Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 30. Number 2

Moscow
2024

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 30. Номер 2

Москва
2024

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2024. Volume 30. Number 2

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the catalogue of Russian Post is ПН145

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com
Website: https://logicalinvestigations.ru

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2024. Том 30. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «09.00.00 – философские науки»)

Подписной индекс каталога Почты России — ПН145

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

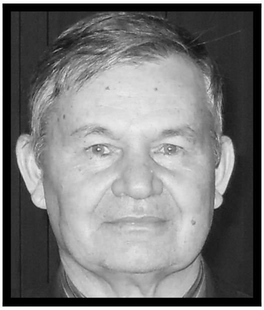
Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 426

Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`

Сайт: `https://logicalinvestigations.ru`

TABLE OF CONTENTS

В НОМЕРЕ



Юрий Васильевич
ИВЛЕВ
(21.12.1936–07.07.2024)

7 июля 2024 г. ушел из жизни выдающийся отечественный ученый-логик, заслуженный профессор МГУ им. М.В. Ломоносова, доктор философских наук, профессор Юрий Васильевич Ивлев.

Ю.В. Ивлев родился 21 декабря 1936 г. в селе Верхне-Спасское Тамбовской области. После окончания железнодорожного техникума в течение ряда лет работал в системе Министерства путей сообщения СССР. В 1965 г. закончил философский факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, после чего преподавал логику в высших учебных заведениях МВД СССР, в том числе в Академии МВД. В 1972 г. Юрий Васильевич защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата философских наук по теме «Логика норм», в 1986 г. — докторскую диссертацию по теме «Содержательная семантика модальной логики».

С 1978 г. работал на кафедре логики философского факультета МГУ в должности доцента, с 1987 г. — профессора, с 1982 по 2002 г. являлся заведующим кафедрой логики. Ю.В. Ивлев был удостоен Ломоносовской премии за педагогическую деятельность, а также почетного звания «Заслуженный работник высшей школы РФ».

Ю.В. Ивлев является автором ряда фундаментальных учебников по логике и теории аргументации, разработал и читал общие курсы по логике для студентов философского и юридического факультетов, а также оригинальные спецкурсы, посвященные актуальным проблемам модальной логики.

Ю.В. Ивлев является основателем принципиально новой стратегии построения семантик модальных систем, при которой смысл фактических модальностей истолковывается при помощи так называемых квазифункций (квазиматриц), а смысл логических модальностей — при помощи конечных (относительно) ограниченных множеств описаний состояний. Ряд выдвинутых Ю.В. Ивлевым идей получил безусловное признание мирового научного сообщества и является одной из «точек роста» современной философской логики.

Глубокий профессионализм, исключительная личная порядочность и доброжелательность завоевали Ю.В. Ивлеву искреннюю любовь и уважение в среде коллег и учеников.

Друзья, коллеги и ученики Ю.В. Ивлева сохранят долгую и добрую память о нем.

Коллеги и ученики

Лилия Алексеевна
ЧАГРОВА
(12.07.1956–05.09.2024)

5 сентября 2024 г. скоропостижно ушла из жизни Лилия Алексеевна Чагрова, кандидат физико-математических наук, доцент, известная своими научными результатами в области математической логики.

Лилия Алексеевна родилась в семье известного геофизика А.В. Золотова, сначала жила в Башкирии, в городе Октябрьском, а затем вместе с семьей переехала в город Калинин (ныне Тверь). В школе она оказалась в одном классе с Александром Васильевичем Чагровым, затем училась с ним вместе в Калининском государственном университете и вышла за него замуж. Ее настоящее имя — Лидия. Но друзья знали ее как Лилю, а студенты и коллеги — как Лилию Алексеевну.

С детства Лилия Алексеевна мечтала заниматься балетом, но это не сложилось. Тем не менее однажды ей довелось участвовать в съемках фильма «Фуэте», где главную роль сыграла известная балерина Екатерина Максимова. Лилия Алексеевна появляется с ней в кадре на 15 секунд в конце 17-й минуты фильма.

Говоря о Лилии Алексеевне, трудно не сказать об Александре Васильевиче Чагрове, поскольку для друзей они были как единое целое, Лиля-и-Саша, но никак не порознь. Они оба были безмерно талантливыми, добрыми, открытыми, щедрыми, лучистыми людьми. В КГУ (ныне ТвГУ) они учились у А.В. Гладкого и М.И. Кановича. Окончив КГУ, остались там работать, прочитали много интересных курсов по логике и теории алгоритмов, и в расцвете их творческой жизни студенты были «очагрованы» логикой.

В 1989 г. Лилия Алексеевна защитила диссертацию «О проблеме определимости пропозициональных формул интуиционистской логики формулами классической логики первого порядка». Основной результат диссертации опубликован в 1991 г. в “Journal of Symbolic Logic” и известен сейчас как теорема Чагровой. Лилия Алексеевна доказала алгоритмическую неразрешимость ключевых проблем теории соответствия, возникшей в 1970-е гг. Фактически ее результаты намного глубже; они изложены для широкого круга логиков в их совместной с Александром Васильевичем статье, вышедшей в «Логических исследованиях» в 2007 г. Лилия Алексеевна выступала с докладами в Болгарии, Японии, Нидерландах, Франции и является автором более двадцати научных публикаций в области модальной и интуиционистской логики.

Светлая память о Лилии Алексеевне останется в наших сердцах.

И. Горбунов, М. Захарьящев, О. Захарьящева, А. Муравицкий, С. Одинцов, В. Рыбаков, М. Рыбаков, С. Соловьёв, М. Спиваковский, А. Циткин, В. Шехтман

Логические исследования
2024. Т. 30. № 2. С. 11–22
УДК 16

Logical Investigations
2024, Vol. 30, No. 2, pp. 11–22
DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-11-22

Символическая логика
Symbolic Logic

В.И. Маркин

Аналитико-табличное исчисление, адекватное логике суждений существования

Владимир Ильич Маркин
МГУ им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: markin@philos.msu.ru

Аннотация: В [Маркин, 2021] была построена логическая теория, предназначенная для анализа рассуждений, посылками и заключениями которых являются суждения существования и их булевы комбинации. В ее языке содержится неопределенно-местная константа существования, простые формулы образуются сочленением этой константы с произвольной конечной последовательностью общих терминов — положительных (простых) и отрицательных, сложные формулы образуются с помощью пропозициональных связок. Для этого языка были сформулированы естественная семантика и адекватное ей аксиоматическое исчисление. В данной работе предлагается аналитико-табличный вариант исчисления суждений существования: постулируются правила редукции для формул с константой существования и их отрицаний, вводится понятие аналитической таблицы как последовательности конфигураций, формулируются критерии замкнутости таблицы. Формула A доказуема в данном исчислении, если и только если существует замкнутая аналитическая таблица, первой конфигурацией которой является семейство $\{\{\neg A\}\}$. Доказываются метатеоремы о корректности и полноте данного исчисления относительно семантически построенной логики суждений существования. Предлагается процедура, позволяющая эффективно решать вопрос о доказуемости или недоказуемости произвольной формулы A. Особенность этой процедуры состоит в следующем. Выделяется список $\mathcal{T}$ положительных терминов, содержащий все такие термины P, что P или P' (отрицательный термин, противоречащий P) входят в состав A. В состав последней конфигурации входят только множества, элементами которых являются атомарные формулы и их отрицания, причем последовательность терминов после константы существования содержит P или P' для любого P из $\mathcal{T}$. Доказывается метатеорема о разрешимости аналитико-табличного исчисления суждений существования.

Ключевые слова: суждения существования, атрибутивные суждения, силлогистика, логическое исчисление, семантика, погружающая операция

Для цитирования: *Маркин В.И.* Аналитико-табличное исчисление, адекватное логике суждений существования // Логические исследования / Logical Investigations. 2024. Т. 30. № 2. С. 11–22. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-11-22

1. Введение

В [Маркин, 2021] была построена логическая теория, предназначенная для анализа рассуждений, посылками и заключениями которых являются суждения существования и их булевы комбинации. Под *суждением существования* понимается простое суждение, логическим сказуемым которого является термин «существует», рассматриваемый как знак особой онтологической характеристики индивидов. Логическим подлежащим в этих суждениях является k-компонентная последовательность ($k \geq 1$) общих терминов — положительных или отрицательных. Например, в качестве субъектов этих суждений могут выступать следующие языковые конструкции: «умный (человек)» (положительный общий термин), «необщительный» (отрицательный общий термин), «умный, необщительный, добрый» (тройка общих терминов).

Логика суждений существования, по аналогии с современными системами силлогистики, строится на базе классической логики высказываний. В *алфавите* ее языка содержатся: бесконечный список простых (положительных) общих терминов (будем использовать для них метапеременные S, P, M, $S_1, \ldots$), символ терминного отрицания ($'$), предназначенный для образования отрицательных терминов, неопределенно-местная константа существования (Υ), а также пропозициональные связки и скобки.

Общими терминами являются: (1) произвольный положительный общий термин, (2) выражение вида S', где S — положительный общий термин. S и S' будем называть *противоречащими терминами.* В качестве метапеременных по любым общим терминам (как положительным, так и отрицательным) используются символы X, Z, $X_1, \ldots$

Атомарными формулами языка являются выражения вида $\Upsilon X_1 X_2 \ldots X_k$ ($k \geq 1$), где $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — общие термины. Формула $\Upsilon X_1 X_2 \ldots X_k$ фиксирует логическую форму суждения существования «$X_1 X_2 \ldots X_k$ существуют». Например, логической формой суждения «Умный, необщительный, добрый (человек) существует» будет формула $\Upsilon S P' M$.

Сложные формулы образуются из других формул с помощью пропозициональных связок.

Исходной семантической конструкцией при построении логики суждений существования является *модель* – пара $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, где $\mathbf{D} \neq \varnothing$, а $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$ для любого положительного общего термина S. Определяется функция ψ, сопоставляющая значение каждому общему термину (включая отрицательные) в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$: $\psi(S) = \varphi(S), \psi(S') = \mathbf{D} \setminus \varphi(S)$. Вводится понятие *$\mathcal{V}$-значимости* формулы A в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ — определяется предикат значимости $\mathcal{V}(A, \mathbf{D}, \varphi)$. Условия значимости атомарных формул задаются следующим образом:

$$\mathcal{V}(\Upsilon X_1 X_2 ... X_k, \mathbf{D}, \varphi), \text{ е.т.е. } \psi(X_1) \cap \psi(X_2) \cap ... \cap \psi(X_k) \neq \varnothing.$$

Условия значимости формул, образованных с помощью пропозициональных связок, в точности те же, что и в классической логике высказываний.

Формула A называется *значимой* в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, е.т.е. $\mathcal{V}(A, \mathbf{D}, \varphi)$. Формула A *общезначима*, е.т.е. A значима в каждой модели. Из формул $A_1, A_2, ..., A_n$ *логически следует* формула B, е.т.е. в каждой модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, в которой значимы формулы $A_1, A_2, ..., A_n$, формула B также является значимой.

Пара $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ является *моделью множества* формул Δ, е.т.е. $\mathcal{V}(C, \mathbf{D}, \varphi)$ для любой формулы C из Δ. Будем говорить, что множество формул Δ *имеет модель*, е.т.е. существует $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, которая является моделью Δ.

В [Маркин, 2021] было доказано, что класс общезначимых формул аксиоматизирует исчисление $\mathbf{C\Upsilon}$, которое содержит схемы аксиом классического исчисления высказываний и шесть дополнительных схем аксиом:

Υ1. $\Upsilon uv \supset (\Upsilon uM' \vee \Upsilon Mv)$,
Υ2. $\neg \Upsilon SS'$,
Υ3. $\Upsilon uXZv \supset \Upsilon uZXv$,
Υ4. $\Upsilon uX \supset \Upsilon uXX$,
Υ5. $\Upsilon wX \supset \Upsilon w$,
Υ6. $\Upsilon S \vee \Upsilon S'$,

где u и v — пустые или конечные последовательности общих терминов (в Υ1 по крайней мере одна из них непуста), w — непустая конечная последовательность общих терминов, S и M — положительные общие термины, X и Z — произвольные общие термины.

Единственное правило вывода в исчислении $\mathbf{C\Upsilon}$ — *modus ponens*. Понятия доказательства и теоремы обычные.

В [Маркин, 2022] был предложен аналитико-табличный вариант исчисления суждений существования и сформулирована процедура проверки формул на общезначимость. Цель данной статьи — показать, что аналитико-табличное исчисление (несколько модифицированное по сравнению с [Там же]) является адекватной формализацией логики суждений существования. Будут доказаны метатеоремы о корректности, полноте и разрешимости этого исчисления.

2. Аналитико-табличное исчисление

Дадим сначала строгую формулировку аналитико-табличного исчисления суждений существования.

Конфигурацией называется семейство непустых множеств формул языка.

Аналитической таблицей называется последовательность конфигураций, в которой каждая последующая конфигурация получается из непосредственно предыдущей заменой некоторого множества формул по одному из правил вывода.

В качестве правил вывода постулируются стандартные (пропозициональные) правила редукции для формул видов $(A \wedge B)$, $\neg(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $\neg(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $\neg(A \supset B)$, $\neg\neg A$, а также дополнительные правила:

$$\langle \Upsilon i \rangle \frac{\Gamma}{\Gamma \cup \{\Upsilon M\} | \Gamma \cup \{\Upsilon M'\}}$$

$$\langle \Upsilon \rangle \frac{\Gamma \cup \{\Upsilon u\}}{\Gamma \cup \{\Upsilon uM\} | \Gamma \cup \{\Upsilon uM'\}} \qquad \langle \neg\Upsilon \rangle \frac{\Gamma \cup \{\neg\Upsilon u\}}{\Gamma \cup \{\neg\Upsilon uM,\ \neg\Upsilon uM'\}}$$

$$\langle \Upsilon \rangle \frac{\Gamma \cup \{\Upsilon u\}}{\Gamma \cup \{\Upsilon [u]\}} \qquad \langle \neg\Upsilon n \rangle \frac{\Gamma \cup \{\neg\Upsilon u\}}{\Gamma \cup \{\neg\Upsilon [u]\}}$$

где u — произвольная последовательность общих терминов, $[u]$ — последовательность, содержащая без повторений все термины из u, причем (1) каждый положительный термин в ней предшествует каждому отрицательному, (2) положительный термин S предшествует в ней положительному термину P, е.т.е. S предшествует P в алфавите языка, (3) отрицательный термин S' предшествует в ней отрицательному термину P', е.т.е. S предшествует P в алфавите языка.

Множество формул замкнуто, е.т.е. оно содержит формулы вида C и $\neg C$ или его элементом является формула Υu, причем в состав u входит как некий термин S, так и противоречащий ему термин S'.

Конфигурация замкнута, е.т.е. все множества формул в ее составе замкнуты.

Аналитическая таблица замкнута, е.т.е. ее последняя конфигурация замкнута.

Формула A *доказуема* в данном исчислении, е.т.е. существует замкнутая аналитическая таблица, первой конфигурацией которой является семейство $\{\{\neg A\}\}$.

3. Корректность аналитико-табличного исчисления

Покажем сначала, что построенное исчисление корректно относительно логики суждений существования, т.е. каждая доказуемая в нем формула общезначима. Для этого предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Если некоторая конфигурация в аналитической таблице содержит множество Δ, имеющее модель, то следующая конфигурация в этой таблице также будет содержать множество, имеющее модель.*

Доказательство. Допустим, что конфигурация на шаге n построения аналитической таблицы содержит множество Δ, имеющее модель. Если на шаге $n+1$ множество Δ не заменялось (а заменялось какое-то иное множество формул), то конфигурация на этом шаге будет снова содержать имеющее модель множество, а именно Δ. Рассмотрим далее случай, когда на шаге $n+1$ произошла замена множества Δ. Эта замена могла быть произведена только по одному из правил вывода.

Из пропозициональных правил рассмотрим в качестве примера правила $\langle\wedge\rangle$ и $\langle\neg\wedge\rangle$ (для остальных правил такого рода обоснование проводится сходным образом).

Правило $\langle\wedge\rangle$. $\Delta = \Gamma \cup \{A \wedge B\}$. Поскольку Δ имеет модель, то формула $A \wedge B$ в этой модели значима. В силу семантики конъюнкции, обе формулы — A и B — также значимы в этой модели. Следовательно, множество $\Delta = \Gamma \cup \{A, B\}$ имеет модель, причем ту же самую, что и Δ .

Правило $\langle\neg\wedge\rangle$. $\Delta = \Gamma \cup \{\neg(A \wedge B)\}$. Поскольку Δ имеет модель, то формула $\neg(A \wedge B)$ в этой модели значима. Следовательно, формула $A \wedge B$ не значима в данной модели. Последнее, в силу семантики конъюнкции, означает, что хотя бы одна из формул — A или B — не значима в данной модели. Отсюда, в силу семантики пропозиционального отрицания, вытекает, что по крайней мере одна из формул — $\neg A$ или $\neg B$ — значима в этой модели. Таким образом, какое-то из множеств следующей конфигурации — $\Gamma \cup \{\neg A\}$ или $\Gamma \cup \{\neg B\}$ — имеет модель.

