 \urcorner^k \equiv \ulcorner 1 \urcorner$ (выводимость тождества $\ulcorner 1 \urcorner^k \equiv \ulcorner 1 \urcorner$ следует, например, из утверждения 1 с учетом того, что $IR_0 \subseteq IR_4$). Следовательно, $[T_A]_0 \subseteq [T'_A]_4$. Учитывая оба включения, получаем, что $[T'_A]_4 = [T_A]_0$. ■

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что в доказательстве утверждения 7 вместо теории T'_A можно взять теорию T'''_A, поскольку правило (T) является частным случаем правила (ER). Действительно, (T) получается из (ER), если в (ER) взять $k = 1$, а вместо v взять u. В частности, из этого следует, что $[T'''_A]_4 = [T_A]_0$.

8. Замечания о правилах вывода

Чтобы получить рекурсивную аксиоматику рекурсивно перечислимых теорий, мы меняли (расширяли) множество правил вывода. При этом множество правил оставалось конечным и, в частности, рекурсивным. Но если расширить множество правил и множество аксиом до рекурсивно перечислимых (не обязательно при этом рекурсивных), то теория останется рекурсивно перечислимой. Учитывая это наблюдение, аксиомы теории T_A можно заменить (беспосылочными) правилами вывода. Тогда если A — рекурсивно перечислимое множество, то и получающееся множество правил будет рекурсивно перечислимым. Именно, пусть IR_A — множество правил, содержащее IR_0 и все правила вида

$$\frac{t \equiv t}{\ulcorner p_n \urcorner \equiv \ulcorner 1 \urcorner},$$

где $n \in A$. Тогда нетрудно понять, что $[T_A]_0 = [T_0]_{IR_A}$. Это очевидным образом дает рекурсивное множество аксиом теории T_A над рекурсивно перечислимым множеством правил вывода, причем в качестве множества аксиом выступает исходная теория T_0. Но рекурсивность аксиоматики должна предполагать не только рекурсивность множества аксиом, но и рекурсивность множества правил вывода, а последнее при описанном подходе не наблюдается, если рекурсивно перечислимое множество A не является рекурсивным.

9. Рекурсивная аксиоматика без аргумента Крейга

Отметим, что в очень многих случаях рекурсивная аксиоматика теории существует, хотя множество постулированных правил вывода таково, что не позволяет применить аргумент Крейга. Действительно, как мы видели выше, множество правил IR_0 не позволяет использовать прием Крейга, хотя содержательно ясная теория T_0 имеет над этим множеством правил рекурсивную аксиоматику (состоящую из аксиом вида $t \equiv t$). Но этот пример не представляет большого интереса, т.к. множество формул теории

$[T_0]_{IR_0}$ является рекурсивным, поэтому даже оно само целиком годится в качестве рекурсивной аксиоматики.

Более интересным примером являются исчисления для неразрешимых логик. Например, это секвенциальные исчисления для классической логики предикатов, где правила вывода обладают следующим свойством: формулы, находящиеся в верхних частях правил, являются подформулами формул, находящихся в нижних частях тех же правил (в частности, не содержат правила сечения). Описанная ситуация аналогична той, что имеет место для множества правил IR_0: правила из IR_0 — за исключением (P) и (P') — устроены так, что термы, находящиеся в верхней части правила, построены из подтермов термов, находящихся в нижней части того же правила. Как раз поэтому, как и в исчислениях для классической логики предикатов со сходным свойством правил, в теориях над IR_0 аргумент Крейга применить не получается. Тем не менее классическая логика предикатов конечно аксиоматизируема над такими множествами правил, а значит, в частности, рекурсивно аксиоматизируема.

10. Благодарности

Автор благодарит анонимных рецензентов, чьи замечания и пожелания позволили существенно улучшить текст работы.

Литература

Верещагин, Шень, 2017 – *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 3. Вычислимые функции. М: МЦНМО, 2017.

Роджерс, 1972 – *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М: Мир, 1972.

Рыбаков, Чагров, 2000 – *Рыбаков М.Н., Чагров А.В.* Стандартные переводы неклассических формул и относительная разрешимость логик // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М., 2000. Вып. XIV. С. 81–98.

Рыбаков, 2018 – *Рыбаков М.Н.* Аксиоматизируемость ненормальных и квазинормальных модальных предикатных логик первопорядково определимых классов шкал Крипке // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 81–94.

Craig, 1953 – *Craig W.* On axiomatizability within a system // The Journal of Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. No. 1. P. 30–32.

Gabbay et al., 2009 – *D. Gabbay, V. Shehtman, D. Skvortsov.* Quantification in Nonclassical Logic, Vol. 1. Elsevier, 2009.

Harel, 1986 – *Harel D.* Effective transformations on infinite trees, with applications to high undecidability, dominoes, and fairness // Journal of the ACM. 1986. Vol. 33. P. 224–248.

Kuznetsov et al., 2019 – *Kuznetsov S., Lugovaya V., Ryzhova A.* Craig's trick and a non-sequential system for the Lambek calculus and its fragments // Logic Journal of the IGPL. 2019. Vol. 27. No. 3. P. 252–266.

Lambek, 1991 – *Lambek J.* On the calculus of syntactic types // In Structure of Language and Its Mathematical Aspects / R. Jakobson ed. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. P. 166–178.

Rybakov, Shkatov, 2018 – *Rybakov M., Shkatov D.* A recursively enumerable Kripke complete first-order logic not complete with respect to a first-order definable class of frames // Advances in Modal Logic 12. 2018. P. 531–540.

Rybakov, Shkatov, 2020 – *Rybakov M., Shkatov D.* Recursive enumerability and elementary frame definability in predicate modal logic // Journal of Logic and Computation. 2020. Vol. 30. No. 2. P. 549–560.

van Benthem, 1983 – *J.A.F.K. van Benthem.* Modal Logic and Classical Logic. Bibliopolis, Napoli, 1983.

Mikhail Rybakov

A simple example of blocking the Craig trick

Mikhail Rybakov
IITP of RAS,
19/1 Bolshoy Karetny per., Moscow, 127051, Russian Federation.
HSE University,
20 Miasnitskaya str., Moscow, 101000, Russian Federation.
E-mail: m_rybakov@mail.ru

Abstract: William Craig observed that, under quite general conditions, a theory with a recursively enumerable axiomatization is also recursively axiomatizable. The paper discusses these conditions and builds a simple example of a theory for which the conditions of the Craig's theorem are not satisfied; in particular, the constructed theory has a recursively enumerable axiomatization, but does not have a recursive axiomatization with the same set of inference rules. At the same time, extending the set of inference rules with some rules admissible in the theory, we obtain recursive axiomatizations of the same set of theorems.

Keywords: Craig's theorem, recursive axiomatization, recursively enumerable axiomatization

For citation: Rybakov M. "Prostoy primer blokirovki argumenta Kreyga" [A simple example of blocking the Craig trick], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 36–58. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-36-58 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is supported by HSE Academic Fund Programme, project No. 23-00-022.

References

Chagrov, Rybakov, 2000 – Chagrov, A.V., Rybakov, M.N. "Standartnye perevody neklassicheskikh formul i otnositel'naya razreshimost' logik" [Standard translations of non-classical formulas and relative decidability of logics]. *Trudy nauchno-issledovatel'skogo seminara Logicheskogo centra Instituta filosofii RAN* [Annals of the research seminar of the Center for Logic of the Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences], Vol. 14, 2000, pp. 81–98. (In Russian)

Craig, 1953 – Craig, W. "On axiomatizability within a system", *The Journal of Symbolic Logic*, 1953, Vol. 18, No. 1, pp. 30–32.

Gabbay et al., 2009 – Gabbay, D., Shehtman, V., Skvortsov, D. *Quantification in Nonclassical Logic*, Vol. 1. Elsevier, 2009.

Harel, 1986 – Harel, D. "Effective transformations on infinite trees, with applications to high undecidability, dominoes, and fairness", *Journal of the ACM*, 1986, Vol. 33, pp. 224–248.

Kuznetsov et al., 2019 – Kuznetsov, S., Lugovaya, V., Ryzhova, A. "Craig's trick and a non-sequential system for the Lambek calculus and its fragments", *Logic Journal of the IGPL*, 2019, Vol. 27, No. 3, pp. 252–266.

Lambek, 1991 – Lambek, J. "On the calculus of syntactic types", in: *Structure of Language and Its Mathematical Aspects*, ed. by R. Jakobson, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, pp. 166–178.

Rogers, 1967 – Rogers, H. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* McGraw-Hill, 1967.

Rybakov, 2018 – Rybakov, M.N. "Aksiomatiziruemost' nenormal'nykh i kvazinormal'nykh modal'nykh predikatnykh logik pervoporyadkovo opredelimykh klassov shkal Kripke" [Axiomatizability of non-normal and quasi-normal modal predicate logics of first-order definable classes of Kripke frames], *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], No. 3, 2018, pp. 81–94. (In Russian)

Rybakov, Shkatov, 2018 – Rybakov, M., Shkatov, D. "A recursively enumerable Kripke complete first-order logic not complete with respect to a first-order definable class of frames", *Advances in Modal Logic 12*, 2018, pp. 531–540.

Rybakov, Shkatov, 2020 – Rybakov, M., Shkatov, D. "Recursive enumerability and elementary frame definability in predicate modal logic", *Journal of Logic and Computation*, 2020, Vol. 30, No. 2, pp. 549–560.

van Benthem, 1983 – van Benthem, J.A.F.K. *Modal Logic and Classical Logic.* Bibliopolis, Napoli, 1983.

Vereschagin, Shen, 2017 – *Vereschagin, N.K., Shen, A. Lektsii po matematicheskoy logike i teorii algoritmov. Chast' 3. Vychislimye funktsii* [Lectures on mathematical logic and theory of algorithms. Part 3. Computable functions.] Moscow, MCCME, 2017. (In Russian)

Логические исследования
2023. Т. 29. № 2. С. 59–88
УДК 164.1+510.644+519.716.32

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 2, pp. 59–88
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-59-88

Неклассическая логика
Non-classical Logic

Л.Ю. Девяткин

О трехзначных расширениях логики Клини

Леонид Юрьевич Девяткин
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Аннотация: Статья посвящена одной из наиболее известных трехзначных систем — логике Клини. Исследуются выразительные возможности логики Клини и ее трехзначных расширений. Мы представляем два результата. Во-первых, найдены все возможные трехзначные расширения логики Клини — с точностью до эквивалентности относительно взаимной определимости связок. Показано, что существует всего двенадцать таких расширений. Этот список включает как логики, уже известные в литературе, так и совершенно новые. Для найденных расширений описана структура решетки, упорядоченной относительно выразительной силы ее элементов. Во-вторых, для логики Клини и ее трехзначных расширений установлено, сколько надлогик в том же языке имеет каждая из этих логик. Логика Клини имеет лишь две собственные надлогики: классическую и тривиальную. В общем случае трехзначная логика, в которой определима матрица логики Клини, содержит не более трех собственных надлогик: классическую, тривиальную, а также промежуточную логику, задаваемую умножением матрицы исходной логики на матрицу классической логики в той же сигнатуре. Промежуточная логика существует только для двух типов трехзначных расширений логики Клини: в расширениях, эквивалентных логике Лукасевича, а также в логиках, матрицы которых содержат как бивалентную подматрицу, универсумом которой выступают классические значения истинности, так и подматрицу, универсум которой состоит из одного лишь промежуточного значения. Все трехзначные расширения логики Клини, которые не сохраняют классические значения, имеют только одну собственную надлогику — тривиальную.

Ключевые слова: многозначные логики, логика Клини, выразительные возможности, замкнутые классы функций, степень максимальности

Для цитирования: *Девяткин Л.Ю.* О трехзначных расширениях логики Клини // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 2. С. 59–88. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-59-88

Введение

В данной статье мы комбинируем методы теории пропозициональных исчислений и теории замкнутых классов функций, чтобы получить новые результаты в области многозначной логики. Предметом исследования выступает логика Клини $\mathbf{K}_3$ [Kleene, 1938], а также ее трехзначные языковые расширения, то есть трехзначные логики, полученные добавлением к логике Клини новых операций, которые могут быть охарактеризованы трехзначными таблицами истинности.

По теме статьи существует обширная литература. В [Avron, 1999] рассматриваются системы, которые получены расширением набора операций $\mathbf{K}_3$ посредством констант, а также импликации, заимствованной из паранепротиворечивой логики $\mathbf{J}_3$. Н.Е. Томовой принадлежит систематическое исследование импликативных расширений логики Клини с точки зрения их выразительных возможностей [Томова, 2010]; [Томова, 2012, с. 39–42]; [Tomova, 2012]. Автор вводит понятие естественной импликации и демонстрирует, что при одном выделенном значении существует всего 6 таких импликаций, причем расширение $\mathbf{K}_3$ любой из этих импликаций приводит к логике, которая эквивалентна логике Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$ относительно взаимной определимости связок. Вопрос о взаимной определимости связок в отдельных импликативных расширениях логики Клини также рассматривается в [Знаменская, 2012]. Общий метод построения натуральных исчислений для истинностно-функциональных расширений $\mathbf{K}_3$ предложен в [Tamminga, 2014]. Я.И. Петрухин и В.О. Шангин применяют метод Тамминга для построения синтаксической характеризации импликативных расширений логики Клини, исследованных Н.Е. Томовой [Petrukhin, Shangin, 2018]. Данными авторами также предложен метод автоматического поиска доказательств для расширений логики Клини бинарными связками [Petrukhin, Shangin, 2019].

Серия работ, принадлежащих Г. Роблес и соавторам, затрагивает широкий спектр семантических и синтаксических особенностей, свойственных различным импликативным расширениям логики Клини. В [Robles, 2019] строится тернарная реляционная семантика в стиле Раутли — Мейера для импликативных расширений $\mathbf{K}_3$. В [Robles, Méndez, 2019] и [Robles, Salto, Méndez, 2020] для подобных расширений предложены бивалентные семантики в стиле Белнапа — Данна. Импликативные расширения $\mathbf{K}_3$, верифицирующие аксиомы логики Раутли — Мейера $\mathbf{B}$, исследованы в [Robles, López, 2020]. Импликативные расширения $\mathbf{K}_3$, содержащие логику Белнапа — Данна **FDE**, рассматриваются в [Robles, 2021]. В работах [Robles, Méndez, 2020] и [Robles, Méndez, 2021] рассматриваются выразительные возможности логик в расширенных классах импликативных расширений $\mathbf{K}_3$, которые получены ослаблением определения естественной импликации из [Tomova, 2012]. Критерий функциональной полноты для расширений $\mathbf{K}_3$ бинарнами связками предложен в [Robles, Méndez, 2022].

Настоящее исследование дополняет и обобщает некоторые известные результаты. В существующей литературе рассматриваются выразительные возможности логик, полученных пополнением $\mathbf{K}_3$ отдельными связками. Это сужает круг расширений, попадающих в поле зрения исследователей. В частности, почти все рассматриваемые импликативные расширения $\mathbf{K}_3$ оказываются языковыми вариантами $\mathbf{Ł}_3$. Исключение составляют отдельные расширения из [Robles, Méndez, 2022], являющиеся функционально полными. В то же время мы применяем обобщенный подход, при котором расширения $\mathbf{K}_3$ не привязаны к фиксированному языку и описываются в терминах замкнутых классов функций, порождаемых ими. Это позволяет разбить расширения $\mathbf{K}_3$ на классы эквивалентности относительно их выразительных возможностей, описать все такие классы и упорядочить их по включению. Это дает простой метод сравнения произвольных трехзначных расширений логики Клини с точки зрения их выразительных возможностей, дает универсальный критерий функциональной полноты для таких расширений, а также позволяет вывести некоторые из уже известных результатов в качестве следствий. Кроме того, полученные результаты позволяют применить метод построения исчислений для трехзначных расширений $\mathbf{K}_3$, предложенный в [Tamminga, 2014], к отдельным расширениям логики Клини, не являющимся трехзначными.

Дальнейшее содержание статьи таково. Первый раздел посвящен замкнутым классам функций, порожденным трехзначными расширениями логики Клини. Дается описание всех таких классов, а также строится их решетка по включению. Основной результат раздела сформулирован в Теореме 1. Во втором разделе мы находим степень максимальности для каждого трехзначного расширения $\mathbf{K}_3$. Под степенью максимальности понимаем число исчислений в том же языке, которые можно получить из исходного исчисления добавлением новых правил. Показано, что для трехзначных расширений $\mathbf{K}_3$ число надлогик не превышает трех, причем две из них — это классическая логика, а также тривиальная логика, в которой любая формула следует из любой формулы. Основной результат раздела сформулирован в Теореме 7. В Заключении мы останавливаемся на некоторых возможных направлениях дальнейших исследований, касающихся темы статьи.

1. Решетка трехзначных языковых расширений логики Клини

В этом разделе мы даем предикатное описание решетки надклассов замкнутого класса функций, порожденного операциями трехзначной логики Клини [Kleene, 1938]. В первой части раздела даются определения замкнутого класса функций, предиката, сохранения предиката функцией, классов Pol и Inv, существенного предиката и других понятий, использующихся в разделе. Далее мы находим такое множество предикатов R, что любой надкласс замкнутого класса функций, порожденного операциями трехзначной логики Клини, характеризуется неким подмножеством R. После этого мы устанавливаем, какие подмножества R характеризуют попарно различные замкнутые классы функций. Это позволяет получить предикатное описание интересующей нас решетки.

Если функция f реализуется формулой, которая содержит только символы функций $f_1, \ldots, f_s$, а также символы переменных, то говорим, что функция f является *суперпозицией* функций $f_1, \ldots, f_s$, или что f получена из функций $f_1, \ldots, f_s$ с помощью *операции суперпозиции.*

Пусть F — произвольное множество функций, заданных на некотором множестве. *Замыканием* F называем множество $[F]$ всех функций, которые являются суперпозициями функций из F. Если $[F]$ — замыкание F, называем F *порождающей системой* $[F]$. Говорим, что множество функций F (функционально) *замкнуто*, если $F = [F]$. Множества такого рода также будем называть *замкнутыми классами функций.* Говорим, что класс $[F]$ *предполон* (или *максимален*) в классе $[G]$, если $[F] \subset [G]$ и $[F \cup \{g\}] = [G]$ для всех $g \in [G] \setminus [F]$.

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Обозначим как P_k множество всех алгебраических функций на E_k.

Для любого $n \geq 1$ и любого i, $1 \leq i \leq n$, пусть $e_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ обозначает такую функцию из P_k, значения которой совпадают со значениями переменной x_i. Функции e_i^n называются *селекторными функциями. Клон* — это замкнутый класс функций, содержащий все селекторные функции. Все замкнутые классы, рассматриваемые ниже, являются клонами.

Предикатом ϱ^n на множестве E_k местности n называем функцию $E_k^n \longmapsto \{T, F\}$. Говорим, что набор $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$ *удовлетворяет предикату* ϱ^n, если $\varrho^n(a_1, \ldots, a_n) = T$. Условимся отождествлять предикат ϱ^n на E_k с его экстенсионалом — множеством всех таких наборов из E_k^n, которые удовлетворяют ϱ^n. В дальнейшем будем записывать элементы ϱ^n в виде столбцов, а сам предикат в виде матрицы, где каждый из k элементов ϱ^n представлен столбцом:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \varrho^n \quad \varrho^n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Говорим, что $f^n \in P_k$ *сохраняет предикат* ϱ^m (ϱ^m — *инвариант* f) на E_k, если

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ f(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots \\ f(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{pmatrix} \in \varrho^m \text{ для всех}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \varrho^m.$$

Предикат ϱ^m является инвариантом f, е.т.е. ϱ^m — универсум подалгебры $\langle E_k, f\rangle^m$ [Lau, 2006, p. 130].

Пусть f — функция на E_k, а ϱ — предикат на E_k. Обозначим как $Pol(\varrho)$ класс всех таких функций, которые сохраняют предикат ϱ. Обозначим как $Inv(f)$ класс всех таких предикатов, которые сохраняет функция f. Пусть F — класс функций на E_k, а R — класс предикатов на E_k. Обозначим как $Pol(R)$ класс всех таких функций, которые сохраняют каждый предикат R. Обозначим как $Inv(F)$ класс всех таких предикатов, которые сохраняет каждая функция из F.

Условимся обозначать множество $InvPol(R)$ как $[R]$. Называем предикат ϱ *существенным*, если не существует таких предикатов $\varrho_1, \dots, \varrho_n$, что $ar(\varrho_i) < ar(\varrho)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, и при этом $[\{\varrho\}] = [\{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}]$. Набор $(a_1, \dots, a_n)$ называется *существенным для предиката* ϱ местности n, если $\varrho(a_1, \dots, a_n) = F$ и существуют такие $b_1, \dots, b_n \in E_k$, что любого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $\varrho(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = T$. Предикат ϱ является существенным, е.т.е. существует набор, существенный для ϱ [Жук, 2011, Лемма 1].

Связки трехзначной логики Клини определяются следующими таблицами.

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

x	$\sim x$
0	1
1	0
2	2

Ниже мы идентифицируем все замкнутые надклассы $[\wedge, \vee, \sim]$ и упорядочиваем их по включению. В некоторых случаях будем писать $[K_3]$ вместо $[\wedge, \vee, \sim]$. Существенную роль в наших построениях играет тот факт, что $[\wedge, \vee, \sim]$ содержит так называемую «функцию голосования».

Пусть функция f выполняет следующее условие: $f(x,x,y) = f(x,y,x) = f(y,x,x) = x$. В этом случае называем f *функцией голосования.* Любой замкнутый класс в P_k, содержащий функцию голосования, задается предикатами местности 1 и 2 [Жук, 2018, Лемма 3] (см. также [Adams, Dziobiak, 1994, Prop. 5.3]). В силу Леммы 2 из [Жук, 2011], также верно, что любой замкнутый класс, содержащий функцию голосования, может быть задан множеством только существенных предикатов местности 1 или 2.

Класс $[\wedge, \vee, \sim]$ содержит функцию голосования:

$$f(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z).$$

Поэтому $[\wedge, \vee, \sim] = Pol(R)$ для некоторого множества R существенных предикатов, местность которых не превышает 2. Если $[\wedge, \vee, \sim] \subseteq [F]$, то $[F] = Pol(R')$ для некоторого $R' \subseteq R$ [Lau, 2006, Th. 2.9.3]. Таким образом, для достижения поставленной цели достаточно найти множество R, а также все такие подмножества $R_1, \ldots, R_n$ множества R, что $Pol(R_i) = Pol(R_j) \Longleftrightarrow i = j$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Для этого рассмотрим предикаты $\varrho_1, \ldots, \varrho_5$, задаваемые следующими матрицами:

$$\varrho_1 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix},\ \varrho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},\ \varrho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \varrho_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\varrho_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Факт 1. $Pol(\varrho_1)$, $Pol(\varrho_2)$, $Pol(\varrho_3)$ — максимальные клоны P_3 [Lau, 2006, Th. 14.1.1], $Pol(\varrho_4)$ — максимальный клон $Pol(\varrho_2)$ и $Pol(\varrho_3)$ ($Pol(\varrho_4) = Pol(\varrho_2, \varrho_3)$) [Ibid., Th. 14.1.1], $Pol(\varrho_5)$ — максимальный клон ϱ_3 [Ibid., Th. 14.1.7].

Обозначим как $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ функции, зависящие от нуля переменных и тождественно равные 0, 1 и 2 соответственно.

Лемма 1. *[Adams, Dziobiak, 1994, Th. 5.4]* $[\wedge, \vee, \sim, \mathbf{0}, \mathbf{1}] = Pol(\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5)$.

Лемма 2. $[\wedge, \vee, \sim] = Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5)$.

Доказательство.

Найдем такие существенные предикаты местности не больше 2, что их сохраняет каждая функция из $\{\wedge, \vee, \sim\}$, но не сохраняют функции $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$.

Простой перебор показывает, что единственный унарный предикат, отвечающий условию выше — это ϱ_1.

Пусть ϱ' — такой бинарный существенный предикат, что $\{\wedge, \vee, \sim\} \subseteq Pol(\varrho')$, однако $\mathbf{0}, \mathbf{1} \notin Pol(\varrho')$. Если ϱ' — бинарный существенный предикат, для него имеется существенный набор вида (a_1, a_2). Если (a_1, a_2) — существенный набор, ϱ' содержит такие наборы (b_1, a_2), (a_1, b_2), что $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$. Если ϱ' содержит описанные выше наборы (b_1, a_2), (a_1, b_2), то он также содержит наборы вида $(0, 0)$, $(1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \wedge \sim \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \wedge \sim \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если ϱ' содержит наборы вида $(0, 0)$ и $(1, 1)$, то $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in Pol(\varrho')$.

Таким образом, ϱ_1 — единственный существенный предикат местности не больше 2, который сохраняет каждая функция из $\{\wedge, \vee, \sim\}$, но не сохраняют функции $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$. Следовательно, $[\wedge, \vee, \sim] = Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5)$. Поскольку $Pol(\varrho_4) = Pol(\varrho_2, \varrho_3)$, также имеем $[\wedge, \vee, \sim] = Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5)$. ■

Чтобы установить, какие подмножества $\{\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5\}$ задают попарно различные клоны, нам потребуются следующие три леммы.

Лемма 3. *Пусть $f_{abc}(0) = a$, $f_{abc}(1) = b$, $f_{abc}(2) = c$; $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$. Тогда распределение функций подобного вида по классам $Pol(\varrho_i)$ ($i \in \{1, 2, 3, 5\}$) соответствует приведенным ниже таблицам.*

	f_{000}	f_{001}	f_{002}	f_{010}	f_{011}	f_{012}	f_{020}	f_{021}	f_{022}
$Pol(\varrho_1)$	−	−	+	−	−	+	−	−	+
$Pol(\varrho_2)$	+	+	+	+	+	+	−	−	−
$Pol(\varrho_3)$	+	−	+	−	−	+	+	−	+
$Pol(\varrho_5)$	+	−	+	−	−	+	−	−	+

	f_{100}	f_{101}	f_{102}	f_{110}	f_{111}	f_{112}	f_{120}	f_{121}	f_{122}
$Pol(\varrho_1)$	−	−	+	−	−	+	−	−	+
$Pol(\varrho_2)$	+	+	+	+	+	+	−	−	−
$Pol(\varrho_3)$	−	−	+	−	+	+	−	+	+
$Pol(\varrho_5)$	−	−	+	−	+	+	−	−	+

	f_{200}	f_{201}	f_{202}	f_{210}	f_{211}	f_{212}	f_{220}	f_{221}	f_{222}
$Pol(\varrho_1)$	−	−	+	−	−	+	−	−	+
$Pol(\varrho_2)$	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$Pol(\varrho_3)$	+	−	+	−	+	+	+	+	+
$Pol(\varrho_5)$	−	−	+	−	−	+	−	−	+

Доказательство. Последовательным применением f_{abc} каждому из столбцов $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5$. ■

Обратим внимание, что $f_{000} = \mathbf{0}$, $f_{111} = \mathbf{1}$, $f_{222} = \mathbf{2}$.

Следующая лемма посвящена связке &, которая рассматривается в работе [Grigolia, Finn, 1993]. Таблица для & имеет следующий вид:

&	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

Лемма 4. *$\& \in Pol\{\varrho_1, \varrho_2\}$; $\& \notin Pol(\varrho_3)$.*

Доказательство. Первая часть утверждения леммы верна, поскольку $2\&2 = 2$, $a_1, a_2 \in \{0, 1\} \Longrightarrow a_1 \& a_2 \in \{0, 1\}$. Истинность второй части вытекает из того, что $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \& \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. ∎

Лемма 5. *Если $f \in Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ и $f \notin Pol(\varrho_5)$, то $ar(f) \geq 3$.*

Доказательство. Отсутствие таких функций, что $f \in Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ и $f \notin Pol(\varrho_5)$, при $ar(f) = 1$ демонстрирует Лемма 3.

Допустим, что $ar(f) = 2$.

Тогда $f\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{1,2} & a_{2,2}\end{pmatrix} \in \varrho_3$, коль скоро $\begin{pmatrix}a_{1,1}\\a_{1,2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_{1,2}\\a_{2,2}\end{pmatrix} \in \varrho_3$, однако найдутся такие $\begin{pmatrix}b_{1,1}\\b_{1,2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_{1,2}\\b_{2,2}\end{pmatrix} \in \varrho_5$, что $f\begin{pmatrix}b_{1,1} & b_{1,2}\\ b_{1,2} & b_{2,2}\end{pmatrix} \notin \varrho_5$. В этом случае, в силу того, что $\varrho_5 \subseteq \varrho_3$, $f\begin{pmatrix}b_{1,1} & b_{1,2}\\ b_{1,2} & b_{2,2}\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Поскольку $f \in Pol(\varrho_2)$, имеем $b_{1,1} = 2$ или $b_{1,2} = 2$. Не теряя общности, полагаем, что $b_{1,1} = 2$. Из определения ϱ_5 вытекает, что в этом случае также имеет место $b_{1,2} = 2$. Тогда, поскольку $f \in Pol(\varrho_1)$, $b_{2,2} \neq 2$. Из определения ϱ_5 вытекает, что в этом случае также выполняется равенство $b_{2,1} = b_{2,2}$. Однако это влечет $f\begin{pmatrix}b_{1,1} & b_{1,2}\\ b_{1,2} & b_{2,2}\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Что ведет к противоречию.

Теперь построим тернарную функцию f^*, для которой верно, что $f^* \in Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ и $f^* \notin Pol(\varrho_5)$:

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} 2, \text{ если } x = 0, y = 1, z = 2, \\ 2, \text{ если } x = y = z = 2, \\ 1 \text{ в остальных случаях} \end{cases}.$$

Функция f^* не сохраняет ϱ_5: $f^*\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. При этом $f^* \in Pol\{\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3\}$, поскольку $f^*(2,2,2) = 2$; $f^*(a_1, a_2, a_3) = 1$, коль скоро $a_1, a_2, a_3 \in \{0,1\}$; $f^*\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1}\\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2}\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ для любых наборов из $E_3 \times E_3$. ■

Переходим к основной теореме раздела, описывающей решетку надклассов $[\wedge, \vee, \sim]$. Будем обозначать P_3 как $Pol(\varnothing)$.

Теорема 1. *Решетка надклассов клона, порожденного операциями трехзначной логики Клини, содержит 12 элементов и описывается следующими включениями:*

$$Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5) \subseteq Pol(\varrho_1, \varrho_3, \varrho_5);\ Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5) \subseteq Pol(\varrho_2, \varrho_3, \varrho_5);$$
$$Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5) \subseteq Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3);\ Pol(\varrho_1, \varrho_3, \varrho_5) \subseteq Pol(\varrho_3, \varrho_5);$$
$$Pol(\varrho_1, \varrho_3, \varrho_5) \subseteq Pol(\varrho_1, \varrho_3);\ Pol(\varrho_2, \varrho_3, \varrho_5) \subseteq Pol(\varrho_3, \varrho_5);$$
$$Pol(\varrho_2, \varrho_3, \varrho_5) \subseteq Pol(\varrho_2, \varrho_3);\ Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) \subseteq Pol(\varrho_1, \varrho_3);$$
$$Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) \subseteq Pol(\varrho_2, \varrho_3);\ Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) \subseteq Pol(\varrho_1, \varrho_2);$$
$$Pol(\varrho_3, \varrho_5) \subseteq Pol(\varrho_3);\ Pol(\varrho_1, \varrho_3) \subseteq Pol(\varrho_3);\ Pol(\varrho_1, \varrho_3) \subseteq Pol(\varrho_1);$$
$$Pol(\varrho_2, \varrho_3) \subseteq Pol(\varrho_3);\ Pol(\varrho_2, \varrho_3) \subseteq Pol(\varrho_2);\ Pol(\varrho_1, \varrho_2) \subseteq Pol(\varrho_1);$$
$$Pol(\varrho_1, \varrho_2) \subseteq Pol(\varrho_2);\ Pol(\varrho_3) \subseteq Pol(\varnothing);\ Pol(\varrho_1) \subseteq Pol(\varnothing);$$
$$Pol(\varrho_2) \subseteq Pol(\varnothing).$$

Доказательство. Как мы установили в Лемме 2, $[\wedge, \vee, \sim] = Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5)$. Поэтому мощность решетки надклассов $[\wedge, \vee, \sim]$ не превышает $2^4 = 16$. В то же время в силу Факта 1, $Pol(\varrho_5) \subseteq Pol(\varrho_3)$. Следовательно, $Pol(R' \cup \{\varrho_5\}) = Pol(R' \cup \{\varrho_3, \varrho_5\})$ для всех $R' \subseteq \{\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5\}$. Таким образом, остается рассмотреть 12 подмножеств $\{\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5\}$, исключив те подмножества, которые содержат ϱ_5, но не содержат ϱ_3.

Включения, указанные в условии теоремы, имеют место, так как $[Pol(R_1)] \subseteq Pol(R_2) \iff InvPol(R_2) \subseteq InvPol(R_1)$ [Lau, 2006, Th. 2.9.3]. Покажем, что 12 рассматриваемых классов попарно различны, сопоставив каждому $R' \subseteq \{\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5\}$ такую систему функций F', что $F' \subseteq Pol(R')$, однако $\varrho \notin Inv(F')$, коль скоро $\varrho \in \{\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5\} \setminus R'$. В силу Лемм 3, 4 и 5, соответствующие системы функций имеют следующий вид:

$$Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5) = [\wedge, \vee, \sim];\ Pol(\varrho_1, \varrho_3, \varrho_5) = [\wedge, \vee, \sim, f_{222}];$$
$$Pol(\varrho_2, \varrho_3, \varrho_5) = [\wedge, \vee, \sim, f_{000}];\ Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) = [\wedge, \vee, \sim, f^*];$$
$$Pol(\varrho_3, \varrho_5) = [\wedge, \vee, \sim, f_{000}, f_{222}];\ Pol(\varrho_1, \varrho_3) = [\wedge, \vee, \sim, f_{222}, f^*];$$
$$Pol(\varrho_2, \varrho_3) = [\wedge, \vee, \sim, f_{000}, f^*];\ Pol(\varrho_1, \varrho_2) = [\wedge, \vee, \sim, \&];$$
$$Pol(\varrho_3) = [\wedge, \vee, \sim, f_{020}];\ Pol(\varrho_1) = [\wedge, \vee, \sim, f_{222}, \&];\ Pol(\varrho_2) = [\wedge, \vee, \sim, f_{001}];$$
$$Pol(\varnothing) = [\wedge, \vee, \sim, f_{021}].$$

■

Для наглядности проиллюстрируем изложенный выше результат диаграммой (Рис. 1). В качестве обозначений замкнутых надклассов $[\wedge, \vee, \sim]$ используем подмножества $\{\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5\}$, которые они сохраняют.

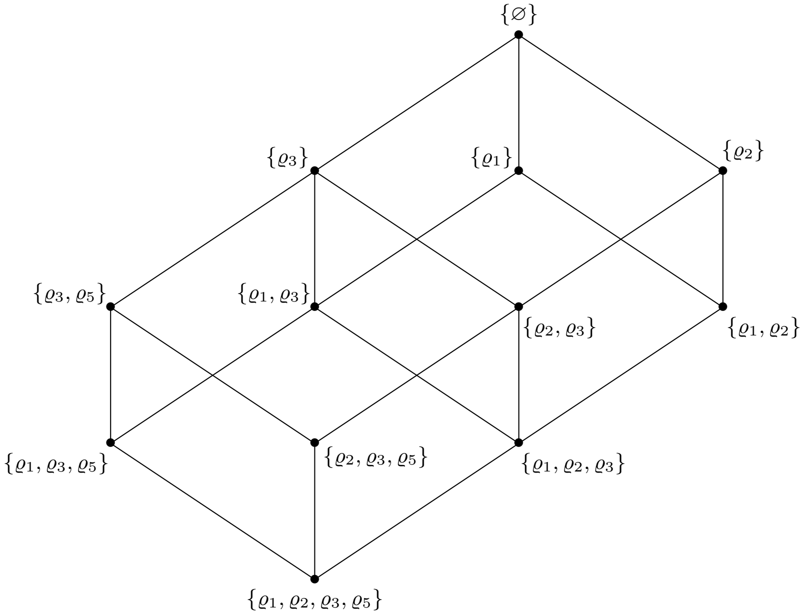

Рис. 1. Решетка замкнутых классов

Сопоставим приведенные выше построения с некоторыми результатами, известными в литературе. А. Авроном построено частичное описание решетки, которую описывает Теорема 1. В статье [Avron, 1999] доказан ряд утверждений (теоремы 2.10, 2.11, 2.13–2.18), которые, адаптируя терминологию автора к принятой в настоящей работе, можно сформулировать следующим образом: $[\sim, \wedge, \supset, \mathbf{0}, \mathbf{2}] = Pol(\varnothing)$; $[\sim, \wedge, \supset, \mathbf{0}] = Pol(\varrho_2)$; $[\sim, \wedge, \supset, \mathbf{2}] = Pol(\varrho_1)$; $[\sim, \wedge, \supset] = Pol(\varrho_1, \varrho_2)$; $[\sim, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{2}] = Pol(\varrho_5)$; $[\sim, \wedge, \mathbf{2}] = Pol(\varrho_1, \varrho_5)$; $[\sim, \wedge, \mathbf{0}] = Pol(\varrho_2, \varrho_5)$; $[\sim, \wedge] = Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_5)$. Функция $\supset$ отвечает следующей таблице:

$\supset$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	0	1	2

Приведенные выше утверждения можно вывести из Теоремы 1 в качестве следствий. Достаточно принять во внимание следующие факты:

$Pol(\varrho_5) \subseteq Pol(\varrho_3)$, $Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5) = [\wedge, \vee, \sim]$, $f_{000} \in Pol(\varrho_2, \varrho_3, \varrho_5)$, $f_{000} \notin Pol(\varrho_1)$, $f_{222} \in Pol(\varrho_1, \varrho_3, \varrho_5)$, $f_{000} \notin Pol(\varrho_2)$, $\supset \in Pol(\varrho_1, \varrho_2)$, $\supset \notin Pol(\varrho_5)$. Последнее верно, так как $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \supset \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

За рамками рассмотрения в процитированной работе остались элементы решетки вида $Pol(R' \cup \{\varrho_3\})$, где $R' \subseteq \{\varrho_1, \varrho_2\}$. Отметим, что это в точности те замкнутые классы, которые невозможно задать, добавляя к $\{\wedge, \vee, \sim\}$ только лишь унарные и бинарные операторы (см. Лемму 5).

Обратим внимание, что утверждение $[\sim, \wedge, \supset, \mathbf{0}, \mathbf{2}] = Pol(\varnothing)$ дает достаточное условие функциональной полноты для трехзначных расширений $\mathbf{K}_3$: если в расширении $\mathbf{K}_3$ определимы $\supset, \mathbf{0}, \mathbf{2}$, набор его связок функционально полон. Еще один критерий такого рода дается в работе [Robles, Méndez, 2022]: набор связок трехзначного расширения $\mathbf{K}_3$ функционально полон, когда в нем определимы связки $\neg$ и f_*, отвечающие следующим условиям: $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = \neg 2 = 0$; $f_*(a, b) = 2$ для некоторых $a, b \in \{0, 1\}$. Наши результаты позволяют вывести этот критерий как следствие. Действительно, $\neg = f_{100}$, $f_{100} \notin Pol(\varrho_1)$, $f_{100} \notin Pol(\varrho_3)$, $f_* \notin Pol(\varrho_2)$, и поэтому $[\wedge, \vee, \sim, \neg, f_*] = Pol(\varnothing)$.

В то же время Факт 1 и Лемма 2 позволяют сформулировать необходимые и достаточные условия функциональной полноты для трехзначных расширений $\mathbf{K}_3$, не использующие определимость в них фиксированных связок.

Теорема 2. *Пусть $\{\wedge, \vee, \sim\} \subseteq F \subseteq Pol(\varnothing)$. Тогда $[F] = Pol(\varnothing)$, е.т.е. F содержит такие (не обязательно различные) функции f_1, f_2, f_3, что $f_1 \notin Pol(\varrho_1)$, $f_2 \notin Pol(\varrho_2)$, $f_3 \notin Pol(\varrho_3)$.*

Доказательство. Известно, что набор функций из P_3 является функционально полным, е.т.е. он не содержится ни в одном из максимальных классов P_3 [Яблонский, 1958, с. 80]. Как следует из Факта 1 и Леммы 2, система $\{\wedge, \vee, \sim\}$ содержится только в трех максимальных классах P_3: $Pol(\varrho_1)$, $Pol(\varrho_2)$, $Pol(\varrho_3)$. Таким образом, добавление к $\{\wedge, \vee, \sim\}$ функций f_1, f_2, f_3 дает систему, не содержащуюся ни в одном из максимальных классов P_3. ■

В ряде работ исследуются свойства расширений $\mathbf{K}_3$, полученных добавлением импликаций, которые отвечают определенным условиям. Эти условия можно сформулировать в виде схем таблиц истинности, приведенных ниже, где $a_i \in \{0, 2\}$, $b_i \in \{0, 1, 2\}$ для всех индексов i, задействованных в схеме.

I_1	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	a_1
2	b_1	1	1

I_2	0	1	2
0	1	1	b_1
1	0	1	a_1
2	b_2	b_3	1

I_3	0	1	2
0	b_1	1	b_2
1	0	b_3	b_4
2	b_5	b_6	1

Импликации, отвечающие условию I_1, рассматриваются в [Tomova, 2012]. Импликации, отвечающие условию I_2, рассматриваются в [Robles, Méndez, 2020]. Импликации, отвечающие условию I_3, рассматриваются в [Robles, Méndez, 2021]. Ясно, что связка $\supset$ отвечает условию I_2, коль скоро она отвечает условию I_1. Кроме того, если $\supset$ отвечает условию I_2, то $\supset$ также отвечает условию I_3. Наши результаты позволяют дать простое описание выразительных возможностей импликативных расширений $\mathbf{K}_3$, построенных на основе приведенных выше схем.

Утверждение 1. Если $\supset$ отвечает условию I_3, то $[\wedge, \vee, \sim, \supset] = Pol(\varrho_2)$, если $b_1, b_3 \in \{0, 1\}$, и $[\wedge, \vee, \sim, \supset] = Pol(\varnothing)$ в противном случае.

Доказательство. Из $2 \supset 2 = 1$ получаем $\supset \notin Pol(\varrho_1)$. Из $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \supset \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ получаем $\supset \notin Pol(\varrho_3)$. В то же время $\supset \in Pol(\varrho_2)$, е.т.е. $0 \supset 0 \in \{0, 1\}$ и $1 \supset 1 \in \{0, 1\}$, то есть $b_1, b_3 \in \{0, 1\}$. ■

Отдельный интерес представляют импликативные расширения, порожденные схемой I_4 из [Robles, 2021; Robles, López, 2020].

I_4	0	1	2
0	1	1	1
1	a_1	1	a_2
2	a_3	1	1

В отличие от условий I_1, I_2, I_3, условие I_4, позволяет построить такое расширение $\mathbf{K}_3$, что его связки порождают замкнутый класс, отличный от $Pol(\varrho_2)$ и $Pol(\varnothing)$.

Утверждение 2. Если $\supset$ отвечает условию I_4, то $[\wedge, \vee, \sim, \supset] = Pol(\varrho_3)$, если $a_1 = a_2 = a_3 = 2$; $[\wedge, \vee, \sim, \supset] = Pol(\varrho_2)$, если $a_1 = 0$; $[\wedge, \vee, \sim, \supset] = Pol(\varnothing)$ во всех остальных случаях.

Доказательство. Из $2 \supset 2 = 1$ получаем $\supset \notin Pol(\varrho_1)$. Если $a_1 = 0$, то $\supset$ отвечает схеме I_2, и $[\wedge, \vee, \sim, \supset] = Pol(\varrho_2)$. Пусть $a_1 = 2$ и, как следствие, $\supset \notin Pol(\varrho_2)$. Если $a_3 = 0$, то $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \supset \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, и $\supset \notin Pol(\varrho_3)$,

$[\wedge, \vee, \sim, \supset] = Pol(\varnothing)$. Если $a_2 = 0$, то $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \supset \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, поэтому снова $\supset\notin Pol(\varrho_3)$, $[\wedge, \vee, \sim, \supset] = Pol(\varnothing)$. Если же $a_1 = a_2 = a_3$, то $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \supset \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ для всех $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \{0, 1, 2\}$, поэтому $\supset\in Pol(\varrho_3)$, $[\wedge, \vee, \sim, \supset] = Pol(\varrho_3)$. ■

На этом мы завершаем обсуждение выразительных возможностей трехзначных расширений логики Клини и переходим к их дедуктивным свойствам.

2. Степень максимальности в трехзначных языковых расширениях логики Клини

В этом разделе мы устанавливаем степени максимальности трехзначных пропозициональных логик, операции которых порождают замкнутые классы из решетки, построенной в предыдущем разделе. В первой части раздела мы приводим определения основных понятий, использующихся в нем: пропозициональная логика, логическая матрица, матричная семантика, подматрица, произведение логических матриц, степень максимальности и др. Далее мы доказываем общую теорему о степени максимальности следования, детерминированного матрицей, операции которой порождают надкласс замкнутого класса функций, соответствующего трехзначной логике Клини. После этого мы используем данную теорему, чтобы получить основной результат раздела.

Называем *пропозициональным языком* алгебру формул $\mathcal{S} = \langle S, \S_1, \S_2, ...\rangle$, свободную в классе всех алгебр аналогичной сигнатуры. Обозначим как $\mathcal{P}(S)$ множество всех подмножеств универсума $\mathcal{S}$, то есть множества формул языка $\mathcal{S}$. Пусть C — оператор, определенный на $\mathcal{P}(S)$. Называем C *следованием* в S, е.т.е. выполнены следующие условия:

1. $X \subseteq C(X)$ (рефлексивность);
2. $X \subseteq Y$, то $C(X) \subseteq C(Y)$ (монотонность);
3. $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (транзитивность).

Если $\varepsilon C(X) \subseteq C(\varepsilon X)$ для любого эндоморфизма ε языка $\mathcal{S}$, называем следование C *структурным*. Называем *пропозициональной логикой* пару $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C\rangle$, где $\mathcal{S}$ — пропозициональный язык, а C — рефлексивное, монотонное, транзитивное и структурное следование.

Логическая матрица — это структура $M = \langle A, f_1, f_2, \dots, D\rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, f_1, f_2, \dots\rangle$ — алгебра, а D — подмножество A. Называем D

множеством выделенных значений. Если алгебры $\mathcal{S} = \langle S, \iota_1, \iota_2, \dots \rangle$ и $\mathcal{A} = \langle A, f_1, f_2, \dots \rangle$ подобны, говорим, что M — *матрица для* $\mathcal{S}$. Гомоморфизм h из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой* $\mathcal{S}$ в M. Обозначаем как $Hom(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ множество всех таких оценок.

Определяем *следование* $M^{\vDash}$*, порождаемое матрицей* M, следующим образом: $\alpha \in M^{\vDash}(X)$, е.т.е. для любой оценки h в M верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \subseteq D$. Называем M *характеристической матрицей* для $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, C \rangle$, е.т.е. $C = M^{\vDash}$. Называем класс матриц K для $\mathcal{S}$ *матричной семантикой* для $\mathcal{S}$: $\alpha \in K^{\vDash}(X) \iff \alpha \in M_i^{\vDash}(X)$ для каждой $M_i \in K$; $K^{\vDash} = inf\{M_i^{\vDash} | M_i \in K\}$. Говорим, что матричная семантика K является *адекватной для* $\mathbf{L}$, е.т.е. $K^{\vDash} = C$. Если K — адекватная матричная семантика для $\mathbf{L}$, говорим, что $\mathbf{L}$ *детерминирована* K.

Логика Клини $\mathbf{K}_3$ детерминирована логической матрицей $K_3 = \langle \{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \sim, \{1\} \rangle$.

Пусть $M = \langle A, F, D \rangle$ и $N = \langle B, G, E \rangle$ — логические матрицы для $\mathcal{S}$. Говорим, что N — *подматрица* M, если $B \subseteq A$; $E \subseteq D$; $f^n(b_1, \dots, b_n) \in B$ для каждой $f^n \in F$ и любого $(b_1, \dots b_n) \in B$, то есть все функции из F являются алгебраическими функциями не только на A, но и на B.

Факт 2. Если N — подматрица M, то $M^{\vDash} \leq N^{\vDash}$, то есть $M^{\vDash}(X) \subseteq N^{\vDash}(X)$ для всех $X \subseteq S$ [Wójcicki, 1988, § 3.3.2].

Пусть $M_1, \dots M_k$ — логические матрицы для $\mathcal{S}$, где $M_i = \langle A_i, F_i, D_i \rangle$. Называем матрицу $N = \langle B, G, E \rangle$ *прямым произведением* $M_1, \dots M_k$, когда $B = A_1 \times \dots \times A_k$; $E = D_1 \times \dots \times D_k$;

$$g_i((a_{1,1}, \dots, a_{k,1}), \dots, (a_{1,n}, \dots, a_{k,n})) =$$
$$(f_{1,i}(a_{1,1}, \dots, a_{1,n}), \dots, f_{k,i}(a_{k,1}, \dots, a_{k,n}))$$

для всех $f_{i,j} \in F_j$, $(a_{j,1}, \dots, a_{j,n}) \in A_j^n$.

Обозначим как $P_n(K)$ множество всех прямых произведений вида $M_1 \times \dots \times M_n$ матриц из класса $K \cup \tau$, где τ — одноэлементная матрица, подобная матрицам из K. Обозначим объединение всех $P_n(K)$ для каждого конечного $n \geq 1$ как $P_f(K)$.

Теорема 3. [Zygmunt, 1974, Th. 1] *Пусть M_1 и M_2 — логические матрицы для языка $\mathcal{S}$. Тогда для всех $X \subseteq S$ верно следующее:*

$$(M_1 \times M_2)^{\vDash}(X) = \begin{cases} S, \text{ если } M_1^{\vDash}(X) = S \text{ или } M_2^{\vDash}(X) = S, \\ M_1^{\vDash}(X) \cap M_2^{\vDash}(X) \text{ в противном случае} \end{cases}.$$

Теорема 4. *Пусть C и C' — структурные следования в языке $\mathcal{S}$, причем $C \leq C'$, то есть $\alpha \in C(X) \subseteq \alpha \in C'(X)$ для всех $X \cup \{\alpha\} \subseteq S$. Пусть K*

такой класс матриц для $\mathcal{S}$, что $C = K^{\models}$. Тогда найдется такой класс $K_0 \subseteq SP(K)$, что $C' = K_0^{\models}$ [Wojtylak, 1979]. *Если K — конечный класс конечных матриц, то $K_0 \subseteq SP_f(K)$* [Wójcicki, 1988, § 4.5.7].

Пусть $\mathcal{S}$ — пропозициональный язык, и C_1, C_2 — операторы присоединения следствий на $\mathcal{P}(S)$. Пусть $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C \rangle$ — пропозициональная логика. Обозначим как $[C)_0$ надрешетку структурных усилений C: $\{C' | C \leq C'\}$. Называем *степенью максимальности* C мощность $[C)_0$.

Если $\mathbf{L}_1 = \langle \mathcal{S}, C_1 \rangle$ и $\mathbf{L}_2 = \langle \mathcal{S}, C_2 \rangle$, называем $\mathbf{L}_2$ *надлогикой* $\mathbf{L}_1$, когда $C_2 \geq C_1$. Если вдобавок $C_1 \neq C_2$, говорим, что надлогика $\mathbf{L}_2$ является *собственной*. Ясно, что мощность множества надлогик $\mathbf{L}$ совпадает со степенью максимальности следования этой логики.

Для доказательства следующей теоремы нам потребуется две леммы. В дальнейшем условимся писать $\tilde{a}_i$ для обозначения набора вида $(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$ и $\tilde{a}$ для обозначения набора, в котором все элементы совпадают и равняются a.

Лемма 6. *Пусть $M = \langle \{0,1,2\}, F, \{1\} \rangle$ — такая матрица, что $[\wedge, \vee, \sim] \subseteq [F]$ и $M^{\models} \leq C_2^{\models}$. Пусть $N = \langle A, F, \{1\}^n \rangle$ — такая матрица, что $N \in SP_f(M)$ и $A \subseteq \{0,1,2\}^n \setminus \{2\}^n$. Если $N^{\models} \leq (M \times C_2)^{\models}$, то $N^{\models} = (M \times C_2)^{\models}$.*

Доказательство. Поскольку $M^{\models} \leq C_2^{\models}$, в силу Теоремы 3, для каждого множества формул X имеет место следующее:

- Если $p \in C_2^{\models}(X)$, то $(M \times C_2)^{\models}(X) = C_2^{\models}(X)$;
- Если $p \notin C_2^{\models}(X)$, то $(M \times C_2)^{\models}(X) = M^{\models}(X)$.

Согласно условию, $N^{\models} \leq (M \times C_2)^{\models}$, поэтому для каждого множества формул X также верно, что $M^{\models}(X) \subseteq N^{\models}(X) \subseteq (M \times C_2)^{\models}(X)$. Таким образом, если $p \notin C_2^{\models}(X)$, то $(M \times C_2)^{\models}(X) = N^{\models}(X) = M^{\models}(X)$. Для завершения доказательства достаточно рассмотреть два случая.

- Случай 1. Если $p \in C_2^{\models}(X)$, то $p \in N^{\models}(X)$;
- Случай 2. Существует такое множество формул X, что $p \in C_2^{\models}(X)$, однако $p \notin N^{\models}(X)$.

Рассмотрим Случай 1. Если $p \in C_2^{\models}(X)$, то $N^{\models}(X) = C_2^{\models}(X) = (M \times C_2)^{\models}(X)$. Как мы установили выше, если $p \notin C_2^{\models}(X)$, то $N^{\models}(X) = M^{\models}(X) = (M \times C_2)^{\models}(X)$. Таким образом, $N^{\models}(X) = (M \times C_2)^{\models}(X)$.

Рассмотрим Случай 2. Пусть $p \in C_2^{\models}(X)$ и $p \notin N^{\models}(X)$ для некоторого множества формул X.

Если $p \in C_2^{\models}(X)$, то $v(X) \cap \{0\} \neq \varnothing$ для каждой оценки v в C_2. Допустим, что $w(X) \subseteq \{1\}^n$ для некоторой оценки w в N. Поскольку $A \subseteq \{0,1,2\}^n \setminus \{2\}^n$, каждая функция из F замкнута относительно $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ ($\tilde{0} = \{0\}^n$, $\tilde{1} = \{1\}^n$). В противном случае существовал бы такой набор $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k)$, где $\tilde{a}_i \in \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$, что $f(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k) = \tilde{2}$ для некоторой функции $f \in F$. Однако это влекло бы $\{2\}^n \in A$.

Таким образом, матрица M содержит подматрицу вида $\langle \{\tilde{0}, \tilde{1}\}, F, \{\tilde{1}\} \rangle$. Данная матрица изоморфна C_2, потому что $\{\wedge, \vee, \sim\} \subseteq [F]$.

Как следствие, для каждой пары соответствующих друг другу функций f из N и g из C_2 от m переменных (для произвольного m) выполняется следующее условие. Пусть функция f такова, что

$$f \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{m,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,j} & a_{2,j} & \ldots & a_{m,j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & a_{2,1} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,1} \\ a_{0,2} \\ \ldots \\ a_{0,j} \\ \ldots \\ a_{0,n} \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого $j \in \{1, \ldots, j\}$ верно, что $a_{0,j} = 0$, е.т.е. $g(a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{m,j}) = 0$, коль скоро $a_{i,j} \in \{0,1\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Отсюда получаем следующее. Пусть формула β из множества X содержит m попарно различных переменных. Пусть $w(p_i) = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,j}, \ldots, a_{i,n})$ для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$. Если $w(X) \subseteq \{1\}^n$ для некоторой оценки w в N, то для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ найдется такое i ($i \in \{1, \ldots, m\}$), что $a_{i,j} \notin \{0,1\}$. В таком случае N содержит столбец $\tilde{2}$:

$$\begin{pmatrix} (a_{1,1} \wedge \sim a_{1,1}) \vee (a_{2,1} \wedge \sim a_{2,1}) \vee \cdots \vee (a_{m,1} \wedge \sim a_{m,1}) \\ (a_{1,2} \wedge \sim a_{1,2}) \vee (a_{2,2} \wedge \sim a_{2,2}) \vee \cdots \vee (a_{m,2} \wedge \sim a_{m,2}) \\ \ldots \\ (a_{1,n} \wedge \sim a_{1,n}) \vee (a_{2,n} \wedge \sim a_{2,n}) \vee \cdots \vee (a_{m,n} \wedge \sim a_{m,n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \ldots \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Однако это противоречит условию $A \subseteq \{0,1,2\}^n \setminus \{2\}^n$. Следовательно, допущение о том, что $w(X) \subseteq \{1\}^n$ для некоторой оценки w в N, является неверным. Поэтому неверно также и то, что $p \in C_2^{\models}(X)$ и $p \notin N^{\models}(X)$ для некоторого множества формул X.

Таким образом, $(M \times C_2)^{\models} = N^{\models}$. ■

Лемма 7. *Пусть* $M = \langle \{0,1,2\}, F, \{1\} \rangle$. *Пусть в* $N = \langle A, F, \{(1,1)\} \rangle$ — *такая логическая матрица, что* $N \in SP_f(M)$ *и* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Тогда* $N^{\models} = M^{\models}$.

Доказательство. Утверждение $M^{\models} \leq N^{\models}$ верно в силу того, что $N \in SP_f(M)$. Поэтому для завершения доказательства достаточно продемонстрировать, что также имеет место $N^{\models} \leq M^{\models}$.

Пусть $\alpha \notin M^{\models}$ для некоторого множества формул $X \cup \{\alpha\}$. Тогда найдется такая оценка v в M, что $v(X) \subseteq \{1\}$ и $v(\alpha) \notin \{1\}$. Сопоставим оценке v оценку w в N следующим образом:

$$w(p) = \begin{cases} (v(p), v(p)), \text{ если } v(p) \in \{0,1\}; \\ (0, v(p)), \text{ если } v(p) = 2 \end{cases}.$$

Если $v(X) \subseteq \{1\}$, то $w(X) \subseteq \{(1,1)\}$, так как A не содержит других наборов, где вторым членом является 1. Если $v(\alpha) = 0$, то $w(\alpha) = \{(0,0)\}$, так как A не содержит других наборов, где вторым членом является 0. Если же $v(\alpha) = 2$, то $w(\alpha) \in \{(0,2), (1,2)\}$. Таким образом, если $v(X) \subseteq \{1\}$ и $v(\alpha) \notin \{1\}$, то $w(X) \subseteq \{(1,1)\}$ и $w(\alpha) \notin \{(1,1)\}$. Иными словами, если $\alpha \notin M^{\models}(X)$, то $\alpha \notin N^{\models}(X)$. Это означает, что $N^{\models} \leq M^{\models}$. Лемма доказана. ■

Теорема 5. *Пусть* $M = \langle\{0,1,2\}, F, \{1\}\rangle$ *и* $[K_3] \subseteq [F]$. *Пусть* $N = \langle A, F, D\rangle$ *— такая матрица, что* $N \in SP_f(M)$. *Тогда* $N^{\models} \in \{\tau^{\models}, C_2^{\models}, M^{\models}, (M \times C_2)^{\models}\}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть три случая:

- Случай 1. A содержит строку, состоящую из 2;
- Случай 2. Ни одна из строк A не содержит 2;
- Случай 3. A не содержит строки, состоящей из 2, однако содержит по меньшей мере одну строку, где встречается 2.

Случай 1. Пусть A содержит строку, состоящую из 2. Тогда A не содержит столбец $\tilde{1}$. В силу определения P_f, это означает, что $D = \varnothing$. Следовательно, $N^{\models} = \tau^{\models}$.

Случай 2. Пусть ни одна из строк A не содержит 2. Поскольку $N \in SP_f(M)$ и $\{\wedge, \vee, \sim\} \in [F]$, множество A замкнуто относительно этих операций. Но тогда $N \in SP_f(C_2)$. В то же время $x \wedge \sim x = 0$ и $y \vee \sim y = 1$ для любых $x, y \in \{0,1\}$. Поэтому A содержит столбцы $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Таким образом, $C_2 \in SP_f(N)$. Следовательно, $N^{\models} = C_2^{\models}$.

Случай 3. Пусть A не содержит строки, состоящей из 2, однако содержит по меньшей мере одну строку (и, следовательно, столбец), где встречается 2.

Сперва покажем, что A содержит столбцы $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Как вытекает из условия, каждая строка A содержит по меньшей мере одно значение, отличное от 2. Рассмотрим функцию $(x_1 \wedge \sim x_1) \wedge \cdots \wedge (x_n \wedge \sim x_n)$, где n — число столбцов в A. Пусть $(a_1, \ldots, a_n)$ — строка из A. Тогда, в силу определений $\wedge$ и $\sim$, получаем $(a_1 \wedge \sim a_1) \wedge \cdots \wedge (a_n \wedge \sim a_n) = 0$. Это означает, что A содержит столбец $\tilde{0}$. Поскольку $\sim \tilde{0} = \tilde{1}$, A также содержит $\tilde{1}$.

Для завершения доказательства достаточно рассмотреть два случая.

- Случай 3.1. A содержит столбец $\tilde{2}$.

- Случай 3.2. A не содержит столбец $\tilde{2}$.

Случай 3.1. Пусть A содержит столбец $\tilde{2}$. Если A содержит $\tilde{0}$, $\tilde{1}$, $\tilde{2}$, то $M \in SP_f(N)$. Согласно условию теоремы, также имеем $N \in SP_f(M)$. Следовательно, $N^{\models} = M^{\models}$.

Случай 3.2. Пусть A не содержит столбец $\tilde{2}$. Как мы установили выше, A содержит столбцы $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Если какой-то столбец $\tilde{a} \in A$ содержит по меньшей мере один элемент из $\{0, 1\}$ и по меньшей мере одно вхождение 2, то A также содержит столбцы, $\tilde{a} \wedge \sim \tilde{a}$, $\tilde{a} \vee \sim \tilde{a}$, отвечающие следующим условиям.

- Столбец $\tilde{a} \wedge \sim \tilde{a}$ содержит только значения 0 и 2.

- Столбец $\tilde{a} \vee \sim \tilde{a}$ содержит только значения 1 и 2.

Возможны два случая.

- Случай 3.2.1. Универсум N также содержит столбец $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, связанный со столбцом $\tilde{a} \wedge \sim \tilde{a} = (a_1 \wedge \sim a_1, \ldots, a_n \wedge \sim a_n)$ следующим образом: для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ верно, что $b_i = 0$, е.т.е. $(a_1 \wedge \sim a_1) = 2$; $b_i = 1$, е.т.е. $(a_1 \wedge \sim a_1) = 0$.

- Случай 3.2.2. Универсум N не содержит столбца $\tilde{b}$, описанного выше.

Рассмотрим Случай 3.2.1. В этом случае N содержит подматрицу с универсумом $\{0, 1, \tilde{a} \wedge \sim \tilde{a}, \tilde{a} \vee \sim \tilde{a}, \tilde{b}, \sim \tilde{b}\}$, изоморфную матрице $(M \times C_2)$, поскольку имеет место следующее:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что $N^{\models} \leq (M \times C_2)^{\models}$. Обратим внимание, что $C_2 \in SP_f(M)$. В противном случае A содержало бы столбец $\tilde{2}$. Таким образом, согласно Лемме 6, $N^{\models} = (M \times C_2)^{\models}$.

Рассмотрим Случай 3.2.1. В этом случае N содержит подматрицу с универсумом $\{0, 1, \tilde{a} \wedge \sim \tilde{a}, \tilde{a} \vee \sim \tilde{a}\}$, изоморфную матрице M_4 с универсумом вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Таким образом, $M_4 \in SP_f(N)$. Следовательно,

$N^{\vDash} \leq M_4^{\vDash}$. В то же время, согласно Лемме 7, $M_4^{\vDash} = M^{\vDash}$. Однако, по условию теоремы, $N \in SP_f(M)$. Поэтому также имеем $N^{\vDash} \geq M^{\vDash}$. Из $N^{\vDash} \leq M_4^{\vDash}$, $N^{\vDash} \geq M^{\vDash}$, $M_4^{\vDash} = M^{\vDash}$ получаем $N^{\vDash} = M^{\vDash}$. Теорема доказана. ■

Теперь установим степень максимальности следования, детерминированного матрицами вида $M_i = \langle\{0,1,2\}, F_i, \{1\}\rangle$, где $[K_3] \subseteq [F_i]$. Условимся обозначать мощность надрешетки структурных усилений $M_i^{\vDash}$ посредством $|[M_i^{\vDash})_0|$. Как вытекает из Теоремы 1, достаточно рассмотреть 12 вариантов:

- $M_1 = \langle\{0,1,2\}, F_1, \{1\}\rangle$, $[F_1] = Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_5)$;
- $M_2 = \langle\{0,1,2\}, F_2, \{1\}\rangle$, $[F_2] = Pol(\varrho_1, \varrho_3, \varrho_5)$;
- $M_3 = \langle\{0,1,2\}, F_3, \{1\}\rangle$, $[F_3] = Pol(\varrho_2, \varrho_3, \varrho_5)$;
- $M_4 = \langle\{0,1,2\}, F_4, \{1\}\rangle$, $[F_4] = Pol(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$;
- $M_5 = \langle\{0,1,2\}, F_5, \{1\}\rangle$, $[F_5] = Pol(\varrho_3, \varrho_5)$;
- $M_6 = \langle\{0,1,2\}, F_6, \{1\}\rangle$, $[F_6] = Pol(\varrho_1, \varrho_3)$;
- $M_7 = \langle\{0,1,2\}, F_7, \{1\}\rangle$, $[F_7] = Pol(\varrho_2, \varrho_3)$;
- $M_8 = \langle\{0,1,2\}, F_8, \{1\}\rangle$, $[F_8] = Pol(\varrho_1, \varrho_2)$;
- $M_9 = \langle\{0,1,2\}, F_9, \{1\}\rangle$, $[F_9] = Pol(\varrho_3)$;
- $M_{10} = \langle\{0,1,2\}, F_{10}, \{1\}\rangle$, $[F_{10}] = Pol(\varrho_1)$;
- $M_{11} = \langle\{0,1,2\}, F_{11}, \{1\}\rangle$, $[F_{11}] = Pol(\varrho_2)$;
- $M_{12} = \langle\{0,1,2\}, F_{12}, \{1\}\rangle$, $[F_{12}] = Pol(\varnothing)$.

Для частичного решения поставленной задачи используем следующую теорему.

Теорема 6. [Tokarz, 1973, Th. 14] *Пусть* $M = \langle A, F, D\}\rangle$, *и для каждого* $a \in A$ *в* $[F]$ *найдется функция, тождественно равная* a. *Тогда* $|[M^{\vDash})_0| = 2$.

Лемма 8. *Если* $i \in \{2,5,6,9,10,12\}$, *то* $|[M_i^{\vDash})_0| = 2$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что F_i содержит функции $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$. Это так для $i \in \{2,5,6,9,10\}$, поскольку каждый из предикатов ϱ_1, ϱ_3, ϱ_5 содержит столбец вида $\tilde{2}$. В то же время любая функция на E_3 принадлежит $Pol(\varnothing)$, поэтому также имеет место $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2} \in [F_{12}]$. ■

Лемма 9. *Если* $i \in \{1, 3, 4, 7\}$, *то* $|[M_i^{\models})_0| = 3$.

Доказательство. В силу того, что $[F_i] \subseteq Pol(\varrho_2)$, имеет место $M_i^{\models} \leq C_2^{\models}$. В то же время $p \vee \sim p \in C_2^{\models}(q)$, однако $p \vee \sim p \notin M_i^{\models}(q)$. Поэтому $M_i^{\models} < C_2^{\models}$. В силу Теоремы 5, единственным возможным структурным усилением $M_i^{\models}$, которое слабее $C_2^{\models}$, является $(M_i \times C_2)^{\models}$.

Как мы упоминали в Факте 1, $Pol(\varrho_2, \varrho_3) = Pol(\varrho_4)$, где

$$\varrho_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что $M_i \times C_2$ имеет подматрицу N с универсумом вида ϱ_4. Поскольку N — подматрица $M_i \times C_2$, выполняется $(M_i \times C_2)^{\models} \leq N^{\models}$. В силу Леммы 7, имеет место $N^{\models} = M_i^{\models}$. Таким образом, $(M_i \times C_2)^{\models} = M_i^{\models}$. ∎

Лемма 10. $|[M_8^{\models})_0| = 4$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу вида $M = \langle \{0, 1, 2\}, \&, \vee, \sim, \{1\} \rangle$, заменив конъюнкцию Клини на конъюнкцию из [Grigolia, Finn, 1993]. Как следует из Леммы 4, $[\&, \vee, \sim] = Pol(\varrho_1, \varrho_2)$. В силу того, что $[\&, \vee, \sim] \subseteq Pol(\varrho_2)$, имеет место $M^{\models} \leq C_2^{\models}$. В то же время, $\sim (p \& \sim p) \in C_2^{\models}(q)$, однако $\sim (p \& \sim p) \notin M_i^{\models}(q)$. Поэтому $M^{\models} < C_2^{\models}$.

Пусть формула $\Phi(p, q)$ удовлетворяет следующему тождеству:

$$\Phi(p, q) = \sim (\sim ((p \& \sim q) \vee (\sim p \& q)) \vee \sim ((p \& q) \vee (\sim p \& \sim q))).$$

Тогда $C_2^{\models}(\Phi(p, q)) = S$, так как $v(\Phi(p, q)) = 0$ при любой оценке v в C_2. Однако $r \notin M^{\models}(\Phi(p, q))$, поскольку $u(\Phi(p, q)) = 1$ при $u(p) = 1$, $u(q) = 2$. Таким образом, в силу Теоремы 3, $M^{\models} < (M \times C_2)^{\models} < C_2^{\models}$. Поскольку $[\&, \vee, \sim] = [F_8]$, также имеем $M_8^{\models} < (M_8 \times C_2)^{\models} < C_2^{\models}$. ∎

Лемма 11. $|[M_{11}^{\models})_0| = 4$.

Доказательство. Как вытекает из [Финн, 1969], класс $Pol(\varrho_2)$ — это класс функций, порожденных операциями трехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$. В [Wójcicki, 1974] показано, что степень максимальности $Ł_3^{\models}$ равняется 4, причем $Ł_3^{\models} < (Ł_3 \times C_2)^{\models} < C_2^{\models}$. Поскольку $[F_{11}] = Pol(\varrho_2)$, также имеем $M_{11}^{\models} < (M_{11} \times C_2)^{\models} < C_2^{\models}$. ∎

Резюмируем результаты, полученные в Леммах 8, 9, 10, 11 следующей теоремой.

Теорема 7. *Пусть* $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C \rangle$ — *пропозициональная логика, следование которой детерминировано такой матрицей вида* $M = \langle \{0,1,2\}, F, \{1\} \rangle$, *что* $[K_3] \subseteq [F]$. *Тогда*

$$|[C)_0| = \begin{cases} 2, \text{ если } \varrho_2 \notin Inv(F), \\ 3, \text{ если } \varrho_2, \varrho_3 \in Inv(F), \\ 4, \text{ если } \varrho_2 \in Inv(F), \varrho_3 \notin Inv(F). \end{cases} .$$

Как вытекает из результатов, представленных в разделе, для большинства трехзначных расширений логики Клини существует не более двух собственных надлогик, причем этими надлогиками оказываются классическая логика высказываний, а также тривиальная логика. Исключения составляют логики $\langle \mathcal{S}, M_8^{\models} \rangle$, а также $\langle \mathcal{S}, M_{11}^{\models} \rangle$, которые, помимо классической и тривиальной надлогик, имеют надлогики вида $\langle \mathcal{S}, (M_8 \times C_2)^{\models} \rangle$ и $\langle \mathcal{S}, (M_{11} \times C_2)^{\models} \rangle$ соответственно. Это позволяет использовать метод А. Тамминга [Tamminga, 2014] не только для аксиоматизации трехзначных расширений $\mathbf{K}_3$, но также для надлогик таких расширений. Для этого достаточно сперва применить этот метод к $\langle \mathcal{S}, M_8^{\models} \rangle$ и $\langle \mathcal{S}, M_{11}^{\models} \rangle$, а затем добавить правило $\Phi(p,q) \vdash \beta$ (см. Лемму 10) к исчислению для $\langle \mathcal{S}, M_8^{\models} \rangle$, чтобы получить исчисление для $\langle \mathcal{S}, (M_8 \times C_2)^{\models} \rangle$, и правило $(\alpha \vee \sim \alpha) \to (\alpha \wedge \sim \alpha) \vdash \beta$ (см. Лемму 11, а также [Wójcicki, 1988, § 4.5.10]) к исчислению для $\langle \mathcal{S}, M_{11}^{\models} \rangle$, чтобы получить исчисление для $\langle \mathcal{S}, (M_{11} \times C_2)^{\models} \rangle$.

3. Заключение

Мы описали выразительные возможности трехзначных языковых расширений логики Клини, а также установили степень максимальности следования в каждом из них. В заключение остановимся на некоторых возможных направлениях исследований, которые связаны с результатами, предложенными в настоящей работе.

Мы рассмотрели расширения логики Клини $\mathbf{K}_3$, матрица которой имеет только одно выделенное значение. В то же время существует трехзначная логика, связки которой идентичны $\mathbf{K}_3$, однако класс выделенных значений содержит два элемента. Это логика **LP** Асеньо — Приста [Asenjo, 1966; Priest, 1979].

Структура решетки замкнутых классов, описанной в Теореме 1, не зависит от выбора класса выделенных значений. Однако результаты, касающиеся выразительных возможностей импликативных расширений **LP** отличаются от таковых для $\mathbf{K}_3$, поскольку схемы импликаций из рассмотренных нами работ зависят от выбора класса выделенных значений. Приведем следующие схемы импликаций для $D = \{1, 2\}$: I_1^2 из [Tomova, 2012], I_2^2 из [Robles, Méndez, 2020].

I_1^2	0	1	2
0	1	1	a_1
1	0	1	b_1
2	0	a_2	a_3

I_2^2	0	1	2
0	1	1	b_1
1	0	1	b_2
2	0	b_3	a_1

$a_i \in \{1,2\}$, $b_i \in \{0,1,2\}$ для всех индексов, встречающихся в схеме.

В то время как импликативные расширения $\mathbf{K}_3$, основанные на схемах I_1 и I_2, порождают только классы $Pol(\varrho_2)$ и $Pol(\varnothing)$, для импликативных расширений **LP**, основанных на схемах I_1^2 и I_2^2 это не так. Полагая $a_3 = 2$ в I_1^2 или $a_1 = 2$ в I_2^2, получаем $[\wedge, \vee, \sim, \supset] = Pol(\varrho_1, \varrho_2)$ [Томова, 2010, с. 39–42]. Также обратим внимание, что импликация, использованная в [Avron, 1999], отвечает схеме I_1^2.