Правило $\langle\Upsilon i\rangle$. $\Delta = \Gamma$. Хотя бы одно из множеств — $\Gamma \cup \{\Upsilon M\}$ или $\Gamma \cup \{\Upsilon M'\}$ — имеет модель $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$, причем ту же самую, что и множество Γ. Это обусловлено тем, что $\mathbf{D} \neq \varnothing$, а значит, $\psi(M) \neq \varnothing$ или $\psi(M') \neq \varnothing$, поэтому по крайней мере одна из формул — ΥM или $\Upsilon M'$ — значима в данной модели.

Правило $\langle\Upsilon\rangle$. $\Delta = \Gamma \cup \{\Upsilon u\}$. Пусть $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$ является моделью для этого множества формул. Следовательно, формула Υu значима в $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$. Пусть u есть последовательность общих терминов $X_1X_2...X_k$. В силу условия значимости атомарных формул $\psi(X_1) \cap \psi(X_2) \cap ... \cap \psi(X_k) \neq \varnothing$. Поскольку $\mathbf{D} \neq \varnothing$, хотя бы одно из множеств — $\psi(X_1) \cap \psi(X_2) \cap ... \cap \psi(X_k) \cap \varphi(M)$ или $\psi(X_1) \cap \psi(X_2) \cap ... \cap \psi(X_k) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(M)$ — непусто, откуда вытекает, что ΥuM или $\Upsilon uM'$ значима в $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$.

Правило $\langle\neg\Upsilon\rangle$. $\Delta = \Gamma \cup \{\neg\Upsilon u\}$. Пусть $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$ является моделью для этого множества формул. Следовательно, формула Υu не значима в $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$, то есть $\psi(X_1) \cap \psi(X_2) \cap ... \cap \psi(X_k) = \varnothing$. Поскольку пересечение пустого множества с любым множеством является пустым, формулы ΥuM и $\Upsilon uM'$ не значимы в $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$. Следовательно, отрицания этих формул — $\neg \Upsilon uM$ и $\neg \Upsilon uM'$ — значимы в этой модели.

Правило $\langle \Upsilon n \rangle$. $\Delta = \Gamma \cup \{\Upsilon u\}$. Пусть $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ является моделью для этого множества формул. Последовательности u и $[u]$ могут различаться лишь порядком терминов в их составе и отсутствием дубликатов терминов во второй последовательности. Формула $\Upsilon[u]$ значима в $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ (как и Υu) в силу условия значимости атомарных формул, законов коммутативности и идемпотентности для операции $\cap$.

Правило $\langle \neg \Upsilon n \rangle$. Рассматривается аналогично предыдущему.

Таким образом, мы установили, что при применении любого правила вывода, заменяющего имеющее модель множество формул Δ в составе конфигурации на некотором шаге построения аналитической таблицы, в следующей конфигурации также найдется множество, имеющее модель. ■

Лемма 2. *Никакое замкнутое множество формул не имеет модели.*

Доказательство. Множество формул замкнуто в двух случаях: (1) когда оно содержит формулы вида C и $\neg C$; (2) когда его элементом является формула Υu, причем в состав u входит как некий термин S, так и противоречащий ему термин S'.

Случай (1) очевиден: формулы вида C и $\neg C$ не могут быть значимыми в одной и той же модели, так как $\neg C$ значима в $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, е.т.е. C не значима в $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$.

В случае (2) формула Υu, где u содержит термины S и S', не значима ни в одной модели, поскольку $\varphi(S) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(S)) = \varnothing$, а пересечение пустого множества с любым пусто. ■

Теорема 1. ***(Теорема о корректности)*** *Если формула A доказуема, то A общезначима.*

Доказательство. Рассуждаем от противного. Допустим, что формула A доказуема, но не общезначима. Доказуемость формулы A означает существование замкнутой аналитической таблицы, первая конфигурация которой содержит единственный элемент — множество $\{\neg A\}$. Из факта необщезначимости формулы A следует, что существует модель, в которой она не является значимой. В силу семантики пропозиционального отрицания из этого вытекает, что в данной модели значима формула $\neg A$. Тогда множество $\{\neg A\}$ имеет модель, то есть первая конфигурация в замкнутой таблице, свидетельствующей о доказуемости формулы A, содержит множество (а именно $\{\neg A\}$), имеющее модель. Согласно Лемме 1, каждая следующая конфигурация также содержит множество, имеющее модель. В том числе, будет иметь модель и какое-то множество в последней конфигурации. Но это невозможно, поскольку последняя конфигурация содержит только замкнутые множества, а в силу Леммы 2 такие множества не имеют моделей. В рассуждении получено противоречие. ■

4. Разрешающая процедура. $\mathcal{T}$-таблицы

Сформулируем процедуру, позволяющую, как будет показано дальше, в конечное число шагов решать вопрос о доказуемости произвольной формулы A.

Предварительно выделяется список $\mathcal{T}$ положительных терминов, содержащий все такие P, что P или P' входят в состав формулы A.

1. Первая конфигурация содержит единственное множество — $\{\neg A\}$.
2. Применяются пропозициональные правила $\langle\wedge\rangle$, $\langle\neg\wedge\rangle$, $\langle\vee\rangle$, $\langle\neg\vee\rangle$, $\langle\supset\rangle$, $\langle\neg\supset\rangle$, $\langle\neg\neg\rangle$ до тех пор, пока в каждом множестве в составе конфигураций не останутся лишь формулы видов Υu и $\neg\Upsilon u$.
3. Применяется правило $\langle\Upsilon i\rangle$ по одному разу относительно каждого положительного термина M из списка $\mathcal{T}$.
4. Применяются правила $\langle\Upsilon\rangle$ и $\langle\neg\Upsilon\rangle$ относительно любой формулы вида Υu и $\neg\Upsilon u$, где u не содержит противоречащих друг другу терминов, и любого положительного термина M из списка $\mathcal{T}$ такого, что ни M, ни M' не входят в u.
5. Применяются правила $\langle\Upsilon n\rangle$ и $\langle\neg\Upsilon n\rangle$ относительно всех формул вида Υu и $\neg\Upsilon u$ таких, что u в них не совпадает с $[u]$.

По завершении процедуры имеем аналитическую таблицу, которую назовем *$\mathcal{T}$-таблицей.* $\mathcal{T}$-таблицы имеют следующую специфику: в состав последней конфигурации входят такие множества, элементами которых являются лишь формулы видов $\Upsilon[u]$ и $\neg\Upsilon[u]$, причем $[u]$ содержит M или M' для любого термина M из списка $\mathcal{T}$.

В последней конфигурации $\mathcal{T}$-таблицы либо все множества формул замкнуты (и тогда формула A доказуема, по определению), либо по крайней мере одно из множеств незамкнуто (такое множество назовем *$\mathcal{T}$-незамкнутым*).

Любое $\mathcal{T}$-незамкнутое множество обладает важным свойством: существует модель, в которой каждая формула из этого множества значима. Докажем это утверждение.

Лемма 3. *$\mathcal{T}$-незамкнутое множество имеет модель.*

Доказательство. Элементами $\mathcal{T}$-незамкнутого множества могут быть формулы двух видов — $\Upsilon[u]$ или $\neg\Upsilon[u]$. При этом если $[u]$ содержит противоречащие термины, то $\Upsilon[u]$ не может быть элементом данного множества, так как в таком случае оно было бы замкнутым. В принципе, в состав $\mathcal{T}$-незамкнутого множества могут входить формулы вида $\neg\Upsilon[u]$, где $[u]$ содержит противоречащие термины, но такого рода формулы значимы в любой модели. Остальные элементы $\mathcal{T}$-незамкнутого множества имеют вид $\Upsilon[u]$ или $\neg\Upsilon[u]$, причем для любого термина M из списка $\mathcal{T}$ верно, что либо M, либо M' (но не оба вместе) входят в $[u]$.

Заметим, что по крайней мере одна формула $\Upsilon[u]$ входит в $\mathcal{T}$-незамкнутое множество. Это обусловлено спецификой описанной выше процедуры, требующей обязательного применения, во-первых, правила $\langle\Upsilon i\rangle$ относительно каждого положительного термина из списка $\mathcal{T}$, во-вторых, правила $\langle\Upsilon\rangle$ относительно любой формулы вида Υu и любого положительного термина M из списка $\mathcal{T}$. Тогда в силу незамкнутости рассматриваемого множества всегда найдется такая последовательность $[u]$, что $\neg\Upsilon[u]$ не содержится в $\mathcal{T}$-незамкнутом множестве.

Сопоставим произвольному $\mathcal{T}$-незамкнутому множеству Δ следующую модель $\langle\mathbf{D}^*, \varphi^*\rangle$: $\mathbf{D}^* = \{[u] : \Upsilon[u] \in \Delta\}$, $\varphi^*(S) = \{[u] : \Upsilon[u] \in \Delta$ и S содержится в $[u]\}$. Пара $\langle\mathbf{D}^*, \varphi^*\rangle$ удовлетворяет всем условиям, предъявляемым к моделям логики суждений существования. Поскольку, как отмечалось выше, $\mathcal{T}$-незамкнутое множество содержит хотя бы одну формулу вида $\Upsilon[u]$, $\mathbf{D}^*$ является непустым. Функция φ^* задана так, что $\varphi^*(S) \subseteq \mathbf{D}^*$.

Покажем, что любая формула, входящая в Δ, значима в $\langle\mathbf{D}^*, \varphi^*\rangle$.

Рассмотрим сначала те формулы из Δ, которые имеют вид $\Upsilon[u]$. Тогда $[u]$ есть последовательность типа $S_1S_2...S_nP'_1P'_2...P'_m$, где $n \geq 0$, $m \geq 0$, $n + m \geq 1$, причем никакой S_i не совпадает ни с каким P_j (в последовательности отсутствуют противоречащие термины), и для любого положительного термина M из $\mathcal{T}$ верно, что в $[u]$ содержится M либо M'.

Атомарная формула вида $\Upsilon[u]$ значима в модели $\langle\mathbf{D}^*, \varphi^*\rangle$, е.т.е. $\psi^*(S_1)\cap\psi^*(S_2) \cap ... \cap \psi^*(S_n) \cap \psi^*(P'_1) \cap \psi^*(P'_2) \cap ... \cap \psi^*(P'_m) \neq \varnothing$. Последнее утверждение, согласно определению функции ψ, эквивалентно следующему: $\varphi^*(S_1)\cap\varphi^*(S_2)\cap ... \cap\varphi^*(S_n)\cap(\mathbf{D}\setminus\varphi^*(P_1))\cap(\mathbf{D}\setminus\varphi^*(P_2))\cap ... \cap(\mathbf{D}\setminus\varphi^*(P_m)) \neq \varnothing$. Очевидно, что для каждого S_i верно, что $[u] \in \varphi^*(S_i)$, поскольку $\Upsilon[u] \in \Delta$ и S_i содержится в $[u]$. А для каждого P_j верно, что $[u] \in \mathbf{D}^* \setminus \varphi^*(P_j)$, ведь $[u]$ является элементом $\mathbf{D}^*$ (так как $\Upsilon[u] \in \Delta$, но при этом P_j не содержится в $[u]$ (в эту последовательность входит отрицательный термин P'_j). Таким образом, $[u]$ является общим элементом каждого множества $\varphi^*(S_i)$ и каждого множества $\mathbf{D}^* \setminus \varphi^*(P_j)$, поэтому пересечение этих множеств непусто, а формула $\Upsilon[u]$ значима в модели $\langle\mathbf{D}^*, \varphi^*\rangle$.

Рассмотрим далее формулы из Δ, которые имеют вид $\neg\Upsilon[u]$. Если в $[u]$ входят противоречащие термины M и M', то в любой модели $\Upsilon[u]$ не является значимой, так как $\varphi(M)\cap(\mathbf{D}\setminus\varphi(M)) = \varnothing$ в каждой модели, а пересечение пустого множества с любым пусто. Следовательно, $\neg\Upsilon[u]$ общезначима, в частности она значима и в $\langle\mathbf{D}^*, \varphi^*\rangle$.

Пусть $[u]$ не содержит противоречащих терминов и имеет вид $S_1S_2...S_nP'_1P'_2...P'_m$ с теми же ограничениями, что и ранее. Допустим, что формула $\neg\Upsilon[u]$ не значима в $\langle\mathbf{D}^*, \varphi^*\rangle$, тогда в данной модели значима формула $\Upsilon[u]$. Это означает, что $\varphi^*(S_1)\cap\varphi^*(S_2)\cap ... \cap\varphi^*(S_n)\cap(\mathbf{D}^*\setminus\varphi^*(P_1))\cap(\mathbf{D}^*\setminus\varphi^*(P_2))\cap ... \cap(\mathbf{D}^*\setminus\varphi^*(P_m)) \neq \varnothing$. Тогда существует последовательность $[w] \in \mathbf{D}^*$ (то есть, такая последовательность, что $\Upsilon[w] \in \Delta$), для которой верно, что $[w]$ принадлежит каждому множеству $\varphi^*(S_i)$ и каждому множеству $\mathbf{D}^*\setminus\varphi^*(P_j)$.

Очевидно, что последовательность $[w]$ не совпадает с $[u]$, поскольку в этом случае Δ содержало бы не только $\neg\Upsilon[u]$, но и $\Upsilon[u]$, а по условию Леммы, Δ — незамкнутое множество. Тогда возможны два не исключающих друг друга случая: (a) по крайней мере один положительный термин S_i из $[u]$ отсутствует в $[w]$, и вместо него в $[w]$ входит термин S'_i; (b) по крайней мере один отрицательный термин P'_j из $[u]$ отсутствует в $[w]$, и вместо него в $[w]$ входит термин P_j.

В случае (a) $[w] \notin \varphi^*(S_i)$, поскольку $[w]$ содержит не термин S_i, а термин S'_i. В случае (b) $[w] \in \varphi^*(P_j)$, а значит $[w] \notin \mathbf{D}^*\setminus\varphi^*(P_j)$. Таким образом, любая последовательность из $\mathbf{D}^*$ не принадлежит какому-то $\varphi^*(S_i)$ или какому-то $\mathbf{D}^*\setminus\varphi^*(P_j)$. Поэтому множество $\varphi^*(S_1)\cap\varphi^*(S_2)\cap...\cap\varphi^*(S_n)\cap(\mathbf{D}^*\setminus\varphi^*(P_1))\cap(\mathbf{D}^*\setminus\varphi^*(P_2))\cap ... \cap(\mathbf{D}^*\setminus\varphi^*(P_m))$ пусто, и формула $\Upsilon[u]$ не является значимой в $\langle\mathbf{D}^*, \varphi^*\rangle$. Последнее противоречит принятому допущению. Следовательно, формула $\neg\Upsilon[u]$ значима в данной модели.

Мы показали, что все формулы, входящие $\mathcal{T}$-незамкнутое множество Δ, значимы в модели $\langle\mathbf{D}^*, \varphi^*\rangle$.

■

5. Полнота и разрешимость аналитико-табличного исчисления

Для демонстрации полноты нашего аналитико-табличного исчисления докажем еще две леммы.

Лемма 4. *Пусть $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$ — модель множества формул Δ, входящего в некоторую конфигурацию аналитической таблицы. Если Δ получено по некоторому правилу вывода заменой множества Λ в составе предшествующей конфигурации, то $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$ является моделью множества Λ.*

Доказательство. Осуществляем разбор случаев применения всех возможных правил вывода, в результате которых произошла замена Λ на Δ.

Правило $\langle\wedge\rangle$. $\Lambda = \Gamma \cup \{A \wedge B\}$, а $\Delta = \Gamma \cup \{A, B\}$. Поскольку из A, B логически следует $A \wedge B$, любая модель Δ является также моделью Λ.

Правило $\langle\neg\wedge\rangle$. $\Lambda = \Gamma\cup\{\neg(A\wedge B)\}$, а Δ есть либо $\Gamma\cup\{\neg A\}$, либо $\Gamma\cup\{\neg B\}$. Поскольку $\neg(A \wedge B)$ логически следует как из $\neg A$, так и из $\neg B$, любая модель Δ является также моделью Λ.

Остальные пропозициональные правила вывода рассматриваются аналогично. Искомый тезис обосновывается с использованием верных метаутверждений: $A \vee B$ логически следует как из A, так и из B; из $\neg A$, $\neg B$ логически следует $\neg(A \vee B)$; $A \supset B$ логически следует как из $\neg A$, так и из B; из A, $\neg B$ логически следует $\neg(A \supset B)$; из A логически следует $\neg\neg A$.

Правило $\langle\Upsilon i\rangle$. В этом случае Δ есть либо $\Lambda \cup \{\Upsilon M\}$, либо $\Lambda \cup \{\Upsilon M'\}$. Поскольку $\Lambda \subseteq \Delta$, любая модель Δ является моделью и Λ.

Правило $\langle\Upsilon\rangle$. $\Lambda = \Gamma\cup\{\Upsilon u\}$, а Δ есть либо $\Gamma\cup\{\Upsilon uM\}$, либо $\Gamma\cup\{\Upsilon uM'\}$. Несложно установить, что Υu логически следует как из ΥuM, так и из $\Upsilon uM'$. Поэтому любая модель Δ является также моделью Λ.

Правило $\langle\neg\Upsilon\rangle$. $\Lambda = \Gamma \cup \{\neg\Upsilon u\}$, а $\Delta = \Gamma \cup \{\neg\Upsilon uM, \neg\Upsilon uM'\}$. Несложно установить, что из $\neg\Upsilon uM$, $\neg\Upsilon uM'$ логически следует $\neg\Upsilon u$. Поэтому любая модель Δ является также моделью Λ.

Правило $\langle\Upsilon n\rangle$. $\Lambda = \Gamma\cup\{\Upsilon u\}$, а $\Delta = \Gamma\cup\{\Upsilon[u]\}$. Очевидно, что формулы Υu и $\Upsilon[u]$ логически эквивалентны (следуют друг из друга). Поэтому и в этом случае утверждение леммы верно.

Правило $\langle\neg\Upsilon n\rangle$. Рассматривается аналогично предыдущему. ■

Лемма 5. *Если $\mathcal{T}$-таблица, построенная по списку $\mathcal{T}$ всех положительных терминов, входящих в формулу A, содержит в своей последней конфигурации незамкнутое множество, то множество $\{\neg A\}$ имеет модель.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$-таблица начинается с конфигурации $\{\{\neg A\}\}$ и заканчивается конфигурацией, содержащей $\mathcal{T}$-незамкнутое множество формул Δ. Согласно Лемме 3, Δ имеет модель, а именно определенную в процессе доказательства леммы пару $\langle\mathbf{D}^*, \varphi^*\rangle$.

Находим ту конфигурацию, в которой множество Δ появилось в результате применения некоторого правила вывода, заменяющего множество Λ в предшествующей конфигурации. Согласно Лемме 4, $\langle\mathbf{D}^*, \varphi^*\rangle$ является моделью и для множества Λ. Далее ищем конфигурацию, в которой уже множество Λ появилось в результате применения правила, заменяющего некое другое множество формул, и снова используем Лемму 4. Повторяем указанные действия нужное число раз. В силу конечности $\mathcal{T}$-таблицы в итоге окажется, что единственное множество в составе первой конфигурации — множество $\{\neg A\}$ — имеет модель, а именно $\langle \mathbf{D}^*, \varphi^* \rangle$. ■

Теорема 2. ***(Теорема о полноте)*** *Если формула A общезначима, то A доказуема.*

Доказательство. Рассуждаем от противного. Допустим, что формула A общезначима, но не доказуема. Поскольку формула A не является доказуемой, не существует замкнутой аналитической таблицы, начинающейся с конфигурации $\{\{\neg A\}\}$. В частности, незамкнута и $\mathcal{T}$-таблица с первой такой конфигурацией. То есть существует $\mathcal{T}$-незамкнутое множество формул в последней конфигурации $\mathcal{T}$-таблицы. Тогда, согласно Лемме 5, множество $\{\neg A\}$ имеет модель. В этой модели значима $\neg A$, а значит, формула A значимой не является. Но, поскольку A общезначима, она должна быть значимой и в данной модели. Пришли к противоречию. ■

Покажем, что описанная выше процедура построения $\mathcal{T}$-таблицы является разрешающей, то есть эта процедура позволяет в конечное число шагов решать вопрос о том, доказуема или нет произвольная формула.

Теорема 3. ***(Теорема о разрешимости)*** *Сформулированное ранее аналитико-табличное исчисление, адекватное логике суждений существования, разрешимо.*

Доказательство. Любая формула имеет конечную длину, поэтому список положительных терминов, входящих в ее состав, конечен. Процедура организована так, что число применений правил вывода ограничено списком $\mathcal{T}$. Поэтому в $\mathcal{T}$-таблице имеется последняя конфигурация, содержащая конечное число конечных множеств формул.

В последней конфигурации $\mathcal{T}$-таблицы либо все множества формул замкнуты, либо по крайней мере одно из множеств незамкнуто. В первом случае формула A доказуема, по определению. Во втором случае, в силу Леммы 5, множество $\{\neg A\}$ имеет модель. Тогда формула A не является общезначимой, а значит, в силу Теоремы о корректности, A недоказуема. ■

Литература

Маркин, 2021 – *Маркин В.И.* Логика суждений существования и силлогистика // Логические исследования. Т. 27. № 2. С. 31–47.

Маркин, 2022 – *Маркин В.И.* Логика суждений существования как средство представления знаний и автоматической проверки умозаключений // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. Т. 26. № 1. С. 422–426.

Vladimir I. Markin

An analytic tableaux calculus adequate for the logic of existence propositions

Vladimir I. Markin
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: markin@philos.msu.ru

Abstract: In [Markin, 2021] we set out the formal system for logical analyses of reasonings with existence judgements and their Boolean combinations. Its language contains the constant of existence, atomic formulas are formed by the concatenation of this constant with any finite sequence of general terms (positive and negative), complex formulas are formed by means of propositional connectives. We formulated a natural semantics and an adequate axiomatic calculus for this language. In this paper we construct an analytic tableau version of the calculus of existential judgements. We postulate the rules of expansion of a tableau for the formulas with the constant of existence and their negations, define analytic tableau as a sequence of families of sets of the formulas and formulate the criterion for the tableau closure. A formula A is provable in this calculus iff there exists a closed analytic tableau with the root $\{\{\neg A\}\}$. We prove soundness and completeness theorems for the analytic tableau calculus of existential judgements. The effective procedure, which makes it possible to answer the question whether a formula is provable, is proposed in the paper. We prove decidability theorem for the analytic tableau calculus.

Keywords: existential judgement, logical calculus, analytic tableau, semantics, soundness theorem, completeness theorem, decision procedure

For citation: Markin V.I. "Analitiko-tablichnoe ischislenie, adekvatnoe logike suzhdenii sushchestvovaniya" [An analytic tableaux calculus adequate for the logic of existence propositions], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2024, Vol. 30, No. 2, pp. 11–22. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-11-22 (In Russian)

References

Markin, 2021 – Markin, V.I. "Logika suzhdenij sushhestvovaniya i sillogistika" [Logic of existence judgements and syllogistics], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], Vol. 27, No. 2, pp. 31–47. (In Russian)

Markin, 2022 – Markin, V.I. "Logika suzhdenij sushhestvovaniya kak sredstvo predstavleniya znanij i avtomaticheskoj proverki umozaklyuchenij" [Logic of existence judgements as an instrument of knowledge representation and automatic inference verification], *Intellektual'nye sistemy. Teoriya i prilozheniya* [Intellectual systems. Theory and applications], Vol. 26, No. 2, pp. 422–426. (In Russian)

Логические исследования
2024. Т. 30. № 2. С. 23–43
УДК 164+510.643

Logical Investigations
2024, Vol. 30, No. 2, pp. 23–43
DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-23-43

Weijun Shi

A boolean-algebraic approach to completeness for normal modal predicate logics

Weijun Shi
Xidian University,
South Campus: 266 Xinglong Section of Xifeng Road, Xi'an, Shaanxi 710126, China.
E-mail: shiweijun@xidian.edu.cn

Abstract: This paper introduces an innovative methodology for demonstrating completeness for normal modal predicate logics. Traditional proofs typically involve constructing canonical models, wherein possible worlds are defined as maximal consistent sets possessing specific properties, with a heavy reliance on the Barcan Formula to affirm the existence of these worlds. Our approach deviates from the classical method by utilizing Boolean algebras and ultrafilters to construct models. Unlike conventional methods, our construction of possible worlds does not depend on the Barcan Formula; rather, these properties are ensured by Tarski's Lemma. Furthermore, our proof distinguishes itself from other Boolean-algebraic completeness proofs in two key respects: it employs Kripke semantics instead of algebraic semantics and exclusively relies on ultrafilters, thereby offering a more concise approach. This methodology facilitates a natural extension from modal propositional logic to modal predicate logics and circumvents the added complexity of Q-filters. In our model, the equivalence class of each theorem of a normal modal predicate logic is a member of all worlds, while the equivalence class of each non-theorem is a member of some worlds. Consequently, the structure of these worlds ensures that non-theorems are false in the model.

Keywords: normal modal predicate logics, boolean algebras, completeness, Tarski's Lemma

For citation: Shi WJ. "A boolean-algebraic approach to completeness for normal modal predicate logics", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2024, Vol. 30, No. 2, pp. 23–43. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-23-43

Overview

Numerous methods for proving the completeness of modal logic systems exist in the literature, typically classified into algebraic and non-algebraic approaches. The most well-known and widely used non-algebraic approach is Henkin's style proof, which involves using maximal consistent sets [Cresswell, Hughes, 1996, pp. 111–121, 256–265], [Blackburn et al., 2002, pp. 196–210].

On the other hand, Kripke's original proof using the tableau method is less well-known and has been criticized for its lack of rigor [Negri, 2009]. However, many non-algebraic, proof-theoretical methods that are similar in spirit to Kripke's original proof have been proposed in the literature. For instance, a completeness proof for normal modal propositional systems using labelled sequent calculi is presented in [Ibid.], which avoids the shortcomings of both Kripke's and Henkin's style proofs (the incapability of providing countermodels on the part of the latter) by providing a more rigorous and generalizable approach. This approach was later extended to normal modal predicate systems in [Negri, von Plato, 2011].

In this paper, we will present a Henkin-style completeness proof for normal modal predicate systems using Boolean algebras. This means our proof falls into the algebraic camp, at least in a broad sense. However, our approach differs from the traditional Henkin-style proof that uses maximal consistent sets. Instead, we extend the completeness proof for classical predicate logic presented in [Bell, Slomson, 2006, pp. 61–65] by utilizing ultrafilters in Boolean algebras[1].

It's worth noting that there is an internal relationship between maximal consistent sets and ultrafilters, which we will make clear in the following. Let $\mathcal{L}$ be a language of a system Λ of modal (propositional or predicate) logic. Suppose a set Γ of formulas of $\mathcal{L}$ is a maximal consistent set with respect to Λ. Then, Γ has the following properties:

(i) There is no finite subset $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq \Gamma$ such that $\vdash_\Lambda \neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)$.

(ii) For every formula ϕ of $\mathcal{L}$, either $\phi \in \Gamma$ or $\neg\phi \in \Gamma$.

Let u be an ultrafilter in a Boolean algebra $\langle A, \sqcap, ^*, 0\rangle$[2]. Then, u has the following properties:

(i*) There is no finite subset $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq u$ such that their meets are the minimum, namely, $x_1 \sqcap \ldots \sqcap x_n = 0$.

(ii*) For every element x of A, either $x \in u$ or its complement $x^* \in u$.

Let $\mathfrak{L} = \langle A, \sqcap, ^*, 0\rangle$ be the Lindenbaum algebra of Λ, in which $[\phi]$ is the equivalence class of a formula ϕ under some equivalence relation and A is the set of all such equivalent classes[3]. Then, for each Λ-maximal consistent set Γ, there is a corresponding set u such that for every formula ϕ, $\phi \in \Gamma$ if and only if

[1] Algebraic completeness proofs for classical logic using cylindric and polyadic algebras instead of Boolean algebras can be found in [Corsi, 2002].

[2] Refer to Section 1 of the paper for the definitions of "$\sqcap$", "$*$", and "0".

[3] This equivalence relation is defined in Definition 2 of Section 3.

$[\phi] \in u$. The set u is an ultrafilter in $\mathfrak{L}$; moreover, (i) holds if and only if (i*) holds, and (ii) holds if and only if (ii*) holds.

When dealing with a system Λ of normal modal propositional logic, the traditional completeness proof using maximal consistent sets can be translated to a proof using ultrafilters, and vice versa, due to the interrelation mentioned in the last paragraph. Let $\langle W, R, V \rangle$ be the canonical model of Λ, where:

- W is the set of all Λ-maximal consistent sets.
- For every world w and w', wRw' if for any formula ϕ of $\mathcal{L}$, $\Box\phi \in w$ implies $\phi \in w'$.
- For every propositional variable p in $\mathcal{L}$, $V(p) = 1$ if $p \in w$.

We can now translate the canonical model to a model $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$, where:

- $\mathcal{U}$ is the set of all ultrafilters u in $\mathfrak{L}$, with the property that for every formula ϕ of $\mathcal{L}$, $[\phi] \in u$ if and only if $\phi \in w$ for some $w \in W$.
- For every world u and u', $u\mathcal{R}u'$ if for any formula ϕ of $\mathcal{L}$, $[\Box\phi] \in u$ implies $[\phi] \in u'$.
- For every propositional variable p in $\mathcal{L}$, $\mathcal{V}(p) = 1$ if $[p] \in u$.

Therefore, we obtain a model $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ that falsifies every formula that is not a theorem of Λ. This results in a Boolean algebraic completeness proof for Λ.

Another completeness proof for a system Λ of normal modal propositional logic using Boolean algebras is already presented in [Blackburn et al., 2002, pp. 261–291] and [Venema, 2007]. Both our proof and theirs utilize conceptual resources in Boolean algebras. However, the main difference between the two lies in the fact that our proof provides Λ with Kripke semantics, whereas their algebraic proofs provide it with algebraic semantics. Let $\langle A, \sqcap, ^*, 0, f_\diamond \rangle$ be the so-called expansion of the Boolean algebra $\langle A, \sqcap, ^*, 0 \rangle$ with the operator $f_\diamond$ [Blackburn et al., 2002, p. 275], where

$$f_\diamond(0) = 0 \text{ and } f_\diamond(x \sqcap y) = f_\diamond(x) \sqcap f_\diamond(y) \text{ for all } x, y \in A^4.$$

Let θ be a function from the set of all propositional variables in $\mathcal{L}$ to A. Then θ can be extended uniquely to a function $\bar{\theta}$ from the set of all formulas in $\mathcal{L}$ to A:

[4] This expansion is called *modal algebras* in other literatures, say, [Chagrov, Zakharyaschev, 1997, p. 214] and [Tanaka, 2022].

- $\bar{\theta}(p) = \theta(p)$ for every propositional variable p in $\mathcal{L}$.
- $\bar{\theta}(\bot) = 0$.
- $\bar{\theta}(\neg\phi) = \theta(\phi)^*$.
- $\bar{\theta}(\phi \wedge \psi) = \bar{\theta}(\phi) \sqcap \bar{\theta}(\psi)$.
- $\bar{\theta}(\Diamond\phi) = f_\diamond(\bar{\theta}(\phi))$.

In doing this, we are giving the language $\mathcal{L}$ of Λ an *algebraic semantics*.

The full complex algebra of the ultrafilter frame $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R} \rangle$ is the expansion of the power set algebra $\langle P(\mathcal{U}), \cap, \setminus, \emptyset \rangle$ with an operator $\mathfrak{R}$, where $\mathfrak{R}(X) = \{u \in \mathcal{U} : \exists v \in \mathcal{U}\, u\mathcal{R}v\}$ for each $X \subseteq \mathcal{U}$[5]. According to the Jónsson–Tarski theorem [Blackburn et al., 2002, p. 289], we can embed the expansion of the Boolean algebra $\mathfrak{L}$ of Λ with the operator $f_\diamond$ into this full complex algebra. According to a theorem from [Ibid., p. 282], the axioms of Λ are true in this expansion, where the algebraic notion of truth is defined in [Ibid., p. 278][6]. Using this theorem, we can then show that Λ is complete with respect to complex algebras, which are concrete Boolean algebras with operators that encapsulate all information pertinent to frame validity.

The generalization of the aforementioned algebraic completeness proof to cover systems of normal modal predicate logic was not addressed in [Blackburn et al., 2002]. Given the pivotal role which the Jónsson–Tarski theorem plays therein, the crucial part of the required generalization would be how to extend the theorem to such systems. Such an extension is presented in [Tanaka, Ono, 1998], which uses Q-filters, Q-filter neighborhood frames of modal algebras, and dual modal algebras of neighborhood frames, instead of ultrafilters, ultrafilter frames of modal algebras, and full complex algebras of ultrafilter frames, respectively[7]. In the case of normal modal propositional logic, the Jónsson–Tarski theorem states that a modal algebra is embeddable in the full complex

[5] Here, "\" denotes the operation of taking the complement of a subset relative to the universal set $\mathcal{U}$, and $P(\mathcal{U})$ is the power set of $\mathcal{U}$.

[6] For a comprehensive understanding of modal logic and its algebraic semantics, one can also refer to [Chagrov, Zakharyaschev, 1997, pp. 193–234]. This chapter contains nearly all the material found in [Blackburn et al., 2002, pp. 261–332]. For instance, the theorem in [Ibid., p. 282] is equivalent to theorem 7.43 in [Chagrov, Zakharyaschev, 1997, p. 214].

[7] In a Boolean algebra $\langle A, \sqcap, ^*, 0 \rangle$, an ultrafilter F in the algebra is a Q-filter determined by $S \subseteq P(A)$ if F is closed under the meets of all elements of S. The notion is due to Rasiowa and Sikorsiki [Rasiowa, Sikorski, 1963, pp. 86–87]. It is intended to deal with the problem of how to preserve infinite meets and joins under an isomorphism from a Boolean algebra to another. This is important to the current topic because in modal predicate logics, universal and existential quantifiers are supposed to be interpreted in the algebraic semantics as infinite meets and joins.

algebra of its ultrafilter frame; for normal modal predicate logic, the extended Jónsson–Tarski theorem asserts that a modal algebra is embeddable in the dual modal algebra of its neighborhood frame.