Наконец, аналог Теоремы 7 для $D = \{1,2\}$ будет отличаться от рассмотренного нами случая $D = \{1\}$. Например, как следует из наших построений, $K_3^{\models} = (K_3 \times C_2)^{\models}$. В то же время $LP^{\models} \neq (LP \times C_2)^{\models}$, поскольку $\beta \notin LP^{\models}(\alpha, \sim\alpha)$ и $\beta \in C_2^{\models}(\alpha, \sim\alpha)$. Кроме того, $(LP \times C_2)^{\models} \neq C_2$, так как $\beta \in C_2^{\models}(\sim(\alpha \wedge \sim\beta), \alpha)$, однако $\beta \notin (LP \times C_2)^{\models}(\sim(\alpha \wedge \sim\beta), \alpha)$. Как следует из [Pynko, 2000, Th. 4.13], $|[LP^{\models})_0| = 4$.

Второе направление дальнейших исследований, которое представляет интерес с точки зрения автора, состоит в применении методов, предложенных в статье, для анализа трехзначных логик, связки которых отличаются от таковых в $\mathbf{K}_3$. Примерами могут служить слабая логика Клини $\mathbf{K}_3^w$ с одним выделенным значением [Kleene, 1952], а также логика **PWK** [Ciuni, 2015], которая отличается от $\mathbf{K}_3^w$ тем, что класс выделенных значений в ней содержит два элемента. Связки в матрицах обеих логик совпадают. Они отвечают следующим таблицам:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

x	$\sim x$
0	1
1	0
2	2

Известно, что решетка замкнутых надклассов $[\wedge, \vee, \sim]$ имеет мощность континуума [Makarov, Makarov, 2019]. Поэтому получение результата, аналогичного Теореме 1, выглядит проблематичным. Из результатов, представленных в [Paoli, Pra Baldi, 2021], следует, что $|[PWK^{\models})_0| = 4$. Возникает вопрос, можно ли дать общее описание мощности решетки структурных усилений для каждого из бесконечного множества трехзначных расширений **PWK** и $\mathbf{K}_3^w$ в терминах сохранения определенных предикатов, как это сделано в Теореме 7.

В завершение остановимся на матрице $\langle\{0,1,2\}, \&, \vee, \sim, \{1\}\rangle$ и логике, которую она задает. Мы установили, что $[\&, \vee, \sim] = Pol(\varrho_1, \varrho_2)$. Как следует из

[Avron, 1999, Th. 2.14], также имеет место $[\vee, \supset, \sim] = Pol(\varrho_1, \varrho_2)$. Связка $\supset$ в данном случае отвечает следующему условию для $D = \{1, 2\}$: $a \supset b = b$, если $a \in D$, и $a \supset b = 1$ в противном случае. Матрица $\langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \supset, \sim, \{1, 2\}\rangle$ — это характеристическая матрица логики, которая, под разными названиями, исследуется в [Asenjo, Tamburino 1975; Розоноэр, 1983; Avron, 1986] (см. также [Карпенко, 2010, § 3.5.2]; [Arieli, Avron, 2015, § 5.4]). Следуя Л.И. Розоноэру, будем обозначать эту логику как **PCont**.

Импликация $\supset_1$, предложенная Е. Слупецким в [Słupecki, 1946, § 2], отвечает условию, аналогичному приведенному выше для **PCont** при $D = \{1\}$. То есть таблицы для $\supset$ и $\supset_1$ выглядят следующим образом:

$\supset$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	0	1	2

$\supset_1$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	1	1	1

Помимо схожих определений импликации, матрицы $PCont = \langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \supset, \sim, \{1, 2\}\rangle$ и $LPF = \langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \supset_1, \sim, \{1\}\rangle$ объединяет то, что обе они верифицируют позитивный фрагмент классической логики высказываний [Avron, 1991]. Подобное сходство позволяет рассматривать логику **LPF**, задаваемую матрицей LPF, как своего рода параполный «близнец» паранепротиворечивой логики **PCont** (см. [Попов, 2009; Знаменская, Попов, 2009] и [Карпенко, 2010, § 3.5.2.2]).

В то же время выразительные возможности LPF идентичны Ł3 [Wójcicki, 1988, § 1.8.6]; [Avron, 1991]. Это означает, что $[\wedge, \vee, \supset_1, \sim] = Pol(0, 1)$. Как следствие, наборы связок в **PCont** и **LPF** различаются по своим выразительным возможностям (см. также [Знаменская, 2012]). Таким образом, с точки зрения выразительных возможностей, параполным выриантом **PCont** является не **LPF**, а логика, задаваемая матрицей $\langle\{0, 1, 2\}, \&, \vee, \sim, \{1\}\rangle$, что делает эту логику интересным объектом для исследования. Насколько известно автору, такое исследование пока не проводилось.

Литература

Жук, 2011 – *Жук Д.Н.* Предикатный метод построения решетки Поста // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 2. С. 115–128.

Жук, 2018 – *Жук Д.Н.* От двузначной к k-значной логике // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22. Вып. 1. С. 131–149.

Знаменская, 2012 – *Знаменская Н.А.* К проблеме выразимости операций характеристических матриц паранепротиворечивых и параполных логик // Логические исследования. 2012. Т. 18. С. 132–140.

Знаменская, Попов, 2009 – *Знаменская Н.А., Попов В.М.* Паранормальная логика PContPComp как пересечение паранепротиворечивой логики PCont и параполной логики PComp // Шестые смирновские чтения по логике. Материалы Международн. науч. конф. (г. Москва, 17–19 июня 2009). М., 2009. С. 63–65.

Карпенко, 2010 – *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

Попов, 2009 – *Попов В.М.* Между Par и множеством всех формул // Шестые смирновские чтения по логике. Материалы Международн. науч. конф. (г. Москва, 17–19 июня 2009). М., 2009. С. 93–95.

Розоноэр, 1983 – *Розоноэр Л.И.* О выявлении противоречий в формальных теориях. I // Автоматика и телемеханика. 1983. Вып. 6. С. 113–124.

Томова, 2010 – *Томова Н.Е.* Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования / Logical Investigations. 2010. Т. 16. С. 233–258.

Томова, 2012 – *Томова Н.Е.* Естественные трехзначные логики: функциональные свойства и отношения. М.: ИФ РАН, 2012. 89 с.

Финн, 1969 – *Финн В.К.* О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Я. Лукасевича // Научно-техническая информация. Сер 2. 1969. Вып 10. С. 35–38.

Яблонский, 1958 – *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН СССР. 1958. Т. 51. С. 5–142.

Adams, Dziobiak, 1994 – *Adams M.E., Dziobiak W.* Lattices of quasivarieties of 3-element algebras // Journal of Algebra. 1994. Vol. 166. № 1. P. 181–210.

Arieli, Avron, 2015 – *Arieli O., Avron A.* Three-valued paraconsistent propositional logics // New Directions in Paraconsistent Logic / Ed. by J.-Y. B´eziau et al. Springer India, 2015. P. 91–129.

Asenjo, 1966 – *Asenjo F.G.* A calculus of antinomies // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1966. Vol. 7. P. 103–105.

Asenjo, Tamburino 1975 – *Asenjo F.G., Tamburino J.* Logic of antinomies // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1975. Vol. 16. № 1. P. 17–44.

Avron, 1986 – *Avron A.* On an implication connective of RM // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1986. Vol. 27. № 2. P. 201–209.

Avron, 1991 – *Avron A.* Natural 3-valued logics — characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56. № 1. P. 276–294.

Avron, 1999 – *Avron A.* On the expressive power of three-valued and four-valued languages // Journal of Logic and Computation. 1999. Vol. 9. № 6. P. 977–994.

Ciuni, 2015 – *Ciuni R.* Conjunction in paraconsistent weak Kleene logic // Logica Yearbook 2014 / Ed. by P. Arazim and M. Dancák. London: College Publications, 2015. P. 61–76.

Grigolia, Finn, 1993 – *Finn V.K., Grigolia R.* Nonsense logics and their algebraic properties // Theoria. 1993. Vol. 59. № 1–3. P. 207–273.

Kleene, 1938 – *Kleene S.C.* On notation for ordinal numbers // The Journal of Symbolic Logic. 1938. Vol. 3. № 4. P. 150–155.

Kleene, 1952 – *Kleene S.C.* Introduction to metamathematics. Groningen: Wolters–Noordhoff Publishing, 1952. 560 p.

Lau, 2006 – *Lau D.* Function algebras on finite sets: Basic course on many-valued logic and clone theory. Springer Science & Business Media, 2006. 670 c.

Makarov, Makarov, 2019 – *Makarov A.V., Makarov V.V.* Cardinality of the continuum of closed superclasses of some minimal classes in the partially ordered set $\mathcal{L}_2^3$ // Moscow University Mathematics Bulletin. 2009. Vol. 74. № 4. P. 174.

Paoli, Pra Baldi, 2021 – *Paoli F., Pra Baldi M.* Extensions of paraconsistent weak Kleene logic // Logic Journal of the IGPL. 2021. Vol. 29. № 5. P. 798–822.

Petrukhin, Shangin, 2018 – *Petrukhin Y., Shangin V.* Natural three-valued logics characterised by natural deduction // Logique et Analyse. 2018. Vol. 244. P. 407–427.

Petrukhin, Shangin, 2019 – *Petrukhin Y., Shangin V.* Automated proof-searching for strong Kleene logic and its binary extensions via correspondence analysis // Logic and logical philosophy. 2019. Vol. 28. № 2. P. 223–257.

Priest, 1979 – *Priest G.* The logic of paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219–241.

Pynko, 2000 – *Pynko A.P.* Subprevarieties versus extensions. Application to the logic of paradox // The Journal of Symbolic Logic. 2000. Vol. 65. № 2. P. 756–766.

Robles, 2019 – *Robles G.* Reduced Routley–Meyer semantics for the logics characterized by natural implicative expansions of Kleene's strong 3-valued matrix // Logic Journal of the IGPL. 2019. Vol. 27. № 1. P. 69–92.

Robles, 2021 – *Robles G.* The class of all 3-valued implicative expansions of Kleene's Strong Logic containing Anderson and Belnap's First Degree Entailment Logic // Journal of Applied Logics. 2021. Vol. 8. № 7. P. 2035–2072.

Robles, López, 2020 – *Robles G., López S.M.* Selecting the class of all 3-valued implicative expansions of Kleene's strong logic containing Routley and Meyer's logic B // Logique et Analyse. 2020. Vol. 252. P. 443–464.

Robles, Méndez, 2019 – *Robles G., Méndez J.M.* Partiality and its dual in natural implicative expansions of Kleene's strong 3-valued matrix with only one designated value // Logic Journal of the IGPL. 2019. Vol. 27. № 6. P. 910–932.

Robles, Méndez, 2020 – *Robles G., Méndez J.M.* The class of all natural implicative expansions of Kleene's Strong Logic functionally equivalent to Łukasiewicz's 3-Valued Logic Ł3 // Journal of Logic, Language and Information. 2020. Vol. 29. № 3. P. 349–374.

Robles, Méndez, 2021 – *Robles G., Méndez J.M.* A class of implicative expansions of Kleene's Strong Logic, a subclass of which is shown functionally complete via the precompleteness of Łukasiewicz's 3-Valued Logic Ł3 // Journal of Logic, Language and Information. 2021. Vol. 30. № 3. P. 533–556.

Robles, Méndez, 2022 – *Robles G., Méndez, J.M.* A remark on functional completeness of binary expansions of Kleene's strong 3-valued logic // Logic Journal of the IGPL. 2022. Vol. 30. № 1. P. 21–33.

Robles, Salto, Méndez, 2020 – *Robles G., Salto F., Méndez J.M.* Belnap–Dunn semantics for natural implicative expansions of Kleene's strong three-valued matrix II. Only one designated value // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2019. Vol. 29. № 3. P. 307–325.

Słupecki, 1946 – *Słupecki J.* Pelny trójwartościowy rachunek zdań // Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska. 1946. Vol. 1. No. 3. Sectio F. P. 193–209.

Tamminga, 2014 – *Tamminga A.* Correspondence analysis for strong three-valued logic // Logical Investigations. 2014. Vol. 20. P. 253–266.

Tokarz, 1973 – *Tokarz M.* Connections between some notions of completeness of structural propositional calculi // Studia Logica. 1973. Vol. 32. P. 77–91.

Tomova, 2012 – *Tomova N.E.* A lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics // Reports on Mathematical Logic. 2012. No. 47. P. 173–182.

Wójcicki, 1974 – *Wójcicki* R. The logics stronger than Łukasiewicz's three valued sentential calculus: The notion of degree of maximality versus the notion of degree of completeness // Studia Logica. 1974. Vol. 33. № 2. P. 201–214.

Wójcicki, 1988 – *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi. Dordrecht: Springer, 1988. 473 p.

Wojtylak, 1979 – *Wojtylak P.* Matrix representations for structural strengthenings of a propositional logic // Studia Logica. 1979. Vol. 38. № 3. P. 263–266.

Zygmunt, 1974 – *Zygmunt J.* A note on direct products and ultraproducts of logical matrices // Studia Logica. 1947. Vol. 33. P. 349–357.

Leonid Yu. Devyatkin

On the three-valued expansions of Kleene's logic

Leonid Yu. Devyatkin
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Abstract: The paper is devoted to one of the most famous three-valued systems — Kleene's logic. The expressive capabilities of Kleene's logic and its three-valued expansions are described. We present two results. First, all possible three-valued expansions of Kleene's logic are found up to equivalence with respect to the mutual definability of connectives. It is shown that there are only twelve such expansions. This list includes both logics already known in the literature and completely new ones. For the found expansions, we describe the structure of the lattice ordered relative to the expressive power of its elements. Secondly, for Kleene's logic and its three-valued expansions we find how many extensions each of these logics has in the same language. Kleene's logic has only two proper extensions: the classical and the trivial ones. Generally, a three-valued logic in which Kleene's matrix is definable contains no more than three proper extensions: the classical one, the trivial one, and an intermediate logic, determined by the product of the the original logic's matrix and the matrix of classical logic in the same signature. Intermediate logics exist only for two types of three-valued expansions of Kleene's logic: in expansions equivalent to Łukasiewicz's logic, and in logics whose matrices contain both a bivalent submatrix, the universe of which consists of the classical truth values, and a submatrix, the universe of which consists the intermediate value alone. All three-valued expansions of Kleene's logic that do not preserve the classical values have only one extension of their own — the trivial one.

Keywords: many-valued logics, Kleene's logic, expressive power, closed sets of functions, degree of maximality

For citation: Devyatkin L.Yu. "O trekhznachnyh rasshireniyah logiki Klini" [On the three-valued expansions of Kleene's logic], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 59–88. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-59-88 (In Russian)

References

Adams, Dziobiak, 1994 – Adams, M.E., Dziobiak, W. "Lattices of quasivarieties of 3-element algebras", *Journal of Algebra*, 1994, Vol. 166, No. 1, pp. 181–210.

Arieli, Avron, 2015 – Arieli, O., Avron, A. "Three-Valued Paraconsistent Propositional Logics", *New Directions in Paraconsistent Logic*, ed. by J.-Y. Beziau et al. New Delhi: Springer, 2015, pp. 91–129.

Asenjo, 1966 – Asenjo, F.G., "A calculus of antinomies", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1966, Vol. 7, pp. 103–105.

Asenjo, Tamburino 1975 – Asenjo, F.G., Tamburino, J. "Logic of antinomies", *Notre Dame Journal of formal logic*, 1975, Vol. 16. No. 1, pp. 17–44.

Avron, 1986 – Avron, A. "On an implication connective of RM", *Notre Dame Journal of formal logic*, 1986, Vol. 27, No. 2, pp. 201–209.

Avron, 1991 – Avron, A. "Natural 3-valued logics — characterization and proof theory", *The Journal of Symbolic Logic*, 1991, Vol. 56, No. 1, pp. 276–294.

Avron, 1999 – Avron, A. "On the expressive power of three-valued and four-valued languages", *Journal of Logic and Computation*, 1999, Vol. 9, No. 6, pp. 977–994.

Ciuni, 2015 – Ciuni, R. "Conjunction in paraconsistent weak Kleene logic", *Logica Yearbook 2014*, ed. by P. Arazim and M. Dancák. London: College Publications, 2015, pp. 61–76.

Finn, 1969 – Finn, V.K. "O predpolnote klassa funkcij, sootvetstvuyushchego trekhznachnoj logike J. Lukasevicha" [On the precompleteness of the class of functions corresponding to the three-valued logic of J. Łukasiewicz], *Nauchno-tekhnicheskaya informaciya. Ser. 2* [Scientific and technical information. Ser. 2], 1969, Vol. 10, pp. 35–38. (In Russian)

Grigolia, Finn, 1993 – Finn, V.K., Grigolia, R. "Nonsense logics and their algebraic properties", *Theoria*, 1993, Vol. 59, No. 1–3, pp. 207–273.

Karpenko, 2010 – Karpenko, A.S. *Razvitie mnogoznachnoj logiki* [The Development of Many-Valued Logics]. Moscow: LKI, 2010. 448 p. (In Russian)

Kleene, 1938 – Kleene, S.C. "On notation for ordinal numbers", *The Journal of Symbolic Logic*, 1938, Vol. 3, No. 4, pp. 105–155.

Kleene, 1952 – Kleene, S.C. *Introduction to metamathematics*. Groningen: Wolters–Noordhoff Publishing, 1952. 560 p.

Lau, 2006 – Lau, D. *Function algebras on finite sets: Basic course on many-valued logic and clone theory*, Springer Science & Business Media, 2006. 670 p.

Makarov, Makarov, 2019 – Makarov, A.V., Makarov, V.V. "Cardinality of the continuum of closed superclasses of some minimal classes in the partially ordered set $\mathcal{L}_2^3$", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2009, Vol. 74, No. 4, p. 174.

Paoli, Pra Baldi, 2021 – Paoli, F., Pra Baldi, M. "Extensions of paraconsistent weak Kleene logic", *Logic Journal of the IGPL*, 2021, Vol. 29, No. 5, pp. 798–822.

Petrukhin, Shangin, 2018 – Petrukhin, Y., Shangin, V. "Natural three-valued logics characterised by natural deduction", *Logique et Analyse*, 2018, Vol. 244, pp. 407–427.

Petrukhin, Shangin, 2019 – Petrukhin, Y., Shangin, V. "Automated proof-searching for strong Kleene logic and its binary extensions via correspondence analysis", *Logic and logical philosophy*, 2019, Vol. 28, No. 2, pp. 223–257.

Popov, 2009 – Popov, V.M. *Mezhdu Par i mnozhestvom vsekh formul* [Between Par and the set of all formulas]. Shestye smirnovskie chteniya po logike. Materialy mezhdunarodn. nauch. konf. (g. Moskva, 17–19 iyunya 2009) [Sixth Smirnov Readings in Logic. Conference proceedings (Moscow, 17–19 June, 2009)]. M., 2009, pp. 93–95. (In Russian)

Priest, 1979 – Priest, G. "The logic of paradox", *Journal of Philosophical Logic*, 1979, Vol. 8, pp. 219–241.

Pynko, 2000 – Pynko, A.P. "Subprevarieties versus extensions. Application to the logic of paradox", *The Journal of Symbolic Logic*, 2000, Vol. 65, No. 2, pp. 756–766.

Robles, 2019 – Robles, G. "Reduced Routley–Meyer semantics for the logics characterized by natural implicative expansions of Kleene's strong 3-valued matrix", *Logic Journal of the IGPL*, 2019, Vol. 27, No. 1, pp. 69–92.

Robles, 2021 – Robles, G. "The class of all 3-valued implicative expansions of Kleene's Strong Logic containing Anderson and Belnap's First Degree Entailment Logic", *Journal of Applied Logics*, 2021, Vol. 8, No. 7, pp. 2035–2072.

Robles, López, 2020 – Robles, G., López, S.M. "Selecting the class of all 3-valued implicative expansions of Kleene's strong logic containing Routley and Meyer's logic B", *Logique et Analyse*, 2020, Vol. 252, pp. 443–464.

Robles, Méndez, 2019 – Robles, G., Méndez, J.M. "Partiality and its dual in natural implicative expansions of Kleene's strong 3-valued matrix with only one designated value", *Logic Journal of the IGPL*, 2019, Vol. 27, No. 6, pp. 910–932.

Robles, Méndez, 2020 – Robles, G., Méndez, J.M. "The class of all natural implicative expansions of Kleene's Strong Logic functionally equivalent to Łukasiewicz's 3-Valued Logic Ł3", *Journal of Logic, Language and Information*, 2020, Vol. 29, No. 3, pp. 349–374.

Robles, Méndez, 2021 – Robles, G., Méndez, J.M. "A class of implicative expansions of Kleene's Strong Logic, a subclass of which is shown functionally complete via the precompleteness of Łukasiewicz's 3-Valued Logic Ł3", *Journal of Logic, Language and Information*, 2021, Vol. 30, No. 3, pp. 533–556.

Robles, Méndez, 2022 – Robles, G. and Méndez, J.M. "A remark on functional completeness of binary expansions of Kleene's strong 3-valued logic", *Logic Journal of the IGPL*, 2022, Vol. 30, No. 1, pp. 21–33.

Robles, Salto, Méndez, 2020 – Robles, G., Salto, F., Méndez, J.M. "Belnap–Dunn semantics for natural implicative expansions of Kleene's strong three-valued matrix II. Only one designated value", *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2019, Vol. 29, No. 3, pp. 307–325.

Rozonoer, 1983 – Rozonoer, L.I. "O vyyavlenii protivorechij v formal'nyh teoriyah. I" [On identification of contradictions in formal theories. I], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1983, Vol. 6, pp 113–124.

Słupecki, 1946 – Słupecki, J. "Pelny trójwartościowy rachunek zdań", *Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska*, 1946, Vol. 1, No. 3, Sectio F, pp. 193–209.

Tamminga, 2014 – Tamminga, A. "Correspondence analysis for strong three-valued logic", *Logical Investigations*, 2014, Vol. 20, pp. 253–266.

Tokarz, 1973 – Tokarz, M. "Connections between some notions of completeness of structural propositional calculi", *Studia Logica*, 1973, Vol. 32, pp. 77–91.

Tomova, 2010 – Tomova, N.E. "Implikativnye rasshireniya regulyarnyh logik Klini" [Implicative extensions of regular Kleene logics], *Logical Investigations*, 2010, Vol. 16, pp. 233–258. (In Russian)

Tomova, 2012 – Tomova, N.E. *Estestvennye trekhznachnye logiki: funkcional'nye svojstva i otnosheniya* [Natural Three-valued Logics: Functional Properties and Relations]. Moscow: IPh RAS, 2012. 89 p. (In Russian)

Tomova, 2012 – Tomova, N.E. "A lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics", *Reports on Mathematical Logic*, 2012, No. 47, pp. 173–182.

Wójcicki, 1974 – Wójcicki, R. "The logics stronger than Łukasiewicz's three valued sentential calculus: The notion of degree of maximality versus the notion of degree of completeness", *Studia Logica*, 1974, Vol. 33, No. 2, pp. 201–214.

Wójcicki, 1988 – Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi*, Springer, 1988. 473 p.

Wojtylak, 1979 – Wojtylak, P. "Matrix representations for structural strengthenings of a propositional logic", *Studia Logica*, 1979, Vol. 38, No. 3. pp. 263–266.

Yablonsky, 1958 – Yablonsky, S.V. "Funkcional'nye postroeniya v k-znachnoj logike" [Functional constructions in k-valued logic], *Trudy MIAN SSSR* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1958, Vol. 51, pp. 5–142. (In Russian)

Zhuk, 2011 – Zhuk, D.N. "Predikatnyi metod postroeniya reshetki Posta" [The predicate method for constructing Post's lattice], *Diskretnaya Matematika*, 2011, Vol. 23, No. 2, pp. 115–128. (In Russian)

Zhuk, 2018 – Zhuk, D.N. "Ot dvuznachnoi k k-znachnoi logike" [From two-valued to k-valued logic], *Intellektual'nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, 2018, Vol. 22, Is. 1, pp. 131–149. (In Russian)

Znamenskaya, 2012 – Znamenskaya, N.A. "K probleme vyrazimosti operacij harakteristicheskih matric paraneprotivorechivyh i parapolnyh logik" [On the problem of expressibility operations of characteristic matrices of paraconsistent and paracomplete logics], *Logical Investigations*, 2012, Vol. 18, pp. 132–140. (In Russian)

Znamenskaya, Popov, 2009 – Znamenskaya, N.A., Popov, V.M. *Paranormal'naya logika PContPComp kak peresechenie paraneprotivorechivoj logiki PCont i parapolnoj logiki PComp* [Paranormal logic PContPComp as intersection of a paraconsistent logic PCont and a paracomplete logic PComp]. Shestye smirnovskie chteniya po logike. Materialy mezhdunarodn. nauch. konf. (g. Moskva, 17–19 iyunya 2009) [Sixth Smirnov Readings in Logic. Conference proceedings (Moscow, 17–19 June, 2009)], M., 2009, pp. 63–65. (In Russian)

Zygmunt, 1974 – Zygmunt, J. "A note on direct products and ultraproducts of logical matrices", *Studia Logica*, 1947, Vol. 33, pp. 349–357.

Логические исследования
2023. Т. 29. № 2. С. 89–103
УДК 160.1, 168.51

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 2, pp. 89–103
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-89-103

А.А. Печенкин

Квантовая логика в контексте математического обоснования квантовой механики

Александр Александрович Печенкин
МГУ им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: a_pechenk@yahoo.com

Аннотация: Квантовая логика, предстающая сейчас перед нами в виде большого числа философских и математических статей и книг, возникла в ходе решения проблем, касающихся математического обоснования квантовой механики. Однако она явилась новым моментом в цепи исследований, посвященных этим проблемам. Квантовая логика возникла в рамках усилий обеспечить более экономное с математической точки зрения изложение основ квантовой механики. Создание этой теории было реакцией на трудности физико-математического плана, возникающие при стандартном изложении этой теории в рамках математики гильбертова пространства. Дальнейшее развитие квантовой логики шло в различных направлениях, одно из которых — создание новой абстрактной аксиоматизации квантовой механики, аксиоматизации, включающей идею вероятности, которая при стандартном изложении квантовой механики вводится на уровне эмпирической интерпретации этой теории. Квантово-логический подход позволил также интегрировать в математическую схему квантовой механики правила суперотбора, выступавшие ранее в виде *ad hoc* гипотезы.

Ключевые слова: гильбертово пространство, принцип суперпозиции, суперотбор, проекционные операторы, решетка высказываний, дистрибутивность, теория вероятности

Для цитирования: *Печенкин А.А.* Квантовая логика в контексте математического обоснования квантовой механики // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 2. С. 89–103. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-89-103

Введение

Квантовая логика занимает большое место в литературе по математике, логике и философии. Настоящая статья рассматривает историко-научную ретроспективу квантовой логики. Причем в ней имеются в виду те исследования по квантовой логике, которые проводились и проводятся в русле математического обоснования квантовой механики.

Мы не рассматриваем вопрос о классических и неклассических логиках, не обсуждаем дискуссии о сути логического. Первой формулировкой квантовой логики является статья Г. Биркгофа и Д. фон Неймана (1936 г.), реагирующая на те трудности, которые возникли при изложении квантовой механики как теории самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. В тридцатые годы эти трудности фиксировались на уровне интуиции. Позднее они были зафиксированы в виде необходимости обращаться к правилам суперотбора.

В конце тридцатых годов обозначились и другие идеи логического плана, касающиеся квантовой механики, — логическая интерпретация соотношений неопределенностей, предложенная французским философом П. Феврие, логика дополнительности Г. Рейхенбаха (см. [Jammer, 1974]). В настоящей статье, однако, эти идеи не рассматриваются. Мы также не рассматриваем альтернативные формулировки квантовой логики — квантовую логику в топосах, модальные версии квантовой логики, квантовую логику времени и т.д. (см.: [Васюков, 2005; Меськов, 1986]). Мы не касаемся также рассуждений о сущности логического, возникших в связи с появлением квантовой логики.

В настоящей статье речь идет о развитии квантовой логики в связи с проблемами математического обоснования квантовой механики, а именно — в связи с проблемами изложения квантовой механики как теории самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Как мы увидим, попытка создать аксиоматическое обоснование квантовой механики на базе аксиоматики, близкой к исчислению Биркгофа и фон Неймана, привела Дж. Макки к включению в систему аксиом основоположений теории гильбертова пространства.

1. Математическое обоснование квантовой механики и квантовая логика

Проблема математического обоснования квантовой механики была рассмотрена автором настоящей статьи в ряде книг и статей [Печенкин, 1984; Печенкин, 1991; Печенкин, 2017]. Основная идея работ автора: математическое обоснование квантовой механики шло по линии, отмеченной тремя именами, а именно — Э. Шредингер, П.А.М. Дирак и Д. фон Нейман. При этом обоснование рассматривается как критическая деятельность: чтобы прийти к более фундаментальной (точной) формулировке квантовой механики, надо критически рассмотреть предыдущую формулировку — увидеть в ней логические пробелы и концептуальные несоответствия, а это в свою очередь предполагало выявление стереотипов, философских предпосылок текущего изложения квантовой механики.

Как известно, квантовая механика возникла в 1925–1928 гг. в виде двух теорий — матричной теории (Гейзенберг, Борн, Иордан) и волновой (Шредингер). При этом Шредингер показал эквивалентность или, точнее, как писал физик и философ Н.Р. Хэнсон, «взаимопереводимость» матричной и волновой теорий.

Следующий этап в развитии математического обоснования квантовой механики связан с именем Дирака. У Шредингера еще не было общей математической схемы квантовой механики, по отношению к которой матричная и волновая теории выступали бы как частные формулировки. Дирак же развивает символический метод, оперирующий фундаментальными величинами теории («инвариантами и квазиинвариантами преобразований»), и пишет о методе представлений, «который оперирует системами чисел, соответствующих этим величинам».

Матричная и волновая теории строились методом представлений. Символический же метод, по словам Дирака, «глубже проникает в природу вещей». Этот метод основывается на теории унитарных преобразований гильбертова пространства. Матричная же формулировка квантовой механики — частная формулировка квантовой механики в энергетическом представлении, формулировка, использующая картину движения Гейзенберга, а волновая формулировка в свою очередь — это формулировка в координатном представлении, использующем картину движения Шредингера. Переход от одного представления к другому и от одной картины движения к другой осуществляется при помощи соответствующих унитарных преобразований.

Если Дирак начал разрабатывать теорию преобразований, ориентируясь на решение достаточно конкретной проблемы — применение этой теории к волновой механике (1925 г.), то фон Нейман с самого начала занимался вопросами обоснования (1927–1932 гг.). Как писал Н.Н. Боголюбов — редактор русского издания книги фон Неймана, «...заслуга автора состоит в том, что он придал квантовой механике логически последовательную форму, излагая ее как единую теорию, в которой не остается невыясненным ни один принципиальный момент» [Боголюбов, 1964].

Книга была издана на немецком языке в 1932 г., английский перевод вышел в 1955 г., русский — в 1964 г.

Фон Нейман уточнил дираковское построение квантовой механики, указав на скрытую зависимость построений Дирака от идей матричной теории Гейзенберга — Борна — Иордана. Фон Нейман подчеркнул, что у Дирака, построившего квантовую механику в виде теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, математически строго были изложены лишь проблемы дискретного спектра. Проблемы же непрерывного спектра у него не укладывались в аппарат гильбертова пространства. Чтобы достигнуть единообразия с трактовкой дискретного спектра, Дирак «лицемерно», по словам фон Неймана, допустил существование несобственных функций типа δ-функции, для которых в то время еще не было строгой теории. Фон Нейман изложил квантовую механику как теорию самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве («…то, что не принадлежит $\mathfrak{R}_\infty$ (бесконечномерному гильбертову пространству), для нас не существует», — писал он [фон Нейман, 1964, p. 101]). Фон Нейман разработал спектральную теорию неограниченных самосопряженных операторов и построил единую теорию дискретного и непрерывного спектров. Он также сформулировал в общей форме правило, связывающее математический аппарат с экспериментом.

2. От пространства Гильберта к квантовой логике

Какое же место в построениях фон Неймана занимает логика? Статья Биркгофа и фон Неймана, появившаяся в октябре 1936 г., обозначает уже иную тенденцию в размышлениях фон Неймана и вообще в исследованиях, касающихся математических оснований квантовой механики. Фон Нейман стал искать иной подход к обоснованию квантовой механики. Изложение квантовой механики в форме теории самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, хотя и прояснило структуру этой теории, уже не было для него тем аппаратом, который можно только совершенствовать. Фон Нейман стал сомневаться в самой математике. Не является ли конструкция гильбертова пространства чем-то избыточным по отношении к той физике, которая «работает» при решении задач? Не составляет ли эта конструкция нечто вроде математической метафизики?

Формулировка квантовой механики как теории самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, была одним из главных достижений фон Неймана. Однако фон Нейман стал ощущать что-то вроде дискомфорта, работая с гильбертовым пространством. Он осознавал, что гильбертово пространство как математический объект содержит такие конструкции, которые не могут быть реализованы в физическом эксперименте (этот вопрос подробно обсуждается в лекции А. Гринбаума [Гринбаум, 2013]).

Отказаться от гильбертова пространства нельзя. Об этом говорили успехи теоретической физики, формирование квантовой теории поля. Однако нельзя ли изложить квантовую механику более экономно, отказавшись от тех структур, которые носили мировоззренческий характер и непосредственно не были задействованы в физике?

Известно письмо фон Неймана Биркгофу, в соавторстве с которым фон Нейман в 1936 г. опубликовал статью по квантовой логике. В нем есть следующая фраза: «Я хотел бы сделать признание, которое, возможно, покажется безнравственным: я больше не верю в гильбертово пространство».

Эта фраза вошла в сборник афоризмов фон Неймана [Great quotes by von Neumann].

Чтобы исторически конкретно проследить путь фон Неймана к квантовой логике, надо обратиться к параграфу о проекционных операторах в книге, о которой шла речь выше, к «Математическим основам квантовой механики», вышедшим в свет в 1932 г. «Наряду с физическими величинами $\mathfrak{R}$, — писал фон Нейман, — существует еще нечто, являющееся предметом физики, а именно — альтернативные свойства системы $\mathbf{S}$. Альтернативным свойством будет, например, то, что некая величина $\mathfrak{R}$ принимает определенное значение λ, или то, что значение величины $\mathfrak{R}$ положительно, или что значения двух одновременных величин $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ равняются, соответственно, λ и μ» [фон Нейман, 1964, с. 185].

Альтернативным свойствам фон Нейман сопоставляет математическую величину — проекционный оператор. «Мы видим, — пишет он, — что связь между свойствами физической системы, с одной стороны, и проекционными операторами, с другой, делает возможным некое логическое исчисление над ними. Однако в противоположность исчислению обычной логики эта система обогащена характерным для квантовой механики понятием одновременной рассудимости...» [фон Нейман, 1964].

Фон Нейман просит читателей иметь в виду, что понятие одновременной рассудимости является уточнением понятия одновременной измеримости.

Слова фон Неймана о том, что исчисление проекционных операторов отображает свойства физической системы, часто цитируется в книгах и статьях по квантовой логике. В настоящей статье мы, однако, подчеркиваем, что идея изложить квантовую механику при помощи аппарата проекционных операторов возникла у фон Неймана в связи с возникшим у него в тридцатые годы критическим отношением к его собственному подходу к квантовой механике как теории самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

Первые поиски фон Неймана, однако, не шли в направлении квантовой логики. В 1935 г. в соавторстве с американским математиком Мюрреем фон Нейман написал статью, в которой развил алгебраическое исчисление, заменяющее исчисление самосопряженных операторов, действующих в гильбертовых пространствах (статья опубликована в начале 1936 г.). Однако это исчисление не отображало важнейшего свойства операторов, зафиксированное Дираком и фон Нейманом, их возможную некоммутативность.

В статье 1936 г. фон Нейман и Биркгоф уже развивают ту идею, которая присутствовала у фон Неймана в его книге 1932 г., а именно — идею логического исчисления проекционных операторов.

«Один из аспектов квантовой теории, который привлекает наибольшее общее внимание, — пишут авторы, — это новизна логических структур, которые она предполагает. Цель настоящей статьи описать те логические структуры, которые можно найти в физической теории, которая, подобно квантовой механике, не отвечает классической логике.

Наше главное заключение, базирующееся на допустимых эвристических аргументах, состоит в том, что разумно представить исчисление высказываний, которое формально неотличимо от исчисления подпространств в отношении теоретико-множественного произведений, линейных сумм и ортогональных дополнений и напоминает обычное исчисление высказываний в отношении связок “*и*”, “*или*”, “*не*”» [Birkhoff & von Neumann, 1936, p. 823].

3. Первая статья по квантовой логике

Чтобы построить логику, Биркгоф и фон Нейман вводят новые для физиков понятия «экспериментальное высказывание», «пространство наблюдения».

«Если измерения обозначаются символами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, то наблюдение над $\mathfrak{S}$ (физической системой) приводит к появлению чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соответствующих различным μ_k.

Отсюда следует, что наиболее общая форма предсказаний, касающихся $\mathfrak{S}$, состоит в том, что точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная произведенными измерениями $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, лежит в подмножестве S пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, мы можем назвать подмножества пространств наблюдения, связанных с какой-либо физической системой $\mathfrak{S}$, “экспериментальными высказываниями” относительно $\mathfrak{S}$» [Ibid., p. 823–824].

Остановимся на рассуждениях Биркгофа и фон Неймана. Что можно сказать о структуре совокупности событий? «Есть одна концепция, которая используется как в квантовой механике, так и в классической, — пишут Биркгоф и фон Нейман, — это понятие фазового пространства. Согласно этому понятию, любая физическая система $\mathfrak{S}$ в каждом конкретном случае ассоциируется с “точкой” p в фиксированном фазовом пространстве Σ..., причем предполагается, что это состояние достигается путем “максимального” наблюдения» [Ibid., p. 824]. «Максимальное» — это образное выражение, оно говорит о том, что это наблюдение с использованием всех доступных средств экспериментальной техники.