Now, let $\langle C, N\rangle$ be the Q-filter neighborhood frame of the modal algebra $\langle \mathfrak{L}, f_\diamond\rangle$ for S, where $\mathfrak{L}$ and $f_\diamond$ are defined previously, and S is a subset of the power set of the carrier of $\mathfrak{L}$[8]. For every n-place predicate letter P in the language of Λ of normal modal predicate logic and every variable x_i therein, let I be such a function that $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in I(F, P)$ if $[P(x_1, \dots, x_n)] \in F$, where F is a Q-filter for S. A model $\langle C, N, D, I\rangle$ is built out of these elements, where D is the set of all variables in the language. The extended Jónsson–Tarski theorem allows us to show that every formula is a theorem of Λ if and only if it is true in the model. Consequently, many renowned systems of normal modal predicate logic can be shown to be complete with respect to a class of certain frames[9].

In the context of normal modal logic, two types of completeness proofs using Boolean algebras have been mentioned. The algebraic proofs in [Blackburn et al., 2002, pp. 261–291]; [Venema, 2007; Tanaka, Ono, 1998] provide it with an algebraic semantics, while our completeness proof, as previously outlined, provides normal modal propositional logic with Kripke semantics. However, our proof has yet to be extended to cover normal modal predicate logic without the use of Q-filters and related concepts.

In the case of normal modal propositional logic Λ, it has been shown how the traditional completeness proof using maximal consistent sets can be translated to one using its Boolean algebraic counterpart, i.e., ultrafilters. As demonstrated, the crucial part of this is to take the ultrafilter frame as an isomorphic copy of the frame of the canonical model. In fact, the former can be established directly without presupposing anything about the latter, although our expedient construction has made the latter an integral part of the former.

Given the success of this translation, it seems reasonable to use a similar approach in our completeness proof for a system Λ of normal modal predicate logic, which we have yet to develop. If our proof is supposed to adopt this approach, as one naturally expects, it would go as follows. The traditional completeness proof for Λ [Cresswell, Hughes, 1996, p. 261] relies on a canonical model $\langle W, R, D, V\rangle$, where:

[8] Where $\mathfrak{L}$ is a Boolean algebra $\langle A, \sqcap, ^*, 0\rangle$, A is sometimes referred to as “the carrier” of $\mathfrak{L}$.

[9] Since classical predicate logic is a sub-logic of any normal modal predicate logic, it does not come as a surprise that its completeness can be proven using the extended Jónsson–Tarski theorem. Such a proof is presented in [Tanaka, Ono, 1998].

- W is a set of Λ-maximal consistent sets with the $\forall$-property[10].
- D is the set of all individual variables in the language $\mathcal{L}^+$ resulting from the language $\mathcal{L}$ of Λ by adding a denumerably infinite set of new individual variables to $\mathcal{L}$.
- For every n-place predicate P of $\mathcal{L}$ and every variable x_i in $\mathcal{L}$, $\langle x_1, \ldots, x_n, w\rangle \in V(P)$ if and only if $P(x_1, \ldots, x_n) \in w$.

Because of the relationship between maximal consistent sets and ultrafilters, we can construct a new model $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R}, D, \mathcal{V}\rangle$ from the canonical model, where:

- $\mathcal{U}$ is the set of all ultrafilters with the $\forall$-property u in $\mathfrak{L}$, with the property that for every formula ϕ of $\mathcal{L}$, $[\phi] \in u$ if and only if $\phi \in w$ for some $w \in W$[11].
- For each n-place predicate P of $\mathcal{L}$ and every variable x_i in $\mathcal{L}$, $(x_1, \ldots, x_n, u) \in \mathcal{V}(P)$ if and only if $[P(x_1, \ldots, x_n)] \in u$.

Moreover, just as there is a theorem [Cresswell, Hughes, 1996, pp. 258–260] guaranteeing the existence of the possible worlds in W, there is also a theorem that guarantees the existence of the possible worlds in $\mathcal{U}$. With this new model, everything that can be proven in the traditional proof can also be proven in ours.

If we were to follow the proposed approach for our completeness proof, it would have two shortcomings, although they are not fatal. First, it would lack originality. Despite initially appearing to rely on the canonical model and its associated theorems, they are actually unnecessary. The suggested translations are only pedagogically significant, providing a hint as to how our proof should proceed if we choose to use that form. In fact, it is possible to set up the new model directly without reference to the canonical model. However, the proof may still appear to be a straightforward exercise precisely because of the dispensable material. Second, it seems that the line of reasoning used in the traditional completeness proof has been employed in the proof in a disguised and convoluted way, making it less clear for those attempting to comprehend it.

[10] A world w is said to possess the $\forall$-property if for any formula ϕ of the language $\mathcal{L}$ there is a variable x_j therein such that $\phi(x_i|x_j) \to \forall x_i \phi(x_i) \in w$ [Cresswell, Hughes, 1996, p. 257]. Here, $\phi(x_i|x_j)$ is the result of substituting x_j for all free occurrences of x_i in ϕ, where x_j is free for x_i.

[11] An ultrafilter u is said to possess the $\forall$-property if for any formula ϕ of the language $\mathcal{L}$, there is a variable x_i therein such that $[\phi(x_i|x_j) \to \forall x_i \phi(x_i)] \in w$, where $\phi(x_i|x_j)$ is the result of substituting x_j (being free for x_i in ϕ) for all free occurrences of x_i in ϕ.

To avoid these shortcomings, our completeness proof should not rely on a disguised translation of the existing traditional proof while pretending to make no reference to its line of argument. Therefore, we must avoid using the notion of ultrafilters with the $\forall$-property and the corresponding theorem that guarantees their existence. In our paper, we will provide a proof that does not make any implicit or furtive references to these notions.

The paper will be organized as follows: Section 1 will review some key concepts and propositions about Boolean algebras that will be used later. Section 2 will specify modal languages, their semantics, and normal modal predicate systems. These two sections are prerequisites, although they are a cliche. Section 3 will be the core of the paper, where we will provide a detailed construction of a model using Boolean algebras. Finally, Section 4 will conclude the paper.

1. Boolean algebraic aspects

In this section, we will establish notation and introduce some key concepts and theorems about Boolean algebras that will be used later in the paper. Let's begin with the concept of a partially ordered set, denoted by $\langle X, \leqslant\rangle$, where X is a non-empty set and $\leqslant$ is a partial order on X, meaning $\leqslant$ is a binary relation that is reflexive, antisymmetric, and transitive. When it is clear from the context, we will refer to the partially ordered set simply as X without explicitly mentioning the partial order.

Given a partially ordered set X, an element $x \in X$ is said to be an upper bound of a subset $A \subseteq X$ if for all $y \in A$, $y \leqslant x$. Similarly, $x \in X$ is said to be a lower bound of a subset $A \subseteq X$ if for all $y \in A$, $x \leqslant y$. By the definition of X, if X has an upper bound, it must be unique; in this case, we refer to the unique upper bound of X the *maximum* of X and denote it by 1. Similarly, if X has a lower bound, it is unique and we refer to the unique lower bound of X the *minimum* of X and denote it by 0.

If there exists an element $x \in X$ that is the supremum (least upper bound) of A, we denote this x by $supA$. Similarly, if there exists an element $x \in X$ that is the infimum (greatest lower bound) of A, we denote it by $inf A$.

If A is a two-element subset of X, we write $x \sqcup y$, called the *join of x and y*, for $supA$ and $x \sqcap y$, called the *meet of x and y*, for $inf A$. X is said to be a lattice if for every two-element subset $A = \{x, y\} \subseteq X$, both $x \sqcap y$ and $x \sqcup y$ exist.

A lattice X is said to be complemented if it satisfies the following two conditions: (1) X has a maximum 1 and a minimum 0, and (2) for every $x \in X$, there exists some $y \in X$ such that $x \sqcup y = 1$ and $x \sqcap y = 0$. The element

y is called *a complement of* x. Being a partially ordered set, a lattice has a unique maximum if it has one, and similarly, it has a unique minimum if it has one. However, in a complemented lattice X, not every member x necessarily has a unique complement. But if the complemented lattice X is distributive, that is, for all $x, y, z \in X$, $(x \sqcup y) \sqcap z = (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z)$, then x has a unique complement. We use x^* to denote the unique complement of x in a distributive complemented lattice X.

A Boolean algebra is a distributive complemented lattice. Given a Boolean algebra $B = \langle X, \leqslant \rangle$, for the sake of simplicity, we may use "$x \in B$" and "$F \subseteq B$" instead of "$x \in X$" and "$F \subseteq X$", respectively, where no confusion is likely to arise.

One of the key notions in lattices and Boolean algebras is that of ultrafilters, which plays a crucial role in our proof and deserves a full statement.

Definition 1. Let X be a lattice and F be a nonempty subset of X.
1. F is a filter in X if the following conditions are fulfilled:
(1.1) $F \neq X$.
(1.2) For every x and y in X, if $x, y \in F$, then $x \sqcap y \in F$.
(1.3) For every $x \in F$ and every $y \in X$, if $x \leqslant y$, then $y \in F$.
2. F is an ultrafilter in X if the following conditions are fulfilled:
(2.1) F is a filter.
(2.2) For any filter G in X such that $F \neq G$, F is not a proper subset of G.

It stands to reason that any ultrafilter in a lattice does not contain the minimum. Otherwise, it would not qualify as an ultrafilter.

Moreover, an ultrafilter in a Boolean algebra possesses a highly significant property that will be utilized extensively in the subsequent discussion:

Theorem 1. *If F is a filter in a Boolean algebra B, then F is an ultrafilter if and only if, for each $x \in B$, either $x \in F$ or $x^* \in F$, but not both* [Bell, Slomson, 2006, p. 15].

Given a Boolean algebra B, a subset A of B is said to have the finite intersection property (henceforth referred to as the *fip*) if the infimum of any finite subset of A is not equal to 0, i.e., $\mathit{inf}\, A \neq 0$, where 0 is the minimum of B. Regarding the relation between the *fip* and ultrafilters, we have the following theorem:

Theorem 2. *For any nonempty subset A of a Boolean algebra B, if A has the fip, then there is an ultrafilter F in B such that A is a subset of F* [Ibid., p. 16].

Another theorem that will play a crucial role in our constructions of models later is Tarski's Lemma, as it is called in [Bell, Slomson, 2006, p. 21]. Strictly speaking, for its full expression, we need two more concepts: canonical homomorphisms and the quotient algebra B/F of a Boolean algebra B modulo a filter F in B. However, the latter turns out to be dispensable for our purposes, due to the fact that if F is an ultrafilter in B, then B/F is isomorphic to the Boolean algebra $\mathbf{2} = \{0, 1\}$, which is partially ordered such that $0 \leqslant 0$, $0 \leqslant 1$, and $1 \leqslant 1$ [Ibid., p. 20]. Moreover, due to this isomorphism, we only need the notion of a homomorphism between two Boolean algebras, which is quite common: given two Boolean algebras B_1 and B_2, a homomorphism of B_1 onto B_2 is a map from B_1 onto B_2 that preserves the algebraic operations, i.e., the operations of meet, join, and complement as defined previously. For a precise definition of the notion, see [Ibid., p. 17].

Using the concept of homomorphism, we can now present Tarski's Lemma. Suppose B is a Boolean algebra. Let $\{A_n : n \in \omega\}$ be a countable collection of subsets A_n of B such that each A_n has an infimum — that is, $\mathit{inf}\, A_n$ exists, say, a_n. Suppose, further, F is an ultrafilter in B. Let h be such a homomorphism from B onto $\mathbf{2}$ that for every $x \in B$, $h(x) = 1$ if $x \in F$ and $h(x) = 0$ if $x \notin F$. The ultrafilter F in B is said to preserve *the infinite meets of* A_n if

$$\text{for every } n \in \omega,\ h(a_n) = \mathit{inf}\{h(a) : a \in A_n\}.$$

Now the lemma can be stated as follows:

Theorem 3 (Tarski's Lemma). *If a member x in B is not equal to* 0*, namely, x is not the minimum of B, then there is an ultrafilter F in B containing x which preserves the infinite meets of A_n* [Ibid., p. 21].

2. Normal modal predicate logics

Since the basic concepts of modal logic, both propositional and predicate, are well-known, we shall refer to them only to establish our notation, following the conventions in [Cresswell, Hughes, 1996].

The language L of lower predicate logic (LPC) uses the following primitive symbols:

- For every natural number n, a nonempty set (at most denumerably infinite) of n-place predicates P_n^m.
- A denumerably infinite set of individual variables $\{x_i : i \in \omega\}$.
- The logical symbols $\forall$, $\rightarrow$, $\neg$, the left parenthesis (and the right parenthesis).

To simplify the notation, we may use P instead of P_n^m for the m-th n-place predicate. Additional logical symbols, such as $\wedge$ and $\vee$ are introduced into L in the standard way.

The notion of formulas of L is discursively defined. For any n-place predicate P, $P(x_1, \ldots, x_n)$ is an atomic formula. An atomic formula is a formula. If ϕ and ψ are formulas and x_i is a variable, then $(\neg\phi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, and $((\forall x_i)\phi)$ are formulas. Parentheses in formulas are omitted by following certain conventions[12].

The concept of free and bound occurrences of variables and the notion of a variable being free for another variable in a formula ϕ are defined as usual. A variable is said to be free in a formula ϕ if it has a free occurrence in ϕ.

By writing a formula ϕ as $\phi(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})$, we indicate that some of the variables $x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}$ are free variables in ϕ. This, however, does not mean that ϕ contains these variables as free variables, nor does it mean that ϕ does not contain other free variables. This notation is convenient because we can then agree to write as $\phi(x_{k_1}/x_{p_1}, \ldots, x_{k_n}/x_{p_n})$ the result of

- replacing all bound occurrences of x_{p_i} in ϕ by x_{j+i}, where j is the least number larger than the subscripts (including $p_1, \ldots, p_n$) of all variables occurring in ϕ, and then

- replacing all free occurrences of x_{k_i} in ϕ by x_{p_i}, where $1 \leqslant i \leqslant n$, $k_i \in \omega$, and $p_i \in \omega$.

Hence, all occurrences of x_{p_i} are free in $\phi(x_{k_1}/x_{p_1}, \ldots, x_{k_n}/x_{p_n})$. Of course, if none of the variables x_{k_i} occur in ϕ or each x_{k_i} is not free in ϕ (has no free occurrences in ϕ), then $\phi(x_{k_1}/x_{p_1}, \ldots, x_{k_n}/x_{p_n})$ is always equivalent to ϕ within LPC.

Additionally, we can also agree to write as $\phi(x_{k_1}|x_{p_1}, \ldots, x_{k_n}|x_{p_n})$ the result of substituting the variables $x_{p_1}, \ldots, x_{p_n}$ for all free occurrences (if any) of $x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}$ in ϕ, respectively.

The axioms of LPC for L are as follows:

1. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$.

2. $(\chi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\chi \rightarrow \phi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi))$.

3. $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi)$.

[12] Given a formula where some pairs of parentheses are missing, we can restore them by following a specific procedure. For more details, refer to [Mendelson, 2009, p. 20].

4. $\forall x_i \phi \to \phi(x_i|x_j)$, where x_j is free for x_i in ϕ and $\phi(x_i|x_j)$ is obtained from ϕ by replacing all free occurrences of x_i by x_j.

5. $(\forall x_i(\phi \to \psi)) \to (\phi \to \forall x_i \psi)$, where ϕ contains no free occurrences of x_i.

The rules of inference of LPC are Modus Ponens and Generalization.

A language $\mathcal{L}$ of modal LPC is simply formed from L by adding the modal operator $\Box$ to L and extending the notion of formulas so that if ϕ is a formula in $\mathcal{L}$, then so is $\Box\phi$.

Let S be a system of normal modal propositional logic. Then the axioms of S + LPC include those of LPC and the following extra: if ϕ is an axiom of S, then ϕ^+ is an axiom of S + LPC, where ϕ^+ results from uniformly replacing every propositional variable in ϕ by a formula of $\mathcal{L}$[13]. The rules of inference of S + LPC are those of LPC plus the necessity rule: from ϕ one can derive $\Box\phi$.

Another principle of modal LPC is the Barcan Formula (BF), stated as $\forall x \Box\phi \to \Box\forall x\phi$ in $\mathcal{L}$. S + BF is the system S + LPC with the Barcan Formula. In the paper, normal modal LPC always refers to S + BF.

Given a system Λ, which is LPC or S + BF, we use $\vdash_\Lambda \phi$ to mean that ϕ is a theorem of Λ.

Regarding semantics for modal PLC, a frame is simply an ordered pair $\langle W, R\rangle$, where W is a nonempty set of worlds and R is a binary relation on W. For a frame $\langle W, R\rangle$, a model for $\mathcal{L}$ on the frame is a quadruple $\langle W, R, D, V\rangle$, where D is a nonempty set, V is a function such that where P is a n-place predicate, $V(P)$ is a set of $n+1$-ary ordered pair $\langle d_1, ..., d_n, w\rangle$ for $d_i \in D$ and $w \in W$.

An assignment ρ to the variables in $\mathcal{L}$ is a function such that for each x_i in $\mathcal{L}$, $\rho(x_i) \in D$. For two assignments ρ and σ, σ is called an *x_i-alternative to ρ* if for every variable x_j except possibly x_i, $\rho(x_j) = \sigma(x_j)$. The notion of a formula ϕ being true in a world w relative to an assignment ρ, in notation, $V_\rho(\phi, w) = 1$, is recursively defined as follows:

- $V_\rho(P(x_1, ..., x_n), w) = 1$ if $\langle \rho(x_1), ..., \rho(x_n), w\rangle \in V(P)$, and 0 otherwise.

- $V_\rho(\neg\phi, w) = 1$ if $V_\rho(\phi, w) = 0$, and 0 otherwise.

- $V_\rho(\phi \to \psi, w) = 1$ if it is not the case that $V_\rho(\phi, w) = 1$ and $V_\rho(\psi, w) = 0$, and 0 otherwise.

- $V_\rho(\forall x_i \phi, w) = 1$ if ρ, $V_\mu(\phi, w) = 1$ for every x_i-alternative μ, and 0 otherwise.

[13] Here, we temporally assume that ϕ is a formula of the propositional language of S.

- $V_\rho(\Box\phi, w) = 1$ if $V_\rho(\phi, v) = 1$ for every $v \in W$ such that wRv, and 0 otherwise.

These semantic rules, except the second, ensure that the Barcan Formula is true in every world relative to every assignment.

A formula ϕ is valid in the model $\langle W, R, D, V\rangle$ based on the frame $\langle W, R\rangle$ if $V_\rho(\phi, w) = 1$ for every assignment ρ and every world w in W. ϕ is valid on $\langle W, R\rangle$ if it is valid in every model based on it. A frame is said to be for S + BF (or S) if every theorem of S + BF (or S) is valid on the frame.

3. Models constructed out of ultrafilters

In the traditional completeness proof, the possible worlds in the canonical model for $\mathcal{L}$ are maximal consistent sets that have what is known as the $\forall$-property. This property ensures that if a formula of the form $\forall x_i\phi$ is false in some world, then there must be some object x_j in the domain (i.e., the set of all individual variables) falsifying ϕ. However, our model will not use ultrafilters with the $\forall$-property as possible worlds, while still fulfilling everything the property is intended to ensure.

To construct such a model, we first have to algebraize a normal modal predicate system Λ (= S + BF) to set up a Boolean algebra thereof. This can be achieved by imposing a Boolean algebraic structure upon it. Define a relation $\equiv$ on the set Φ of all formulas of $\mathcal{L}$ as follows:

Definition 2. For any $\phi, \psi \in \Phi$, $\phi \equiv \psi$ if $\vdash_\Lambda \phi \leftrightarrow \psi$.

This is an equivalence relation; moreover, it is a congruence relation. Let $[\phi]$ be the equivalence class of ϕ under the relation, i.e., $[\phi] = \{\psi \in \Phi : \vdash_\Lambda \phi \leftrightarrow \psi\}$. Moreover, let $\Phi/_\equiv = \{[\phi] : \phi \in \Phi\}$ be the smallest set of all equivalence classes of formulas of $\mathcal{L}$. The set shall be partially ordered by imposing the following relation $\leqslant$ on it:

Definition 3. For all $\phi, \psi \in \Phi$, $[\phi] \leqslant [\psi]$ if $\vdash_\Lambda \phi \to \psi$.

The ordered pair $\mathfrak{L} = \langle \Phi/_\equiv, \leqslant\rangle$ is called the *Lindenbaum algebra* of Λ.

As can be shown, the following lemma holds:

Lemma 1. *Let ϕ, ψ, and φ be any member of Φ.*

1. $[\phi] \sqcup [\psi] = [\phi \vee \psi]$, $[\phi] \sqcap [\psi] = [\phi \wedge \psi]$.

2. $[\phi] = 1$ *if and only if* $\vdash_\Lambda \phi$, $[\phi] = 0$ *if and only if* $\vdash_\Lambda \neg\phi$.

3. $[\phi]^* = [\neg\phi]$.

4. $([\phi] \sqcup [\psi]) \sqcap [\varphi]) = ([\phi] \sqcap [\varphi]) \sqcup ([\phi] \sqcap [\varphi])$.

The lemma implies that $\mathfrak{L}$ is a distributive complemented lattice, i.e., a Boolean algebra. On the basis of Lemma 1 and the properties of ultrafilters, it is a routine exercise to show that given an ultrafilter u in $\mathfrak{L}$, for any formulas ϕ and ψ of $\mathcal{L}$:

1. $[\neg\phi] \in u$ if and only if $[\phi] \notin u$.

2. $[\phi \wedge \psi] \in u$ if and only if $[\phi] \in u$ and $[\psi] \in u$.

3. if $[\phi \rightarrow \psi] \in u$ and $[\phi] \in u$, then $[\psi] \in u$.

An appeal to these propositions shall be made later without explicit mention.

Now we state an important lemma which holds not only for $\mathrm{S} + \mathrm{BF}$ but also for LPC:

Lemma 2. *For each formula ϕ of the language $\mathcal{L}$ of* $\mathrm{S} + \mathrm{BF}$ *or of the language L of LPC,* $[\forall x_k \phi] = \mathit{inf}\{[\phi(x_k/x_p)] : p \in \omega\}$ [Bell, Slomson, 2006, p. 61].

Finally we can come to construct the long promised model with ultrafilters in $\mathfrak{L}$. As in other completeness proofs, we have to presuppose that our modal systems Λ are consistent (this can be proven). Given their consistency, there must be formulas $\psi \in \Phi$ such that not $\vdash_\Lambda \psi$. Then by Lemma 1, $[\psi] \neq 1$ in the Boolean algebra $\mathfrak{L}$ and so $[\neg\psi] \neq 0$ in this algebra. Note that there are only countably many formulas in our language $\mathcal{L}$—that is, the cardinal number of Φ is the least aleph. Therefore, the collection $\{A_\phi : \phi \in \Phi\}$, where $A_\phi = \{[\phi(x_k/x_p)] : p \in \omega\}$, is countable. By Lemma 2, for each formula $\phi \in \Phi$,

(T) $[\forall x_k \phi] = \mathit{inf}\, A_\phi = \mathit{inf}\{[\phi(x_k/x_p)] : p \in \omega\}$.

Now by Tarski's Lemma, for every formula ψ which is not a theorem of Λ, there exists an ultrafilter u in $\mathfrak{L}$ containing $[\neg\psi]$ which preserves the infinite meets of A_ϕ. Let $\mathcal{U}$ be the set of all such ultrafilters u, which are intended to be the possible worlds in our model.

Next we define a binary relation $\mathcal{R}$ on $\mathcal{U}$ as follows. For every world u and v in $\mathcal{U}$, $u\mathcal{R}v$ if the condition is fulfilled: for each $\phi \in \Phi$, if $[\Box\phi] \in u$, then $[\phi] \in v$. Hence, we get a frame $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R} \rangle$.

We now construct a model $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R}, D, \mathcal{V} \rangle$ based upon the frame for the language $\mathcal{L}$, where:

- D is the set of all variables in $\mathcal{L}$.
- $\mathcal{V}$ is such a function that for every n-place predicate letter P of $\mathcal{L}$, any variables $x_1, \ldots, x_n$ in D, and any $u \in \mathcal{U}$, $\langle x_1, \ldots, x_n, u \rangle \in \mathcal{V}(P)$ if $[P(x_1, \ldots, x_n)] \in u$.

An assignment ρ is called *canonical* if for each variable x_i in D, $\rho(x_i) = x_i$. It stands to reason that there is only one canonical assignment.

Suppose for every world u, every formula ϕ, and the canonical assignment ρ, $\mathcal{V}_\rho(\phi, u) = 1$ if and only if $[\phi] \in u$ (this shall be shown below). By the definition of formulas being true in models relative to assignments, if $\mathcal{V}_\rho(\Box\phi, u) = 0$ for some $u \in \mathcal{U}$, then there should be some world $v \in \mathcal{U}$ accessible from u such that $\mathcal{V}_\rho(\phi, v) = 0$. This would mean that if $[\Box\phi] \notin u$, there should be some $v \in \mathcal{U}$ such that $u\mathcal{R}v$ and $[\phi] \notin v$. However, the existence of such a world v is not immediately clear. Having said that, its existence is, in fact, guaranteed by the following lemmas.

Lemma 3. *For all $u \in \mathcal{U}$ and all $\phi, \psi \in \Phi$, if $[\Box\phi] \notin u$, then $\{[\psi] : [\Box\psi] \in u\} \cup \{[\neg\phi]\}$ has the fip.*

Proof. We show that $A = \{[\psi] : [\Box\psi] \in u\}$ has the *fip* by reductio ad absurdum. Suppose A does not have the *fip*. Then, there exists finitely many $\psi_i \in \Phi$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) such that each $[\psi_i]$ is in A and $[\psi_1] \sqcap \ldots \sqcap [\psi_n] = 0$.

$$
\begin{array}{rcl}
[\psi_1] \sqcap \ldots \sqcap [\psi_n] = 0 & \Rightarrow & \vdash_\Lambda \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \\
& \Rightarrow & \vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \phi \\
& \Rightarrow & \vdash_\Lambda \Box((\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \phi) \\
& & \vdash_\Lambda \Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi) \\
& \Rightarrow & \vdash_\Lambda \Box(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \Box\phi \\
& \Rightarrow & \vdash_\Lambda \neg\Box\phi \to \neg\Box(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \\
& & \vdash_\Lambda (\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n) \leftrightarrow \Box(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \\
& \Rightarrow & \vdash_\Lambda \neg\Box\phi \to \neg(\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n) \\
[\Box\phi] \notin u & \Rightarrow & [\neg\Box\phi] \in u \\
& \Rightarrow & [\neg(\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n)] \in u \\
& \Rightarrow & [\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n] \notin u \\
[\Box\psi_i] \in u & \Rightarrow & [\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n] \in u \\
& \Rightarrow & \text{This contradicts } u \text{ being an ultrafilter.}
\end{array}
$$

Therefore, A has the *fip*.

In this simple derivation, we have used the following facts. Since S is normal, K is a sub-theory of S by definition of normal modal propositional logic.

Furthermore, $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$ is an axiom (or axiomatic schema) of K, so it is a theorem of S. Similarly, since $(\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n) \leftrightarrow \Box(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$ is a theorem of K [Cresswell, Hughes, 1996, p. 27], it is a theorem of S.

Given that A has the *fip*, we prove by contradiction that $A \cup \{[\neg\phi]\}$ also has the *fip*. Suppose $A \cup \{[\neg\phi]\}$ does not have the *fip*. Then, there exists finitely many $\psi_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ such that $[\psi_1] \sqcap \ldots \sqcap [\psi_n] \sqcap [\neg\phi] = 0$. This would imply that $[\Box(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)] \leqslant [\Box\phi]$, as can be shown in a similar manner to the previous proof (i.e., the proof for A having the *fip*). Consequently, $[\Box\phi] \in u$, which contradicts the assumption that $[\Box\phi] \notin u$. Therefore, $A \cup \{[\neg\phi]\}$ has the *fip*. ■

Theorem 2 and Lemma 3 imply that:

Lemma 4. *For all $u \in \mathfrak{U}$ and all $\phi, \psi \in \Phi$, if $[\Box\phi] \notin u$, then there exists an ultrafilter $v \in \mathfrak{L}$ such that $\{[\psi] : [\Box\psi] \in u\} \cup \{[\neg\phi]\} \subseteq v$.*

Is this ultrafilter v in $\mathfrak{L}$ also a member of $\mathfrak{U}$? It turns out be so:

Lemma 5. *For all $u \in \mathfrak{U}$ and all $\phi, \psi \in \Phi$, if $[\Box\phi] \notin u$, then there exists some $w \in \mathfrak{U}$ such that $\{[\psi] : [\Box\psi] \in u\} \cup \{[\neg\phi]\} \subseteq w$.*

Proof. By the definition of $\mathfrak{U}$, $w \in \mathfrak{U}$ if and only if there exists some formula $\chi \in \Phi$ such that

(i) not $\vdash_\Lambda \chi$.

(ii) $[\neg\chi] \in w$.

(iii) w preserves the infinite meets of A_ψ, where $A_\psi = \{[\psi(x_k/x_p)] : p \in \omega\}$.

We claim that the ultrafilter v as mentioned in Lemma 4 is one of the desired ultrafilters $w \in \mathfrak{U}$ and ϕ is one of the desired formulas χ.

Let us show that clauses (i)–(iii) are satisfied by v and ϕ.

1. If (i) does not hold for ϕ, then $\vdash_\Lambda \phi$. Therefore $[\phi] = 1$; so since 1 is the maximum in $\mathfrak{L}$ and v is an ultrafilter therein, $[\phi] \in v$. Thus, we have $[\phi] \in v$, but by Lemma 4, $[\neg\phi] \in v$, which contradicts v being an ultrafilter.

2. Trivially, (ii) holds for v and ϕ according to Lemma 4.

3. Let us show that v preserves the infinite meets of A_ψ. To this purpose, it suffices to show that for every $\psi \in \Phi$,

$$h([\forall x_k \psi]) = \mathit{inf}\, A_\psi = \mathit{inf}\{h([\psi(x_k/x_p)]) : p \in \omega\}$$

where, for every $\psi \in \Phi$,

$$h([\psi]) = \begin{cases} 1 & \text{if } [\psi] \in v, \\ 0 & \text{if } [\psi] \notin v. \end{cases}$$

(a) We firstly show that $h([\forall v_k \psi]) \leqslant \mathit{inf}\{h([\psi(x_k/x_p)]) : p \in \omega\}$. Now if $[(\forall v_k)\psi] \notin v$, then $h([\forall v_k \psi]) = 0$, i.e., the minimum in **2**. Therefore, $h([\forall v_k \psi]) = 0 \leqslant h([\psi(v_k/x_p)])$ for all $p \in \omega$.
Now suppose $[\forall x_k \psi] \in v$. So $h([\forall x_k \psi]) = 1$. It is a routine exercise to show that the following proposition holds not only for LPC but also for Λ:

$$\vdash_\Lambda \forall x_k \psi \to \psi(x_k/x_p).$$

This proposition implies that for all $p \in \omega$, $[\psi(x_k/x_p)] \in v$, which implies that $h([\psi(x_k/x_p)]) = 1$ for all $p \in \omega$. Therefore, $h([\forall x_k \psi]) = 1 \leqslant \mathit{inf}\{h([\psi(x_k/x_p)]) : p \in \omega\} = 1$.

(b) Next we show that $\mathit{inf}\{h([\psi(x_k/x_p)]) : p \in \omega\} \leqslant h([\forall x_k \psi])$. Obviously, this holds if $[\forall x_k \psi] \in v$. Suppose $[\forall x_k \psi] \notin v$. So $h([\forall x_k \psi]) = 0$. Recall that (T) holds. Therefore, $[\forall x_k \psi] \in v$ if and only if, for all $p \in \omega$, $[\psi(x_k/x_p)] \in v$. Thus, by the supposition, there is some $p \in \omega$ such that $[\psi(x_k/x_p)] \notin v$, which means that $h([\psi(x_k/x_p)]) = 0 = \mathit{inf}\{h([\psi(x_k/x_p)]) : p \in \omega\}$. Therefore, $h([\forall x_k \psi]) = 0 \leqslant \mathit{inf}\{h([\psi(x_k/x_p)]) : p \in \omega\} = 0$.

■

Now that we have made all necessary preparations, we are ready to state the theorem that will be used in the completeness proofs for normal modal predicate logic:

Theorem 4. *Given the model $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R}, D, \mathcal{V} \rangle$ and the canonical assignment ρ, for each formula ϕ of $\mathcal{L}$ and each $u \in \mathcal{U}$, $\mathcal{V}_\rho(\phi, u) = 1$ if and only if $[\phi] \in u$.*

Proof. This is to be proven by induction on the complexity of ϕ of $\mathcal{L}$.

1. ϕ is an atomic formula $P(x_1, \ldots, x_n)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\rho(P(x_1, \ldots, x_n), u) = 1 \quad &\text{iff} \quad \langle \rho(x_1), \ldots, \rho(x_n), u \rangle \in \mathcal{V}(P) \\ &\text{iff} \quad \langle x_1, \ldots, x_n, u \rangle \in \mathcal{V}(P) \\ &\text{iff} \quad [P(x_1, \ldots, x_n)] \in u \end{aligned}$$

Assume $V_\rho(\phi, u) = 1$ if and only if $[\phi] \in u$ holds for any arbitrary formula ϕ. We show that this also holds for any formula χ of the following forms:

2. χ is of the form $\neg\phi$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\rho(\neg\phi, u) = 1 \quad &\text{iff} \quad \mathcal{V}_\rho(\phi, u) = 0 \\ &\text{iff} \quad [\phi] \notin u \\ &\text{iff} \quad [\phi]^* \in u \\ &\text{iff} \quad [\neg\phi] \in u. \end{aligned}$$

3. χ is of the form $\phi \wedge \psi$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\rho(\phi \wedge \psi, u) = 1 \quad &\text{iff} \quad \mathcal{V}_\rho(\phi, u) = 1 \text{ and } \mathcal{V}_\rho(\psi, u) = 1 \\ &\text{iff} \quad [\phi] \sqcap [\psi] \in u \\ &\text{iff} \quad [\phi \wedge \psi] \in u. \end{aligned}$$

4. χ is of the form $\Box\phi$.
   (a) Suppose $[\Box\phi] \in u$ and $u\mathcal{R}w$. So $[\phi] \in w$ and $\mathcal{V}_\rho(\phi, w) = 1$. Since this is true of every $w \in \mathcal{U}$ such that $u\mathcal{R}w$, $\mathcal{V}_\rho(\Box\phi, u) = 1$.
   (b) Suppose $[\Box\phi] \notin u$. So by Lemma 5, there is some $w \in \mathcal{U}$ such that $[\neg\phi] \in w$. Therefore, by assumption, $\mathcal{V}_\rho(\neg\phi, w) = 1$ and so $\mathcal{V}_\rho(\phi, w) = 0$. Now again by by Lemma 5, $u\mathcal{R}w$. So $\mathcal{V}_\rho(\Box\phi, u) = 0$.