«Давайте рассмотрим экспериментальное высказывание P о системе и допустим, — пишут далее Биркгоф и фон Нейман, — что данная физическая величина имеет некоторое значение. Такое высказывание P может естественно ассоциироваться с подмножеством нашего фазового пространства, подмножеством, состоящим из всех чистых состояний, для которых справедлива техника гильбертова пространства» [Birkhoff & von Neumann, 1936, p. 825].

Упрощая рассуждения Биркгофа и фон Неймана, приведем следующие два примера того, что они называют экспериментальными высказываниями: «*тело находится в точке a и имеет скорость v*», «*электрон обладает спином* -1 *(проекция спина на ось x)*».

Конструируя свое логическое исчисление, Биркгоф и фон Нейман ссылаются на свойства пространства состояний квантовой механики (гильбертова пространства), соотнося его с пространством состояний классической физики. Однако надо подчеркнуть, что квантовая логика, сконструированная Биркгофом и фон Нейманом, не вытекает из аксиоматики гильбертова пространства, эта аксиоматика играет лишь эвристическую роль при формулировании квантовой логики.

«Экспериментальные высказывания, касающиеся состояний системы в классической механике, соответствуют "полю" подмножеств на фазовом пространстве... — пишут Биркгоф и фон Нейман. — Они образуют булеву алгебру» [Ibid., p. 826].

Обращаясь к квантовой механике, Биркгоф и фон Нейман принимают следующее определение: «Под "математическим представлением" подмножества S любого пространства наблюдений (определяемого совместными наблюдаемыми α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_n для квантово-механической системы $\mathfrak{S}$, мы будем понимать множество всех точек f фазового пространства этой системы $\mathfrak{S}$, которая линейно определяется соответствующими функциями f_k, удовлетворяющими $\alpha_1 f_k = \lambda_1 f_k, \ldots,$ $\alpha_n f_k = \lambda_n f_k$, где $(\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_n) \in S$» [Ibid.].

Далее они формулируют «постулат»: «Теоретико-множественное произведение и замкнутая сумма любых двух подпространств... гильбертова пространства и ортогональное дополнение каждого подпространства гильбертова пространства, операции, математически представляющие экспериментальные высказывания, касающееся $\mathfrak{S}$, — пишут далее Биркгоф и фон Нейман, — сами представляют экспериментальное высказывание относительно $\mathfrak{S}$» [Ibid., p. 827].

Таким образом, они приходят к исчислению экспериментальных высказываний как исчислению с тремя операциями (конъюнкция, дизъюнкция и отрицание) и отношением импликации.

«Вопрос о связи между подмножествами экспериментальных высказываний и подмножествами фазового пространства системы $\mathfrak{S}$ еще не был затронут, — пишут Биркгоф и фон Нейман в шестом разделе своей статьи. — Настоящий раздел посвящен определению такой связи, доказательству некоторых фактов, касающихся этой связи, и получению путем эвристических аргументов правдоподобных постулатов исчисления высказываний, работающего в квантовой механике» [Birkhoff & von Neumann, 1936, p. 826].

Это исчисление экспериментальных высказываний, касающееся квантовых систем, в логическом плане аналогично определенному выше исчислению высказываний классической механики. Однако его специфическая черта состоит в крушении дистрибутивности и замене дистрибутивности на модулярность.

В итоге Биркгоф и фон Нейман предлагают исчисление высказываний, которое по своим алгебраическим свойствам находится близко к тому, что сейчас называют решеткой квантовых высказываний, т.е. ортомодулярной полной атомарной решеткой (во времена Биркгофа и фон Неймана на русском языке использовался термин «структура», а не «решетка»).

Подчеркнем еще раз, что квантовая логика Биркгофа и фон Неймана не выводится из математики гильбертова пространства. Скорее она представляет собой, так сказать, логическую проекцию этой математики.

4. «Квантовые явления происходят в лаборатории, а не в гильбертовом пространстве»

В предыдущем параграфе говорилось о том, что фон Нейман пришел к идее квантовой логики не в результате каких-то философских исканий.

Фон Нейман был неудовлетворен изложением квантовой механики на базе математики самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Фон Нейман, однако, не формулировал эту свою позицию развернуто, он не рассчитывал на широкий круг физиков.

В настоящем параграфе речь пойдет о тех трудностях физико-математического плана, которые ставят под сомнение стандартное изложение квантовой механики как теории самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. При этом мы будем опираться на одну из современных книг по теоретической физике. Название настоящего параграфа воспроизводит фразу, взятую авторами этой книги в качестве эпиграфа [Никитин и др., 2015].

В книге идет речь о правилах суперотбора, которые не предполагаются в тех изложениях, которые следуют Дираку и фон Нейману. Эти правила дополняют строгое математическое изложение квантовой механики как теории самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим мысленный эксперимент. Пусть монохроматический пучок света низкой интенсивности (будем считать, что в каждый момент времени на экран падает только один фотон) проходит сквозь непрозрачный экран с тремя щелями (обычно в учебниках по квантовой механике рассматривают эксперименты с двумя щелями). За этим экраном на некотором расстоянии находится еще один экран, на котором можно наблюдать интерференционную картину.

Прохождению фотона через первую щель непрозрачного экрана можно изобразить в виде базисного вектора $|1\rangle$, через вторую — в виде вектора $|2\rangle$, а через третью — вектора $|3\rangle$. Если пучок достаточно однороден, то вектор состояния фотонов сразу после прохождения экрана с тремя щелями можно записать в виде суперпозиции [Никитин и др., 2015, с. 122]:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle). \tag{1}$$

На пути от первого экрана до второго фотоны интерферируют друг с другом. Результат интерференции зависит от взаимного расположения щелей и расстояния между экранами. Предположим, что мы подобрали такое расположение щелей и экранов, что интерференционная картина на втором экране соответствует следующему вектору состояния [Там же]:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (|1\rangle - |2\rangle + |3\rangle). \tag{2}$$

Условная вероятность возникновения этого состояния будет равна $\frac{1}{3}$. Теперь поставим около щели 3 детектор фотонов и переставим экраны так, чтобы вектор состояния $|\varphi\rangle$ остался бы тем же самым. Принцип суперпозиции позволяет нам это сделать. Тогда с какой вероятностью в получившейся конфигурации мы зарегистрируем, что фотон прошел через третью щель? Вычисления дают вероятность, равную единице [Там же]:

$$1 - \left|\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \langle\varphi|(|1\rangle + |2\rangle)\rangle\right|^2 = 1 - 0 = 1. \tag{3}$$

Как согласовать эту вероятность с тем, что имеет место интерференция, то есть взаимодействие фотонов, проходящих через все три щели?

Ситуация, однако, еще более сложная. Поставим детектор фотонов перед первой щелью и зададимся вопросом, какова здесь вероятность прохождения фотонов? Рассуждение приводит нас к выводу, что вероятность прохождения здесь тоже равна единице. Поскольку суммарная вероятность прохождения фотонов через любую из трех щелей равна единице, то вероятность прохождения через вторую щель равна минус единице. Отрицательная вероятность!

На помощь приходит правило, которое не предполагалось в математическом изложении квантовой механики у Дирака и фон Неймана и было эксплицитно сформулировано лишь в 1952 г. (Дж.К. Вик, А.С. Вайтман, Ю.П. Вигнер [Wick et al., 1952]), а именно правило суперотбора (в книге Дж. Макки, которая будет цитироваться ниже, это правило называется правилом высшего отбора). Правило суперотбора утверждает, что не все состояния системы, которые можно записать при помощи принципа суперпозиции, имеют физический смысл и реализуемы в природе [Никитин и др., 2015, с. 122].

5. Квантовая логика Биркгофа и фон Неймана в книге Макки о математических основаниях квантовой механики

Статья Биркгофа и фон Неймана получила резонанс как в исследованиях по логике, так и в разработке математических оснований квантовой механики.

Как отметил М. Редеи [Redei, 2001] (см. также [Васюков, 2005, с. 5]), квантовая логика положила начало формулированию обобщенной неклассической теории вероятности, развивающей те вероятностные идеи, которые были применены Дираком и фон Нейманом при эмпирической интерпретации квантово-механического формализма.

В этой связи примечательны работы Макки [Макки, 1965]. Как сказано в *Стенфордской энциклопедии по философии*, Макки изложил математический аппарат квантовой механики как «обобщенную теорию вероятности, в основе которой лежит логика экспериментальных высказываний, или, в его терминологии, «вопросов», имеющая структуру сигма ортомодулярного частично упорядоченного множества» [Wilce, 2021].

Что такое сигма ортомодулярное множество? Это весьма слабая (в математическом смысле — предполагающая некоторые минимальные свойства) алгебраическая структура, в которой каждый элемент p имеет ортогональное дополнение p', такое, что если $p > q$, то $p' < q$ и $p'' = p$.

В отличие от сигма ортомодулярного множества, сигма алгебра, лежащая в основе классического определения вероятности, предполагает большее — предполагает совокупность подмножеств, замкнутых относительно дополнения, счетного объединения и счетного пересечения.

Макки формулирует систему из семи аксиом, составляющих его исчисление «вопросов». Под «вопросами» Макки, по сути дела, понимал «экспериментальные высказывания». «Наблюдаемая A называется вопросом, если в каждом состоянии α мера α_A сосредоточена в точках 0 и 1». Наблюдаемая — это энергия, импульс и т. д. Частично упорядоченное множество вопросов играет такую же роль, как фазовое пространство в классической механике. Наблюдаемая будет «вопросом», если мы можем с определенностью назвать значение этой наблюдаемой [Макки, 1965, с. 61].

Формулируя свое исчисление «вопросов», Макки ссылается на аксиоматику Биркгофа и фон Неймана. «Понятие системы $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$, p, удовлетворяющее аксиомам **1**–**6**…, — пишет Макки, — эквивалентно понятию частично упорядоченного множества $\mathcal{L}$ с заданным на нем семейством вероятностных мер. Мы будем называть $\mathcal{Q}$=$\mathcal{L}$ логикой нашей системы» [Макки, 1965, с. 64]. Здесь:
$\mathcal{L}$ — произвольное частично упорядоченное множество;
$\mathcal{Q}$ — множество всех вопросов;
$\mathcal{A}$ — множество всех мер на действительной прямой со значениями в $\mathcal{L}$;
$\mathcal{S}$ — множество вероятностных мер на $\mathcal{L}$;
p — вероятность.

Итак, у Макки, как у Биркгофа и фон Неймана, фундаментальным является понятие фазового пространства, точнее — той теоретико-множественной структуры этого пространства, которая имеется в виду в алгебре квантовых высказываний.

Задача, поставленная Макки, состояла в построении аксиоматики квантовой механики, аксиоматики, отличной от той, которая намечена в «Математических началах» фон Неймана, вместе с тем аксиоматики строгой и точной. Интересно, что, в отличие от Биркгофа и фон Неймана, Макки пришел к необходимости снова включить в систему оснований квантовой механики понятие гильбертова пространства.

Аксиома **7** Макки состоит в следующем: «Частично упорядоченное множество вопросов в квантовой механике изоморфно частично упорядоченному множеству всех замкнутых подпространств сепарабельного бесконечномерного комплексного гильбертова пространства».

Сепарабельным называется пространство, имеющее счетный ортонормированный базис. Макки отмечает, что аксиома **7** имеет вид допущения *ad hoc* и он принимает ее исходя из прагматических соображений. Тем не менее возврат к идее гильбертова пространства симптоматичен. Как отмечалось выше, фон Нейман обратился к квантовой логике в связи с возникшим в его идейном пространстве разочаровании в математике гильбертова пространства. И вот гильбертово пространство возвращается в аксиоматику квантовой механики. Макки в свою очередь развивает аксиоматику, способную акцептировать идею правил суперотбора, о которых речь шла в предыдущем параграфе. В последней главе своей книги он обобщает вышеупомянутую аксиому **7**, имея в виду учесть в своей аксиоматической системе понятие суперотбора.

Остановимся еще на одной тенденции в исследованиях по квантовой логике.

6. Проблематичность системы Биркгофа и фон Неймана

Уже Биркгоф и фон Нейман в плане самокритики указывали на проблематичность понятий «конъюнкция» и «дизъюнкция» в их системе аксиом. Они фиксировали вопрос о физическом смысле понятий «конъюнкция» и «дизъюнкция». На это замечание Бикгофа и фон Неймана обращает внимание М. Джеммер в своей книге по истории интерпретаций квантовой механики [Jammer, 1974].

Обратимся, однако, к одной из новых работ по философии квантовой механики.

«Структура решетки замкнутых подпространств гильбертова пространства, — говорится в одной из книг, касающейся логики квантовой механики, — делает систему квантовых высказываний замкнутой относительно конъюнкции. С точки зрения физики это ведет к некоторым контринтуитивным следствиям. Пусть два экспериментальных высказывания касаются двух несовместных величин, вроде "*спин направлен вверх по оси x*" и "*спин направлен вниз по оси y*". В такой ситуации интуиция физика идет к следующему выводу: конъюнкция наших высказываний не имеет определенного смысла, ибо они не могут быть одновременно экспериментально проверены. Таким образом напрашивается следующий вывод: структура логики высказываний, построенная на понятии решетки, оказывается слишком сильной» [Dalla Chiara et al., 2004].

Этот радикальный вывод предполагает и радикальную ревизию исчисления Биркгофа и фон Неймана, предполагает построение иной квантовой логики, отказывающейся от классического понятия конъюнкции.

Однако есть и положительная реакция на исчисление Биркгофа и фон Неймана. Например, Г. Вейль в статье, посвященной памяти Э. Гуссерля, провел семантический анализ исчисления Биркгофа и фон Неймана и сопоставил их квантовую логику с интуиционистской и модальной [Weyl, 1940].

Заключение

В настоящей статье очерчивается эволюция идей фон Неймана — аксиоматика гильбертова пространства, критика этой аксиоматики, формулирование (совместно с Биркгофом) квантовой логики. В статье также идет речь о некоторых аспектах того контекста, в котором развивались идеи фон Неймана и в котором они «живут» в настоящее время (математические работы Макки и философская статья Вейля).

Литература

Боголюбов, 1964 – *Боголюбов Н.Н.* Предисловие редактора перевода // *Нейман И. фон.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.

Васюков, 2005 – *Васюков В.Л.* Квантовая логика. М.: ПЕР СЭ, 2005.

Гринбаум, 2013 – *Гринбаум А. О.* Математические конструкции в квантовой логике и их современное применение. Лекция от 17.07.2013. URL: `https://www.youtube.com/watch?v=Yv3BGGdiufE` (дата обращения 25.08.2023).

Макки, 1965 – *Макки Дж.* Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965.

Меськов, 1986 – *Меськов В.С.* Очерки по логике квантовой механики. М.: Издательство МГУ, 1986.

Никитин и др., 2015 – *Никитин Н.В., Томс К.В., Фотина О.В.* Аксиомы квантовой механики. М.: Университетская книга, 2015.

Печенкин, 1984 – *Печенкин А.А.* Математическое обоснование в развитии физики. М.: Наука, 1984.

Печенкин, 1991 – *Печенкин А.А.* Обоснование научной теории: классика и современность. М.: Наука. 1991. (Второе издание, испр. и доп. — М.: URSS, 2021).

Печенкин, 2017 – *Печенкин А.А.* Квантовая логика и теория вероятности // Логические исследования. 2017. Т. 23. № 2. С. 123–139.

фон Нейман, 1964 – *Нейман И. фон.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.

Birkhoff & von Neumann, 1936 – *Birkhoff G., von Neumann J.* The logic of quantum mechanics // Annal. Math. 1936. Vol. 37. P. 823–843. (Перепечатано в книге: The logico-algebraic approach to quantum mechanics. Vol. 1. Dordrecht, Boston, 1975.)

Dalla Chiara et al., 2004 – *Dalla Chiara M.L., Greechie R., Guinty R.* Sharp and unsharp in quantum reasoning. Kluwer, 2004.

Great quotes by von Neumann – 38 Great Quotes By John Von Neumann That Will Spark Your Interest In Mathematics. URL: `https://quotes.thefamouspeople.com/john-von-neumann-481.php` (дата обращения 25.08.2023).

Jammer, 1974 – *Jammer M.* The philosophy of quantum mechanics. The interpretations of quantum mechanics in historical perspective. John Wiley, 1974.

Redei, 2001 – *Redei M.* Faces of quantum logic // Studies in the history and philosophy of modern physics. 2001. Vol. 32. № 1. P. 101–111.

Weyl, 1940 – *Weyl G.* The ghost of modality // Philosophical essays in the memory of Edmund Husserl. Harvard Univ. Press, 1940. P. 287–303.

Wick et al., 1952 – *Wick G.C., Wightman A.S., Wigner E.P.* The Intrinsic Parity of Elementary Particles // Physical Review. 1952. Vol. 88. No. 1. P. 101–105.

Wilce, 2021 – *Wilce A.* Quantum logic and probability theory // Stanford Encyclopedia of Philosophy. Substantial revision 2021. URL: `https://plato.stanford.edu/entries/qt-quantlog/` (дата обращения 25.08.2023)

Alexander A. Pechenkin

Quantum logic in the context of the mathematical foundation of quantum mechanics

Alexander A. Pechenkin
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: a_pechenk@yahoo.com

Abstract: Quantum logic as it is presented in Birkhoff — von Neumann's 1936 paper arose within the framework of the mathematical elaboration of the foundations of quantum mechanics. Birkhoff — von Neumann's axiomatic was an alternative of the traditional formulation of foundations of quantum mechanics proceeding from the technique of the Hilbert space. It provided more economic formulation of the foundations of the theory. In Mackay's writings it has been transformed into the axiomatic of quantum theory of probability. However, Mackay came back to the concept of Hilbert space as the fundamental for quantum mechanics. He also adopted the rules of super-selections in his presentation of the foundations of quantum mechanics. The contemporary approach to Birkhoff-von Neumann's axiomatic is twofold: the criticism of their too rigid construction from the point of view of physics and the development in connection with mathematical intuitionism.

Keywords: mathematical foundations, Hilbert space, super-selection, propositions, probability, logic of questions, intuitionism

For citation: Pechenkin A.A. "Kvantovaya logika v kontekste matematicheskogo obosnovaniya kvantovoi mekhaniki" [Quantum logic in the context of the mathematical foundation of quantum mechanics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 89–103. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-89-103 (In Russian)

References

Birkhoff & von Neumann, 1936 – Birkhoff, G., von Neumann, J. "The logic of quantum mechanics", Annal. Math., 1936, Vol. 37, pp. 823–843.

Bogolubov, 1964 – Bogolubov, N.N. "Predisloviye redaktora perevoda" [Preliminary Essay by the Editor of Russian translation], in: Iogann fon Neyman "Matematicheskiye osnovy kvantovoy mekhaniki", Moscow, Nauka, 1964. (In Russian)

Dalla Chiara et al., 2004 – Dalla Chiara, M.L., Greechie, R., Guinty, R. *Sharp and unsharp in quantum reasoning*, Kluwer, 2004.

fon Neyman, 1964 – fon Neyman, I. "Matematicheskiye osnovy kvantovoy mekhaniki" [Mathematical Foundations of Quantum Mechanics], Moscow, Nauka, 1964. (In Russian)

Great quotes by von Neumann – 38 Great Quotes By John Von Neumann That Will Spark Your Interest In Mathematics. (https://quotes.thefamouspeople.com/john-von-neumann-481.php, accessed on 25.08.2023).

Grinbaum, 2013 – Grinbaum A. O. "Matematicheskiye konstruktsii v kvantovoy logike i ikh sovremennoye primeneniye" (Alexei Grinbaum's lecture on YouTube "Mathematical constructions in quantum logic and their modern application", https://www.youtube.com/watch?v=Yv3BGGdiufE, accessed on 25.08.2023) (In Russian)

Jammer, 1974 – Jammer, M. "The philosophy of quantum mechanics. The interpretations of quantum mechanics in historical perspective", John Wiley, 1974.

Makki, 1965 – Makki, D. "Lektsii po matematicheskim osnovam kvantovoy mekhaniki" [Lectures on the mathematical foundations of quantum mechanics], Moscow, Mir, 1965. (In Russian)

Meskov, 1986 – Meskov, V.S. "Ocherki po logike kvantovoy mehanniki" [Essays on the logic of quantum mechanics], Moscow, Izdatelstvo MGU, 1986. (In Russian)

Nikitin и др., 2015 – Nikitin, N.V., Toms, K.D., Fotina, O.V. Aksiomy kvantovoy mekhaniki [Axioms of quantum mechanics], Moscow, Universitetskaya kniga, 2015. (In Russian)

Pechenkin, 1984 – Pechenkin, A.A. "Matematicheskoye obosnovaniye v razvitii fiziki" [Mathematical justification in the development of physics], Moscow, Nauka, 1984. (In Russian)

Pechenkin, 1991 – Pechenkin, A.A. "Obosnovaniye nauchnoy teorii: klassika i sovremennost" [Justification of scientific theory: classic and modernity], Moscow, Nauka, 1991. (In Russian)

Pechenkin, 2017 – Pechenkin, A.A. "Kvantovaya logika i teoriya veroyatnosti" [Quantum logic and probability theory], Logicheskiye issledovaniya, 2017, Vol. 23, No. 2, pp. 123–139. (In Russian)

Redei, 2001 – Redei, M. "Faces of quantum logic", Studies in the history and philosophy of modern physics, 2001, Vol. 32, No. 1, pp. 101–111.

Vasyukov, 2005 – Vasyukov, V.L. "Kvantovaya logika" [Quantum Logic], Moscow, Per Se, 2005. (In Russian)

Weyl, 1940 – Weyl, G. "The ghost of modality", in: *Philosophical essays in the memory of Edmund Husserl*, Harvard Univ. Press, 1940, pp. 287–303.

Wick et al., 1952 – Wick, G.C., Wightman, A.S., Wigner, E.P. "The Intrinsic Parity of Elementary Particles", Physical Review, 1952, Vol. 88, No. 1, pp. 101–105.

Wilce, 2021 – Wilce, A. "Quantum logic and probability theory", in: Stanford Encyclopedia of Philosophy. Substantial revision 2021. (https://plato.stanford.edu/entries/qt-quantlog/, accessed on 25.08.2023)

Логические исследования
2023. Т. 29. № 2. С. 104–124
УДК 510.644

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 2, pp. 104–124
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-104-124

Н.Е. Томова

К вопросу о критерии параполноты логик

Наталья Евгеньевна Томова
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Аннотация: В статье рассмотрены вопросы, связанные с определением параполных логик. Существуют различные способы формализации основного условия параполноты — требования наличия в логической системе таких формул, что сами эти формулы и их отрицания ложны. Приводятся соответствующие определения параполноты, а также условия эквивалентности некоторых определений. Рассмотрены условия эквивалентности закона исключенного третьего $\varphi \vee \neg\varphi$, закона Клавия $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ и его частного случая $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$. Отдельный раздел посвящен вопросам параполного отрицания, а также его модальной интерпретации.

Ключевые слова: параполнота, закон Клавия, закон исключенного третьего, имплозивность отношения следования

Для цитирования: *Томова Н.Е.* К вопросу о критерии параполноты логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 2. С. 104–124. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-104-124

Введение

Данная статья является продолжением исследования, посвященного вопросам определения паранепротиворечивых и параполных логик, и касается параполноты логических систем. Первую часть исследования см. в [Томова, 2022].

Паранепротиворечивые и параполные логики часто рассматриваются как дуальные системы. Если первые подходят для работы с противоречивыми контекстами, то вторые применимы для корректной работы в условиях недостаточности, неполноты информации.

Прежде всего отметим, что в области изучения паралогик свойство паранепротиворечивости является отправной точкой. Исторически первыми сформулированы именно паранепротиворечивые системы, параполные логики формулировались позже как некоторые дуальные системы с симметричными свойствами. И полученные результаты в области паранепротиворечивых логик часто обобщаются на случай параполных (хотя иногда и с некоторыми изменениями и уточнениями).

Так, в определениях паранепротиворечивых и параполных логик прослеживаются параллели и аналогии, они строятся вокруг следующих понятий:

Паранепротиворечивость	**Параполнота**
• неэксплозивность следования	• неимплозивность следования
• закон непротиворечия	• закон исключенного третьего
• закон Дунса Скота	• закон Клавия

Термин «параполная логика» (так же как и термин «паранепротиворечивая логика») был предложен Ф. Миро Кесада по просьбе Н. да Косты [D'Ottaviano, Gomes, 2020, p. 263]. Непосредственно само определение параполной логики в общем виде мы находим позже в работе [Loparić, da Costa, 1984, p. 119]:

> Логическая система является *параполной*, если она может лежать в основе теорий, в которых существуют замкнутые формулы, такие, что сами эти формулы и их отрицания одновременно ложны. Такие теории называются *параполными.*

Как следствие, в параполных теориях не верифицируется закон исключенного третьего в следущей форме: из двух противоречащих утверждений одно должно быть истинным[1].

Интуиционисткая логика, а также некоторые системы многозначных логик являются параполными в этом смысле.

Возникновение параполной логики стало результатом работы тех исследователей, которые каким-то образом стремилсь предотвратить всеобщее применение принципа исключенного третьего. Первые системы параполных логик были разработаны для решения вопросов интуиционистской логики.

Математики и логики интуиционистского и конструктивного направления признают применимость закона исключенного третьего в рассуждениях о конечных множествах, но не применяют этот закон в рассуждениях о бесконечных множествах.

[1]Напомним, что для паранепротиворечивых теорий существует требование неверификации закона непротиворечия. Хотя и имеются различные взгляды на необходимость данного требования (см. [Томова, 2022, с. 85–86]).

Обратим внимание, что параполная логика также встречается в литературе под названием слабо интуиционисткой логики (см., например, работы [Sette, Carnielli, 1995; Ciuciura, 2015]).

Мотивация для возникновения параполных логик связана и с тем фактом, что классическое требования о том, что по крайней мере что-то одно — или само утверждение, или его отрицание — должно быть истинным, не всегда соответствует нашей интуиции. Например, неуниверсальность закона исключенного третьего видна, когда имеется некоторый неопределенный предикат P («высокий», «низкий» и т.п.) и пограничный индивид a, такой, что мы можем считать, что одновременно $P(a)$ и $\neg P(a)$ ложны. Так, различные подходы к вопросу неопределенности в языке, когда постулируются истинностнозначные провалы, предполагают логику, допускающую неполноту, поскольку наличие в теории предложений, которые не являются ни истинными, ни ложными, означает также допущение наличия предложений, которые не являются истинными, в то время как их отрицания также не являются истинными (см., например, [Hyde, 2008, pp. 73–92]).

Параполная логика дает возможность корректно обрабатывать неполные данные, отвергая закон исключенного третьего.

Как и в случае паранепротиворечивых логик, существуют различные подходы к определению параполноты логик. В статье будут приведены определения параполноты, которые встречаются в литературе. Также будут затронуты вопросы, связанные с параполным отрицанием.

1. Определения

Приведем основные определения, которые будут нами использованы в статье.

Пусть $Var = \{p, q, r \dots\}$ — счетное множество пропозициональных переменных и $Con = \{\S_1, \dots \S_n\}$ — конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке $\S_i$ сопоставлено натуральное число $a(\S_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Хотя бы для одного $i \in \{1, \dots n\}$ имеет место $a(\S_i) \neq 0$. Множество формул For определяется индуктивно стандартным образом:

(1) $Var \subseteq For$;

(2) Для каждого такого $\S_i \in Con$, что $a(\S_i) = k$, $\S_i(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in For$, если $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in For$;

(3) Ничто иное не принадлежит For.

Алгебру формул $\mathcal{L} = \langle For, \S_1, \dots, \S_n \rangle$ будем называть *пропозициональным языком.*

Множества формул из For называются *теориями* и обозначаются $\mathcal{T}, \mathcal{S}$.

Отношением следования для пропозиционального языка $\mathcal{L}$ называем бинарное отношение $\vdash$ между $\mathcal{T} \subseteq For$ и $\varphi \in For$, отвечающее условиям:

- если $\varphi \in \mathcal{T}$, то $\mathcal{T} \vdash \varphi$ (рефлексивность);
- если $\mathcal{T} \vdash \varphi$ и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, то $\mathcal{T}' \vdash \varphi$ (монотонность);
- если $\mathcal{T} \vdash \varphi$ и $\mathcal{T}', \varphi \vdash \psi$, то $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \vdash \psi$ (транзитивность).

Если $\vdash$ также замкнуто относительно всех эндоморфизмов (подстановок) $\mathcal{L}$, называем такое следование *структурным*.

Если $\mathcal{L}$ — пропозициональный язык и $\vdash$ — структурное логическое следование на $\mathcal{L}$, то $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — *пропозициональная логика*. Далее, если не оговорено иное, будем рассматривать логики, заданные в стандартном языке, в котором имеются связки $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$.

Теория $\mathcal{T}$ *противоречива*, е.т.е. существует такая формула φ, что:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \quad \text{и} \quad \mathcal{T} \vdash \neg\varphi.$$

Теория $\mathcal{T}$ *полна*, е.т.е. для любой формулы φ верно, что:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \quad \text{или} \quad \mathcal{T} \vdash \neg\varphi.$$

Теория $\mathcal{T}$ *тривиальна*, е.т.е. для любой формулы φ верно, что:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi.$$

Отношением следования со множественными заключениями для пропозиционального языка $\mathcal{L}$ называем бинарное отношение $\vdash$ между $\mathcal{T} \subseteq For$ и $\mathcal{S} \subseteq For$, отвечающее условиям:

- если $\mathcal{T} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$, то $\mathcal{T} \vdash \mathcal{S}$;
- если $\mathcal{T} \vdash \mathcal{S}$, где $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ и $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$, то $\mathcal{T}' \vdash \mathcal{S}'$;
- если $\mathcal{T}, \mathcal{Z}_1 \vdash \mathcal{Z}_2, \mathcal{S}$, где $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}_1 \cap \mathcal{Z}_2 = \varnothing$ ($\mathcal{Z} \subseteq For$), то $\mathcal{T} \vdash \mathcal{S}$ [Shoesmith, Smiley, 1978, p. 29].

Логическая матрица для $\mathcal{L}$ — это структура $\mathcal{M} = \langle V, f_1, \ldots, f_k, D \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \ldots, f_k \rangle$ алгебра того же типа, что пропозициональный язык $\mathcal{L}$, V — множество истинностных значений и f_i — функция на V той же местности, что и $\S_i$; $D \subseteq V$ — непустое собственное подмножество V. Когда $\mathcal{M}$ — матрица для $\mathcal{L}$, гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой* $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$.

Некоторая формула φ есть *тавтология* в $\mathcal{M}$, е.т.е. для каждой оценки h в $\mathcal{M}$ верно, что $h(\varphi) \in D$.

Теорией, порождаемой $\mathcal{M}$, называем множество всех тавтологий в $\mathcal{M}$ и обозначаем его как $E(\mathcal{M})$.

Матричное отношение следования есть множество $Cn(\mathcal{M})$ упорядоченных пар $\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle$, таких, что для всякой оценки h в $\mathcal{M}$, если $h(\mathcal{T}) \subseteq D$, то $h(\varphi) \in D$.

Следование со множественными заключениями (multiple-conclusion consequence relation), порождаемым $\mathcal{M}$, называется множество $Cn_m(\mathcal{M})$ упорядоченных пар $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$, таких, что для всякой оценки h в $\mathcal{M}$, если $h(\mathcal{T}_1) \subseteq D$, то $h(\mathcal{T}_2) \cap D \neq \varnothing$.

Тогда под логикой L можно понимать пару $\langle \mathcal{L}, Cn(\mathcal{M}) \rangle$[2], с другой стороны, логику L можно также рассматривать как матричную теорию, т.е. класс тавтологий $E(\mathcal{M}_L)$.

2. Определения параполноты логик

Формулировки критерия параполноты логики зависят от того, что мы понимаем под логикой, как мы ее задаем и в каком языке.

Понимаем ли мы логику как пропозициональный язык с заданным отношением следования (обычным или со множественными заключениями) и тогда рассматриваем свойства соответствующих теорий; или, используя матричный подход, рассматриваем логику как матричную теорию или как множество умозаключений, при этом определяя обычное следование или следование со множественными заключениями.

Аналогично тому, как на основании понятия *эксплозивности* следования, определялась *паранепротиворечивая* логика, на основании понятия *имплозивности* следования дается определение *параполной* логики.

Отношение следования называется *имплозивным* (implosive), если $\psi \vdash \varphi, \neg\varphi$ для любых $\varphi, \psi \in For$[3].

> Если $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — пропозициональная логика, то она является *параполной*, если существуют формулы $\varphi, \psi \in For$, такие, что $\psi \nvdash \varphi, \neg\varphi$[4], т.е. если ее отношение логического следования не является имплозивным.

[2]Или $\langle \mathcal{L}, Cn_m(\mathcal{M}) \rangle$ в случае следования со множественными заключениями.

[3]Приведена формулировка в терминах следования, допускающего множественные заключения.

[4]В терминах следования с единственными заключениями: $\mathcal{T}, \psi \vdash \varphi$ и $\mathcal{T}, \neg\psi \vdash \varphi$, но $\mathcal{T} \nvdash \varphi$. То есть возможна ситуация, когда ни само утверждение, ни его отрицание не имеют места.

С другой стороны, логику можно рассматривать как матричную теорию, т.е. как некоторый класс тавтологий, законов. В этом случае наличие или отсутствие какого-либо закона может характеризовать эту теорию.

Так, например, формализация требования, чтобы противоречие не приводило к тривиализации теории, позволяет сформулировать критерии паранепротиворечивости теории. При матричном подходе в качестве такого критерия может выступать тот факт, что закон Дунса Скота $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ не является тавтологией (более подробно см., например, [Томова, 2022, с. 82][5].

Аналогичным образом, при определении параполноты логики в качестве импликативно-негативного критерия может выступать требование неверификации закона Клавия (*consequentia mirabilis*) $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ [Ciuciura, 2015]. Таким образом,

> Логика *параполна*, если в ней не верифицируется закон Клавия $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$.

В указанной работе такая логика называется *слабо интуиционисткой* логикой. При этом это второе определение *слабо интуиционисткой* логики, которое автор приводит в этой работе.

Первое определение такое:

> *Слабо интуиционисткая* логика — логика, в которой не верифицируется закон исключенного третьего $\varphi \vee \neg\varphi$[6].

Может возникнуть вопрос об эквивалентности данных определений и о связи закона исключенного третьего и закона Клавия.

Остановимся подробнее и сделаем некоторое уточнение.

В работе также приводится частный случай закона Клавия[7], а именно: $(\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$.

Действительно, если мы имеем дело с пропозициональным языком, состоящим из отрицания и импликации, можем использовать следующее условие выразимости дизъюнкции посредством импликации:

$A \vee B \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow B.$

[5] Однако недостаточность данного требования для паранепротиворечивой логики была очевидна для многих исследователей, см.: [Томова, 2022, с. 82–83].

[6] В [Sette, Carnielli, 1995] дуальным образом, логика, в которой не верифицируется закон непротиворечия, называется *слабо паранепротиворечивой* логикой.

[7] См.: [Д'Оттавиано, Гомес, 2018, p. 217–218].

Тогда, очевидно,

$A \vee \neg A \equiv (A \to \neg A) \to \neg A$.

Согласно [Batens et al., 1999]:

> Логика *параполна*, если существует такая формула φ, что $\nvdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.

В каком случае мы можем говорить об эквивалентности формул: $\varphi \vee \neg\varphi$, $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ и $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$?

Итак, имеем определение стандартных матричных операций [Rosser, Turquette, 1952, p. 26][8], они задаются следующими условиями:

- $x \wedge y \in D \iff x \in D$ и $y \in D$;
- $x \vee y \notin D \iff x \notin D$ и $y \notin D$;
- $x \to y \notin D \iff x \in D$ и $y \notin D$;
- $\neg x \in D \iff x \notin D$.

Тогда возможно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. Если связки определеяются стандартыми логическими операциями, то формулы $\varphi \vee \neg\varphi$, $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ и $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ эквивалентны.

Доказательство.
Сначала докажем, что

$$v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D \text{ т.т.т. } v((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi) \in D.$$

Имеем 2 случая (I) и (II).

(I) Если $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D$, то $v((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi) \in D$.

+1. (I) не имеет места	– доп.
2. $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D$	– из 1
3. $v((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi) \notin D$	– из 1
4. $v(\varphi \to \neg\varphi) \in D$	– из 3, усл. станд. $\to$
5. $v(\neg\varphi) \notin D$	– из 3, усл. станд. $\to$
6. $v(\varphi) \in D$	– из 5, усл. станд. $\neg$
7. $v(\varphi \to \neg\varphi) \notin D$	– из 5, 6, усл. станд. $\to$
8. Допущение 1 неверно	– из 4 и 7

[8] См. также [Девяткин, 2016, с. 32].

(II) Если $v((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi) \in D$, то $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D$.

+1. (II) не имеет места	– доп.
2. $v((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi) \in D$	– из 1
3. $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \notin D$	– из 1
4. $v(\neg\varphi \to \varphi) \in D$	– из 3, усл. станд. $\to$
5. $v(\varphi) \notin D$	– из 3, усл. станд. $\to$
6. $v(\neg\varphi) \in D$	– из 5, усл. станд. $\neg$
7. $v(\neg\varphi \to \varphi) \notin D$	– из 5, 6, усл. станд. $\to$
8. Допущение 1 неверно	– из 4 и 7

Далее достаточно доказать, что

$$v(\varphi \vee \neg\varphi) \in D \text{ т.т.т. } v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D.$$

Имеем 2 случая (I) и (II).

(I) Если $v(\varphi \vee \neg\varphi) \in D$, то $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D$.

+1. (I) не имеет места	– доп.
2. $v(\varphi \vee \neg\varphi) \in D$	– из 1
3. $v(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi \notin D$	– из 1
4. $v(\neg\varphi \to \varphi) \in D$	– из 3, усл. станд. $\to$
5. $v(\varphi) \notin D$	– из 3, усл. станд. $\to$
6. $v(\neg\varphi) \in D$	– из 5, усл. станд. $\neg$
7. $v(\neg\varphi \to \varphi) \notin D$	– из 5, 6, усл. станд. $\to$
8. Допущение 1 неверно	– из 4 и 7

(II) Если $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D$, то $v(\varphi \vee \neg\varphi) \in D$.

+1. (II) не имеет места	– доп.
2. $v(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi \in D$	– из 1
3. $v(\varphi \vee \neg\varphi) \notin D$	– из 1
4. $v(\varphi) \notin D$	– из 3, усл. станд. $\vee$
5. $v(\neg\varphi) \notin D$	– из 3, усл. станд. $\vee$
6. $v(\neg\varphi) \in D$	– из 3, усл. станд. $\neg$
7. Допущение 1 неверно	– из 5 и 6

■

Соответствие связок стандартным условиям Россера и Тюркетта является достаточным условием эквивалентности указанных формул, однако это не является необходимым условием. Можем привести примеры, когда формулы эквивалентны, а связки стандартными не являются. Так, например, вышеприведенные формулы являются тавтологиями в трехзначной логике Приста **LP** [Priest, 1979], в трехзначной логике Лукасевича с двумя выделенными значениями $\mathbf{J}_3$ [D'Ottaviano, da Costa, 1970], в двух нестрогих изоморфах трехзначной логики Бочвара: в $\mathbf{B}_3^{\Box}$ с двумя выделенными значениями и в $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$ с одним выделенным значением [Девяткин и др., 2007].

В чем состоит необходимое условие — на данный момент вопрос открытый. Можно предложить следующую гипотезу:

> Во всех логических матрицах вида $\mathcal{M} = \langle V, f_1, \dots, f_k, D\rangle$, где $V = \{0, \dots, 1\}$ и $D = V \setminus 0$ формулы $\varphi \vee \neg\varphi$, $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ и $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ эквивалентны (т.е. в таких матрицах, в которых класс выделенных значений состоит из всех истинностных значений за исключением 0).

Также представляет интерес ответ на вопрос: существует ли параполная логика, в которой указанные формулы не являются эквивалетными?

С другой стороны, можем привести пример логики, в которой стандартность связок не выполняется и три рассматриваемые формулы не эквивалентны. Это, например, известная трехзначная логика Гейтинга [Heyting, 1930].

2.1. Уточнения понятия параполноты

Существуют различные формализации закона исключенного третьего.

В терминах отошения следования закон исключенного третьего может быть формализован следующим образом:

(1) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$,

или, если следование допускает множественные заключения, так:

(1′) $\vdash \varphi, \neg\varphi$.

Как отмечено в [Hernández-Tello et al., 2020, p. 38] закон исключенного третьего иногда выражается следующим образом:

(2) $\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash$.

Однако формулировки (1) и (2) не эквивалентны, по сути они независимы. Независимость (1) и (2) на примере трехзначных логик показана в [Ibid., p. 66].

В связи с этим, как отмечают указанные выше исследователи, использование в определении параполной логики отдельно или (1), или (2) некорректно, и вводится понятие *подлинно параполной* (или сильно параполной) логики[9].

> Логика с отрицанием и дизъюнкцией называется *подлинно параполной* (или сильно параполной), если ни (1), ни (2) не имеет места, т.е. (1) $\nvdash \varphi \vee \neg\varphi$ и (2) $\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \nvdash$.

Подклассы параполных логик

На основе понятия *мягкой имплозивности*, в [Marcos, 2005a; Carnielli et al., 2020] определяется особый класс параполных логик — *логик формальной неопределенности.*

> Если $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — пропозициональная логика, то она является *логикой формальной неопределенности*, если $\mathcal{T} \subseteq For$, $\varphi \in For$ и существует такое множество формул $\bigstar(\varphi)$, зависящих от φ, что выполняются условия:
>
> $\mathcal{T} \nvdash \varphi, \neg\varphi$;
>
> $\mathcal{T} \nvdash \bigstar(\varphi), \varphi$;
>
> $\mathcal{T} \nvdash \bigstar(\varphi), \neg\varphi$;
>
> $\mathcal{T} \vdash \bigstar(\varphi), \varphi, \neg\varphi$.

При определении этого класса параполных логик вводится оператор определенности, с помощью которого наличие закона исключенного третьего становится возможным для некоторых *определенных* (determined) предложений.

О связи трехзначных подлинно параполных логик с классом логик формальной неопределенности см.: [Девяткин, 2019, с. 34–37]. Так, например, здесь показано, что каждая трехзначная подлинно параполная логика является логикой формальной неопределенности.

Определяя логику посредством логических матриц, мы можем, варьируя определенные условия, задавать свойства логических матриц, в т.ч. влиять на парасвойства логических систем.

[9] По аналогии с понятием *подлинно паранепротиворечивой* (или сильно паранепротиворечивой) логики, см.: [Béziau, 2016].

В работе [Lewin, Mikenberg, 2006] задается класс литеральных паралогик — логик, в которых свойства паранепротиворечивости и/или параполноты имеют место только на уровне литералов[10], т.е. пропозициональных переменных и их отрицаний.

Определены следующие условия для литеральных *параполных* матриц.

Пусть V есть множество истинностных значений, такое, что $\{0, 1\} \subseteq V$, и множество D, такое, что $D \subseteq V$, $1 \in D$ и $0 \notin D$.

Пусть $\sim\colon V \to V$ есть функция, такая, что $\sim 1 = 0$ и $\sim 0 = 1$.

Тогда $\langle V, D, \sim\rangle$ — *литеральная паранепротиворечивая-параполная матрица* (или *LPP-матрица*) (*the literal-paraconsistent-paracomplete matrix*) со следующими операциями:

$$x \vee y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D \text{ или } y \in D, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$x \wedge y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D \text{ и } y \in D, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$x \to y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin D \text{ или } y \in D, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

LPP-матрица является *параполной*, если одновременно $x \notin D$, и $\sim x \notin D$.

Очевидно, что в *параполной* LPP-матрице ни одна из следующих формул: $x \vee \neg x$, $(\neg x \to x) \to x$ и $(x \to \neg x) \to \neg x$ не является тавтологией. Что касается $\neg\neg x \to x$ и $x \to \neg\neg x$, то можно подобрать такие $\neg$ и $\to$, что в некоторых матрицах эти формулы будут тавтологиями, а в некоторых — нет.

Обобщенное определение параполноты

В статье [Ciuciura, 2019] Я. Цюцюра приводит определение параполной логики, которое объединяет в себе требования из различных определений.

> Логика $\langle \mathcal{L}, \vdash\rangle$ является *параполной*, е.т.е. одновременно имеют место следующие условия[11]:
>
> 1. $\mathcal{T}, \psi \vdash \varphi$, $\mathcal{T}, \neg\psi \vdash \varphi$ и $\mathcal{T} \nvdash \varphi$, для некоторых формул ψ, φ;
> 2. $\psi \nvdash \varphi, \neg\varphi$, для некоторых формул ψ, φ;
> 3. $\nvdash \varphi \vee \neg\varphi$, для некоторой формулы φ;

[10] Литералами называем множество Lit всех формул вида $\neg^k p$, где $\neg^0 p = p$ и $\neg^{k+1} p = \neg(\neg^k p)$, для $p \in Var$, Var — счетное множество пропозициональных переменных.

[11] Формулировки условий приведены в нашей нотации.

4. $\nvdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$, для некоторой формулы φ;
5. $\nvdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$, для некоторой формулы φ;
6. $\nvdash \varphi \to \neg\neg\varphi$, для некоторой формулы φ;
7. $\nvdash \neg\neg\varphi \to \varphi$, для некоторой формулы φ.

Условия 1–5 Я. Цюцюра берет из определений параполноты, которые приведены в работе [Petrukhin, 2018], условия 6–7 вводятся дополнительно. Автор в вышеупомянутой работе приводит иерархию параполных исчислений, удовлетворяющих этому определению параполноты.

2.2. Об отрицании

Некоторые исследователи прямо говорят о том, что тип отрицания определяет ту или иную паралогику. Так, например, Ж.-И. Безьё [Béziau, 2000, p. 99] пишет:

> Логика *паранепротиворечива*, е.т.е. она содержит паранепротиворечивое отрицание.

Тогда:

> Логика *параполна*, е.т.е. она содержит *параполное* отрицание.

Понятие *параполное отрицание*, как и понятие *паранепротиворечивое отрицание* было впервые введено Ф. Миро Кесада [Beziau, 2003, p. 222].

Отрицание $\sim$ является *параполным*, е.т.е. существует утверждение φ, такое, что φ и $\sim\varphi$ могут быть одновременно ложными.

Также в литературе встречаем определение *строгого* отрицания — отрицания, для которого закон исключенного третьего не имеет места [Lenzen, 1998, p. 215]; [Smolenov, 1998, p. 15].

При этом параполное отрицание также может быть и паранепротиворечивым, такое отрицание, которое одновременно является и паранепротиворечивым[12], и параполным называется *неалетическим отрицанием* [Beziau, 2003, p. 223].

Ж.-И. Безье вводит уточнение и называет *собственно параполным отрицанием* отрицание, которое является параполным и не является неалетическим.

В своих исследованих паранепротиворечивых и параполных логик К. Карет [Caret, 2017] указывает, что отправной точкой является то, что *закон*

[12]Отрицание $\sim$ является *паранепротиворечивым*, е.т.е. существует утверждение φ, такое, что φ и $\sim\varphi$ могут быть одновременно истинными [Beziau, 2003, p. 222].

исключенного третьего и *закон непротиворечия* имеют отношение не к отрицанию «в вакууме», а к тому, как отрицание взаимодействует с дизъюнкцией в одном случае и с конъюнкцией в другом.

Он отмечает [Caret, 2017, p. 285], что во многих параполных (и не паранепротиворечивых) логиках отказ от закона исключенного третьего приводит к тривиализации теории, т.е. становится возможной ситуация, когда из посылок вида $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ может быть выведено любое следствие, что, в свою очередь, обусловлено наличием закона Де Моргана. Так, например, в предложенной Каретом трехзначной параполной (и не паранепроворечивой) логике **MH**, соединяющей в себе свойства известной трехзначной логики Клини K_3, и параполной (слабо интуиционисткой логики) $\mathbf{I}^1$, тривиализации не происходит, поскольку закон Де Моргана не имеет места.

В работе [Middelburg, 2021, p. 606] приведено семантическое определение параполноты логики, где явно указывается требование непротиворечивости для отрицания.

> Пропозициональная логика является *параполной*, если:
>
> (a) существует формула A языка $\mathcal{L}$, такая, что $\nvDash_{\mathcal{L}} A \vee \neg A$, и
>
> (b) для любой пропозициональной переменной p верно, что $p \nvDash_{\mathcal{L}} \neg p$ и $\neg p \nvDash_{\mathcal{L}} p$.

Ж.-И. Безьё [Beziau, 2003] устанавливает связь между аристотелевскими понятиями противопоставления и отрицанием. Как он указывает, это не только представляет интерес с исторической точки зрения, но и служит способом обоснования теории отрицания, которая позволяет рассматривать паранепротиворечивое и параполное отрицания именно как отрицания[13].

Согласно Аристотелю, два утверждения P и Q могут находиться в следующих отношениях:

- *противоречия* (контрадикторность), е.т.е. они не могут быть одновременно истинны и одновременно ложны;
- *противоложности* (контрарность), е.т.е. они могут быть одновременно ложны, но не могут быть одновременно истинны;
- *подпротивоположности* (субконтрарность), если они могут быть одновременно истинны, но не могут быть одновременно ложны.

[13]Некоторые исследователи утверждают, что паранепротиворечивое и параполное отрицание не являются отрицаниями в полном смысле этого слова, см., например, [Beziau, 2002].

На основании этих отношений противопоставления Безье вводит определения соответствующих операторов:

Логический оператор # есть

- оператор противоречия[14], е.т.е. для любого утверждения P, P и $\#P$ не могут быть одновременно истинными и не могут быть одновременно ложными;
- оператор противоположности, е.т.е. существует утверждение P, такое, что P и $\#P$ могут быть одновременно ложными и для любого утверждения Q, Q и $\#Q$ не могут быть одновременно истинны;
- оператор подпротивоположности, е.т.е. существует утверждение P, такое, что P и $\#P$ могут быть одновременно истинными и для любого утверждения Q, Q и $\#Q$ не могут быть одновременно ложны.

Далее проводится соответствие между логическими операторами (определенными на основе аристотелевских понятий противопоставления) и тремя типами отрицаний: *классическое* отрицание соответствует оператору противоречия, *собственно параполное* отрицание — оператору противоположности и *собственно паранепротиворечивое* отрицание — оператору подпротивоположности.

Как указывает А.С. Ахманов, Аристотель в своей книге «Об истолковании» определяет разные смыслы отрицания [Ахманов, 2011, с. 146]. Когда отрицание точно соответствует утверждению, устанавливается подлинное противоречие, здесь речь идет о классическом отрицании и в этом случае и *закон исключенного третьего*, и *закон непротиворечия* имеют место и «восполняют» друг друга. «Но если отрицание соответствует утверждению не точно, то или оба закона теряют свое значение, или действует лишь один закон противоречия» [Там же]. В этом смысле неточное соответствие отрицания утверждению приводит к понятиям параполного и паранепротиворечивого отрицания.

Модальная интерпретация отрицания

Ж.-И. Безьё указывает на особое значение модальной интерпретации паранепротиворечивого и параполного отрицания. Так, например, он пишет: «Модальная интерпретация паранепротиворечивого отрицания очень интересна с точки зрения интуитивного понимания паранепротиворечивости и является хорошей основой для применения паранепротиворечивой логики к естественному языку, лингвистике и вычислениям» [Beziau, 2005, p. 8].

[14]Оператор, формирующий противоречие.

В [Lenzen, 1998, p. 216] приведено определение строгого отрицания[15] через модальность «необходимость» и классическое отрицание.

$\sim_s p := \Box\neg p.$

Оператор необходимости удовлетворяет аксиоме $\Box p \supset p$, тогда, учитывая вышеприведенное определение, имеем, что $\Box\neg p$ (отрицание с необходимостью, сильное отрицание) влечет $\neg p$ (обычное отрицание), но не наоборот. В этом смысле сильно отрицаемая формула сильнее, чем классически отрицаемая формула. Поэтому сильное отрицание, как указывает Ленцен, в общем случае не удовлетворяет закону исключенного третьего. Аналогичная ситуация с законом снятия двойного отрицания, который также не имеет места в общем случае, т.е. $\sim_s\sim_s p \nvdash p$ или $\Box\neg\Box\neg p \nvdash p$ ($\Box\Diamond p \nvdash p$) [Lenzen, 1998, p. 216]. Как отмечает Ленцен, в противном случае, если модальная система в качестве теоремы содержит формулу ($\Box\Diamond p \supset p$), то доказуема формула ($\Diamond p \supset \Box p$). В этом смысле сильное отрицание по свойствам схоже с интуиционистским.

В то же время этот результат нельзя распространять на любое параполное отрицание, поскольку несложно подобрать такое отрицание, когда закон исключенного третьего не имеет места, а закон снятия двойного отрицания место имеет. Например, такая ситуация имеет место в трехзначной параполной логике $\mathbf{I}^2$ [Marcos, 2005b, p. 66].

Ленцен отдельно изучает также и аналог паранепротиворечивого отрицания — слабое отрицание: $\sim_w p := \neg\Diamond p$.

Ж.-И. Безье исследует паранепротиворечивое и параполное отрицания как модальности, рассматривая модальную версию логического квадрата, так называемый квадрат модальностей, который можно найти, например, в статье Лукасевича [Łukasiewicz, 1953]. Квадрат модальностей имеет следующие четыре вершины: $\Box$, $\Diamond$, $\neg\Box$ и $\neg\Diamond$.

Модальность $\neg\Diamond$, невозможность, рассматривается как параполное отрицание, интуиционистский вариант которого является частным случаем. Это связано с результатом К. Гёделя о возможности перевода интуиционистской логики в модальную логику S4 [Beziau, 2005, p. 8].

Классическое отрицание необходимости имеет паранепротиворечивый характер, т.е. модальность $\neg\Box$ рассматривается как паранепротиворечивое отрицание.

Таким образом, Ж.-И. Безье устанавливает связь между отрицаниями и модальностями: невозможность — параполное отрицание; ненеобходимость — паранепротиворечивое, — и указывает на возможность

[15] Нами приведено отпределение строгого отрицания на стр. 115.

изучения и уточнения свойств паранепротиворечивого и параполного отрицания в рамках модальной логики.

Заключение

В предложенном обзоре рассмотрены различные определения параполноты логических систем. Как и в случае с определением паранепротиворечивости, формализация основного условия параполноты — требования наличия в логической системе формул, таких, что сами эти формулы и их отрицания одновременно ложны, — может быть осуществлена различными способами. В определениях параполноты очевидным образом прослеживается дуальность параполных логик и логик паранепротиворечивых. Приведены условия эквивалентности некоторых определений. А также рассмотрены вопросы, связанные с отрицанием в параполных логиках, в т.ч. вопрос модальной интерепретации отрицаний в паралогиках.

Литература

Ахманов, 2011 – *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. 3-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2011.

Девяткин, 2016 – *Девяткин Л.Ю.* Неклассические модификации многозначных матриц классической логики. Часть I // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 2. С. 27–58.

Девяткин, 2019 – *Девяткин Л.Ю.* О подлинно паранепротиворечивых и подлинно параполных многозначных логиках // Логические исследования. 2019. Т. 25. № 2. С. 26–45.

Девяткин и др., 2007 – *Девяткин Л.Ю., Карпенко А.С., Попов В.М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVIII. М.: ИФ РАН, 2007. С. 50–62.

Д'Оттавиано, Гомес, 2018 – *Д'Оттавиано И.М.Л., Гомес Э.Л.* На заре reductio ad absurdum в ранней античной логике // Современная логика: основания, предмет и перспективы развития. М., 2018. С. 187–229.

Томова, 2022 – *Томова Н.Е.* К вопросу о критерии паранепротиворечивости логик // Логические иследедования / Logical Investigations. 2022. Т. 28. № 2. С. 77–95.

Batens et al., 1999 – *Batens D., De Clercq K., Kurtonina N.* Embedding and interpolation for some paralogics. The propositional case // Rep. Math. Log. 1999. Vol. 33. P. 29–44.

Béziau, 2000 – *Béziau J.-Y.* What is paraconsistent logic? // Frontiers of Paraconsistent Logic. Batens D. et al. (eds.). Research Studies Press, Baldock, 2000. P. 95–111.

Beziau, 2002 – *Beziau J.-Y.* Are paraconsistent negations negations? // Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent. W.A. Carnielli et al. (eds.). New York, 2002.

Beziau, 2003 – *Beziau J.-Y.* New light on the square of oppositions and its nameless corner // Логические исследования. 2003. Т. 10. С. 218–232.

Beziau, 2005 – *Beziau J.-Y.* Paraconsistent logic from a modal viewpoint // Journal of Applied Logic. 2005. Vol. 3. P. 7–14.

Béziau, 2016 – *Béziau J.-Y.* Two Genuine 3-Valued Paraconsistent Logics // Akama S. (ed.). Towards Paraconsistent Engineering. Intelligent Systems Reference Library. Vol. 110. Cham: Springer, 2016. P. 35–47.

Caret, 2017 – *Caret C.* Hybridized Paracomplete and Paraconsistent Logics // The Australasian Journal of Logic. 2017. Vol. 14. № 1. P. 281–325.

Carnielli et al., 2020 – *Carnielli W.A., Coniglio M.E., Rodrigues A.* Recovery operators, paraconsistency and duality // Logic Journal of the IGPL. 2020. Vol. 28. № 5. P. 624–656.

Ciuciura, 2015 – *Ciuciura J.* A Weakly-Intuitionistic Logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. No. 2. P. 53–60.

Ciuciura, 2019 – *Ciuciura J.* Paraconsistency and Paracompleteness // Logical Investigations. 2019. Vol. 25. № 2. P. 46–60.

D'Ottaviano, da Costa, 1970 – *D'Ottaviano I.M.L., da Costa N.C.A.* Sur un problème de Jaśkowski // Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris. Ser. A. 1970. Vol. 270. P. 1349–1353.

D'Ottaviano, Gomes, 2020 – *D'Ottaviano I.M.L., Gomes E.L.* Baptizing Paraconsistent Logics: The Unique Touch of Miró Quesada // South American Journal of Logic. 2020. Vol. 6. № 2. P. 249–269.

Hernández-Tello et al., 2020 – *Hernández-Tello A., Borja-Macias V., Coniglio M.E.* Paracomplete Logics Dual to the Genuine Paraconsistent Logics: The Three-valued Case // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. 2020. Vol. 354. P. 61–74.

Heyting, 1930 – *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1930. P. 42–56. (Англ. пер. в: Mancosu P. From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s. Oxford University Press, 1998).

Hyde, 2008 – *Hyde D.* Vagueness, logic and ontology. Hampshire: Ashgate, 2008.

Lenzen, 1998 – *Lenzen W.* Necessary Conditions for Negation-Operators (with Particular Applications to Paraconsistent Negation) // *Besnard P., Hunter A.* (eds.). Reasoning with Actual and Potential Contradictions. Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems. Vol. 2. Dordrecht: Springer, 1998. P. 211–239.

Lewin, Mikenberg, 2006 – *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.

Loparić, da Costa, 1984 – *Loparić A., da Costa N.C.A.* Paracomplete logics which are dual to the paraconsistent logics L3A and L3B // Logique et Analyse. 1984. Vol. 106. P. 119–131.

Łukasiewicz, 1953 – *Łukasiewicz J.* A system of modal logic // J. Comput. Systems. 1953. Vol. 1. P. 111–149.

Marcos, 2005a – *Marcos J.* Nearly every normal modal logic is paranormal // Logique et Analyse. Vol. 48. № 189/192. P. 279–300.

Marcos, 2005b – Marcos J. On a Problem of da Costa // Essays on the Foundations of Mathematics and Logic / Ed. by G. Sica. Monza: Polimetrica, 2005. P. 39–55.

Middelburg, 2021 – *Middelburg C.A.* On the Strongest Three-Valued Paraconsistent Logic Contained in Classical Logic and Its Dual // Journal of Logic and Computation. 2021. Vol. 31. Is. 2. P. 597–611.

Petrukhin, 2018 – *Petrukhin Y.* Generalized Correspondence Analysis for Three-Valued Logics // Logica Universalis. 2018. Vol. 12. № 3–4. P. 423–460.

Priest, 1979 – *Priest G.* The logic of paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219–241.

Rosser, Turquette, 1952 – *Rosser J.B., Turquette A.R.* Many-Valued logics. Amsterdam: North-Holland, 1952. 124 p.

Sette, Carnielli, 1995 – *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal Weakly-Intuitionistic Logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 181–203.

Shoesmith, Smiley, 1978 – *Shoesmith D.J., Smiley T.J.* Multiple-Conclusion Logic. Cambridge University Press, 1978. 409 p.

Smolenov, 1998 – *Smolenov H.* Paraconsistency, Paracompleteness and Intentional Contradictions // The Journal of Non-Classical Logic. 1997. Vol. 4. № 1. P. 6–35.

Natalya E. Tomova

On the question of the criteria for the paracompleteness of logics

Natalya E. Tomova
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: `natalya-tomova@yandex.ru`

Abstract: The paper discusses some aspects related to the definition of a paracomplete logics. There are various ways to formalize the basic condition of paracompleteness — the requirement of the presence in the logical system of such formulas that these formulas themselves and their negations are false. The corresponding definitions of the paracompleteness are given. It is indicated in which cases these definitions may be equivalent. The conditions of equivalence of the law of excluded middle $\varphi \vee \neg\varphi$, the law of Clavius $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ and its special case $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ are considered. The paper deals with issues related to the issues of the paracomplete negation, as well as its modal interpretation.

Keywords: paracompleteness, the law of Clavius, the law of excluded middle, implosive consequence relation

For citation: Tomova N.E. "K voprosu o kriterii parapolnoty logik" [On the question of the criteria for the paracompleteness of logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 104–124. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-104-124 (In Russian)

References

Akhmanov, 2011 – Akhmanov, A.S. "Logicheskoe uchenie Aristotelya" [The logical teaching of Aristotle]. 3-e izd. Moscow: Editorial URSS, 2011.

Batens et al., 1999 – Batens, D., De Clercq, K., Kurtonina, N. "Embedding and interpolation for some paralogics. The propositional case", *Rep. Math. Log.*, 1999, Vol. 33, pp. 29–44.

Béziau, 2000 – Béziau, J.-Y. "What is paraconsistent logic?", *Frontiers of Paraconsistent Logic*, ed. by Batens D. et al. Research Studies Press, Baldock, 2000, pp. 95–111.

Beziau, 2002 – Beziau, J.-Y. "Are paraconsistent negations negations?", in: *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent*, W.A. Carnielli et al. (eds.). New York, 2002.

Beziau, 2003 – Beziau, J.-Y. "New light on the square of oppositions and its nameless corner", *Logical Investigations*, 2003, Vol. 10, pp. 218–232.

Beziau, 2005 – Beziau, J.-Y. "Paraconsistent logic from a modal viewpoint", *Journal of Applied Logic*, 2005, Vol. 3, pp. 7–14.

Béziau, 2016 – Béziau, J.-Y. "Two Genuine 3-Valued Paraconsistent Logics", in: Akama S. (ed.). *Towards Paraconsistent Engineering. Intelligent Systems Reference Library. Vol. 110.* Cham: Springer, 2016, pp. 35–47.

Caret, 2017 – Caret, C. "Hybridized Paracomplete and Paraconsistent Logics", *The Australasian Journal of Logic*, 2017, Vol. 14, No. 1, pp. 281–325.

Carnielli et al., 2020 – Carnielli, W.A., Coniglio, M.E., Rodrigues, A. "Recovery operators, paraconsistency and duality", *Logic Journal of the IGPL*, 2020, Vol. 28, No. 5, pp. 624–656.

Ciuciura, 2015 – Ciuciura, J. "A Weakly-Intuitionistic Logic I1", *Logical Investigations*, 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 53–60.

Ciuciura, 2019 – Ciuciura, J. "Paraconsistency and Paracompleteness", *Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 46–60.

Devyatkin, 2016 – Devyatkin, L.Yu. "Neklassicheskie modifikatsii mnogoznachnykh matrits klassicheskoi logiki. Chast' I" [Non-classical Modifications of Many-valued Matrices of the Classical Propositional Logic. Part I], *Logical Investigations*, 2016, Vol. 22, No. 2, pp. 27–58.

Devyatkin, 2019 – Devyatkin, L.Yu. "O podlinno paraneprotivorechivykh i podlinno parapolnykh mnogoznachnykh logikakh" [On genuine paraconsistent and genuine paracomplete many-valued logics], *Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 26–45.

Devyatkin et al., 2007 – Devyatkin, L.Yu., Karpenko, A.S., Popov, V.M. "Trekhznachnye kharakteristicheskie matritsy klassicheskoi propozitsional'noi logiki" [Three-valued characteristic matrices of classical propositional logic], *Proceedings of the Scientific research seminar of the Logic Center of the Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences*, Vol. XVIII. Moscow, IPh RAN, 2007, pp. 50–62.

D'Ottaviano, da Costa, 1970 – D'Ottaviano, I.M.L, da Costa, N.C.A. "Sur un problème de Jaśkowski", *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris. Ser. A.*, 1970, Vol. 270, pp. 1349–1353.

D'Ottaviano, Gomes, 2018 – D'Ottaviano, I.M.L, Gomes, E.L. "Na zare reductio ad absurdum v rannei antichnoi logike" [At the dawn of reduction ad absurdum in early ancient logic], in: *Modern logic: foundations, subject and prospects of development.* Moscow, 2018, pp. 187–229.

D'Ottaviano, Gomes, 2020 – D'Ottaviano, I.M.L., Gomes, E.L. "Baptizing Paraconsistent Logics: The Unique Touch of Miró Quesada", *South American Journal of Logic*, 2020, Vol. 6, No. 2, pp. 249–269.

Hernández-Tello et al., 2020 – Hernández-Tello, A., Borja-Mac1as, V., Coniglio, M.E. "Paracomplete Logics Dual to the Genuine Paraconsistent Logics: The Three-valued Case", *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2020, Vol. 354, pp. 61–74.

Heyting, 1930 – Heyting, A. "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", in: *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* 1930, pp. 42–56. (Engl. transl. in: Mancosu, P. *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s.* Oxford University Press, 1998.)

Hyde, 2008 – Hyde, D. *Vagueness, logic and ontology.* Hampshire: Ashgate, 2008.

Lenzen, 1998 – Lenzen, W. "Necessary Conditions for Negation-Operators (with Particular Applications to Paraconsistent Negation)", in: Besnard P., Hunter A. (eds.), *Reasoning with Actual and Potential Contradictions. Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems. Vol. 2.* Dordrecht: Springer, 1998, pp. 211–239.

Lewin, Mikenberg, 2006 – Lewin, R.A., Mikenberg, I.F. "Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices", *Math. Log. Quart.*, 2006, Vol. 52, No. 5, pp. 478–493.

Loparić, da Costa, 1984 – Loparić, A., da Costa, N.C.A. "Paracomplete logics which are dual to the paraconsistent logics L3A and L3B", *Logique et Analyse*, 1984, Vol. 106, pp. 119–131.

Łukasiewicz, 1953 – Łukasiewicz, J. "A system of modal logic", *J. Comput. Systems*, 1953, Vol. 1, pp. 111–149.

Marcos, 2005a – Marcos, J. "Nearly every normal modal logic is paranormal", *Logique et Analyse*, 2005, Vol. 48, No. 189/192, pp. 279–300.

Marcos, 2005b – Marcos, J. "On a Problem of da Costa", in: *Essays on the Foundations of Mathematics and Logic*, ed. by G. Sica. Monza: Polimetrica, 2005, pp. 39–55.

Middelburg, 2021 – Middelburg, C.A. "On the Strongest Three-Valued Paraconsistent Logic Contained in Classical Logic and Its Dual", *Journal of Logic and Computation*, 2021, Vol. 31, Is. 2, pp. 597–611.

Petrukhin, 2018 – Petrukhin, Y. "Generalized Correspondence Analysis for Three-Valued Logics", *Logica Universalis*, 2018, Vol. 12, No. 3–4, pp. 423–460.

Priest, 1979 – Priest, G. "The logic of paradox", *Journal of Philosophical Logic*, 1979, Vol. 8, pp. 219–241.

Rosser, Turquette, 1952 – Rosser, J.B., Turquette, A.R. *Many-Valued logics.* Amsterdam: North-Holland, 1952. 124 pp.

Sette, Carnielli, 1995 – Sette, A.M., Carnielli, W.A. "Maximal Weakly-Intuitionistic Logics", *Studia Logica*, 1995, Vol. 55, pp. 181–203.

Shoesmith, Smiley, 1978 – Shoesmith, D.J., Smiley, T.J. *Multiple-Conclusion Logic.* Cambridge University Press, 1978. 409 p.

Smolenov, 1998 – Smolenov, H. "Paraconsistency, Paracompleteness and Intentional Contradictions", *The Journal of Non-Classical Logic*, 1997, Vol. 4, No. 1, pp. 6–35.

Tomova, 2022 – Tomova, N.E. "K voprosu o kriterii paraneprotivorechivosti logik" [On the question of the criteria for the paraconsistency of logics], *Logical Investigations*, 2022, Vol. 28, No. 2, pp. 77–95.

Логические исследования
2023. Т. 29. № 2. С. 125–147
УДК 164.3

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 2, pp. 125–147
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-125-147

Evgeny V. Borisov

A nonhybrid logic for crossworld predication

Evgeny V. Borisov
The Institute of Philosophy and Law,
the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
8 Nikolaeva Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.
E-mail: borisov.evgeny@gmail.com

Abstract: Some sentences of natural languages, such as *John might have been taller than Mary is*, ascribe relations to objects each of which is associated with a possible world. In this example, Mary is associated with the actual world whereas John is associated with a possible world that can be distinct from the actual one. This phenomenon — the phenomenon of crossworld predication — cannot be reflected by means of standard modal logic. Some nonstandard logics accommodating crossworld predication have been proposed; the most expressive among them is Kocurek's hybrid logic. All of them make use of nonstandard operators such as the operators of hybrid logic. In this paper, I propose a nonhybrid first-order modal logic for crossworld predication, CWPL, that demonstrates significant expressive power (though is less expressive than Kocurek's hybrid logic) and has that advantage over other proposals that it makes no use of any nonstandard operators. Semantically, CWPL is based on crossworld interpretation of predicates that assigns extensions to each n-ary predicate with respect to n-tuples of possible worlds rather than single possible worlds. To be able to employ crossworld interpretation of predicates when evaluating formulae, I suggest relativizing truth values to partial functions from variables to possible worlds. In the paper, I describe CWPL's syntax and semantics, provide a translation of CWPL into a two-sorted first-order logic, and compare it with Kocurek's hybrid logic in terms of expressive power.

Keywords: First-order modal logic, possible world semantics, crossworld predication

For citation: Borisov E.V. "A nonhybrid logic for crossworld predication", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 125–147. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-125-147

1. Introduction

Consider the sentence

$$\text{John might have been taller than Mary is.} \tag{1}$$

As [Wehmeier, 2012] observes, its meaning in terms of possible world semantics is this: There is a possible world u accessible from the actual world w such that

John as he is in u is taller than Mary as she is in w. The underlined phrases show that 1 ascribes the relation of being taller to persons each of whom is associated with a possible world. This is an example of crossworld predication. Generally, crossworld predication is a statement of the form

$$\underline{o_1 \text{ as it is in } w_1}, \ldots, \underline{o_n \text{ as it is in } w_n} \text{ bear } R \text{ to each other,} \tag{2}$$

where $o_1, \ldots, o_n$ are objects, $w_1, \ldots, w_n$ are possible worlds, and R is an n-ary relation. Again, underlined phrases show the association between objects and possible worlds.

How to represent 2 semantically? An option is to interpret predicate letters (in models) in such a way that we might have

$$\langle o_1, \ldots, o_n \rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle w_1, \ldots, w_n \rangle), \tag{3}$$

where $\mathcal{I}$ is the interpretation of predicate letters in a model, and P is an n-ary predicate letter intended to represent R. In 3 it is understood that, for each i, o_i is associated with w_i. We will have 3 in our semantics if we define $\mathcal{I}$ so that it provides an extension of P for each n-tuple of possible worlds rather than for each single possible world as in standard semantics. I will call interpretations of this type crossworld interpretations. Given a model $\mathcal{M}$ with the set $\mathcal{G}$ of possible worlds and the domain $\mathcal{D}$ of $\mathcal{M}$, and an n-ary predicate letter P, the difference between standard and crossworld interpretations of predicate letters is:

- If $\mathcal{I}$ is a standard interpretation, $\mathcal{I}(P)$ is a function $\mathcal{G} \to \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)$.
- If $\mathcal{I}$ is a crossworld interpretation, $\mathcal{I}(P)$ is a function $\mathcal{G}^n \to \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)$,

where $\mathcal{P}(\ )$ stands for power set.

Another semantic representation of 2 is:

$$\Big\langle \langle o_1, w_1 \rangle, \ldots, \langle o_n, w_n \rangle \Big\rangle \in \mathcal{I}(P). \tag{4}$$

If we prefer this representation, we have to define $\mathcal{I}(P)$ as a subset of $(\mathcal{G} \times \mathcal{D})^n$. Clearly, 3 and 4 are just notational variants of each other. [Kocurek, 2016] uses 4; [Butterfield, Stirling, 1987] and [Wehmeier, 2012] use 3, and so do I. That is, I set the interpretation of an n-ary predicate letter P to be a function $\mathcal{G}^n \to \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)$.

The phenomenon of crossworld predication raises a problem for logicians because the standard first-order modal semantics cannot "see" it. So if we want to adopt crossworld predication in modal logic, we need a nonstandard semantics involving crossworld interpretation of predicate letters. In [Butterfield, Stirling, 1987; Wehmeier, 2012; Kocurek, 2016; Wehmeier, Rückert, 2019], some solutions to this problem are proposed, that is, some first-order modal logics capable of reflecting crossworld predication are elaborated. All these logics are based on nonstandard formal languages including nonstandard items such as hybrid operators used by Kocurek or mood markers proposed by Wehmeier, which makes them inadequate for logical formalization of (fragments of) languages without expressions for possible worlds.[1] Because of this, it makes sense to elaborate a logic that is able to reflect crossworld predication using only the standard vocabulary of first-order modal logic. In this paper, such a logic is proposed; I will call it crossworld predication logic (CWPL).

In what follows, I describe CWPL's language and semantics, provide a translation of CWPL into a two-sorted first-order logic, and compare it with Kocurek's hybrid logic in terms of expressive power.[2]

2. Syntax and semantics of CWPL

2.1. Syntax

CWPL is based on the language $\mathcal{L}$, whose vocabulary includes:

- a denumerable set VAR of individual variables $x, y, \ldots,$
- a denumerable set CON of individual constants $a, b, \ldots,$
- a set $PRED^n$ of n-ary predicate letters (P, Q, …) for each positive natural number, in particular, the binary predicate symbol $=$ (it will be written in infix position),
- logical operators $\neg, \&, \Diamond, \exists, \lambda$ ($\vee, \rightarrow, \Box, \forall$ can be defined in the usual way), and
- brackets and comma.

All the above sets of symbols are pairwise disjoint.