5. χ is of the form $\forall x_k\phi$.
   (a) Suppose $[\forall x_k\phi] \in u$. Let σ be any x_k-alternative to ρ. This means that $\sigma(x_k) = x_p$ for some $x_p \in D$. Recalll that we have:

$$\vdash_\Lambda \forall x_k\phi \to \phi(x_k/x_p).$$

   By this proposition, it is implied by the supposition that $[\phi(x_k/x_p)] \in u$. This, by the induction assumption, means that $\mathcal{V}_\rho(\phi(x_k/x_p, u) = 1$. Note the following equivalence holds:

$\mathcal{V}_\rho(\phi(x_k/x_p), u) = 1$ if and only if $\mathcal{V}_\sigma(\phi, u) = 1$[14]. Since σ is an arbitrary x_k-alternative to ρ, $\mathcal{V}_\rho(\forall x_k\phi, u) = 1$.

(b) Suppose $[\forall x_k\phi] \notin u$. Recall (T), which implies that:

$$[\forall x_k\phi] \in u \quad \text{if and only if} \quad [\phi(x_k/x_p)] \in u \text{ for all } p \in \omega.$$

The supposition then implies that for some p, $[\phi(x_k/x_p)] \notin u$. So by the induction assumption, $\mathcal{V}_\rho(\phi(x_k/x_p), u)] = 0$. By the just-mentioned equivalence in (a), $\mathcal{V}_\sigma(\phi, u) = 0$. So $\mathcal{V}_\rho(\forall x_k\phi, u) = 0$.

■

In the classical completeness proof, the possible worlds in the canonical model $\langle W, R, D, V\rangle$ must have the so-called $\forall$-property, as mentioned earlier. This requirement is intended to ensure that for any $w \in W$, if $\forall x_i\phi \notin w$, then there must be a variable x_j such that $\phi(x_i|x_j) \notin w$. The importance of the Barcan Formula in ensuring that the possible worlds possess this property is highlighted in the proofs in [Cresswell, Hughes, 1996, p. 257, 261].

In our proof, we also ensure that for any $u \in \mathcal{U}$, if $[\forall x_k\phi] \notin u$, then there exists a variable x_p such that $[\phi(x_k|x_p)] \notin u$. This assurance comes from (T), which implies that $[\phi(x_k/x_p)] \notin u$ for some x_p. Since $\phi(x_k|x_p)$ is either the same as or equivalent to $\phi(x_k/x_p)$ in our modal system Λ, we conclude that $[\phi(x_k|x_p)] \notin u$. Hence, in our algebraic completeness proof, the insurance does not appeal to the Barcan Formula.

As is clear, every theorem ϕ of Λ is true in the model $\langle\mathcal{U}, \mathcal{R}, D, \mathcal{V}\rangle$ with respect to the canonical assignment ρ. Since ϕ is a theorem, $[\phi] = 1$. Consequently, $[\phi]$ is the maximal element of the Boolean algebra $\mathfrak{L}$, making it a member of every ultrafilter $u \in \mathcal{U}$. This means that $\mathcal{V}_\rho(\phi, u) = 1$. On the other hand, every non-theorem ϕ is false in the model relative to the canonical assignment, as demonstrated by the construction of the possible worlds. Specifically, for every non-theorem ϕ, $[\neg\phi]$ belongs to some possible world u in $\mathcal{U}$, which implies that $\mathcal{V}_\rho(\phi, u) = 0$. Thus, we have the following proposition:

Corollary 1. For any formula ϕ of $\mathcal{L}$, $\mathcal{V}_\rho(\phi, u) = 1$ if and only if $\vdash_\Lambda \phi$, where Λ is $\mathrm{S} + \mathrm{BF}$.

A modal system $\mathrm{S} + \mathrm{BF}$ is considered complete with respect to a class of frames if every formula that is valid on every frame within this class is a theorem

[14] The free variables in ϕ are among x_k, x_p, and others (if any). Now σ assigns x_p to x_k and assigns to other free variables occurring in ϕ those variables themselves. This is exactly what ρ does to $\phi(x_k/x_p)$. Since the truth-value of ϕ depends on the values assigned to its free variables, $\mathcal{V}_\rho(\phi(x_k/x_p), u) = 1$ if and only if $\mathcal{V}_\sigma(\phi, u) = 1$.

of the system. In other words, $S + BF$ achieves completeness if every formula that is valid on every frame for it is a theorem thereof. It's straightforward to demonstrate that a frame is for $S + BF$ if and only if it is for S [Cresswell, Hughes, 1996, p. 249]. Therefore, to apply the corollary to establish whether $S + BF$ is complete, it suffices to determine if the frame $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R} \rangle$ of our model is a frame for S. Let's take $S4 + BF$ as an illustration. In this scenario, we simply need to confirm that $\mathcal{R}$ is both reflexive and transitive on $\mathcal{U}$. This verification is straightforward. Consequently, any formula that is valid on a reflexive and transitive frame must be a theorem of $S4 + BF$.

Of course, if the frame $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R} \rangle$ is not a frame for S and thus not for $S + BF$ then this by no means implies that $S+BF$ is incomplete. Instead, this indicates that our method is not applicable. The method yields results only if the frame in question is a frame for $S + BF$.

4. Conclusion

In this paper, we explore two completeness proofs for consistent normal modal predicate logics that rely on Boolean algebras, offering different semantics for them. Our approach consistently uses ultrafilters, while the other algebraic proofs also incorporate Q-filters. Our completeness proof significantly diverges from the traditional method, as we do not construct our model from the canonical model by implicitly treating it as an isomorphic copy of the latter. Additionally, we do not employ the Barcan Formula to establish the existence of possible worlds, a step heavily relied upon in the traditional approach. While our proof does not yield groundbreaking insights, it introduces a novel methodology to reach a well-established conclusion. Our innovation lies in the approach itself.

Acknowledgements. This work was supported by the National Social Science Fund of China under Grant No. 23BZX068. I would also like to express my gratitude to the anonymous reviewer whose valuable recommendations significantly contributed to the refinement of this paper.

References

Cresswell, Hughes, 1996 – Cresswell, M.J., Hughes, G.E. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1996.

Blackburn et al., 2002 – Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2002.

Henkin, 1949 – Henkin, L. "The Completeness of the First-Order Functional Calculus", *Journal of Symbolic Logic*, 1949, Vol. 14, No. 3, pp. 159–166.

Mendelson, 2009 – Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*. 5th ed. Chapman & Hall/CRC, 2009.

Bell, Slomson, 2006 – Bell, J.L., Slomson, A.B. *Models and Ultraproducts: An Introduction*. Dover, 2006.

Rasiowa, Sikorski, 1963 – Rasiowa, H., Sikorski, R. *The Mathematics of Metamathematics*, ed. by P.W. Naukowe. Patfstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1963.

Corsi, 2002 – Corsi, G. "A Unified Completeness Theorem for Quantified Modal Logics", *The Journal of Symbolic Logic*, 2002, Vol. 67, No. 4, pp. 1483–1510.

Venema, 2007 – Venema, Y. "Algebras and Coalgebras", in: *Handbook of Modal Logic*, Vol. 3, ed. by P. Blackburn, J. van Benthem, F. Wolter. Amsterdam: Elsevier, 2007, pp. 331–426.

Tanaka, 2022 – Tanaka, Y. "An Extension of Jónsson–Tarski Representation and Model Existence in Predicate Non-Normal Modal Logics", *Math. Log. Quart*, 2022, Vol. 68, No. 2, pp. 189–201.

Tanaka, Ono, 1998 – Tanaka, Y., Ono, H. "Rasiowa–Sikorski Lemma, Kripke Completeness of Predicate and Infinitary Modal Logics", in: *Advances in Modal Logic*, ed. by M. Zakharyaschev, K. Segerberg, M. de Rijke, and H. Wansing. Stanford: CSLI Publications, 1998, pp. 419–437.

Negri, 2009 – Negri, S. "Kripke Completeness Revisited", in: *Acts of Knowledge: History, Philosophy and Logic*, ed. by G. Primiero. College Publications, 2009, pp. 233–266.

Negri, von Plato, 2011 – Negri, S., von Plato, J. *Proof Analysis: A Contribution to Hilbert's Last Problem.* Cambridge University Press, 2011.

Chagrov, Zakharyaschev, 1997 – Chagrov, A., Zakharyaschev, M. *Modal Logic.* Oxford University Press, 1997.

Булево-алгебраический подход к полноте для нормальных модальных предикатных логик

Вейджун Ши
Сианьский университет, Китай.
E-mail: shiweijun@xidian.edu.cn

Аннотация: В этой статье представлена инновационная методология для демонстрации полноты в нормальных модальных предикатных логиках. Традиционные доказательства обычно включают построение канонических моделей, в которых возможные миры определяются как максимальные непротиворечивые множества, обладающие определенными свойствами, с большой опорой на формулу Баркана для подтверждения существования этих миров. Наш подход отклоняется от классического метода, используя булевы алгебры и ультрафильтры для построения моделей. В отличие от традиционных методов, наше построение возможных миров не зависит от формулы Баркана; вместо этого данные свойства гарантируются леммой Тарского.

Кроме того, наше доказательство отличается от других булево-алгебраических доказательств полноты в двух ключевых аспектах: оно использует семантику Крипке вместо алгебраической семантики и опирается исключительно на ультрафильтры, тем самым предлагая более лаконичный подход. Эта методология способствует естественному переходу от модальной логики высказываний к модальной логике предикатов и позволяет избежать дополнительной сложности Q-фильтров. В нашей модели класс эквивалентности каждой теоремы нормальной модальной предикатной логики является членом всех миров, тогда как класс эквивалентности каждой не-теоремы является членом некоторых миров. Как следствие, структура этих миров гарантирует, что не-теоремы ложны в модели.

Ключевые слова: нормальные модальные предикатные логики, булевы алгебры, полнота, лемма Тарского

Логические исследования
2024. Т. 30. № 2. С. 44–71
УДК 164.1

Logical Investigations
2024, Vol. 30, No. 2, pp. 44–71
DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-44-71

Неклассическая логика
Non-classical Logic

Л.Ю. Девяткин

Трехзначные обобщения классической логики в бедных языках: степень максимальности следования*

Леонид Юрьевич Девяткин
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: `deviatkin@iph.ras.ru`

Аннотация: В статье рассмотрены степени максимальности следования в классе **C**-расширяющих трехзначных логик, языки которых обладают минимальной выразительной силой. Логика называется **C**-расширяющей, если ее операции совпадают с таковыми для классической логики при ограничении их области определения классическими истинностными значениями. Под степенью максимальности логики понимается множество всех ее дедуктивных расширений в том же языке.

Каждая трехзначная **C**-расширяющая логика может рассматриваться как языковое расширение одной из десяти трехзначных логик.

Мы даем оценку степени максимальности для каждой из этих логик. В тех случаях, когда степень максимальности конечна, нами получены точные значения. В тех случаях, когда она оказывается бесконечна, приводится нижняя граница мощности решетки дедуктивных расширений соответствующей логики. Исключение составляет одна система, для которой показано, что степень максимальности ее следования континуальна.

Работа посвящена исследованию теоретико-доказательных свойств трехзначных логик на основе выразительных возможностей их языков. Полученные результаты ставят ряд вопросов, намечающих новые направления исследований в этой области.

Ключевые слова: пропозициональная логика, многозначные логики, **C**-расширяющие логики, выразительные возможности формальных языков, степень максимальности следования

Для цитирования: *Девяткин Л.Ю.* Трехзначные обобщения классической логики в бедных языках: степень максимальности следования // Логические исследования / Logical Investigations. 2024. Т. 30. № 2. С. 44–71. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-44-71

* Автор признателен анонимному рецензенту за замечания, которые помогли существенно улучшить работу. В особенности автор благодарен за предложенное название статьи, которое отражает ее содержание точнее, чем изначально выбранный автором вариант.

1. Введение

Исследование многозначных логик, берущее начало в трудах Яна Лукасевича [Łukasiewicz, 1970] и Эмиля Поста [Post, 1921], стало важным направлением развития современной логики. Среди многозначных логик особый интерес представляют так называемые **C**-расширяющие[1] логики. Их отличительная особенность заключается в том, что они обобщают определения операций классической логики, сохраняя ее таблицы истинности для классических значений.

Многие известные многозначные логики, такие как логика Лукасевича, логика Клини и логика Гёделя, являются **C**-расширяющими[2]. Естественно возникает вопрос о том, каковы общие свойства логик, задаваемых **C**-расширяющими матрицами, и какие теоретико-доказательные особенности их характеризуют.

В данной работе мы фокусируемся на исследовании одного из таких свойств — степени максимальности. Степень максимальности логики **L** определяется как мощность множества всех ее надлогик с тем же языком, что и у **L**, включая противоречивую логику.

Предметом нашего исследования являются минимальные с точки зрения выразительных возможностей языка **C**-расширяющие логики. Мы ограничиваемся рассмотрением трехзначных логик. Как следует из работы А.В. Макарова [Makarov, 2015], каждая трехзначная **C**-расширяющая логика является языковым расширением одной из десяти логик, задаваемых матрицами особого вида.

Целью работы является установление степеней максимальности для каждой из этих минимальных логик. Мы показываем, что степени максимальности рассматриваемых логик варьируются от 2 до бесконечности.

Дальнейшая структура работы такова. В разделе 2 мы даем определения основных понятий, связанных с используемым в статье формальным инструментарием. Раздел 3 посвящен **C**-расширяющим логикам, которые являются объектом нашего исследования. В разделах 4–8 доказываются теоремы о степенях максимальности для каждой из интересующих нас логик. В заключительном разделе 9 мы даем краткое резюме полученных результатов и намечаем направления для дальнейших исследований.

---

[1] От англ. *classical*.

[2] Примером многозначной логики, которая не является **C**-расширяющей, может служить логика Поста. Мы вернемся к ней на стр. 49.

2. Основные понятия

Называем *пропозициональным языком* алгебру формул $\mathcal{S} = \langle S, Con \rangle$, свободную в классе всех алгебр аналогичной сигнатуры, где S — множество всех формул языка $\mathcal{S}$, а Con — множество алгебраических функций на S, не обязательно конечное. Пусть C — оператор, определенный на $\mathcal{P}(S)$, множестве всех подмножеств универсума $\mathcal{S}$. Называем C *следованием* в S, если для всех $X, Y \subseteq S$ выполнены следующие условия:

1. $X \subseteq C(X)$;
2. $X \subseteq Y$, то $C(X) \subseteq C(Y)$;
3. $C(C(X)) \subseteq C(X)$.

Если $\varepsilon C(X) \subseteq C(\varepsilon X)$ для любой подстановки ε языка $\mathcal{S}$, называем следование C *структурным.* Называем *пропозициональной логикой* пару $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C \rangle$, где $\mathcal{S}$ — пропозициональный язык, а C — структурное следование.

Логическая матрица — это структура $M = \langle A, F, D \rangle$, где A — множество, F — множество алгебраических функций на A, не обязательно конечное, а D — подмножество A, возможно, пустое. Называем D *множеством выделенных значений* M. Если алгебры $\mathcal{S} = \langle S, Con \rangle$ и $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ имеют одинаковую сигнатуру, говорим, что M — *матрица для* $\mathcal{S}$. Если M — матрица для $\mathcal{S}$, гомоморфизм v из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой* $\mathcal{S}$ в M. Обозначаем как $Val(\mathcal{S}, M)$ множество всех таких оценок. В тех случаях, когда выбор $\mathcal{S}$ очевиден из контекста, будем писать просто $Val(M)$.

Определяем *следование* C_M*, порождаемое матрицей* M, следующим образом: $\alpha \in C_M(X)$, если для любой оценки v в M верно, что $v(\alpha) \in D$, коль скоро $v(X) \subseteq D$. Называем M *характеристической матрицей* для $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C \rangle$, если $C = C_M$. Называем класс матриц K для $\mathcal{S}$ *матричной семантикой* для $\mathcal{S}$.

Говорим, что следование порождено классом матриц K, если выполнено следующее условие: $\alpha \in C_K(X)$, е.т.е. $\alpha \in C_{M_i}(X)$ для каждой $M_i \in K$. Иными словами, $C_K = inf\{C_{M_i} \mid M_i \in K\}$. Называем матричную семантику K *адекватной для* $\mathbf{L}$, если $C_K = C$. Если K — адекватная матричная семантика для $\mathbf{L}$, говорим, что $\mathbf{L}$ *детерминирована* семантикой K.