The set $TERM$ of CWPL terms is $VAR \cup CON$. The set FOR of CWPL formulae is defined by the grammar

$$\varphi ::= P(x_1, \ldots, x_n) \,|\, \neg\varphi \,|\, (\varphi_1 \& \varphi_2) \,|\, \Diamond\varphi \,|\, \exists x\varphi \,|\, (\lambda x.\varphi)(t),$$

where $P \in PRED^n$, $x, x_1, \ldots, x_n \in VAR$, and $t \in TERM$. I will omit outermost brackets and write $=(t_1, t_2)$ as $t_1 = t_2$.

Note that individual constants cannot occur in atomic formulae; they can only be combined with predicate letters using predicate abstraction. For example,

[1] Considerable fragments of natural languages are of this type.

[2] CWPL's syntax and semantics was outlined in [Borisov, 2020].

$(\lambda x.P(x))(a)$ is a formula but $P(a)$ is not. This use of predicate abstraction is in the spirit of [Fitting, Mendelsohn, 1998].

Free and bound occurrences of variables are defined as usual. In particular, free variable occurrences in $(\lambda x.\varphi)(t)$ are those in φ except for all occurrences of x, plus the displayed occurrence of t if t is a variable.

Convention. I will write $(\lambda x.\varphi)(t)$ as $(t/x)\varphi$. This simplifies reading formulae with multiple lambdas. The scope of (t/x) is the shortest formula immediately after it. For instance, $(t/x)\varphi\&\psi$ should be read as $((t/x)\varphi)\&\psi$.

2.2. Semantics

Definition 1. (CWPL Model) A CWPL model $\mathcal{M}$ is a quadruple $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$, where:

- $\mathcal{G}$ is a nonempty set of possible worlds.
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G}^2$ is the accessibility relation.
- $(\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}$ is a family of nonempty sets — domains of possible worlds. The domain of the model, $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, is set to be $\bigcup_{w\in\mathcal{G}} \mathcal{D}_w$.
- $\mathcal{I}$ is the interpretation of individual constants and predicate letters with the following properties:
  - For each $a \in CON$, $\mathcal{I}(a) : \mathcal{G} \to \mathcal{D}(\mathcal{M})$.
  - For each $P \in PRED^n$, $\mathcal{I}(P) : \mathcal{G}^n \to \mathcal{P}(\mathcal{D}(\mathcal{M})^n)$.[3]
  - For all $w, u \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(=)(\langle w, u\rangle) = \{(e, e) : e \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\}$.

Remark 1. Domains of possible worlds can intersect, that is, an object can exist in many possible worlds. Thus I do not use Lewisian [Lewis, 1968] counterpart ontology.

Remark 2. Individual constants are interpreted nonrigidly, that is, they are what Priest calls descriptor constants [Priest, 1998, p. 355]. Note also that they are interpreted on $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, so the denotation of a constant at a possible world w may lie outside $\mathcal{D}_w$. In other words, constants may denote nonexistent entities.

Remark 3. Predicate letters are interpreted on $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ as well, so their extensions may involve nonexistent entities. For instance, we may have $\langle e, i\rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle w, u\rangle)$ with $e \notin \mathcal{D}_w$ and $i \notin \mathcal{D}_u$.

[3] Recall, this is a crossworld interpretation of predicates.

Remark 4. Standard (intraworld) predication is a special case of crossworld predication: The standard extension of an n-ary predicate letter P for w can be thought of as P's crossworld extension for $\langle \underbrace{w, \ldots, w}_{n} \rangle$. Because of this, crossworld interpretations and standard interpretations are indistinguishable with respect to unary predicate letters.

Definition 2. (Variable Valuation) Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w \in \mathcal{G}}, \mathcal{I} \rangle$ be a model for $\mathcal{L}$. A variable valuation in $\mathcal{M}$ is a function from VAR to $\mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Definition 3. (Variant of a Variable Valuation) Let v be a variable valuation in $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w \in \mathcal{G}}, \mathcal{I} \rangle$. An x-variant of v is a variable valuation in $\mathcal{M}$ that agrees with v on all variables except possibly x. I write the x-variant of v sending x to e as v^e_x.

In other words, $v^e_x(y) = \begin{cases} v(y) & \text{if } y \neq x, \\ e & \text{if } y = x. \end{cases}$

An important feature of CWPL semantics consists in relativizing truth not just to models, possible worlds, and variable valuations, as in standard semantics, but also to what I call VP-functions (V for "variable", P for "possible world").

Definition 4. (VP-Function) Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w \in \mathcal{G}}, \mathcal{I} \rangle$ be a model for $\mathcal{L}$. A VP-function in $\mathcal{M}$ is a partial function VAR to $\mathcal{G}$.

VP-functions will help us to obtain tuples of possible worlds needed in evaluating atomic formulae. We will need two types of modification of VP-functions: variants of VP-functions, and grounded VP-functions.

Definition 5. (Variant of a VP-Function) Let f be a VP-function in $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w \in \mathcal{G}}, \mathcal{I} \rangle$ and $x \in VAR$. An x-variant of f is a VP-function g in $\mathcal{M}$, such that $dom(g) = dom(f) \cup \{x\}$ and for each $y \in dom(g)$, if $y \neq x$, $g(x) = f(x)$ ($dom(f)$ stands for f's domain). I write the x-variant of f sending x to w as f^w_x.

In other words, $f^w_x(y) = \begin{cases} w & \text{if } y = x, \\ f(y) & \text{if } y \neq x \ \& \ y \in dom(f), \\ \text{undefined} & \text{if } y \neq x \ \& \ y \notin dom(f). \end{cases}$

Note that x may be and may not be in $dom(f)$.

Definition 6. (Grounded VP-Function) Let f be a VP-function in $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w \in \mathcal{G}}, \mathcal{I} \rangle$ and $w \in \mathcal{G}$. Then $\overline{fw}$ is a total function $VAR \to \mathcal{G}$ that agrees with f on $dom(f)$ and sends all other variables to w.

Thus, $\overline{fw}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in dom(f), \\ w & \text{if } x \notin dom(f). \end{cases}$

I will say $\overline{fw}$ is grounded on w.

Now we are in a position to define denotation, truth (satisfaction), and validity.

Definition 7. (Denotation) Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w \in \mathcal{G}}, \mathcal{I} \rangle$ be a model, and v a variable valuation in $\mathcal{M}$. Then $v\mathcal{I}$ is a function of the type $TERM \to (\mathcal{G} \to \mathcal{D}(\mathcal{M}))$, such that for every $t \in TERM$ and $w \in \mathcal{G}$,

$v\mathcal{I}(t)(w) = \begin{cases} v(t) & \text{if } t \in VAR, \\ \mathcal{I}(t)(w) & \text{if } t \in CON. \end{cases}$

Definition 8. (Truth) Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w \in \mathcal{G}}, \mathcal{I} \rangle$ be a model for $\mathcal{L}$, $w \in \mathcal{G}$, v a variable valuation in $\mathcal{M}$, f a VP-function in $\mathcal{M}$, $P \in PRED^n$, $x, y, x_1, \ldots, x_n$ variables, and φ and ψ formulae. Then:

- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} P(x_1, \ldots, x_n) \iff$
  $\iff \langle v(x_1), \ldots, v(x_n) \rangle \in \mathcal{I}(P)\big(\langle \overline{fw}(x_1), \ldots, \overline{fw}(x_n) \rangle\big)$.[4]
- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} \neg\varphi \iff \mathcal{M}, w, v, f \nvDash_{CWPL} \varphi$.
- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} \varphi \,\&\, \psi \iff \mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} \varphi$ and $\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} \psi$.
- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} \Diamond\varphi \iff (\exists u \in \mathcal{R}[w])\, \mathcal{M}, u, v, f \vDash_{CWPL} \varphi$,
  where $\mathcal{R}[w] := \{u : w\mathcal{R}u\}$.
- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} \exists x\, \varphi \iff (\exists e \in \mathcal{D}_w)\, \mathcal{M}, w, v^e_x, f^w_x \vDash_{CWPL} \varphi$.
- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} (t/x)\varphi \iff \mathcal{M}, w, v^{v\mathcal{I}(t)(w)}_x, f^w_x \vDash_{CWPL} \varphi$.

Note that quantifiers range over domains of possible worlds, whereas variables, constants, and predicate letters are interpreted on the domain of the model. Because of this, formulae like $\forall x P(x) \to P(x)$ and $\forall x P(x) \to (a/x)P(x)$ may be false.

Definition 9. (CWPL-Validity) A formula φ of $\mathcal{L}$ is CWPL-valid, $\vDash_{CWPL} \varphi$, if for every model $\mathcal{M}$, every possible world w in $\mathcal{M}$, every variable valuation v in $\mathcal{M}$, and every VP-function f in $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} \varphi$.

[4] Observe that if $x_1, \ldots, x_n \in dom(f)$, the truth value of $P(x_1, \ldots, x_n)$ does not depend on the world of evaluation: For all $w, w' \in \mathcal{G}$, $\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} P(x_1, \ldots, x_n) \iff \mathcal{M}, w', v, f \vDash_{CWPL} P(x_1, \ldots, x_n)$. This observation can be generalized: If φ is a formula with no occurrences of modal operators, quantifiers, or the λ-operator, and if f is defined for all variables occurring in φ, $\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} \varphi \iff \mathcal{M}, w', v, f \vDash_{CWPL} \varphi$ for all $w, w' \in \mathcal{G}$.

We can extend CWPL by adding the possibilist quantifier Σ to $\mathcal{L}$, the item $\Sigma x\varphi$ to the definition of formula, and the following close to Definition 2.8:

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash \Sigma x\ \varphi \iff (\exists e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}))\ \mathcal{M}, w, v^e_x, f^w_x \vDash \varphi.$$

Let us denote this extended logic CWPL^Σ. The paper focuses on CWPL but sometimes it will be helpful to compare it with CWPL^Σ.

2.3. CWPL Semantics in Use

Before I adduce some examples of using CWPL semantics, several things should be said about using VP-functions in the course of evaluating a formula. We operate with VP-functions according to these rules:
1) At the start of evaluation, we always take $\varnothing$ as a VP-function. Recall, VP-functions are partial, so $\varnothing$ is a VP-function in every model.[5]
2) When processing an operator binding a variable x with respect to a possible world w and a VP-function f, we move from f to f^w_x (recall clauses for $\exists x$ and (t/x) in Definition 2.8). This associates x (and x's denotation) with w.
3) When processing an atomic formula with respect to a possible world w and a VP-function f, we move from f to $\overline{fw}$ (Definition 2.8, the clause for atomic formulae). This takes care of variables which are not in f's domain.

In a nutshell, we start with $\varnothing$, then add to it a number of ordered pairs $\langle \text{a variable}, \text{a possible world}\rangle$ when processing $\exists$ and λ (if they occur in the formula we are evaluating), and we end up with a total function grounded on the last possible world.

Let us see how it works. In all examples below I evaluate formulae with respect to $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$, $w \in \mathcal{G}$, $v : VAR \to \mathcal{D}(\mathcal{M})$, and $\varnothing$.

Example 1. This example illustrates two points in the definition of truth: modification of VP-functions when processing $\exists$, and grounding VP-functions when processing atomic formulae.

$\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash_{CWPL} \exists x\Diamond P(x, y)$

iff $(\exists e \in \mathcal{D}_w)\ \mathcal{M}, w, v^e_x, \varnothing^w_x \vDash_{CWPL} \Diamond P(x, y)$

iff $(\exists e \in \mathcal{D}_w)(\exists u \in \mathcal{R}[w])\ \mathcal{M}, u, v^e_x, \varnothing^w_x \vDash_{CWPL} P(x, y)$

iff $(\exists e \in \mathcal{D}_w)(\exists u \in \mathcal{R}[w])$

$\langle v^e_x(x), v^e_x(y)\rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle \overline{\varnothing^w_x u}(x), \overline{\varnothing^w_x u}(y)\rangle)$

iff $(\exists e \in \mathcal{D}_w)(\exists u \in \mathcal{R}[w])\ \langle e, v(y)\rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle w, u\rangle)$.

[5] Because of the special role $\varnothing$ plays as a VP-function, another concept of validity makes sense: A formula φ of $\mathcal{L}$ is CWPL-valid* if for every model $\mathcal{M}$, every possible world w in $\mathcal{M}$, and every variable valuation v in $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash_{CWPL} \varphi$.

Notice that processing $\exists x$ in the second line modified both v and $\varnothing$ by associating x with e (in v^e_x) and w (in $\varnothing^w_x$). Intuitively this means that we consider e as it is in w.

Notice also that without grounding $\varnothing^w_x$ (i.e., without the move from it to $\overline{\varnothing^w_x u}$) in the second to last line we would be unable to evaluate $P(x, y)$ because $\varnothing^w_x$ is not defined for y.

The next three examples are discussed in [Kocurek, 2016]. They show how CWPL can be used to formally represent sentences of natural languages.

Example 2. *John might have been taller [than he is].*[6] Intuitively, this sentence is true iff John as he is in an alternative of the actual world is taller than he actually is. Formalizing the sentence as $(j/x)\Diamond(x/y)T(y, x)$[7] (with j standing for John and T for the relation of being taller) and abbreviating $v\mathcal{I}(j)(w)$ as J, we can check that our semantics provides these truth conditions:

$\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash_{CWPL} (j/x)\Diamond(x/y)T(y, x)$

iff $\mathcal{M}, w, v^J_x, \varnothing^w_x \vDash_{CWPL} \Diamond(x/y)T(y, x)$

iff $(\exists u \in \mathcal{R}[w])\mathcal{M}, u, v^J_x, \varnothing^w_x \vDash_{CWPL} (x/y)T(y, x)$

iff $(\exists u \in \mathcal{R}[w])\ \mathcal{M}, u, v^{JJ}_{xy}, \varnothing^{wu}_{xy} \vDash_{CWPL} T(y, x)$

iff $(\exists u \in \mathcal{R}[w])\ \langle v^{JJ}_{xy}(y), v^{JJ}_{xy}(x)\rangle \in \mathcal{I}(T)\big(\langle \overline{\varnothing^{wu}_{xy} u}(y), \overline{\varnothing^{wu}_{xy} u}(x)\rangle\big)$

iff $(\exists u \in \mathcal{R}[w])\ \langle J, J\rangle \in \mathcal{I}(T)(\langle u, w\rangle)$, as desired.[8]

Note that we cannot formalize the sentence under consideration as $(j/x)\Diamond(j/y)T(y, x)$ because we have

$$\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash_{CWPL} (j/x)\Diamond(j/y)T(y, x) \text{ iff } \langle J', J\rangle \in \mathcal{I}(T)(\langle u, w\rangle),$$

where $J' = v\mathcal{I}(j)(u)$. This is not what we wanted to obtain because, since $\mathcal{I}$ is nonrigid with respect to constants, J and J' might be distinct individuals, whereas it is clear that the sentence compares John with himself.

[6] This is a variant of Wehmeier's example in 1.

[7] In standard notation, $\big(\lambda x.\Diamond(\lambda y.T(y, x))(x)\big)(j)$.

[8] If we include in models a linearly ordered set of heights, one and the same for all possible worlds, we might analyze the sentence under consideration as saying that John's height at a possible world (accessible from the actual world) is greater than his height at the actual world. Various versions of this approach are suggested in [Kemp, 2000; Wehmeier, 2012; Kocurek, 2016; Fitting, 2017]. This approach makes no use of crossworld interpretation of predicates ("greater" as a relation between heights is interpreted as an intraworld relation) but it can only be applied to binary comparisons, and it works only if a scale of degrees is available.

In standard semantics, $(j/x)\Diamond(x/y)T(y,x)$ expresses the absurd statement that John might exceed himself in height. The difference between the standard and the crossworld reading of $(j/x)\Diamond(x/y)T(y,x)$ is reminiscent of the funny story Russell tells us in "On Denoting":

> I have heard of a touchy owner of a yacht to whom a guest, on first seeing it, remarked, 'I thought your yacht was larger than it is'; and the owner replied, 'No, my yacht is not larger than it is.' [Russell, 1905, p. 489]

[Kocurek, 2016, p. 724] discusses an analogous example: *I could have been taller than I actually am.* He formalizes this sentence in his hybrid logic (a version of it is described in section 2.5) as

$$\downarrow s.\Diamond Taller(me, \blacktriangleleft_s me),$$

where me is used as an individual constant. In his semantics, this formula is true with respect to a possible world w iff there is a possible world w' accessible from w such that the denotation of me at w' as he is there is taller than himself as he is in w. However, these truth conditions do not accurately reflect the intuitive meaning of the sentence under consideration because the sentence is about the denotation of me at w whereas the truth conditions are about the denotation of me at w'. The intuitive truth conditions of the sentence (involving the denotation of me at w) can be expressed in Kocurek's hybrid logic by

$$\Sigma x(x = me \;\&\; \downarrow s.\Diamond Taller(x, \blacktriangleleft_s x)).$$

Example 3. *A polar bear could be bigger than a grizzly bear could be.*[9]
[Kocurek, 2016] describes the intuitive truth conditions of this sentence as follows: "There's a possible world [u] and a polar bear x in [u] such that, for any possible world [s], and for any grizzly bear y in [s], x in [u] is bigger than y is in [s]" (p. 698). CWPL provides these truth conditions for

$$\Diamond\exists x\Big(P(x) \;\&\; \Box\forall y[G(y) \to B(x,y)]\Big)$$

It is a routine task to check that

$$\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash_{CWPL} \Diamond\exists x\Big(P(x) \;\&\; \Box\forall y[G(y) \to B(x,y)]\Big)$$
$$\text{iff } (\exists u \in \mathcal{R}[w])(\exists e \in \mathcal{D}_u)\Big(e \in \mathcal{I}(P)(u) \;\&$$
$$\& \; (\forall s \in \mathcal{R}[u])(\forall i \in \mathcal{D}_s)\big[i \in \mathcal{I}(G)(s) \to \langle e,i\rangle \in \mathcal{I}(B)(\langle u,s\rangle)\big]\Big),$$

as desired.

[9] From [von Stechow, 1984, p. 35].

Example 4. This example is a more sophisticated version of the previous one: *There is a polar bear that could be bigger than any grizzly bear could be if the grizzly bear were fatter than the polar bear really is.*
As Kocurek semiformally puts it, the sentence is true iff

> [...] there is a polar bear in the actual world w such that in some possible world v, for every world u, and for every grizzly bear in u, if that grizzly bear in u is fatter than the polar bear is in w, the polar bear in v is bigger than the grizzly bear in u. [Kocurek, 2016, p. 719]

In CWPL semantics, these are truth conditions of

$$\exists x\Big(P(x)\ \&\ \Diamond(x/y)\Box\forall z\big[(G(z)\ \&\ F(z,x))\rightarrow B(y,z)\big]\Big)$$

Example 5. This example is about associating the denotation of a constant at a possible world with different possible worlds. The following holds:

$$\mathcal{M},w,v,\varnothing\vDash_{CWPL}\Diamond(a/x)P(x)\iff(\exists u\in\mathcal{R}[w])\mathcal{I}(a)(u)\in\mathcal{I}(P)(u)$$

and

$$\mathcal{M},w,v,\varnothing\vDash_{CWPL}(a/x)\Diamond P(x)\iff(\exists u\in\mathcal{R}[w])\mathcal{I}(a)(w)\in\mathcal{I}(P)(w).$$

In both lines in the right-hand part a and P are evaluated with respect to one and the same possible world. Now the question arises: Can we evaluate a and P with respect to different possible worlds, that is, can we express the truth conditions in 5 and 6 below?

$$(\exists u\in\mathcal{R}[w])\,\mathcal{I}(a)(w)\in\mathcal{I}(P)(u) \tag{5}$$

$$(\exists u\in\mathcal{R}[w])\,\mathcal{I}(a)(u)\in\mathcal{I}(P)(w) \tag{6}$$

Well, we have $\mathcal{M},w,v,\varnothing\vDash_{CWPL}(a/x)\Diamond(x/x)P(x)\iff 5$. As for 6, it cannot be expressed in CWPL but can be expressed in the extension CWPL$^{\Sigma}$ of CWPL defined at the end of section 2.2. Indeed, in the semantics of CWPL$^{\Sigma}$, $\mathcal{M},w,v,\varnothing\vDash\Sigma x\,\Diamond((a/y)x=y\ \&\ P(x))\iff 6$.

Example 6. Surprisingly, $\exists x\Diamond P(x)\rightarrow\exists xP(x)$ turns out to be CWPL-valid. Indeed, $\mathcal{M},w,v,f\vDash_{CWPL}\exists x\Diamond P(x)$ iff $(\exists e\in\mathcal{D}_w)(\exists u\in\mathcal{R}[w])\ e\in\mathcal{I}(P)(w)$, which implies $(\exists e\in\mathcal{D}_w)\ e\in\mathcal{I}(P)(w)$, which is equivalent to $\mathcal{M},w,v,f\vDash_{CWPL}\exists xP(x)$.

The natural truth conditions of $\exists x\Diamond P(x)$ (its truth conditions in standard modal logic) are expressed in CWPL by $\exists x\Diamond(x/x)P(x)$:
$\mathcal{M},w,v,f\vDash_{CWPL}\exists x\Diamond(x/x)P(x)$ iff $(\exists e\in\mathcal{D}_w)(\exists u\in\mathcal{R}[w])\ e\in\mathcal{I}(P)(u)$.

An analogous surprisingly valid example is $\exists xP(x)\rightarrow\exists x\Box P(x)$.

2.4. A Translation into First-Order Logic

In this subsection, I provide a translation from CWPL into a two-sorted first-order logic that is a crossworld modification of the standard translation given in [van Benthem, 1983, p. 137]. I describe a two-sorted first-order language $\mathcal{L}'$, a logic FOL^2 based on $\mathcal{L}'$, and a translation mapping $\mathcal{L}$ terms to $\mathcal{L}'$ terms, and $\mathcal{L}$ formulae to $\mathcal{L}'$ formulae. Then I show that the translation is truth preserving.

In $\mathcal{L}'$, individual variables, function letters, and predicates are typed. There are two primitive types: $\mathbb{E}$ for individuals, and $\mathbb{S}$ for possible worlds. In particular, there are $\mathbb{E}$ type variables, and $\mathbb{S}$ type variables (also called individual variables and state variables, respectively). Each predicate letter and individual constant in $\mathcal{L}$ has its counterpart in $\mathcal{L}'$. If $P \in PRED^n$, its counterpart is a $2\times n$-ary predicate P' of type $\langle \mathbb{E}, \mathbb{S}, \ldots, \mathbb{E}, \mathbb{S} \rangle$. Let $P \in PRED^n$, $x_1, \ldots, x_n$ be of $\mathbb{E}$ type, and $s_1, \ldots, s_n$ of $\mathbb{S}$ type. Then, given a variable valuation g sending individual variables to objects and state variables to possible worlds, $P'(x_1, s_1, \ldots, x_n, s_n)$ is intended to express a crossworld relation between $g(x_1)$ as it is in $g(s_1)$, $\ldots$, $g(x_n)$ as it is in $g(s_n)$. If $a \in CON$, its counterpart is a unary function symbol a' of type $\langle \mathbb{S}, \mathbb{E} \rangle$; it is intended to denote a function from possible worlds to objects. Additionally, there are three predicate letters in $\mathcal{L}'$ that are not counterparts of any predicate letters in $\mathcal{L}$: E of the type $\langle \mathbb{E}, \mathbb{S} \rangle$, R of type $\langle \mathbb{S}, \mathbb{S} \rangle$, and $\equiv$ of the type $\langle \mathbb{E}, \mathbb{E} \rangle$. $E(x, s)$ is intended to say that $g(x)$ exists in $g(s)$; R stands for accessibility relation; and $\equiv$ expresses the identity of objects.[10] To put this formally, the vocabulary of $\mathcal{L}'$ includes

- the set VAR of variables of $\mathbb{E}$ type, the same as the set of individual variables for $\mathcal{L}$,
- a denumerable set $SVAR$ of variables of $\mathbb{S}$ type,
- the set $CON' = \{c' : c \in CON\}$ of function symbols of the type $\langle \mathbb{S}, \mathbb{E} \rangle$,
- the set $PRED'^n = \{P' : P \in PRED^n\}$ of $(2\times n)$-ary predicate letters of type $\langle \underbrace{\mathbb{E}, \mathbb{S}, \ldots, \mathbb{E}, \mathbb{S}}_{2\times n} \rangle$ for each positive natural number n,
- predicate letters $\equiv$ of type $\langle \mathbb{E}, \mathbb{E} \rangle$, R of type $\langle \mathbb{S}, \mathbb{S} \rangle$, and E of type $\langle \mathbb{E}, \mathbb{S} \rangle$,
- logical operators $\neg, \&, \exists$ ($\vee, \rightarrow, \forall$ can be defined in the usual way), and
- brackets and comma.[11]

[10] $\equiv$ is not to be confused with $='$ that is of type $\langle \mathbb{E}, \mathbb{S}, \mathbb{E}, \mathbb{S} \rangle$.

[11] All listed sets of symbols are pairwise disjoint.

FOL^2 terms are individual variables, state variables, and expressions of the shape $a'(s)$ with $a' \in CON'$, and $s \in SVAR$. Note that, since a' is of $\langle \mathbb{S}, \mathbb{E} \rangle$, type $a'(s)$ is of $\mathbb{E}$ type. FOL^2 formulae are defined thus:

$$\varphi ::= P(t_1, \ldots, t_n) \,|\, \neg\varphi \,|\, (\varphi_1 \& \varphi_2) \,|\, \exists x \varphi \,|\, \exists s \varphi,$$

where P is an n-ary predicate letter, $t_1, \ldots, t_n$ are terms of appropriate types,[12] $x \in VAR$, and $s \in SVAR$. As usual, I will omit outermost brackets and use infix notation for $=$.

Definition 10. (FOL^2 Model) A FOL^2 model is a triple $\langle \mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, where:

- $\mathcal{G}$ is a nonempty set of possible worlds.
- $\mathcal{D}$ is a nonempty set of objects, disjoint from $\mathcal{G}$.
- $\mathcal{I}$ is the interpretation functions meeting the following conditions:
  - For each $a' \in CON'$, $\mathcal{I}(a') : \mathcal{G} \to \mathcal{D}$.
  - If P is a predicate letter of the type $\langle \mathbb{T}_1, \ldots, \mathbb{T}_n \rangle$ ($\mathbb{T}_1, \ldots, \mathbb{T}_n \in \{\mathbb{E}, \mathbb{S}\}$), $\mathcal{I}(P) \subseteq h(\mathbb{T}_1) \times \cdots \times h(\mathbb{T}_n)$, where $h(\mathbb{S}) = \mathcal{G}$, and $h(\mathbb{E}) = \mathcal{D}$.
  - $\mathcal{I}(\equiv) = \{(e, e) : e \in \mathcal{D}\}$.

Definition 11. (Variable Valuation in a Model) A variable valuation in a FOL^2 model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ is a function sending each individual variable to a member of $\mathcal{D}$, and each state variable to a member of $\mathcal{G}$.

Variants of variable valuations are defined and written as for CWPL.

Definition 12. (Denotation) Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ be a FOL^2 model, and g a variable valuation in $\mathcal{M}$. Then $g\mathcal{I}$ is a function mapping each variable α to $g(\alpha)$, and each term of the shape $a'(s)$ to $\mathcal{I}(a')(g(s))$.

Definition 13. (Truth) Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ be a FOL^2 model, g a variable valuation in $\mathcal{M}$, $t_1, \ldots, t_n$ terms, φ and ψ FOL^2 formulae, $x \in VAR$, and $s \in SVAR$. Then:

- $\mathcal{M}, g \vDash_{FOL^2} P(t_1, \ldots, t_n) \iff \langle g\mathcal{I}(t_1), \ldots g\mathcal{I}(t_n) \rangle \in \mathcal{I}(P)$.
- $\mathcal{M}, g \vDash_{FOL^2} \neg\varphi \iff \mathcal{M}, g \nvDash_{FOL^2} \varphi$.

[12]If P's type is $\langle \mathbb{T}_1, \ldots, \mathbb{T}_n \rangle$ with $T_i \in \{\mathbb{E}, \mathbb{S}\}$, the type of t_i is $\mathbb{T}_i$. Note that function terms can occur in atomic formulae.

- $\mathcal{M}, g \vDash_{FOL^2} \varphi \,\&\, \psi \iff \mathcal{M}, g \vDash_{FOL^2} \varphi$ and $\mathcal{M}, g \vDash_{FOL^2} \psi$.
- $\mathcal{M}, g \vDash_{FOL^2} \exists x\varphi \iff (\exists e \in \mathcal{D})\, \mathcal{M}, g^e_x \vDash_{FOL^2} \varphi$.
- $\mathcal{M}, g \vDash_{FOL^2} \exists s\varphi \iff (\exists w \in \mathcal{G})\, \mathcal{M}, g^w_s \vDash_{FOL^2} \varphi$.

Convention. If φ is a FOL^2 formula, $\varphi[x \rhd s]$ is the result of substituting s for all occurrences of state variables that immediately follow free occurrences of x in φ. For example, $(P(x,r) \,\&\, \exists x Q(x,t))[x \rhd s]$ is $P(x,s) \,\&\, \exists x Q(x,t)$.

Definition 14. (Translation from CWPL into FOL^2) A translation from CWPL into FOL^2 wrt $s \in SVAR$ is a function ST_s mapping $\mathcal{L}$ terms to $\mathcal{L}'$ terms, and $\mathcal{L}$ formulae to $\mathcal{L}'$ formulae, such that for all $\varphi, \psi \in FOR$, $x \in VAR$, and $a \in CON$, the following holds:

- $ST_s(x) = x$.
- $ST_s(a) = a'(s)$.
- $ST_s(P(x_1, \ldots, x_n)) = P'(x_1, s, \ldots, x_n, s)$.
- $ST_s(\neg\varphi) = \neg ST_s(\varphi)$.
- $ST_s(\varphi \,\&\, \psi) = ST_s(\varphi) \,\&\, ST_s(\varphi)$.
- $ST_s(\Diamond\varphi) = \exists r(R(s,r) \,\&\, ST_r(\varphi))$, where r is a new state variable.
- $ST_s(\exists x\, \varphi) = \exists x\big(E(x,s) \,\&\, ST_s(\varphi)[x \rhd s]\big)$.
- $ST_s((t/x)\varphi) = \exists y\big(y = ST_s(t) \,\&\, ST_s(\varphi)^y_x[y \rhd s]\big)$, provided y is free for x in $ST_s(\varphi)$ and distinct from t.[13]

Example 7.

$$ST_s((j/x)\Diamond(x/y)T(y,x)) = \exists x\big(x = j'(s) \,\&\, \exists r[R(s,r) \,\&\, \exists y(y = x \,\&\, T'(y,r,x,s))]\big)$$

(The right-hand formula is equivalent to $\exists r(R(s,r) \,\&\, T'(j'(s), r, j'(s), s))$.)

To establish that the translation just defined preserves truth, we will need a correspondence between CWPL models and FOL^2 models.

Definition 15. (Corresponding Models) Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w \in \mathcal{G}}, \mathcal{I} \rangle$ be a CWPL model. Then the corresponding FOL^2 model $\mathcal{M}'$ is $\langle \mathcal{G}, \mathcal{D}(\mathcal{M}), \mathcal{I}' \rangle$, where:

[13] If t is an individual constant or a variable distinct from x, y can be x.

- $\mathcal{I}'(a') = \mathcal{I}(a)$.
- $\mathcal{I}'(P') = \{\langle o_1, w_1, \ldots, o_n, w_n\rangle : \langle o_1, \ldots, o_n\rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle w_1, \ldots, w_n\rangle)\}$.
- $\mathcal{I}'(E) = \{\langle o, w\rangle : o \in \mathcal{D}_w\}$.
- $\mathcal{I}'(R) = \mathcal{R}$.
- $\mathcal{I}'(\equiv) = \{\langle o, o\rangle : o \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\}$.

Lemma 1. *Let φ be a CWPL formula, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ a CWPL model, v a variable valuation in $\mathcal{M}$, f a VP-function in $\mathcal{M}$, g a variable valuation in $\mathcal{M}'$, $w \in \mathcal{G}$, $y_1, \ldots, y_n \in VAR$ ($y_1, \ldots, y_n$ pairwise distinct), $s, r_1, \ldots, r_n \in SVAR$, and let the following hold:*

1. $g(s) = w$.
2. $(\forall x \in FV(\varphi))\; g(x) = v(x)$.
3. $(\forall x \in FV(\varphi) \setminus \{y_1, \ldots, y_n\})\; x \notin dom(f)$.
4. $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\; f(y_i) = g(r_i)$.

Then

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} \varphi \iff \mathcal{M}', g \vDash_{FOL^2} ST_s(\varphi)[y_1 \triangleright r_1] \ldots [y_n \triangleright r_n].$$

Proof. By induction on the structure of φ. I give just an illustration of the base case and consider one of the induction cases.

1) *The base case (an illustration).* Let φ be $P(x, y)$ and consider $ST_s(\varphi)[y \triangleright r]$, that is, $P'(x, s, y, r)$. Let the conditions of the lemma hold: $g(s) = w$, $g(x) = v(x)$, $g(y) = v(y)$, $x \notin dom(f)$, and $f(y) = g(r)$. Then we have:

$\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} P(x, y)$ iff

$\langle v(x), v(y)\rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle w, f(y)\rangle)$ iff

$\langle g(x), g(y)\rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle g(s), g(r)\rangle)$ iff

$\langle g(x), g(s), g(y), g(r)\rangle \in \mathcal{I}'(P')$ iff

$\mathcal{M}', g \vDash_{FOL^2} P'(x, s, y, r)$, as desired.

2) *One of the induction cases.* Let a be an individual constant, and let the conditions of the lemma hold for $(a/x)\varphi$. Suppose also that x is not one of $y_1, \ldots, y_n$. Then we have:

$\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} (a/x)\varphi$ iff

$\mathcal{M}, w, v^{\alpha}_{x}, f^{w}_{x} \vDash_{CWPL} \varphi \quad [\alpha = \mathcal{I}(a)(w) = g\mathcal{I}'(a'(s))]$ iff

(*) $\mathcal{M}', g^{\alpha}_{x} \vDash_{FOL^2} ST_s(\varphi)[x \triangleright s][y_1 \triangleright r_1] \ldots [y_n \triangleright r_n]$ iff

$(\exists e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}))\big(e = \alpha \;\&\; \mathcal{M}', g^{e}_{x} \vDash_{FOL^2} ST_s(\varphi)[x \triangleright s][y_1 \triangleright r_1] \ldots [y_n \triangleright r_n]\big)$ iff

$\mathcal{M}', g \vDash_{FOL^2} \exists x\big(x = a'(s) \;\&\; ST_s(\varphi)[x \triangleright s][y_1 \triangleright r_1] \ldots [y_n \triangleright r_n]\big)$, that is,

$\mathcal{M}', g \vDash_{FOL^2} ST_s((a/x)\varphi)[y_1 \triangleright r_1] \ldots [y_n \triangleright r_n]$, as desired.

The line marked with (*) results from applying the induction hypothesis to the previous line. To make sure that the induction hypothesis is applicable to that line, observe that $v^{\alpha}_{x}(x) = g^{\alpha}_{x}(x)$, and $f^{w}_{x}(x) = g(s)$. ■

Now we are in a position to demonstrate that the translation defined above is truth preserving.

Proposition 1. Let φ, $\mathcal{M}$, w, v, g, s be as in Lemma 1, and let the following hold:

1. $g(s) = w$.
2. $(\forall x \in FV(\varphi))g(x) = v(x)$.

Then

$$\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash_{CWPL} \varphi \iff \mathcal{M}', g \vDash_{FOL^2} ST_s(\varphi).$$

Proof. It suffices to observe that conditions 3 and 4 of Lemma 2.1 are met. Condition 3 is met because the VP-function we are dealing with is $\varnothing$. Condition 4 is met because no substitution of the form $[y \triangleright r]$ is performed in $ST_s(\varphi)$. ■

2.5. A Comparison of CWPL with Kocurek's Hybrid Logic

Here, I compare CWPL with a slightly simplified version H of Kocurek's quantified hybrid logic presented in [Kocurek, 2016, pp. 721–723]. (The simplifications are specified in footnote 14 below.) I show that H exceeds CWPL in expressiveness (of course, so does the nonsimplified version as well) and explain this fact.

The vocabulary of H's language differs from that of the language of CWPL in that it includes a denumerable set $SVAR$ of state variables; hybrid sentential operators $\downarrow s.$, and $@_s$ ($s \in SVAR$); hybrid term operator $◀_s$ ($s \in SVAR$); and the possibilist quantifier Σ (the dual possibilist quantifier Π can be defined in the usual way). Additionally, it does not contain the λ-operator. H terms are individual variables, individual constants, and expressions of the form $\blacktriangleleft_s t$, where t is a term, and $s \in SVAR$. H formulae are defined by the grammar

$$\varphi ::= P(t_1, \ldots, t_n) \,|\, \neg\varphi \,|\, (\varphi_1 \& \varphi_2) \,|\, \Diamond\varphi \,|\, \downarrow s.\varphi \,|\, @_s\varphi \,|\, \exists x\varphi \,|\, \Sigma x\varphi,$$

where P is an n-ary predicate letter, $t_1, \ldots, t_n$ are terms, $x \in VAR$, and $s \in SVAR$. Below I omit outermost brackets and use infix notation for $=$.

Definition 16. (H Model) An H model $\mathcal{M}$ is a quadruple $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$, where $\mathcal{G}, \mathcal{R}$, $(\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}$, and $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ are as in Definition 1, and $\mathcal{I}$ is as follows:

- For each $a \in CON$, $\mathcal{I}(a) : \mathcal{G} \to \mathcal{D}(\mathcal{M})$.
- For each $P \in PRED^n$, $\mathcal{I}(P) \subseteq (\mathcal{D}(\mathcal{M}) \times \mathcal{G})^n$.
- $\mathcal{I}(=) = \{\langle\langle o, w_1\rangle, \langle o, w_2\rangle\rangle : o \in \mathcal{D}(\mathcal{M}), w_1, w_2 \in \mathcal{G}\}$.[14]

Definition 17. (Variable Valuation in an H Model) A variable valuation in an H model $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ is a function sending each individual variable to a member of $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, and each state variable to a member of $\mathcal{G}$.

Variants of variable valuations are defined and written as for CWPL.

Definition 18. (Denotation in an H model) Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ be an H model, and g a variable valuation in $\mathcal{M}$. Then $g\mathcal{I}$ is a function that assigns denotations to terms relative to possible worlds in the following way:

- For all $x \in VAR$, $g\mathcal{I}(x, w) = \langle g(x), w\rangle$.
- For all $a \in CON$, $g\mathcal{I}(a, w) = \langle \mathcal{I}(a)(w), w\rangle$.
- For every H term t and state variable s, $g\mathcal{I}(\blacktriangleleft_s t, w) = \langle \pi_1(g\mathcal{I}(t, w)), g(s)\rangle$, where $\pi_1(\langle a, b\rangle) = a$.

Definition 19. (Truth in an H model) Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ be an H model, g a variable valuation in $\mathcal{M}$, $t_1, \ldots, t_n$ H terms, φ and ψ H formulae, $w \in \mathcal{G}$, $x \in VAR$, and $s \in SVAR$. Then:

[14] H models are simplified compared with the models of Kocurek's hybrid logic (crossworld models defined in [Kocurek, 2016, p. 710]) in three respects. 1) In his models, the union of domains of all possible worlds may be a proper subclass of the domain of the model. 2) He does not require the domains of possible world to be nonempty. 3) In his models, extensions of predicates are relativized to possible worlds: for each $P \in PRED^n$, $\mathcal{I}(P, w) \subseteq (\mathcal{D}(\mathcal{M}) \times \mathcal{G})^n$. In H models, the relativization to w is dropped. The last simplification is reflected in the clause for atomic formulae in the definition of truth: compare Definition 19 below and Definition 13 in Kocurek's paper [Ibid., p. 722]. The simplifications do not affect the results of the paper. Speaking of H, I use my notation that differs from that of Kocurek.

- $\mathcal{M}, w, g \vDash_H P(t_1, \ldots, t_n) \iff \langle g\mathcal{I}(t_1, w), \ldots g\mathcal{I}(t_n, w)\rangle \in \mathcal{I}(P)$.
- $\mathcal{M}, w, g \vDash_H \neg\varphi \iff \mathcal{M}, w, g \nvDash_H \varphi$.
- $\mathcal{M}, w, g \vDash_H \varphi \,\&\, \psi \iff \mathcal{M}, w, g \vDash_H \varphi$ and $\mathcal{M}, w, g \vDash_H \psi$.
- $\mathcal{M}, w, g \vDash_H \Diamond\varphi \iff (\exists u \in \mathcal{R}[u])\, \mathcal{M}, u, g \vDash_H \varphi$.
- $\mathcal{M}, w, g \vDash_H \downarrow s.\varphi \iff \mathcal{M}, w, g^w_s \vDash_H \varphi$.
- $\mathcal{M}, w, g \vDash_H @_s\varphi \iff \mathcal{M}, g(s), g \vDash_H \varphi$.
- $\mathcal{M}, w, g \vDash_H \exists x\varphi \iff (\exists e \in \mathcal{D}_w)\, \mathcal{M}, w, g^e_x \vDash_H \varphi$.
- $\mathcal{M}, w, g \vDash_H \Sigma x\varphi \iff (\exists e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}))\, \mathcal{M}, w, g^e_x \vDash_H \varphi$.

CWPL models and H models are, in essence, identical. The only difference in their definitions is that what I write as $\langle o_1, \ldots, o_n\rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle w_1, \ldots, w_n\rangle)$ he writes as $\langle\langle o_1, w_1\rangle, \ldots, \langle o_n, w_n\rangle\rangle \in \mathcal{I}(P)$. So it is easy to define a one-to-one correspondence between CWPL models and H models.

Definition 20. (Corresponding Models) Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ be a CWPL model. Then $\mathcal{M}'$ is the corresponding H model $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}'\rangle$, where

- For each $a \in CON$, $\mathcal{I}'(a) = \mathcal{I}(a)$ (hence $\mathcal{I}'(a)(w) = \mathcal{I}(a)(w)$ for every $w \in \mathcal{G}$).
- For each n-ary predicate letter P, $\mathcal{I}'(P) \subseteq (\mathcal{D}(\mathcal{M}) \times \mathcal{G})^n$, and for all $o_1, \ldots, o_n \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, $w_1, \ldots, w_n \in \mathcal{G}$, $\langle\langle o_1, w_1\rangle, \ldots, \langle o_n, w_n\rangle\rangle \in \mathcal{I}'(P)$ iff $\langle o_1, \ldots, o_n\rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle w_1, \ldots, w_n\rangle)$.

Clearly the function from CWPL models to H models that sends each CWPL model $\mathcal{M}$ to $\mathcal{M}'$ is bijective.

Now we are prepared to compare CWPL and H in expressiveness. To do so, I define a translation from CWPL formulae to H formulae and show that it preserves truth with respect to corresponding models and corresponding definitions of truth; then I show that there is no reverse translation. This establishes that H exceeds CWPL in expressiveness.

Convention. 1) If φ is a formula, t a term, x an individual variable, then $\varphi[x \triangleright s]$ is the result of substituting $\blacktriangleleft_s x$ for all free occurrences of x in φ that are in atomic subformulae and not in $\blacktriangleleft_r x$ for any r.[15] For example $(x/y)P(x, \blacktriangleleft_r x)[x \triangleright s]$ is $(x/y)P(\blacktriangleleft_s x, \blacktriangleleft_r x)$. 2) If φ is a formula, $FV(\varphi)$ is the set of individual variables having free occurrences in φ.

[15] Not to be confused with $\varphi[x \triangleright s]$ as defined in the previous section.

Definition 21. (Translation from CWPL into H) A translation from CWPL into H with respect to $s \in SVAR$ is the function τ_s from CWPL formulae to H formulae, such that for all $\varphi, \psi \in FOR$, and for each $t \in TERM$:

- If φ is atomic, $\tau_s(\varphi) = \varphi$.
- $\tau_s(\neg\varphi) = \neg\tau_s(\varphi)$.
- $\tau_s(\varphi \,\&\, \psi) = \tau_s(\varphi) \,\&\, \tau_s(\psi)$.
- $\tau_s(\Diamond\varphi) = \Diamond \downarrow r \,.\, \tau_r(\varphi)$, where r is a new state variable.
- $\tau_s(\exists x\varphi) = \exists x \; \tau_s(\varphi)[x \triangleright s]$.
- $\tau_s((t/x)\varphi) = \Sigma y\big(y = t \;\&\; \tau_s(\varphi)^y_x[y \triangleright s]\big)$, provided y is free for x in $\tau_s(\varphi)$ and distinct from t.

The following lemma will help us show that the translation just defined is truth preserving.

Lemma 2. *Let φ be a CWPL formula, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ a CWPL model, v a variable valuation in $\mathcal{M}$, f a VP-function in $\mathcal{M}$, g a variable valuation in $\mathcal{M}'$, $w \in \mathcal{G}$, $y_1, \ldots, y_n \in VAR$ ($y_1, \ldots, y_n$ pairwise distinct), $s, r_1, \ldots, r_n \in SVAR$, and let the following hold:*

1. $g(s) = w$.
2. $(\forall x \in FV(\varphi))\; g(x) = v(x)$.
3. $(\forall x \in FV(\varphi) \setminus \{y_1, \ldots, y_n\})\; x \notin dom(f)$.
4. $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\; f(y_i) = g(r_i)$.

Then

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} \varphi \iff \mathcal{M}', w, g \vDash_H \tau_s(\varphi)[y_1 \triangleright r_1] \ldots [y_n \triangleright r_n].$$

Proof. By induction on the structure of φ. I give just an illustration of the base case and consider one of the induction cases.

1) *The base case.* Let φ be $P(x, y)$ and consider $\tau_s(\varphi)[x \triangleright r]$, that is, $P(\blacktriangleleft_r x, y)$. Let the conditions of the lemma hold: $g(s) = w$, $g(x) = v(x)$, $g(y) = v(y)$, $y \notin dom(f)$, $f(x) = g(r)$. Now we have:

$\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} P(x, y)$ iff

$\langle v(x), v(y)\rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle \overline{fw}(x), \overline{fw}(y)\rangle)$ iff

$\langle v(x), v(y)\rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle f(x), w\rangle)$ iff

$\langle g(x), g(y)\rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle g(r), w\rangle)$ iff

$\Big\langle \langle g(x), g(r)\rangle, \langle g(y), w\rangle \Big\rangle \in \mathcal{I}'(P)$ iff

$\mathcal{M}', w, g \vDash_H P(\blacktriangleleft_r x, y)$, that is, $\mathcal{M}', w, g \vDash_H \tau_s(P(x, y))[x \triangleright r]$, as desired.

2) *One of the induction cases.* Let a be an individual constant, and let the conditions of the lemma hold for $(a/x)\varphi$. Suppose also that x is not one of $y_1, \ldots, y_n$. Now we have:

$\mathcal{M}, w, v, f \vDash_{CWPL} (a/x)\varphi$ iff

$\mathcal{M}, w, v^{\alpha}_{x}, f^{w}_{x} \vDash_{CWPL} \varphi$, where $\alpha = \mathcal{I}(a)(w) = \mathcal{I}'(a)(w)$ iff

(*) $\quad \mathcal{M}', w, g^{\alpha}_{x} \vDash_H \tau_s(\varphi)[x \triangleright s][y_1 \triangleright r_1] \ldots [y_n \triangleright r_n]$ iff

$(\exists e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}))\big(e = \alpha \,\&\, \mathcal{M}', w, g^{e}_{x} \vDash_H \tau_s(\varphi)[x \triangleright s][y_1 \triangleright r_1] \ldots [y_n \triangleright r_n]\big)$ iff

$\mathcal{M}', w, g \vDash_H \Sigma x\big(x = a \;\&\; \tau_s(\varphi)[x \triangleright s][y_1 \triangleright r_1] \ldots [y_n \triangleright r_n]\big)$, that is,

$\mathcal{M}', w, g \vDash_H \tau_s((a/x)\varphi)[y_1 \triangleright r_1] \ldots [y_n \triangleright r_n]$, as desired.

The line marked with (*) results from applying the induction hypothesis to the previous line. To make sure that the induction hypothesis is applicable to that line, observe that $v^{\alpha}_{x}(x) = g^{\alpha}_{x}(x)$ and $f^{w}_{x}(x) = g(s)$. ■

Proposition 2. Let φ, $\mathcal{M}$, v, g, w, s be as in Lemma 2, and let the following hold:

1. $g(s) = w$.
2. $(\forall x \in FV(\varphi)) g(x) = v(x)$.

Then

$$\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash_{CWPL} \varphi \iff \mathcal{M}', w, g \vDash_H \tau_s(\varphi).$$

Proof. It suffices to observe that conditions 3 and 4 of Lemma 2.2 are met. Condition 3 is met because the VP-function we are dealing with is $\varnothing$. Condition 4 holds because we perform no substitution of the form $[y_i \triangleright r_i]$ in $\tau_s(\varphi)$. ■

Thus, the translation under consideration preserves truth with respect to corresponding models, which means that every CWPL formula has an equivalent H formula.

On the other hand, there are H formulae whose truth conditions cannot be expressed in the language of CWPL. Below are three examples.

Example 8. $\mathcal{M}, w, g \vDash_H \downarrow s.\Diamond\forall x P(\blacktriangleleft_s x)$ This formula is true with respect to an H model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$, and a possible world $w \in \mathcal{G}$ iff

$$(\exists u \in R[w])(\forall e \in \mathcal{D}_u)\, \langle e, w\rangle \in \mathcal{I}(P). \tag{7}$$

Let $\mathcal{M}^* = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}^*\rangle$ be the CWPL model corresponding to $\mathcal{M}$ in the sense of Definition 20. Then 7 corresponds to the following CWPL-style truth conditions:

$$(\exists u \in R[w])(\forall e \in \mathcal{D}_u)\, e \in \mathcal{I}^*(P)(w). \tag{8}$$

Now, 8 cannot be expressed by any CWPL formula. For reasons of space, I confine myself to informal considerations in favor of this claim. Suppose a CWPL formula φ expresses 8. Since $\forall$ in 8 ranges over the domain of u, φ should contain $\forall x$ in the scope of $\Diamond$, which associates x with u. On the other hand, in 8 $\mathcal{I}^*(P)$ is applied to w, hence P should be followed in φ by a variable y to be associated with w, i.e., to be bound by an operator outside the scope of $\Diamond$. And since 8 says of the same entities that they are both in $\mathcal{D}_u$ and $\mathcal{I}^*(P)(w)$, φ should contain the subformula $x = y$. Thus, φ should be something like $O\Diamond\forall x(x = y \to Py)$, where O is $\forall y$, $\exists y$, or (t/y) for some CWPL term t. Clearly no CWPL formula of such a shape works.[16]

Example 9. $\downarrow s.\Diamond \downarrow t.@_s\Diamond P(\blacktriangleleft_t x, x)$. This formula is true with respect to $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$, g, and w iff

$$(\exists u \in R[w])(\exists u' \in R[w])\, \big\langle \langle g(x), u\rangle, \langle g(x), u'\rangle \big\rangle \in \mathcal{I}(P). \tag{9}$$

The CWPL-style counterpart of 9 is

$$(\exists u \in R[w])(\exists u' \in R[w])\, \langle g(x), g(x)\rangle \in \mathcal{I}^*(P)(\langle u, u'\rangle), \tag{10}$$

where $\mathcal{I}^*$ relates to $\mathcal{I}$ as in the previous example. To express 9 or 10, we need linguistic tools that enable, after moving from w to u, returning to w in order then to move to u'. In CWPL's language, such tools are not available.

Example 10. This example is from [Kocurek, 2016, p. 724]. Consider the sentence *The rich could have all been poor.* It is well known that it cannot be formalized by means of the standard modal logic because it involves crossworld quantification: It ascribes the property of being poor in a possible world to everyone who is rich in the actual world.[17] Nor can it be formalized in

[16] Analogous examples are $\downarrow s.\Box\exists x P(\blacktriangleleft_s x)$, $\downarrow s.\Diamond\exists x P(\blacktriangleleft_s x)$, and $\downarrow s.\Box\forall x P(\blacktriangleleft_s x)$. By the way, the last two formulae can be translated into CWPL$^\Sigma$ by $\Sigma x\Diamond\exists y(x = y \,\&\, P(x))$ and $\Pi x\Box(\exists y\, x = y \to P(x))$ respectively (Πx is an abbreviation for $\neg\Sigma x\neg$).

[17] Cf. the discussion of an analogous sentence in [Wehmeier, 2012, pp. 112–115].

CWPL because its language does not provide tools for crossworld quantification. In Kocurek's hybrid logic it can be formalized by

$$\downarrow s.\Diamond \downarrow t.@_s\forall x @_t(@_s Rich(x) \to Poor(x)).$$

Indeed, this formula is true with respect to $\mathcal{M}$, w and g iff

$$(\exists u \in R[w])(\forall e \in \mathcal{D}_w)\big(\langle e, w\rangle \in \mathcal{I}(Rich) \implies \langle e, u\rangle \in \mathcal{I}(Poor)\big),$$

which accurately reflects the intuitive meaning of the sentence under consideration.

H exceeds CWPL in expressiveness because in H there are special operators responsible for associating terms with possible worlds, whereas in CWPL this job can only be performed by the quantifiers and λ-operator that have also to perform their usual jobs. Let us return to Example 8. In $\downarrow s.\Diamond\forall x P(\blacktriangleleft_s x)$, x is quantified in the scope of $\Diamond$ and, at the same time, associated with s via $\downarrow s.$ that is located before $\Diamond$. This is not feasible in CWPL because both jobs — quantification and association — can only be performed by $\exists x$ that has to be located either before or after $\Diamond$. The division of labor between nonhybrid and hybrid operators provides extra expressive power for H.

The expressiveness shortage of CWPL compared with H is the dark side of CWPL's advantage mentioned in Introduction, namely the fact that it does not use nonstandard (hybrid) vocabulary.

3. Conclusion and Further Work

CWPL is a crossworld modal logic with significant expressive power. In particular, it provides the adequate formalization of such sentences as *John might have been taller*, *A polar bear could be bigger than a grizzly bear could be.* In terms of expressive power, CWPL falls behind Kocurek's hybrid logic but has the advantage that it is based on the standard modal language, that is, it makes no use of nonstandard operators such as hybrid ones. As far as I can judge, CWPL is the most expressive nonhybrid modal logic accommodating crossworld predication.

All logics for crossworld predication I am familiar with, in particular all logics mentioned above, contain semantics only, no proof theory. So the natural direction for further investigation is elaborating a proof theory that is complete with respect to the semantics of CWPL. In [Borisov, 2020], I outlined a tableau proof theory for CWPL, without showing its completeness. The next task is establishing its completeness and elaborating a Hilbert-style proof theory for CWPL.

Acknowledgements. The research was supported by Russian Science Foundation, project 23-28-01465, https://rscf.ru/project/23-28-01465. I am indebted to an anonymous reviewer for helpful comments, and to Jean Kollantai for assistance with stylistic editing.

References

Borisov, 2020 – Borisov, E.V. "Logika dlya kross-mirovoy predikatsii" [A logic for crossworld predication], *Nauka kak obshchestvennoye blago [Science as a public good]*, Vol. 4, ed. by I.T. Kasavin and L.V. Shipovalova. Moscow: Russian Society for History and Philosophy of Science, 2020, pp. 205–209. (In Russian)

Butterfield, Stirling, 1987 – Butterfield, J., Stirling, C. "Predicate modifiers in tense logic", *Logique et Analyse*, 1987, Vol. 30, pp. 31–50.

Fitting, Mendelsohn, 1998 – Fitting, M.C., Mendelsohn, R. *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1998. 287 pp.

Fitting, 2017 – Fitting, M. "On height and happiness", *Rohit Parikh on Logic, Language and Society*, ed. by C. Baskent et al. Cham: Springer, 2017, pp. 235–258.

Kemp, 2000 – Kemp, G. "The Interpretation of Crossworld Predication", *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition,* 2000, Vol. 98, pp. 305–320.

Kocurek, 2016 – Kocurek, A.W. "The problem of cross-world predication", *Journal of Philosophical Logic,* 2016, Vol. 45, pp. 697–742.

Lewis, 1968 – Lewis, D.K. "Counterpart Theory and Quantified Modal Logic", *The Journal of Philosophy,* 1968, Vol. 65, pp. 113–126.

Priest, 1998 – Priest, G. *An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is.* Cambridge: CUP, 2008. 613 pp.

Russell, 1905 – Russell, B. "On Denoting", *Mind. New Series,* 1905, Vol. 14, pp. 479–493.

van Benthem, 1983 – van Benthem, J. *Modal Logic and Classical Logic.* Naples: Bibliopolis, 1983. 234 pp.

von Stechow, 1984 – von Stechow, A. "Comparing semantic theories of comparison", *Journal of Semantics,* 1984, Vol. 3, pp. 1–77.

Wehmeier, 2012 – Wehmeier, K. F. "Subjunctivity and cross-world predication", *Philosophical Studies,* 2012, Vol. 159, pp. 107–122.

Wehmeier, Rückert, 2019 – Wehmeier, K., Rückert, H. "Still in the Mood: The Versatility of Subjunctive Markers in Modal Logic", *Topoi,* 2019, Vol. 38, pp. 361–377.

Е.В. Борисов

Негибридная логика для кросс-мировой предикации

Евгений Васильевич Борисов
Институт философии и права Сибирского отделения РАН.
Российская Федерация, 630090, г. Новосибирск, ул. Николаева, д. 8.
E-mail: borisov.evgeny@gmail.com

Аннотация: Некоторые предложения естественных языков, такие как "Джон мог быть выше, чем Мэри, как она есть", приписывают отношения объектам, каждый из которых ассоциирован с некоторым возможным миром. В приведенном примере Мэри ассоциирована с действительным миром, Джон — с одним из возможных миров, который может быть отличен от действительного. Этот феномен — феномен кросс-мировой предикации — не отображается в стандартной модальной логике. Для его отображения были предложены некоторые нестандартные логики, из которых наибольшей выразительной силой обладает гибридная логика Коцурека. Во всех этих логиках используются нестандартные операторы, такие как операторы гибридной логики. В данной статье я предлагаю негибридную модальную логику первого порядка (CWPL), которая отражает кросс-мировую предикацию, демонстрирует значительную выразительную силу (хотя уступает в этом аспекте гибридной логике Коцурека). Преимущество CWPL перед другими логиками этого вида состоит в том, что в ней используются только стандартные операторы. В семантическом плане CWPL базируется на кросс-мировой интерпретации предикатов, при которой экстенсионалы n-местных предикатов определяются не для отдельных миров, а для упорядоченных n-ок миров. Использование такой интерпретации предикатов при оценке формул основано на релятивизации истинности к частичным функциям от переменных к возможным мирам. В статье описаны синтаксис и семантика CWPL, предложен перевод CWPL на язык двусортной логики первого порядка и дано сравнение CWPL и гибридной логики Коцурека в аспекте выразительной силы.

Ключевые слова: модальная логика первого порядка, семантика возможных миров, кросс-мировая предикация

Логические исследования
2023. Т. 29. № 2. С. 148–162
УДК 510.64

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 2, pp. 148–162
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-148-162

Vladimir L. Vasyukov

An axiomatization of quantum computational logic

Vladimir L. Vasyukov
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: vasyukov4@gmail.com

Abstract: One of the logical proposals that arise from quantum computation is the idea to use the quantum theoretical formalism to represent parallel reasoning. To this aim a quantum computation is considered by means of convenient unitary operators assuming arguments and values in particular sets of qubit systems. Isolating some important unitary operators that have a special role in quantum computation (logical gates or quregisters) we obtain an opportunity to yield the language of Quantum Computational Logic (**QCL**) (cf. [Cattaneo et al., 2003; Cattaneo et al., 2004; Dalla Chiara et al., 2004]). The basic concept of the semantics of this language is the notion of quantum computational realization such that the meaning associated to any sentence is a quregister. Unlike the semantic of a standard quantum logic **QCL**-conjunction and **QCL**-disjunction do not correspond to lattice operations since they are not generally idempotent. Moreover, in **QCL** the weak distributivity principle breaks down and both the excluded middle and the non contradiction principles are violated. Finally, the axiomatizability of **QCL** is still an open problem. In the paper an axiomatization of **QCL** is proposed construing it as a kind of so-called Goldblatt's binary logic. Some metalogical theorems (paraconsistency and completeness) are proved.

Keywords: quantum computation, quantum computational realization, binary logic, paraconsistency

For citation: Vasyukov V.L. "An axiomatization of quantum computational logic", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 148–162. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-148-162

1. Introduction

The pure states of quantum system usually are mathematically represented by unitary vectors in a Hilbert space $\mathcal{H}$, they represent maximal information about the physical system under investigation. Let us suppose the simplest situation, where our Hilbert space $\mathcal{H}$, has dimension 2. In such a case it will have a basis consisting of two unitary elements and thus any vector of the space will be representable as a superposition (or linear combination) of the basis-elements. In Dirac's notation we will deal with the vectors $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ ...;

while the basis-elements will be indicated by $|0\rangle, |1\rangle$. For any unitary $|\phi\rangle$ we have $|\phi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ where the coefficients a_0, a_1 are complex numbers such that their modules $|a_0|$, $|a_1|$ satisfy the relation $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$. A quantum pure state assigns to a given physical property only a *probability-value*, and not a classical *truth-value* (either *True* or *False*). Any state $|\psi\rangle$ has some certain properties (with probability-value 1), some impossible properties (with probability-value 0) and many indeterminate properties (with probability-value different both from 1 and from 0). If $|\psi\rangle$ has the form $a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$, then the physical system in state $|\psi\rangle$ might satisfy with probability $|a_0|^2$ those properties that are certain for state $|0\rangle$, and might satisfy with probability $|a_1|^2$, those properties that are certain for state $|1\rangle$. Because $|\psi\rangle$ is a unitary vector then $|a_0|^2, |a_1|^2 \in [0, 1]$.

If we consider the two-dimensional Hilbert space $\mathbb{C}^2$, then any vector $|\psi\rangle$ should be represented as a pair of complex numbers. Let $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ be an orthonormal basis for $\mathbb{C}^2$. Thus the elements of B are two particular unitary vectors that are mutually orthogonal (i.e. their inner product is 0).

Definition 1 (Qubit)**.** A qubit is any unitary vector $|\psi\rangle$ of the space $\mathbb{C}^2$.

Hence, any qubit will generally have the form $a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ where $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ and $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$.

Definition 2 (n-qubit system or n-register)**.** An n-qubit system or n-register is any unitary vector $|\psi\rangle$ in the product space $\otimes^n \mathbb{C}^2$.

Thus, a quantum-logical gate can be described as a special unitary operator, assuming arguments and values in a product Hilbert space $\otimes^n \mathbb{C}^2$.

Definition 3 (The Toffoli gate $T^{(1,1,1)}$)**.** The Toffoli gate $T^{(1,1,1)}$ is the linear operator $T^{(1,1,1)} : \otimes^3 \mathbb{C}^2 \to \otimes^3 \mathbb{C}^2$ defined for any element $|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle$ of the basis as follows: $T^{(1,1,1)}(|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle) = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |min(x, y) \oplus z\rangle$, where $\oplus$ represents the sum *modulo* 2.

$T^{(1,1,1)}$ transforms any product vector $|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle$ into the product that is obtained by leaving unchanged the first two factors $|x\rangle$ and $|y\rangle$ and by transforming the third factor $|z\rangle$ into $|min(x, y) \oplus z\rangle$. By means of $T^{(1,1,1)}$ we can introduce a convenient notion of conjunction. Such conjunction, which will be indicated by **AND**, is characterized as a function whose arguments are pairs of vectors in $\mathbb{C}^2$ and whose values are vectors of the product space $\otimes^3 \mathbb{C}^2$.

Definition 4 (**AND**)**.** For any $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$ and any $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$:
AND$(|\phi\rangle, |\psi\rangle) := T^{(1,1,1)}(|\phi\rangle, |\psi\rangle, |0\rangle)$.

To consider the case where the function **AND** is applied to arguments that are superpositions of the basis elements in the space $\mathbb{C}^2$ let us use the following qubit pair: $|\phi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, |\psi\rangle = b_0|0\rangle + b_1|1\rangle$. By applying the definitions of **AND** and of $T^{(1,1,1)}$ we obtain:

$$\mathbf{AND}(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = a_1 b_1|1,1,1\rangle + a_1 b_0|1,0,0\rangle + a_0 b_1|0,1,0\rangle + a_0 b_0|0,0,0\rangle.$$

By applying the Born rule we will obtain the following interpretation: $|a_1 b_1|^2$ represents the probability-value that both the qubit-arguments are equal to $|1\rangle$, and consequently their conjunction is $|1\rangle$. Similarly in the other three cases.

The function **NOT** can be defined as a unary function assuming arguments in the space $\mathbb{C}^2$ and values in the space $\otimes^3\mathbb{C}^2$.

Definition 5 (**NOT**)**.** For any $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$:
$\mathbf{NOT}(|\phi\rangle) := T^{(1,1,1)}(|\phi\rangle, |1\rangle, |1\rangle)$.

In particular, for the basis-elements $|0\rangle$ and $|1\rangle$ we have:
$\mathbf{NOT}(|1\rangle) = T^{(1,1,1)}(|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle) = |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$,
$\mathbf{NOT}(|0\rangle) = T^{(1,1,1)}(|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle) = |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$.
In both cases, the first factor corresponds to the classical argument, while the third factor corresponds to the classical value for that argument ($|1\rangle$ is transformed into $|0\rangle$ and the other way round).

The logical gate **AND** have values in a Hilbert space of the form $\otimes^3\mathbb{C}^2$. Nevertheless, the procedure can be easily generalized by defining the Toffoli gate in any Hilbert space having the form $(\otimes^{(n)}\mathbb{C}^2) \otimes (\otimes^{(m)}\mathbb{C}^2) \otimes \mathbb{C}^2 (= \otimes^{(n+m+1)}\mathbb{C}^2)$.

Definition 6 (The Toffoli gate $T^{(n,m,1)}$)**.** The Toffoli gate $T^{(n,m,1)}$ is the linear operator
$T^{(n,m,1)} : (\otimes^{(n)}\mathbb{C}^2) \otimes (\otimes^{(m)}\mathbb{C}^2) \otimes \mathbb{C}^2 \mapsto (\otimes^{(n)}\mathbb{C}^2) \otimes (\otimes^{(m)}\mathbb{C}^2) \otimes \mathbb{C}^2$,
that is defined for any element $|x_1, ..., x_n\rangle \otimes |y_1, ..., y_m\rangle \otimes |z\rangle$ of the computational basis of $\otimes^{(n+m+1)}\mathbb{C}^2$ as follows:
$T^{(n,m,1)}(|x_1, ..., x_n\rangle \otimes |y_1, ..., y_m\rangle|z\rangle) = |x_1, ..., x_n\rangle \otimes |y_1, ..., y_m\rangle \otimes |x_n y_m \oplus z\rangle$,
where $\oplus$ represents the sum *modulo* 2.

On this basis we obtain also generalization of our definition of **AND**.

Definition 7 ($\mathbf{AND}^{(n)}$)**.** For any $|\phi\rangle \in \otimes^n\mathbb{C}^2$ and any $|\phi\rangle \in \otimes^m\mathbb{C}^2$:
$\mathbf{AND}^{(n)}(|\phi\rangle, |\psi\rangle) := T^{(n,m,1)}(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |0\rangle)$.

And the same way we proceed with **NOT**.

Definition 8 ($\mathbf{NOT}^{(n)}$)**.** The negation-gate is the linear operator $\mathbf{NOT}^{(n)}$ that is defined for any element $|x_1, ..., x_n\rangle$ of the computational basis of $\otimes^n\mathbb{C}^2$ as follows:
$\mathbf{NOT}^{(n)}(|x_1, ..., x_n\rangle) = |x_1, ..., x_{n-1}, 1 - x_n\rangle$.

To introduce a disjunction we need firstly define a new logical gate that is called a *dual Toffoli gate* and will be indicated by $Q^{(1,1,1)}$. Similarly to $T^{(1,1,1)}$, the operator $Q^{(1,1,1)}$ also assumes arguments in the space $\mathbb{C}^2$ and values in the space $\otimes^3\mathbb{C}^2$. The dual Toffoli gate is obtained by making reversible the classical "or".

Definition 9 (The dual Toffoli gate $Q^{(1,1,1)}$)**.** The dual Toffoli gate $Q^{(1,1,1)}$ is the linear operator $Q^{(1,1,1)} : \otimes^3\mathbb{C}^2 \to \otimes^3\mathbb{C}^2$ that is defined for any element $|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle$ of the basis in the following way:
$Q^{(1,1,1)}(|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle) = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |max(x, y) \oplus z\rangle$,
where $\oplus$ represents the sum *modulo* 2.

Now we can introduce a disjunction function **OR** assuming as pairs of vectors of $\mathbb{C}^2$ and as values vectors of $\otimes^3\mathbb{C}^2$.

Definition 10 (**OR**)**.** For any $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$ and any $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$
$\mathbf{OR}(|\phi\rangle, |\psi\rangle) := Q^{(1,1,1)}(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |0\rangle)$.

One of the most exotic quantum gates we need for the further considerations is the squareroot of the negation **NOT**, which is indicated by $\sqrt{\mathbf{NOT}}$. The characteristic property of the gate $\sqrt{\mathbf{NOT}}$ is the following: for any quregister $|\psi\rangle$
$\sqrt{\mathbf{NOT}}(\sqrt{\mathbf{NOT}}|\psi\rangle) = \mathbf{NOT}|\psi\rangle$.
In other words: applying the squareroot of the negation twice "means" negating. The general definition of $\sqrt{\mathbf{NOT}}$ looks like that.

Definition 11 ($\sqrt{\mathbf{NOT}}$)**.** The square root of the negation on $\otimes^{(n)}\mathbb{C}$ is the linear operator $\sqrt{\mathbf{NOT}}^{(n)}$ such that, for every element $|x_1, ..., x_n\rangle$ of the computational basis,
$\sqrt{\mathbf{NOT}}^n(|x_1, ..., x_n\rangle) = |x_1, ..., x_{n-1}\rangle \otimes (\frac{i+1}{2}|x_n\rangle + \frac{i-1}{2}|1 - x_n\rangle)$
(where, of course, $i^2 = -1$).

2. QCL semantics

In [Cattaneo et al., 2003; Cattaneo et al., 2004; Dalla Chiara et al., 2004] a particular semantics of Quantum Computability Logic (**QCL**) is described in a following way. A sentential language $\mathcal{L}$ of **QCL** contains the following connectives: the *negation* ($\neg$), the *conjunction* ($\curlywedge$) and the *square root of the negation* ($\sqrt{\neg}$). The notion of *sentence* (or *formula*) of $\mathcal{L}$ is defined standardly. Let $Form^{\mathcal{L}}$ represent the set of all sentences of $\mathcal{L}$. As usual, the metavariables $p, q, r, ...$will range over atomic sentences, while $\alpha, \beta, \gamma, ...$will range over sentences. The *disjunction* ($\curlyvee$) is defined via de Morgan's law:
$\curlyvee := \neg(\neg \curlywedge \neg\ )$.

The basic concept of the semantics is the notion of *quantum computational realization* which is given by an interpretation of the language $\mathcal{L}$, such that the meaning associated to any sentence is a *quregister* (qubit-register) — either a qubit or an n-qubit system (any unit vector $|\psi\rangle$ in the product space $\otimes^n\mathbb{C}^2$). This determines that the *space of the meanings* corresponds not to a unique Hilbert space, but to varying Hilbert spaces, each one of the form $\otimes^n\mathbb{C}^2$. The formal definition is the following.

Definition 12. A quantum computational realization of $\mathcal{L}$ is a function Qub associating to any sentence a quregister in a Hilbert space $\otimes^n\mathbb{C}^2$ (where n depends on the linguistic form of α):

$$Qub : Form^{\mathcal{L}} \to \bigcup_n \otimes^n \mathbb{C}^2.$$

Hereafter we will write $|\alpha\rangle$ instead of $Qub(\alpha)$; and we will call $|\alpha\rangle$ the *information value* of α. The following conditions are required.

(i) $|\mathbf{p}\rangle$ is a qubit (in particular, $|\mathbf{1}\rangle = |1\rangle, |\mathbf{0}\rangle = |0\rangle$);

(ii) Let $|\beta\rangle \in \otimes^n\mathbb{C}^2$. Then, $|\neg\beta\rangle = \mathbf{NOT}(|\beta\rangle) \in \otimes^n\mathbb{C}^2$;

(iii) Let $|\beta\rangle \in \otimes^n\mathbb{C}^2, |\gamma\rangle \in \otimes^m\mathbb{C}^2$.
Then, $|\beta \curlywedge \gamma\rangle = \mathbf{AND}(|\beta\rangle, |\gamma\rangle) \in (\otimes^n\mathbb{C}^2) \otimes (\otimes^m\mathbb{C}^2) \otimes \mathbb{C}^2$;

(iv) Let $|\beta\rangle \in \otimes^n\mathbb{C}^2$. Then, $|\sqrt{\neg}\beta\rangle = \sqrt{\mathbf{NOT}}(|\beta\rangle) \in \otimes^n\mathbb{C}^2$.

Now let Qub be a quantum computational realization and let α be any sentence with associated meaning $|\alpha\rangle$. Since the computational basis of $\otimes^n\mathbb{C}^2$ can be labelled by binary strings $|\underbrace{011...10}_{n-times}\rangle$ which represents, on the other hand, a natural number $j \in [0; 2^n - 1]$ in binary notation, then any unit vector of $\otimes^n\mathbb{C}^2$ can be shortly expressed as $|\alpha\rangle = \sum\limits_{j=0}^{2^n-1} a_j|j\rangle$. If we distinguish a particular set of coefficients that occur in the superposition-vector α

$$C^+|\alpha\rangle = \{a_j : 1 \leq j \leq 2^n - 1 \text{ and } j \text{ is odd}\}$$

then like all quregisters $|\alpha\rangle$ will have a probability-value

$$\text{Prob}(|\alpha\rangle) =_{def} \sum_{\alpha_j \in C^+|\alpha\rangle} |a_j|^2$$

which we identify with the probability-value of any sentence of our language setting $\text{Prob}(\alpha) = \text{Prob}(|\alpha\rangle)$.

For the probability-values the following properties hold [Dalla Chiara et al., 2004, p. 261]:

(i) $\text{Prob}(\mathbf{AND}(\beta,\gamma)) = \text{Prob}(\beta)\text{Prob}(\gamma)$;

(ii) $\text{Prob}(\mathbf{NOT}(\alpha)) = 1-\text{Prob}(\alpha)$;

(iii) $\text{Prob}(\mathbf{OR}(\beta,\gamma)) = \text{Prob}(\beta)+ \text{Prob}(\gamma) - \text{Prob}(\beta)\text{Prob}(\gamma)$;

(iv) $\text{Prob}(\sqrt{\mathbf{NOT}}(\alpha)) = \sum_{\alpha_j \in C^+|\alpha\rangle} |\frac{1}{2}(1-i)a_{j-1} + \frac{1}{2}(1+i)a_j|^2$

(v) $\text{Prob}(\sqrt{\mathbf{NOT}}\mathbf{NOT}(\alpha)) = \text{Prob}(\mathbf{NOT}\sqrt{\mathbf{NOT}}(\alpha))$
$= \sum_{\alpha_j \in C^+|\alpha\rangle} |\frac{1}{2}(1+i)a_{j-1} + \frac{1}{2}(1-i)a_j|^2$

(vi) $\text{Prob}(\sqrt{\mathbf{NOT}}\mathbf{AND}(\beta,\gamma)) = \frac{1}{2}$.