Пусть $M = \langle A, F, D \rangle$ и $N = \langle B, G, E \rangle$ — логические матрицы, причем их алгебры $\langle A, F \rangle$ и $\langle B, G \rangle$ имеют одинаковую сигнатуру. Говорим, что φ — *матричный гомоморфизм из* M *в* N[3], если

[3] См. [Wójcicki, 1988, § 3.3.1.b].

- φ — отображение множества A в множество B;
- $\varphi(f_i^n(a_1, \ldots, a_n)) = g_i^n(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$ для всех $f_i^n \in F$, $g_i^n \in G$, $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$;
- $\varphi(a) \in E$, е.т.е. $a \in D$.

Класс всех таких матриц N, что существует матричный гомоморфизм из M в N, обозначим как $H(M)$. Класс всех таких матриц N, что существует матричный гомоморфизм из N в M, обозначим как $H^{-1}(M)$. Если между M и N существует взаимно однозначный гомоморфизм, говорим, что матрицы M и N *изоморфны*.

Пусть C_1 и C_2 — следования в S. Определим порядок $\geqslant$ следующим образом: $C_2 \geqslant C_1$, если $C_1(X) \subseteq C_2(X)$ для всех $X \subseteq S$. Заметим, что $C_2 = C_1$, если $C_2 \geqslant C_1$ и $C_1 \geqslant C_2$; $C_2 > C_1$, если $C_2 \geqslant C_1$ и $C_2 \neq C_1$.

Факт 1. [Wójcicki, 1988, § 3.3.2 (D)] Пусть φ — матричный гомоморфизм из M в N. Тогда $C_M = C_{\varphi(M)} = C_{\varphi^{-1}(N)} \geqslant C_N$.

Пусть $M = \langle A, F, D \rangle$ и $N = \langle B, G, E \rangle$ — логические матрицы для $\mathcal{S}$. Говорим, что N — *подматрица* M, если $B \subseteq A$; $E \subseteq D$; $f^n(b_1, \ldots, b_n) \in B$ для каждой функции $f^n \in F$ и любого $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$, то есть все функции из F являются алгебраическими не только на A, но и на B.

Факт 2. [Ibid., § 3.3.2 (A)] Если N — подматрица M, то $C_N \geqslant C_M$.

Пусть $M_1, \ldots, M_k$ — логические матрицы для $\mathcal{S}$, где $M_i = \langle A_i, F_i, D_i \rangle$. Называем матрицу $N = \langle B, G, E \rangle$ *прямым произведением* матриц $M_1, \ldots, M_k$, если $B = A_1 \times \ldots \times A_k$; $E = D_1 \times \ldots \times D_k$;

$$g_i((a_{1,1}, \ldots, a_{k,1}), \ldots, (a_{1,n}, \ldots, a_{k,n})) = \\ (f_{1,i}(a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}), \ldots, f_{k,i}(a_{k,1}, \ldots, a_{k,n}))$$

для всех $f_{i,j} \in F_j$, $(a_{j,1}, \ldots, a_{j,n}) \in A_j^n$.

Обозначим как $P_n(K)$ множество всех прямых произведений вида $M_1 \times \ldots \times M_n$ матриц из класса $K \cup \{\tau_0, \tau_1\}$, где τ_0, τ_1 — одноэлементные матрицы, подобные матрицам из K, причем класс выделенных значений τ_0 пуст, а класс выделенных значений τ_1 совпадает с ее универсумом. Обозначим объединение всех $P_n(K)$ для каждого конечного $n \geqslant 1$ как $P_f(K)$.

Назовем логическую матрицу M *тривиальной*, если $C_M(X) = S$ для всех $X \subseteq S$. Матрица нетривиальна, если ее класс выделенных значений не пуст и не совпадает с универсумом данной матрицы.

Факт 3. [Zygmunt, 1974, Th. 1] Пусть M_1 и M_2 — нетривиальные логические матрицы для языка $\mathcal{S}$. Тогда для каждого $X \subseteq S$ верно следующее:

$$C_{M_1 \times M_2} = \begin{cases} S, \text{ если } C_{M_1}(X) = S \text{ или } C_{M_2}(X) = S, \\ C_{M_1}(X) \cap C_{M_2}(X) \text{ в противном случае} \end{cases}.$$

Дополним это утверждение, рассмотрев те случаи, в которых по меньшей мере одна из матриц тривиальна.

Факт 4. Пусть матрица M_1 не является тривиальной. Если класс выделенных значений M_2 пуст, то $C_{M_1 \times M_2} = C_{M_2}$, так как класс выделенных значений $M_1 \times M_2$ тоже пуст. Если класс выделенных значений M_2 совпадает с ее универсумом, то $C_{M_1 \times M_2} = C_{M_1}$, так как в этом случае существует сюръективный матричный гомоморфизм из $M_1 \times M_2$ на M_1. Аналогично для тех случаев, когда матрица M_1 тривиальна, а матрица M_2 таковой не является. Произведение двух тривиальных матриц дает тривиальную матрицу.

Факт 5. Пусть C и C' — структурные следования в языке $\mathcal{S}$, причем $C' \geqslant C$. Пусть K — такой класс матриц для $\mathcal{S}$, что $C = C_K$. Тогда найдется такой класс $K_0 \subseteq SP(K)$, что $C' = C_{K_0}$ [Wojtylak, 1979]. Если K — конечный класс конечных матриц, то $K_0 \subseteq SP_f(K)$ [Wójcicki, 1988, § 4.5.7].

Пусть $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C \rangle$ — пропозициональная логика. Обозначим как $\mathbb{L}(C)$ надрешетку структурных усилений C: $\{C' \mid C' \geqslant C\}$. Называем *степенью максимальности* C мощность $\mathbb{L}(C)$.

Пусть $\mathcal{S}$ — пропозициональный язык, и C_1, C_2 — следования на $\mathcal{P}(S)$. Пусть $\mathbf{L}_1 = \langle \mathcal{S}, C_1 \rangle$ и $\mathbf{L}_2 = \langle \mathcal{S}, C_2 \rangle$. Называем $\mathbf{L}_2$ *надлогикой* $\mathbf{L}_1$, если $C_2 \geqslant C_1$. Если вдобавок $C_1 \neq C_2$, то говорим, что надлогика $\mathbf{L}_2$ является *собственной*. Заметим, что мощность множества надлогик $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C \rangle$ совпадает со степенью максимальности C.

3. C-расширяющие логики

Философская основа многозначной логики заключается в предположении, что высказывания могут принимать значения, отличные от традиционных истинностных значений — истины и лжи. Однако данное предположение не подразумевает полного отказа от классических значений. Если не все истинностные значения являются классическими, это не исключает наличия среди них классических значений.

Классические табличные определения для $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$ имеют следующий вид:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\supset$	0	1
0	1	1
1	0	1

x	$\neg x$
0	1
1	0

Для трехзначной логики определения, расширенные так, чтобы сохранялись классические значения, могут быть получены из приведенных ниже схем, если заменить каждое из вхождений «?» на один из элементов $\{0, 1, 2\}$.

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	?
1	0	1	?
1	?	?	?

$\vee$	0	1	2
0	0	1	?
1	1	1	?
1	?	?	?

$\supset$	0	1	2
0	1	1	?
1	0	1	?
1	?	?	?

x	$\neg x$
0	1
1	0
2	?

В данных схемах 2 выступает в качестве нового, неклассического, значения. Трехзначные таблицы истинности отражают существование неклассического значения, при том что определения связок остаются прежними, когда рассматриваются только классические значения.

Следуя А. С. Карпенко, называем матрицы такого рода **С**-*расширяющими* [Карпенко, 2010, с. 91]. Наиболее известные системы многозначной логики, как правило, получены именно дополнением стандартных определений связок в классической логике и являются **С**-расширяющими. Примерами могут служить логика Лукасевича [Łukasiewicz, 1970], логика Клини (сильная [Kleene, 1938] и слабая [Kleene, 1952, p. 334]), логика Бочвара [Бочвар, 1938], последовательность логик Гёделя [Gödel, 1986, p. 225].

Среди ранних систем многозначной логики исключение составляет логика Поста [Post, 1921], но ее исключительность проистекает из анализа функций, сохраняющих классические значения. Пост обратил внимание, что наличие операции, не сохраняющей классические значения, необходимо, чтобы система операций многозначной логики была функционально полной. Именно построение функционально полной системы операций на множестве, содержащем более двух элементов, мотивировало создание логики Поста.

Сформулируем более точное определение **С**-расширяющей матрицы, опираясь на функциональную полноту системы операций классической логики. Обратим внимание, что классическая логика может задаваться в разных языках, например: $\{\wedge, \vee, \supset, \neg\}$, $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\supset, \neg\}$, $\{\downarrow\}$. Это возможно в силу взаимной определимости операторов в разных наборах.

Обозначим как $[F]$ множество всех суперпозиций функций из множества F (см. [Марченков, 2004, с. 9]). Имеет место следующее: $[\wedge, \vee, \supset, \neg] = [\wedge, \vee, \neg] = [\supset, \neg] = [\downarrow] = P_2$, где P_2 — множество всех алгебраических функций на $E_2 = \{0, 1\}$. Определим матрицу классической логики без явного указания на ее сигнатуру: $CPC = \langle\{0, 1\}, F, \{1\}\rangle$, где $[F] = P_2$.

Называем **C**-*расширяющей* такую матрицу $M = \langle A, F, D\rangle$, которая имеет подматрицу M' с двухэлементным универсумом, изоморфную CPC. Говорим, что $\mathbf{L}$ — **C**-*расширяющая логика*, если ее следование порождено классом **C**-расширяющих матриц. Как следует из работы [Devyatkin, 2020], если мы не накладываем дополнительных ограничений на сигнатуру F, существует бесконечный класс трехзначных матриц, отвечающих данному определению.

Большинство из самых известных систем многозначной логики — это **C**-расширяющие логики. Поэтому представляет интерес вопрос о том, каковы общие свойства логик, задаваемых **C**-расширяющими матрицами. Одно из таких свойств вытекает из определения **C**-расширяющей матрицы: если M — **C**-расширяющая трехзначная матрица, то $CPC \in S(M)$, и поэтому $C_M \leqslant C_{CPC}$.

Для трехзначного случая существует интересное свойство, связанное с результатом А. В. Макарова из области теории функций многозначной логики [Makarov, 2015]. Пусть $M_1 = \langle A, F_1, D\rangle$ и $M_2 = \langle A, F_2, D\rangle$ — логические матрицы. Говорим, что функция f *определима в* F_1, если $f \in [F_1]$. Говорим, что матрица M_2 *определима в* M_1, *если* $F_2 \subseteq [F_1]$ [Wojtylak, 1981]. В каждой трехзначной **C**-расширяющей матрице определима одна из операций, описанных А. В. Макаровым в указанной выше работе. Эти операции отвечают следующим таблицам:

$\downarrow_1$	0	1	2
0	1	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

$\downarrow_2$	0	1	2
0	1	0	1
1	0	0	0
2	1	0	1

$\downarrow_3$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

$\downarrow_4$	0	1	2
0	1	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

$\downarrow_5$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	0	2
2	0	0	2

Как при $D = \{1\}$, так и при $D = \{1, 2\}$ на основе каждой из этих операций можно построить **C**-расширяющую трехзначную матрицу. Таким образом, в каждой трехзначной **C**-расширяющей матрице $M = \langle\{0, 1, 2\}, F, D\rangle$ определима подобная ей **C**-расширяющая матрица $N = \langle\{0, 1, 2\}, G, E\rangle$, где $G = [\downarrow_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, $E = D$.

Пусть $\mathbf{L}_1 = \langle\mathcal{S}, C_M\rangle$ и $\mathbf{L}_2 = \langle\mathcal{S}, C_N\rangle$ — пропозициональные логики, а M и N — логические матрицы, порождающие C_M и C_N соответственно. Если M определима в N, говорим, что $\mathbf{L}_2$ — *языковое расширение* $\mathbf{L}_1$. Если вдобавок N определима в M, говорим, что $\mathbf{L}_2$ — *языковой вариант* $\mathbf{L}_1$ [Wójcicki, 1988, § 1.8]. Таким образом, каждая трехзначная **C**-расширяющая логика оказывается языковым расширением одной из минимальных с точки зрения выразительных возможностей языка **C**-расширяющих логик со следованием, порожденным матрицей вида $M = \langle\{0,1,2\}, F, D\rangle$, где $[F] = [\downarrow_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$.

Дальнейшая часть работы посвящена исследованию теоретико-доказательных свойств этих минимальных логик, а именно их степеням максимальности.

4. Матрицы для $\downarrow_1$

В этом разделе мы установим степени максимальности для логик, следования которых детерминированы матрицами вида $M = \langle\{0,1,2\}, F, \{1\}\rangle$ и $\langle\{0,1,2\}, F, \{1,2\}\rangle$, где $[F] = [\downarrow_1]$. Логики, определяемые с помощью матриц такого рода, а также матриц, которые мы рассматриваем в следующем разделе, изучались в работах [Девяткин и др., 2007; Девяткин, 2017].

Определим вспомогательные операции $\neg_1 x = x \downarrow_1 x$, $x \vee_1 y = \neg_1(x \downarrow_1 y)$, $x \wedge_1 y = \neg_1(\neg_1 x \vee_1 \neg_1 y)$. Эти операции отвечают следующим таблицам:

$\wedge_1$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	1

$\vee_1$	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

x	$\neg_1 x$
0	1
1	0
2	0

Факт 6. Если $f \in [\downarrow_1]$, то f сохраняет разбиение $\{\{0\},\{1,2\}\}$, то есть $f(a_1,\ldots,a_{i-1},1,a_{i+1},\ldots,a_n) = 0$, е.т.е. $f(a_1,\ldots,a_{i-1},2,a_{i+1},\ldots,a_n) = 0$ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Это так, поскольку $\downarrow_1$ сохраняет данное разбиение.

Рассмотрим случай $M = \langle\{0,1,2\}, F, \{1\}\rangle$, где $[F] = [\downarrow_1]$.

Лемма 1. *Если $\alpha \in C_{CPC}(X)$ и $\alpha \notin C_M(X)$, то существует такая оценка $w \in Val(M)$, что $w(X) \subseteq \{1\}$ и $w(\alpha) = 2$, и при этом не существует такой оценки $w' \in Val(M)$, что $w'(X) \subseteq \{1\}$ и $w'(\alpha) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in C_{CPC}(X)$ и $\alpha \notin C_M(X)$. Если $\alpha \notin C_M(X)$, то существует такая оценка $w \in Val(M)$, что $w(X) \subseteq \{1\}$ и $w(\alpha) \in \{0,2\}$. Допустим, что $w(\alpha) = 0$. Определим отображение $\varphi : Val(M) \longrightarrow Val(M)$ следующим образом:

$$\varphi[w](p) = \begin{cases} 0, \text{ если } w(p) = 0; \\ 1, \text{ если } w(p) \in \{1,2\}. \end{cases}$$

В силу Факта 6, $w(\beta) = 0$, е.т.е. $\varphi[w](\beta) = 0$ для каждой оценки $w \in Val(M)$ и каждой формулы $\beta \in S$. Так как $(a_1,\ldots,a_n) \in E_2^n$ влечет $f(a_1,\ldots,a_n) \in E_2$, также имеем для каждой оценки $w \in Val(M)$ и каждой формулы $\beta \in S$: $w(\beta) \in \{1, 2\}$, е.т.е. $\varphi[w](\beta) = 1$. Таким образом, если $w(X) \subseteq \{1\}$ и $w(\alpha) = 0$, то $\varphi[w](X) \subseteq \{1\}$ и $\varphi[w](\alpha) = 0$.

Однако $\varphi[w]$ также является оценкой в CPC. Поэтому $\alpha \notin C_{CPC}(X)$. Но это противоречит условию. Следовательно, если $\alpha \in C_{CPC}(X)$ и $\alpha \notin C_M(X)$, то существует такая оценка $w \in Val(M)$, что $w(X) \subseteq \{1\}$ и $w(\alpha) = 2$, и при этом не существует такой оценки $w' \in Val(M)$, что $w'(X) \subseteq \{1\}$ и $w'(\alpha) = 0$. ■

Лемма 2. *Если $C_M \leqslant C_N \leqslant C_{CPC}$, то $C_N \in \{C_M, C_{CPC}\}$.*

Доказательство. Пусть $C_M \leqslant C_N$. Возможны два случая: $\alpha \in C_{CPC}(X)$ и $\alpha \notin C_N(X)$ для некоторых $X \subseteq S$, $\alpha \in S$, либо $\alpha \in C_{CPC}(X)$ влечет $\alpha \in C_N(X)$ для всех $X \subseteq S$, $\alpha \in S$.

Случай 1: $\alpha \in C_{CPC}(X)$ и $\alpha \notin C_N(X)$ для некоторых $X \subseteq S$, $\alpha \in S$. Если $C_M \leqslant C_N$, то $N \in SP_f(M)$ (см. Факт 5). Это значит, что в $SP_f(M)$ найдется изоморфная копия N с универсумом $A \subseteq E_3^n$ для некоторго n. Не теряя общности, будем считать, что A — универсум N. В таком случае класс выделенных значений D матрицы N есть $\{1\}^n$.