Finally, we define the notions of *truth*, *logical truth*, *consequence* and *logical consequence.*

Definition 13. A sentence α is true in a realization Qub (indicated by $\models_{Qub} \alpha$) iff $\text{Prob}(\alpha) = 1$.

Definition 14. α is a logical truth (indicated by $\models \alpha$) iff for any realization Qub, $\models_{Qub} \alpha$.

Definition 15. β is a consequence of α in the realization Qub (indicated by $\alpha \models_{Qub} \beta$) iff $\text{Prob}(\alpha) \leq \text{Prob}(\beta)$.

Definition 16. β is a logical consequence of α (indicated by $\alpha \models \beta$) iff for any Qub: $\alpha \models_{Qub} \beta$.

Specific examples of logical consequences that hold in **QCL** are the following [Dalla Chiara et al., 2004, p. 264]:

- $\alpha \models \neg\neg\alpha, \neg\neg\alpha \models \alpha$; (*double negation*)
- $\sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha \models \neg\alpha, \neg\alpha \models \sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha$
- $\alpha \curlywedge \beta \models \beta \curlywedge \alpha, \alpha \curlyvee \beta \models \beta \curlyvee \alpha$ (*commutativity*)
- $\alpha \curlywedge (\beta \curlywedge \gamma) \models (\alpha \curlywedge \beta) \curlywedge \gamma, (\alpha \curlywedge \beta) \curlywedge \gamma \models \alpha \curlywedge (\beta \curlywedge \gamma)$ (*associativity*)
- $\alpha \curlyvee (\beta \curlyvee \gamma) \models (\alpha \curlyvee \beta) \curlyvee \gamma, (\alpha \curlyvee \beta) \curlyvee \gamma \models \alpha \curlyvee (\beta \curlyvee \gamma)$ (*associativity*)
- $\neg(\alpha \curlyvee \beta) \models \neg\alpha \curlywedge \neg\beta, \neg\alpha \curlywedge \neg\beta \models \neg(\alpha \curlyvee \beta)$ (*de Morgan*)
- $\neg(\alpha \curlywedge \beta) \models \neg\alpha \curlyvee \neg\beta, \neg\alpha \curlyvee \neg\beta \models \neg(\alpha \curlywedge \beta)$ (*de Morgan*)

- $\alpha \curlywedge \alpha \models \alpha$ (*semiidempotence* 1)
- $\alpha \curlywedge (\beta \curlyvee \gamma) \models (\alpha \curlywedge \beta) \curlyvee (\alpha \curlywedge \gamma)$ (*distributivity* 1).

Besides, some logical consequences and some logical truths are violated in **QCL**:

- $\alpha \not\models \alpha \curlywedge \alpha$ (*semiidempotence* 2)
- $\not\models \alpha \curlyvee \neg\alpha$ (*excluded middle*)
- $\not\models \neg(\alpha \curlywedge \neg\alpha)$ (*non contradiction*)
- $(\alpha \curlywedge \beta) \curlyvee (\alpha \curlywedge \gamma) \not\models \alpha \curlywedge (\beta \curlyvee \gamma)$ (*distributivity* 2).

If we compare **QCL** with a standard form of quantum logic then we can quickly conclude that it turns out to be a non standard quantum logic. Firstly, conjunction and disjunction do not correspond to lattice operations since they are not generally idempotent. Secondly, differently from the usual (sharp and unsharp) quantum logics, in **QCL** the weak distributivity principle $(\alpha \curlywedge \beta) \curlyvee (\alpha \curlywedge \gamma) \models \alpha \curlywedge (\beta \curlyvee \gamma)$ breaks down while the strong distributivity $\alpha \curlywedge (\beta \curlyvee \gamma) \models (\alpha \curlywedge \beta) \curlyvee (\alpha \curlywedge \gamma)$, that is violated in orthodox quantum logic, is here valid. Finally, both the excluded middle and the non contradiction principles are violated and as a consequence **QCL** to be an example of an unsharp quantum logic.

The mostly intriguing in the situation with **QCL** is that the axiomatizability of **QCL** is still an open problem [Dalla Chiara et al., 2004, p. 266]. Below we will try to fill up this gap taking into account all peculiarities of the semantics of **QCL**.

3. QCL axioms

Following R. Goldblatt [Goldblatt, 1974], we will conceive a quantum computational logic not as a set of wffs, but as a collection **L** of ordered pairs of wffs that satisfies certain closure conditions, the idea being that the presence of the pair (α, β) in **L** indicates that β can be inferred from α in **L**. Logics of this kind usually are called *binary logics*, we will write $\alpha \vdash \beta$ in place of $(\alpha, \beta) \in \mathbf{L}$. We also enrich sentential language $\mathcal{L}$ of **QCL** with the constants **0** and **1**. Schemes of axioms of **QCL**:

A1. $\alpha \dashv\vdash \neg\neg\alpha$
A2. $\alpha \curlywedge (\beta \curlywedge \gamma) \dashv\vdash (\alpha \curlywedge \beta) \curlywedge \gamma$
A3. $\alpha \curlywedge (\beta \curlyvee \gamma) \vdash (\alpha \curlywedge \beta) \curlyvee (\alpha \curlywedge \gamma)$
A4. $\mathbf{0} \vdash \beta \curlywedge \beta$

A5. $\neg\mathbf{0} \dashv\vdash \mathbf{1}$
A6. $\alpha \vdash \mathbf{1} \curlywedge \alpha$
A7. $\alpha \curlywedge \beta \vdash \alpha$
A8. $\alpha \curlywedge \beta \vdash \beta$
A9. $\sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha \dashv\vdash \neg\alpha$
A10. $\sqrt{\neg}\neg\alpha \dashv\vdash \neg\sqrt{\neg}\alpha$
A11. $\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta) \dashv\vdash \neg\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta)$.

Rules of **QCL**:

R1. $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\neg\beta \vdash \neg\alpha}$

R2. $\dfrac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$

R3. $\dfrac{\alpha \vdash \beta \quad \gamma \vdash \delta}{\alpha \curlywedge \gamma \vdash \beta \curlywedge \delta}$

Definition 17. Let **QCL** be a quantum computability logic and Γ a non-empty set of wff. A wff α is said to be **QCL**-*derivable* from Γ (indicated by $\Gamma \vdash \alpha$), if there exist $\beta_1, ..., \beta_n \in \Gamma$ such that $(\beta_1 \curlywedge ... \curlywedge \beta_n) \curlywedge (\beta_n \curlywedge ... \curlywedge \beta_1) \vdash \alpha$. If α is **QCL**-derivable from 1 then A is **QCL**-derivable or is an **QCL**-theorem which writes $\vdash_{QCL} \alpha$. Γ is **QCL**-*paraconsistent* if there is at least one wff not **QCL**-derivable from Γ, and **QCL**-*inconsistent* otherwise. Γ is **QCL**-*full* iff it is **QCL**-paraconsistent and closed under $\curlywedge$ and **QCL**-derivability, i.e. iff

(1) for some wff, not $\Gamma \vdash \alpha$;
(2) if $\alpha \in \Gamma$ and $\alpha \vdash \beta$ then $\beta \in \Gamma$;
(3) $\alpha, \beta \in \Gamma$ only if $\alpha \curlywedge \beta \in \Gamma$.

Lemma 1. *If $x \subseteq Form^{\mathcal{L}}$ (where $Form^{\mathcal{L}}$ is a set of wff) is* **QCL**-*full, then*

(i) $\alpha \curlywedge \beta \in x$ iff $\alpha \in x$ and $\beta \in x$,
(ii) $x \vdash \alpha$ iff $\alpha \in x$;
(iii) $\mathbf{1} \in x$.

Proof. *(i)* The 'if' part is 17(3), and the converse follows from A7, A8 by 17(2).

(ii) Since by A6,A7 $\alpha \vdash \alpha$, sufficiency following from the definition of **QCL**-derivability. Necessity uses 17(2),(3).

(iii) By definition x is non-empty, so there exists $\beta \in x$. But by A7 $\beta \vdash 1 \curlywedge \beta$ so the result follows by 17(2) and 17(3). ■

QCL-full sets and **QCL**-derivability are linking with the following version of Lindenbaum's Lemma.

Theorem 1. *$\Gamma \vdash \alpha$ iff α belongs to every* **QCL**-*full extension of* Γ.

Proof. If $\Gamma \vdash \alpha$ then there exist $\beta_1, ..., \beta_n \in \Gamma$ such that $\beta_1 \curlywedge ... \curlywedge \beta_n \vdash \alpha$. If x is **QCL**-full and $\Gamma \subseteq x$, we have $\beta_1, ..., \beta_n \in x$. Applying 17(3) and then 17(2) we obtain $\alpha \in x$.

For the converse, suppose α is not **QCL**-derivable from Γ. Let $x = \{\beta : \Gamma \vdash \beta\}$. From $\alpha \vdash \alpha$ we have $\Gamma \subseteq x$ and by hypothesis $\alpha \notin x$. Our proof will therefore be completed if we can show that x is **QCL**-full. Now if $\beta \in x$ and $\beta \vdash \gamma$ then there exists $\beta_1, ..., \beta_n \in \Gamma$ such that $\beta_1 \curlywedge ... \curlywedge \beta_n \vdash \beta$, hence by R2 $\beta_1 \curlywedge ... \curlywedge \beta_n \vdash \gamma$ and so $\Gamma \vdash \gamma$ i.e. $\gamma \in x$. If on the other hand $\beta, \gamma \in x$ then there exist $\beta_1, ..., \beta_n, \gamma_1, ..., \gamma_m \in \Gamma$ such that $\beta_1 \curlywedge ... \curlywedge \beta_n \vdash \beta$ and $\gamma_1 \curlywedge ... \curlywedge \gamma_m \vdash \gamma$. Letting $\delta = (\beta_1 \curlywedge ... \curlywedge \beta_n) \curlywedge (\gamma_1 \curlywedge ... \curlywedge \gamma_m)$ we have by A7, A8 and R2 that $\delta \vdash \beta, \delta \vdash \gamma$ and so by R3, $\delta \curlywedge \delta \vdash \beta \curlywedge \gamma$. Thus, $\Gamma \vdash \beta \curlywedge \gamma$ and therefore $\beta \curlywedge \gamma \in x$.

This shows that x is closed under **QCL**-derivability and conjunction. Hence, since $\alpha \notin x$, α is not **QCL**-derivable from x, and x is **QCL**-paraconsistent. ■

Theorem 2. *If x is* **QCL**-*full and $\neg\alpha \notin x$, then there exists an* **QCL**-*full set y such that $\alpha \in y$, and for all β, either $\neg\beta \notin x$ or $\beta \notin y$.*

Proof. Let $y = \{\beta : \alpha \vdash \beta\}$. Since by A6,A7 $\alpha \vdash \alpha$ then $\alpha \in y$. Now let $\neg\beta \in x$. Then $\beta \notin y$, or else $\alpha \vdash \beta$, whence $\neg\beta \vdash \neg\alpha$ and so by 17(2), $\neg\alpha \in x$, contrary to the hypotheses. Hence, $\neg\beta \notin x$.By 7(iii) $\mathbf{1} \in y, \neg\mathbf{0} \in y$. According to what we just proved it follows that $\mathbf{0} \notin y$.

Proceeding in a similar manner to 8 we can show that y is closed under conjunction and **QCL**-derivability, and hence that 0 is not **QCL**-derivable from y i.e. y is **QCL**-paraconsistent, and therefore y is **QCL**-full as required. ■

Theorem 3. *If x is* **QCL**-*full,$\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta) \vdash \alpha$, then there exists an* **QCL**-*full set y such that $\alpha \in y$ and $\neg\alpha \notin y$, and for all β, either $\beta \notin x$ or $\neg\beta \notin y$.*

Proof. Let $y = \{\beta : \alpha \vdash \beta\}$. Since by A6,A7 $\alpha \vdash \alpha$ then $\alpha \in y$. From $\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta) \vdash \alpha$ by R1, A11 we get $\neg\alpha \vdash \alpha$ and thus $\neg\alpha \notin y$. Now let $\neg\beta \in y$. We have $\alpha \vdash \beta$, whence $\neg\beta \vdash \neg\alpha$ and so by 17(2), $\neg\alpha \in y$, contrary to the previous result. Hence, $\neg\beta \notin y$. If $\beta \in x$ then $\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta) \vdash \beta$ by R2 and since $\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta) \vdash \alpha$ we get $\neg\alpha \vdash \beta$ which contradicts to $\alpha \vdash \beta$ by hypothesis. Hence, $\beta \notin x$.

By 7(iii) $\mathbf{1} \in x$, $\mathbf{0} \notin x$ by A4,$\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta) \vdash \mathbf{1}$ by A6. According to what we just proved it follows that $\mathbf{0} \notin y$. Proceeding in a similar manner to 8 we can show that y is closed under conjunction and **QCL**-derivability, and hence that $\mathbf{0}$ is not **QCL**-derivable from y i.e. y is **QCL**-paraconsistent, and therefore y is **QCL**-full as required. ■

4. The Characterization of QCL

If Γ is a non-empty set of wffs, then we say Γ *implies* α in a realization Qub, $\Gamma \models_{Qub} \alpha$, iff there exist $\beta_1, ..., \beta_n \in \Gamma$ such that $(\beta_1 \curlywedge ... \curlywedge \beta_n) \curlywedge (\beta_n \curlywedge ... \curlywedge \beta_1) \models_{Qub} \alpha$.

Theorem 4 (Correctness Theorem for QLC)**.** $\Gamma \vdash \alpha$ *only if* $\Gamma \models_{Qub} \alpha$

Proof. The proof, by induction on **QCL**-derivability, proceeds by showing that the result holds for A1,..., A11 and is preserved by applications of R1, R2, R3.

A1. We have $\text{Prob}(\mathbf{NOT}(\mathbf{NOT}(\alpha))) = 1 - \text{Prob}(\mathbf{NOT}(\alpha)) = 1 - 1 + \text{Prob}(\alpha) = \text{Prob}(\alpha)$. This means that $\neg\neg\alpha \models_{Qub} \alpha$ and $\alpha \models_{Qub} \neg\neg\alpha$.

A2. We have $\text{Prob}(\alpha \curlywedge (\beta \curlywedge \gamma)) = \text{Prob}(\alpha)(\text{Prob}(\beta \curlywedge \gamma)) = \text{Prob}(\alpha)(\text{Prob}(\beta)\text{Prob}(\gamma)) = \text{Prob}(\alpha)(\text{Prob}(\beta))\text{Prob}(\gamma) = \text{Prob}((\alpha \curlywedge \beta) \curlywedge \gamma)$, hence $\alpha \curlywedge (\beta \curlywedge \gamma) \models_{Qub} (\alpha \curlywedge \beta) \curlywedge \gamma$ and $(\alpha \curlywedge \beta) \curlywedge \gamma \models_{Qub} \alpha \curlywedge (\beta \curlywedge \gamma) \models_{Qub} (\alpha \curlywedge \beta) \curlywedge \gamma$.

A3. For the left side we get $\text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\beta \curlyvee \gamma) = \text{Prob}(\alpha)(\text{Prob}(\beta) + \text{Prob}(\gamma) - \text{Prob}(\beta)\text{Prob}(\gamma))$. For the right side we obtain $\text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\beta) + \text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\gamma) - \text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\beta)\text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\gamma) = \text{Prob}(\alpha)(\text{Prob}(\beta) + \text{Prob}(\gamma) - \text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\beta)\text{Prob}(\gamma))$. Since $\text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\beta)\text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\gamma) \leq \text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\beta)\text{Prob}(\gamma)$ then we obtain $\alpha \curlywedge (\beta \curlyvee \gamma) \models_{Qub} (\alpha \curlywedge \beta) \curlyvee (\alpha \curlywedge \gamma)$.

A4. Since $\text{Prob}(\mathbf{0}) = 0$ then $\mathbf{0} \models_{Qub} \beta \curlywedge \beta$.

A5. Taking into account that $\text{Prob}(\mathbf{1}) = 1$ we get $\text{Prob}(\neg\mathbf{0}) = 1 - \text{Prob}(\mathbf{0}) = 1 - 0 = 1$ and thus $\neg\mathbf{0} \models_{Qub} \mathbf{1}$ and $\mathbf{1} \models_{Qub} \neg\mathbf{0}$.

A6. Here $\text{Prob}(\mathbf{1} \curlywedge \alpha) = \text{Prob}(\mathbf{1})\text{Prob}(\alpha) = \text{Prob}(\alpha)$ and $\alpha \models_{Qub} \mathbf{1} \curlywedge \alpha$ will take place.

A7-A8. $\text{Prob}(\alpha \curlywedge \beta) = \text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\beta) \leq \text{Prob}(\alpha)$ and analogously $\text{Prob}(\alpha \curlywedge \beta) = \text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\beta) \leq \text{Prob}(\beta)$. Thus $\alpha \curlywedge \beta \models_{Qub} \alpha$ and $\alpha \curlywedge \beta \models_{Qub} \beta$.

A9. Early it was noted that $\sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha \models \neg\alpha, \neg\alpha \models \sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha$, thus $\sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha \models_{Qub} \neg\alpha, \neg\alpha \models_{Qub} \sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha$.

A10. As stated above $\text{Prob}(\sqrt{\mathbf{NOT}}\mathbf{NOT}(\alpha)) = \text{Prob}(\mathbf{NOT}\sqrt{\mathbf{NOT}}(\alpha))$ hence $\sqrt{\neg}\neg\alpha \models_{Qub} \neg\sqrt{\neg}\alpha$ and $\neg\sqrt{\neg}\alpha \models_{Qub} \sqrt{\neg}\neg$.

A11. Since $\text{Prob}(\sqrt{\mathbf{NOT}}(\mathbf{AND}(\alpha, \beta))) = \frac{1}{2}$ then $\text{Prob}(\mathbf{NOT}\sqrt{\mathbf{NOT}}(\mathbf{AND}(\alpha, \beta))) = \frac{1}{2}$. Hence $\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta) \models_{Qub} \neg\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta)$ and

R1. Suppose that $\alpha \models_{Qub} \beta$. Then $1 - \text{Prob}(\beta) \leq 1 - \text{Prob}(\alpha)$ and $\text{Prob}(\mathbf{NOT}(\beta)) \leq \text{Prob}(\mathbf{NOT}(\alpha))$ and thus $\neg\beta \models_{Qub} \neg\alpha$.

R2. Let $\alpha \models_{Qub} \beta$ and $\beta \models_{Qub} \gamma$. Then because of $\text{Prob}(\alpha) \leq \text{Prob}(\beta)$ and $\text{Prob}(\beta) \leq \text{Prob}(\gamma)$ we obtain $\text{Prob}(\alpha) \leq \text{Prob}(\gamma)$. Thus $\alpha \models_{Qub} \gamma$.

R3. Suppose $\alpha \models_{Qub} \beta$ and $\gamma \models_{Qub} \delta$. This gives us $\text{Prob}(\alpha) \leq \text{Prob}(\beta)$ and $\text{Prob}(\gamma) \leq \text{Prob}(\delta)$. But then we have $\text{Prob}(\alpha)\text{Prob}(\gamma) \leq \text{Prob}(\beta)\text{Prob}(\delta)$ and $\alpha \curlywedge \gamma \models_{Qub} \beta \curlywedge \delta$. ■

A non-empty subset F of n-qubit systems is said to be a *filter* if the folowing conditions are fulfilled:

(1) $|\alpha\rangle$,$|\beta\rangle \in F$ only if $|\alpha \curlywedge \beta\rangle \in F$;

(2) if $|\alpha\rangle \in F, \alpha \models \beta$ then $|\beta\rangle$ belongs to F.

A filter F is a *proper filter* if $|\mathbf{0}\rangle$ does not belong to F. Denoting the set $\{F : F$ is a proper filter and $|\alpha\rangle \in F\}$ as $F_{|\alpha\rangle}$ we define the operations on filters in the following manner:

Definition 18. $F_{|\alpha\rangle} \curlywedge F_{|\beta\rangle} = F_{|\alpha\curlywedge\beta\rangle}$
$F_{|\alpha\rangle} \curlyvee F_{|\beta\rangle} = F_{|\alpha\curlyvee\beta\rangle}$
$\neg F_{|\alpha\rangle} = F_{|\neg\alpha\rangle}$
$\sqrt{\neg} F_{|\alpha\rangle} = F_{|\sqrt{\neg}\alpha\rangle}$
$F_{|\alpha\rangle} \leq F_{|\beta\rangle}$ iff $\alpha \models \beta$

Now we will introduce an associated quantum computational realization.

Definition 19. An associated quantum computational realization is a function Qub* assigning to any $|\alpha\rangle$ a set of proper filters to which $|\alpha\rangle$ belongs

$$Qub^* : Form^{\mathcal{L}} \to \bigcup_{\alpha \in Form^{\mathcal{L}}} F_{|\alpha\rangle}.$$

As the next step we redefine the notions of *truth*, *logical truth*, *consequence* and l*ogical consequence.*

Definition 20. A sentence α is true in a realization Qub^* (indicated by $\models_{Qub^*} \alpha$) iff $Qub^*(\ \alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in Form^{\mathcal{L}}} F_{|\alpha\rangle}$.

Definition 21. α is a logical truth (indicated by $\models^* \alpha$) iff for any realization Qub^*, $\models_{Qub^*} \alpha$.

Definition 22. β is a consequence of α in the realization Qub^* (indicated by $\alpha \models_{Qub^*} \beta$) iff $Qub^*(\alpha) \leq Qub^*(\beta)$.

Definition 23. β is a logical consequence of α (indicaterd by $\alpha \models^* \beta$) iff for any Qub^* we have $\alpha \models_{Qub^*} \beta$.

As above, if Γ is a non-empty set of wffs, then we say Γ *implies* α in a realization Qub^* (indicated by $\Gamma \models_{Qub^*} \alpha$), iff there exist $\beta_1, ..., \beta_n \in \Gamma$ such that $(\beta_1 \curlywedge ... \curlywedge \beta_n) \curlywedge (\beta_n \curlywedge ... \curlywedge \beta_1) \models_{Qub^*} \alpha$.

Theorem 5 (Paraconsistency Theorem for QLC)**.** $\Gamma \vdash \alpha$ *only if* $\Gamma \models_{Qub^*} \alpha$.

Proof. The proof, by induction on **QCL**-derivability, proceeds by showing that the result holds for A1,..., A11 and is preserved by applications of R1, R2, R3.

A1. We have $\neg F_{|\alpha\rangle} = F_{|\neg\alpha\rangle}$ and then $\neg\neg F_{|\alpha\rangle} = F_{|\neg\neg\alpha\rangle}$. This means that $\neg\neg\alpha \models_{Qub^*} \alpha$ and $\alpha \models_{Qub^*} \neg\neg\alpha$.

A2. We have $F_{|\alpha \curlywedge (\beta \curlywedge \gamma)\rangle} = F_{||\alpha \curlywedge \beta) \curlywedge \gamma\rangle}$, hence $\alpha \curlywedge (\beta \curlywedge \gamma) \models_{Qub*} (\alpha \curlywedge \beta) \curlywedge \gamma$ and $(\alpha \curlywedge \beta) \curlywedge \gamma \models_{Qub^*} \alpha \curlywedge (\beta \curlywedge \gamma)$.

A3. For the left side we get Prob(α) Prob$(\beta \curlyvee \gamma)$ = Prob(α)(Prob(β)+ Prob$(\gamma)-$ Prob(β)Prob(γ)). For the right side we obtain Prob(α)Prob(β)+ Prob(α)Prob$(\gamma)-$ Prob(α)Prob(β)Prob(α)Prob(γ) = Prob(α)(Prob(β)+ Prob$(\gamma)-$ Prob(α)Prob(β)Prob(γ)). Since Prob(α)Prob(β)Prob(α)Prob$(\gamma) \leq$ Prob(α)Prob(β)Prob(γ)) then we obtain $\alpha \curlywedge (\beta \curlyvee \gamma) \leq (\alpha \curlywedge \beta) \curlyvee (\alpha \curlywedge \gamma)$ and thus $F_{|\alpha \curlywedge (\beta \curlyvee \gamma)\rangle} \leq F_{|(\alpha \curlywedge \beta) \curlyvee (\alpha \curlywedge \gamma)\rangle}$ whence $\alpha \curlywedge (\beta \curlyvee \gamma) \models_{Qub*} (\alpha \curlywedge \beta) \curlyvee (\alpha \curlywedge \gamma)$.

A4. Since $|\mathbf{0}\rangle \leq |\beta \curlywedge \beta\rangle$ then $F_{|\mathbf{0}\rangle} \leq F_{|\beta \curlywedge \beta\rangle}$ and $\mathbf{0} \models_{Qub*} \beta \curlywedge \beta$.

A5. Taking into account that $|\mathbf{1}\rangle = |\neg\mathbf{0}\rangle$ we get $F_{|\mathbf{1}\rangle} = F_{|\neg\mathbf{0}\rangle}$ and thus $\neg\mathbf{0} \models_{Qub*} \mathbf{1}$ and $\mathbf{1} \models_{Qub*} \neg\mathbf{0}$.

A6. Here Prob$(\mathbf{1} \curlywedge \alpha)$ = Prob$(\mathbf{1})$Prob(α) = Prob(α) and thus $|\alpha\rangle \leq |\mathbf{1} \curlywedge \alpha\rangle$ and $F_{|\alpha\rangle} \leq F_{|\mathbf{1} \curlywedge \alpha\rangle}$ whence $\alpha \models_{Qub*} \mathbf{1} \curlywedge \alpha$ will take place.

A7-A8. Prob$(\alpha \curlywedge \beta)$ = Prob(α)Prob$(\beta) \leq$ Prob(α) and hence $|\alpha \curlywedge \beta\rangle \leq |\alpha\rangle$. Analogously Prob$(\alpha \curlywedge \beta)$ = Prob(α)Prob $(\beta) \leq$ Prob(β) and $|\alpha \curlywedge \beta\rangle \leq |\beta\rangle$. Then we have $F_{|\alpha \curlywedge \beta\rangle} \leq F_{|\alpha\rangle}$ and $F_{|\alpha \curlywedge \beta\rangle} \leq F_{|\beta\rangle}$. Thus $\alpha \curlywedge \beta \models_{Qub*} \alpha$ and $\alpha \curlywedge \beta \models_{Qub*} \beta$.

A9. Early it was noted that $\sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha \models \neg\alpha, \neg\alpha \models \sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha$, thus $|\sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha\rangle \leq |\neg\alpha\rangle, |\neg\alpha\rangle \leq |\sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha\rangle$, and $F_{||\sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha\rangle} \leq F_{|\neg\alpha\rangle}, F_{|\neg\alpha\rangle} \leq F_{||\sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha\rangle}$ from which we get $\sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha \models_{Qub*} \neg\alpha, \neg\alpha \models_{Qub*} \sqrt{\neg}\sqrt{\neg}\alpha$.

A10. As stated above $|\sqrt{\neg}\neg\alpha\rangle = |\neg\sqrt{\neg}\alpha\rangle$ and thus $F_{|\sqrt{\neg}\neg\alpha\rangle} \leq F_{|\neg\sqrt{\neg}\alpha\rangle}$. Hence $\sqrt{\neg}\neg\alpha \models_{Qub*} \neg\sqrt{\neg}\alpha$ and $\neg\sqrt{\neg}\alpha \models_{Qub*} \sqrt{\neg}\neg$.

A11. Since Prob$(\sqrt{\neg}(\mathbf{AND}(\alpha, \beta))) = \frac{1}{2}$ then Prob$(\mathbf{NOT}\sqrt{\mathbf{NOT}}(\mathbf{AND}(\alpha, \beta))) = \frac{1}{2}$. Hence $|\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta)\rangle = |\neg\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta)\rangle$, $F_{||\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta)\rangle} = F_{||\neg\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta)\rangle}$ and finally we get $\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta) \models_{Qub*} \neg\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta)$ and $\neg\sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta) \models_{Qub*} \sqrt{\neg}(\alpha \curlywedge \beta)$.

R1. Suppose that $\alpha \models_{Qub} \beta$.Then $1-$ Prob$(\beta) \leq 1-$ Prob(α), Prob$(\mathbf{NOT}(\beta)) \leq$ Prob$(\mathbf{NOT}(\alpha))$ and $|\neg\beta\rangle \leq |\neg\alpha\rangle$. Thus $F_{|\neg\beta\rangle} \leq F_{|\neg\alpha\rangle}$ and $\neg\beta \models_{Qub*} \neg\alpha$.

R2. Let $\alpha \models_{Qub} \beta$ and $\beta \models_{Qub} \gamma$. Then because of Prob$(\alpha) \leq$ Prob(β) and Prob$(\beta) \leq$ Prob(γ) we obtain Prob$(\alpha) \leq$ Prob(γ). Thus $|\alpha\rangle \leq |\gamma\rangle, F_{|\alpha\rangle} \leq F_{|\gamma\rangle}$ and it implies $\alpha \models_{Qub*} \gamma$.

R3. Suppose $\alpha \models_{Qub} \beta$ and $\gamma \models_{Qub} \delta$. This gives us Prob$(\alpha) \leq$ Prob(β) and Prob$(\gamma) \leq$ Prob(δ). But then we have Prob(α)Prob$(\gamma) \leq$ Prob(β)Prob(δ)

that gives us $|\alpha \curlywedge \gamma\rangle \leq |\beta \curlywedge \delta\rangle$ and $F_{|\alpha\curlywedge\gamma\rangle} \leq F_{|\beta\curlywedge\delta\rangle}$ respectively. Finally, we get $\alpha \curlywedge \gamma \models_{Qub*} \beta \curlywedge \delta$. ■

Definition 24. If **L** is a quantum computational logic then a canonical realization of **L** is

$Qub^c : Form^{\mathcal{L}} \to X_{\mathbf{L}}$, such that

$Qub^c(\alpha) = \{x \in X_{\mathbf{L}} : \alpha \in x\}$,

where $X_{\mathbf{L}} = \{x \subseteq Form^{\mathcal{L}} : x$ is **QCL**- *full set of wffs*$\}$.

Lemma 2. *Qub^c is indeed a quantum computational realization.*

Proof. Let $x \in X_{\mathbf{L}}$. Since x is **QCL**-full then x is **QCL**-paraconsistent and by theorem 8 **0** does not belong to x. Being **QCL**-full x is closed under $\curlywedge$ and **QCL**-derivability. Since **QCL**-derivability means that if $\alpha \in \Gamma$ and $\alpha \vdash \beta$ then $\beta \in \Gamma$ and taking into account that $\alpha \vdash \beta$ according to correctness theorem only if $\alpha \models_{Qub} \beta$, we conclude that $\alpha \vdash \beta$ only if $|\alpha\rangle \preceq |\beta\rangle$ and thus β belongs to x only if $|\beta\rangle$ belongs to respective filter. As to closeness under $\curlywedge$ then by lemma 7 we have $\alpha \curlywedge \beta \in x$ iff $\alpha \in x$ and $\beta \in x$, which similarly lead us to $|\alpha\rangle,|\beta\rangle \in G$ only if $|\alpha \curlywedge \beta\rangle \in G$ (where G is a filter). So, finally we introduce operations on $Qub^c[Form^{\mathcal{L}}]$ (denoting $Qub^c(\alpha) = \{x \in X_{\mathbf{L}} : \alpha \in x\}$ as x_α) in the following way:

$x_\alpha \curlywedge x_\beta = x_{\alpha\curlywedge\beta}$

$x_\alpha \curlyvee x_\beta = x_{\alpha\curlyvee\beta}$

$\neg x_\alpha = x_{\neg\alpha}$

$\sqrt{\neg} x_\alpha = x_{\sqrt{\neg}\alpha}$

$x_\alpha \leq x_\beta$ iff $\alpha \vdash \beta$. ■

Theorem 6 (Completeness Theorem for QLC)**.** $\Gamma \vdash \alpha$ *iff* $\Gamma \models_{Qub^c} \alpha$.

Proof. If $\Gamma \vdash \alpha$ then there exist $\beta_1, ..., \beta_n \in \Gamma$ such that $(\beta_1 \curlywedge ... \curlywedge \beta_n) \curlywedge (\beta_n \curlywedge ... \curlywedge \beta_1) \models_{Qub^*} \alpha$. If x is **QCL**-full and $\Gamma \subseteq x$, we have $\beta_1, ..., \beta_n \in x$. Applying 17(3) and then 17(2) we obtain $\alpha \in x$ and hence $x \in x_\alpha$. Conversely, suppose α is not **QCL**-derivable from Γ. Then by 8 there exists $x \in X_{\mathbf{L}}$, such that $\Gamma \subseteq x$ and $\alpha \notin x$. For all $\beta \in \Gamma$ we have $\beta \in x$ and hence $x \in x_\beta$, but not $\alpha \in x$. Thus $\Gamma \not\models_{Qub^c} \alpha$. ■

References

Cattaneo et al., 2003 – Cattaneo, G., Dalla Chiara, M.L., Giuntini, R. “An Unsharp Quantum Logic from Quantum Computation”, in: *Alternative Logics. Do Sciences Need Them?*, ed. by P. Weingartner, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 2003, pp. 323–338.

Cattaneo et al., 2004 – Cattaneo, G., Dalla Chiara, M.L., Giuntini, R. and Leporini, R. "An unsharp logic from quantum computation", *International Journal of Theoretical Physics*, 2004, Vol. 43, Is. 7–8, pp. 1803–1817.

Dalla Chiara et al., 2004 – Dalla Chiara, M.L., Giuntini, R., Greechie, R. *Reasoning in Quantum Theory. Sharp and Unsharp Quantum Logic*, 2004, Vol. 3, No. 1–2, pp. 240–266.

Goldblatt, 1974 – Goldblatt, R. "Semantic Analysis of Orthologic", *Journal of Philosophical Logic*, 1974, Vol. 3, No. 1–2, pp. 19–35.

Аксиоматизация логики квантовых вычислений

Владимир Леонидович Васюков
Институт философии РАН
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: vasyukov4@gmail.com

Аннотация: Одной из логических рекомендаций, касающихся квантовых вычислений, является идея использовать квантовый теоретический формализм для представления параллельных рассуждений. С этой целью квантовое вычисление представляется с помощью соответствующих унитарных операторов, предполагающих аргументы и значения в конкретных множествах систем кубитов. Выделив некоторые важные унитарные операторы, играющие особую роль в квантовых вычислениях (логические вентили, или quregisters), мы получаем возможность построить язык квантовой вычислительной логики (QCL) (ср. [Cattaneo et al., 2003; Cattaneo et al., 2004; Dalla Chiara et al., 2004]). Основным понятием семантики этого языка является понятие квантовой вычислительной реализации, когда значением, ассоциированным с любым предложением, является логический вентиль. В отличие от семантики стандартной квантовой логики, QCL-конъюнкция и QCL-дизъюнкция не соответствуют решеточным операциям, так как они, как правило, не являются идемпотентными. Более того, в QCL нарушается принцип слабой дистрибутивности, и нарушаются как принцип исключенного третьего, так и принцип непротиворечия. Наконец, аксиоматизируемость QCL все еще остается открытой проблемой. В статье предлагается аксиоматизация QCL, трактующая ее как разновидность так называемой бинарной логики Гольдблатта. Доказаны некоторые металогические теоремы (паранепротиворечивость и полнота).

Ключевые слова: квантовое вычисление, квантовая вычислительная реализация, бинарная логика, паранепротиворечивость

Информация для авторов

• Журнал «Логические исследования» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики см. на сайте журнала `http://logicalinvestigations.ru`)

• Все статьи, планируемые к публикации в журнале «Логические исследования», проходят процедуру анонимного рецензирования.

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате $\LaTeX\,2_\varepsilon$

• При подготовке рукописи в $\LaTeX\,2_\varepsilon$ необходимо использовать стилевой класс `LIarticle.cls` и шаблон `LI_template.tex` (если рукопись на русском языке) или `LI_template_eng.tex` (если рукопись на английском языке), которые размещены в правилах предоставления рукописей на сайте `http://logicalinvestigations.ru`. Здесь же размещены подробные рекомендации по подготовке рукописи.

• Объем рукописи не должен превышать 25 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, списки литературы, аннотации (на русском и английском языках).

Статьи следует направлять в электронном виде в редакцию через сайт
`http://logicalinvestigations.ru`

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: http://logicalinvestigations.ru)

• All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process.

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the $\LaTeX\,2_\varepsilon$ format.

• While typesetting a paper, the class file `LIarticle.cls` and the template `LI_template_eng.tex` should be used; both files can be accessed at http://logicalinvestigations.ru. Here you can also find detailed guidelines for preparing your paper.

• Papers should not exceed 25 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

Submissions should be sent in electronic form through the website:
http://logicalinvestigations.ru

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2023. Том 29. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: *ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.*

Главный редактор: *В.И. Шалак*

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технический редактор: *Е.А. Морозова*

Корректор: *Е.М. Пушкина*

Художники: *Н.Н. Попов*, *С.Ю. Растегина*

Подписано в печать с оригинал-макета 16.10.2023.
Формат 70 x 100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Для набора греческого текста использован пакет Teubner.
Усл. печ. л. 11,92. Уч.-изд. л. 8,23. Тираж 1 000 экз. Заказ № 21.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Разработка LaTeX-класса стилевого оформления оригинал-макета: *А.Е. Коньков*

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
`http://logicalinvestigations.ru`