Каждая оценка $u \in Val(N)$ может быть представлена следующим образом: $u(p) = (w_1(p), \ldots, w_n(p))$, где $w_1, \ldots, w_n \in Val(M)$. Если существует такая оценка $u \in Val(N)$, что $u(X) \subseteq D$ и $u(\alpha) \notin D$, то существует такой набор оценок $(w_1, \ldots, w_n)$ в M, что $w_i(X) \subseteq \{1\}$ для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $w_j(\alpha) \in \{0, 2\}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Если $\alpha \notin C_N(X)$, то $\alpha \notin C_M(X)$. Если $\alpha \in C_{CPC}(X)$ и $\alpha \notin C_M(X)$, не существует такой оценки $w' \in Val(M)$, что $w'(X) \subseteq \{1\}$ и $w'(\alpha) = 0$ (по Лемме 1). Таким образом, для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ верно, что $w_j(\alpha) \in \{0, 2\}$ влечет $w_j(\alpha) = 2$. Следовательно, $u(\alpha) = \tilde{a}$, где $\tilde{a} \in \{1, 2\}^n \setminus \{1\}^n$.

В этом случае N содержит подматрицу O с универсумом $\{\tilde{a} \wedge_1 \neg_1 \tilde{a},\ \tilde{a} \vee_1 \neg_1 \tilde{a},\ \tilde{a}\}$. Определим отображение ψ: $\psi(\tilde{a} \wedge_1 \neg_1 \tilde{a}) = 0$, $\psi(\tilde{a} \vee_1 \neg_1 \tilde{a}) = 1$, $\psi(\tilde{a}) = 2$. Так как отображение ψ — матричный гомоморфизм из O на M, $C_O = C_M$. Поскольку $O \in SP_f(N)$, имеем также $C_O \geqslant C_N$. Следовательно, $C_M \geqslant C_N$. Однако, согласно условию, $C_M \leqslant C_N$. Поэтому $C_M = C_N$.

Случай 2: Для всех $X \subseteq S$ и $\alpha \in S$ верно, что $\alpha \in C_{CPC}(X)$ влечет $\alpha \in C_N(X)$. В этом случае $C_N \geqslant C_{CPC}$. Согласно условию, $C_N \leqslant C_{CPC}$. Следовательно, $C_N = C_{CPC}$.

■

Теорема 1. *Пусть $M = \langle\{0, 1, 2\}, F, \{1\}\rangle$, где $[F] = [\downarrow_1]$. Тогда степень максимальности C_M равняется 3.*

Доказательство. Известно, что пропозициональная логика, следование которой детерминировано некоторой логической матрицей, имеет степень максимальности 2, если в этой матрице определимы все константы [Tokarz, 1973, Th. 14]. В матрице CPC определимы все константы. Поэтому $|\mathbb{L}(CPC)| = 2$. Как следует из Леммы 2, не существует такой матрицы N, что $C_M < C_N < C_{CPC}$. Таким образом, $|\mathbb{L}(C_M)| = 3$. ■

Теперь рассмотрим случай $M = \langle\{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\}\rangle$.

Теорема 2. *Пусть* $M = \langle\{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\}\rangle$, *где* $[F] = [\downarrow_1]$. *Тогда степень максимальности* C_M *равняется* 2.

Доказательство. Определим отображение ψ: $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = \psi(2) = 1$. Отображение ψ — матричный гомоморфизм из M на CPC. Поэтому $C_M = C_{CPC}$. Таким образом, $|\mathbb{L}(C_M)| = |\mathbb{L}(CPC)| = 2$. ■

5. Матрицы для $\downarrow_2$

В этом разделе мы установим степени максимальности для логик, следования которых детерминированы матрицами вида $\langle\{0, 1, 2\}, F, \{1\}\rangle$ и $\langle\{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\}\rangle$, где $[F] = [\downarrow_2]$.

Определим вспомогательные операции $\neg_2 x = x \downarrow_2 x$, $x \vee_2 y = \neg_2(x \downarrow_2 y)$, $x \wedge_2 y = \neg_2(\neg_2 x \vee_2 \neg_2 y)$. Эти операции отвечают следующим таблицам:

$\wedge_2$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	0

$\vee_2$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	0

x	$\neg_2 x$
0	1
1	0
2	1

Факт 7. Если $f \in [\downarrow_2]$, то f сохраняет разбиение $\{\{0, 2\}, \{1\}\}$, то есть $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) = 1$, е.т.е. $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 2, a_{i+1}, \ldots, a_n) = 1$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Это так, поскольку $\downarrow_2$ сохраняет данное разбиение.

Рассмотрим случай $M = \langle\{0, 1, 2\}, F, \{1\}\rangle$, где $[F] = [\downarrow_2]$.

Теорема 3. *Пусть* $M = \langle\{0, 1, 2\}, F, \{1\}\rangle$, *где* $[F] = [\downarrow_2]$. *Тогда степень максимальности* C_M *равняется* 2.

Доказательство. Определим отображение ψ: $\psi(0) = \psi(2) = 0$, $\psi(1) = 1$. Отображение ψ — матричный гомоморфизм из M на CPC. Поэтому $C_M = C_{CPC}$. Таким образом, $|\mathbb{L}(C_M)| = |\mathbb{L}(CPC)| = 2$. ■

Теперь рассмотрим случай $M = \langle\{0,1,2\}, F, \{1,2\}\rangle$.

Теорема 4. *Пусть* $M = \langle\{0,1,2\}, F, \{1,2\}\rangle$*, где* $[F] = [\downarrow_2]$*. Тогда степень максимальности* C_M *равняется* $2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Определим вспомогательную операцию $x \leftarrow y$ следующим образом: $x \leftarrow y = \neg_2(x \vee_2 \neg_2 y)$. Она отвечает приведенной ниже таблице.

$\leftarrow$	0	1	2
0	0	1	0
1	0	0	0
2	0	1	0

Рассмотрим функцию g_i от $n \geqslant 2$ переменных ($i \in \{1, \ldots, n\}$).

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_{j_1} \leftarrow x_i) \wedge_2 \ldots \wedge_2 (x_{j_{n-1}} \leftarrow x_i),$$

где каждому индексу из множества $\{j_1, \ldots, j_{n-1}\}$ соответствует уникальный индекс из множества $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. Функция g_i принимает значение 1 на таких наборах $(a_1, \ldots, a_n)$, что $a_i = 1$ и $a_j \in \{0, 2\}$ для всех $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. На всех остальных наборах она принимает значение 0.

Определим функцию f_n:

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1, \ldots, x_n) \vee_2 g_2(x_1, \ldots, x_n) \vee_2 \ldots \vee_2 g_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Имеет место следующее: $f_n(a_1, \ldots, a_n) = 1$, если набор $(a_1, \ldots, a_n)$ содержит ровно одну единицу, и $f_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$ в остальных случаях.

Пусть $\Phi_n(p_1, \ldots, p_n) \in S$ такая формула от n переменных, что $w(\Phi(p_1, \ldots, p_n)) = f_n(w(p_1), \ldots, w(p_n))$ для любой оценки $w \in Val(M)$.

Рассмотрим последовательность матриц, где M^k — результат умножения матрицы M на саму себя k раз:

$$M^2, M^3, \ldots, M^n, \ldots$$

Обозначим как Θ^k множество всех таких набров вида $(a_1, \ldots, a_k)$, что $a_i = 1$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$, и для всех $j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i\}$ верно, что $a_j = 2$. Сопоставим каждой матрице M^k ее подматрицу $\bar{M}^k$ с универсумом $E_2^k \cup \Theta^k$. Обратим внимание, что классом выделенных значений $\bar{M}^k$ будет множество $\bar{D}^k = \{1\}^k \cup \Theta^k$.

Поскольку $\bar{M}^k \in SP_f(M)$ для каждого $k \geqslant 2$, имеет место $C_M \subseteq C_{\bar{M}^k}$.

Теперь покажем, что $C_{\bar{M}^k} = C_{\bar{M}^l}$, е.т.е. $k = l$ для всех $k, l \geqslant 2$.

Сперва продемонстрируем, что $p_0 \notin C_{\bar{M}^k}(p_1, \ldots, p_k, \Phi_k(p_1, \ldots, p_k))$.

Множество Θ^k содержит k элементов. Для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ обозначим как $\tilde{a}_i$ такой набор $(a_1, \dots, a_k) \in \Theta^k$, что $a_i = 1$. Определим оценку $u_i \in Val(\bar{M}^k)$ следующим образом: $u_i(p_i) = \tilde{a}_i$, когда $i \in \{1, \dots, k\}$, и $u(p_0) \in \{0\}^k$. Ясно, что $u_i(p_1, \dots, p_k) \subseteq \Theta^k \subseteq \bar{D}^k$.

Поскольку $w(\Phi(p_1, \dots, p_n)) = f_n(w(p_1), \dots, w(p_n))$, для любой оценки $w \in Val(M)$, и для любых $u \in Val(\bar{M}^k)$, $\alpha \in S$ верно, что $u(\alpha) = (w_1(\alpha), \dots, w_k(\alpha))$, где $w_1, \dots, w_k \in Val(M)$, также имеем $u_i(\Phi(p_1, \dots, p_n)) = f_n(u_i(p_1), \dots, u_i(p_n)) \in \bar{D}^k$.

Таким образом, u_i — оценка в $\bar{M}^k$, при которой $u_i(p_1, \dots, p_k, \Phi(p_1, \dots, p_n)) \subseteq \bar{D}^k$ и $u_i(p_0) \notin \bar{D}^k$.

Следовательно, $p_0 \notin C_{\bar{M}^k}(p_1, \dots, p_n, \Phi_n(p_1, \dots, p_n))$.

Теперь покажем, что $l < k$ влечет $p_0 \in C_{\bar{M}^l}(p_1, \dots, p_k, \Phi_n(p_1, \dots, p_k))$.

Множество Θ^l содержит l элементов. Если $u(p_i) \in \Theta^l$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$, то среди $p_1, \dots, p_k$ найдутся по меньшей мере две такие различающиеся переменные p_r и p_s, что $u(p_r) = u(p_s) = (a_1, \dots, a_l)$. Так как $u(p) = (w_1(p), \dots, w_l(p))$ для неких $w_1, \dots, w_l \in Val(M)$, найдется такая оценка $w_j \in Val(M)$ $(j \in \{1, \dots, l\})$, что $w_j(p_r) = w_j(p_s) = 1$.

Аналогичным образом, $w_j(p_r) = w_j(p_s) = 1$, если $u(p_i) \in \bar{D}^l$ для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$, и $u(p_r) \in \{1\}^l$ для некоторого $r \in \{1, \dots, k\}$. Если $w_j(p_r) = w_j(p_s) = 1$, то $w_j(\Phi_k(p_1, \dots, p_k)) = 0$, и тогда $u(\Phi_n(p_1, \dots, p_k)) \notin \bar{D}^l$.

Поэтому не существует такой оценки $u \in Val(\bar{M}^l)$, что $u(p_1, \dots, p_k, \Phi(p_1, \dots, p_n)) \subseteq \bar{D}^l$.

Следовательно, $p_0 \in C_{\bar{M}^l}(p_1, \dots, p_k, \Phi_k(p_1, \dots, p_k))$.

Покажем, что $l > k$ влечет $p_0 \in C_{\bar{M}^l}(p_1, \dots, p_k, \Phi_k(p_1, \dots, p_k))$.

Пусть $u(p) = (w_1(p), \dots, w_l(p))$, где $w_1, \dots, w_l \in Val(M)$. Если $u(p_i) \in \Theta^l$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$, то среди $w_1, \dots, w_l$ найдется такая оценка w_j, что $w_j(p_1) = \ldots = w_j(p_k) = 2$. В этом случае $w_j(\Phi_k(p_1, \dots, p_k)) = 0$. Но тогда $u(\Phi_k(p_1, \dots, p_k)) \notin \bar{D}^l$.

Если же $u(p_i) \in \bar{D}^l$ для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$, и $u(p_r) \in \{1\}^l$ для некоторого $r \in \{1, \dots, k\}$, найдется такое $s \in \{1, \dots, k\}$, что $w_j(p_r) = w_j(p_s) = 1$ при какой-то оценке $w_j \in \{w_1, \dots, w_l\}$. В этом случае снова получаем $w_j(\Phi_k(p_1, \dots, p_k)) = 0$ и, как следствие, $u(\Phi_k(p_1, \dots, p_k)) \notin \bar{D}^l$.

Поэтому не существует такой оценки $u \in Val(\bar{M}^l)$, что $u(p_1, \dots, p_k, \Phi_k(p_1, \dots, p_k)\}) \subseteq \bar{D}^l$.

Следовательно, $p_0 \in C_{\bar{M}^l}(p_1, \dots, p_k, \Phi_k(p_1, \dots, p_k))$.

Таким образом, для всех $k, l \geqslant 2$ верно, что $p_0 \notin C_{\bar{M}^l}(p_1, \dots, p_k, \Phi_k(p_1, \dots, p_k))$, е.т.е. $k = l$.

Пусть $\bar{M} = \{\bar{M}^k \mid k \geqslant 2\}$. Для всех $K, L \subseteq \bar{M}$ выполняется следующее условие: $C_K = C_L$, е.т.е. $K = L$. При этом $|\bar{M}| = \aleph_0$. Следовательно, $|2^{\bar{M}}| = 2^{\aleph_0}$. Поскольку $C_M \subseteq C_K$ для каждого $K \subseteq \bar{M}$ и $|\mathbb{L}(C_M)| \leqslant |2^{SP_f(M)}|$, также имеем $|\mathbb{L}(C_M)| = 2^{\aleph_0}$. ■

6. Матрицы для $\downarrow_3$

В этом разделе мы установим степени максимальности для логик, следования которых детерминированы матрицами вида $\langle\{0,1,2\}, F, \{1\}\rangle$ и $\langle\{0,1,2\}, F, \{1,2\}\rangle$, где $[F] = [\downarrow_3]$. Для $D = \{1\}$ примером подобной матрицы является матрица слабой логики Клини [Kleene, 1952, p. 334]. В случае $D = \{1,2\}$ — матрица логики **PWK** [Ciuni, 2015]. Серия работ Н. Е. Томовой посвящена импликативным расширениям подобных матриц [Томова, 2010], [Томова, 2012, с. 39–42], [Tomova, 2012].

Определим вспомогательные операции $\sim x = x \downarrow_3 x$, $x \vee_3 y = \neg_3(x \downarrow_3 y)$, $x \wedge_3 y = \neg_3(\neg_3 x \vee_3 \neg_3 y)$. Эти операции отвечают следующим таблицам:

$\wedge_3$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

$\vee_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

x	$\sim x$
0	1
1	0
2	2

Рассмотрим случай $M = \langle\{0,1,2\}, F, \{1\}\rangle$, где $[F] = [\downarrow_3]$.

Теорема 5. *Пусть $M = \langle\{0,1,2\}, F, \{1\}\rangle$, где $[F] = [\downarrow_3]$. Тогда степень максимальности C_M равняется 3.*

Доказательство. Достаточно показать, что $N \in SP_f(M)$ влечет $C_N \in \{C_{\tau_0}, C_{CPC}, C_M\}$. Допустим, что $N \in SP_f(M)$. Это значит, что в $SP_f(M)$ найдется изоморфная копия N с универсумом $A \subseteq E_3^n$ для некоторого n. Не теряя общности, будем считать, что A — универсум N. Полагаем, что $D \subseteq A$ — класс выделенных значений N.

Возможны два случая: либо $\{2\}^n \subseteq A$, либо $A \cap \{2\}^n = \varnothing$.

Случай 1. Пусть $\{2\}^n \subseteq A$. Либо $A \cap \{1\}^n = \varnothing$, либо $\{1\}^n \subseteq A$.

Если $A \cap \{1\}^n = \varnothing$, то $D = \{\varnothing\}$, и $C_N = C_{\tau_0}$.

Пусть $\{1\}^n \subseteq A$. Поскольку $\sim 1 = 0$, также имеет место $\{0\}^n \subseteq A$. Тогда N имеет подматрицу O с универсумом $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$, где $\tilde{0} \in \{0\}^n$, $\tilde{1} \in \{1\}^n$, $\tilde{2} \in \{2\}^n$. Матрица O изоморфна M. Следовательно, $M \in SP_f(N)$. Таким образом, $C_N \leqslant C_M$. Так как $N \in SP_f(M)$, также имеет место $C_M \leqslant C_N$, и $C_N = C_M$.

Случай 2. Пусть $A \cap \{2\}^n = \varnothing$. Либо $A \cap \{1\}^n = \varnothing$, либо $\{1\}^n \subseteq A$.

Если $A \cap \{1\}^n = \varnothing$, то $D = \{\varnothing\}$, и $C_N = C_{\tau_0}$.

Пусть $\{1\}^n \subseteq A$. Либо $A \subseteq E_2^n$, либо A содержит такой элемент $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, что $a_i = 2$ и $a_j \in \{0, 1\}$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Предположим, что $A \subseteq E_2^n$. Тогда $N \in SP_f(CPC)$, и $C_N \geqslant C_{CPC}$. Поскольку $\{1\}^n \subseteq A$, имеет место $D = \{1\}^n$. Но тогда $C_N \neq C_{\tau_0}$. Поэтому $C_N = C_{CPC}$.

Пусть A содержит такой элемент $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, что $a_i = 2$ и $a_j \in \{0, 1\}$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда N имеет подматрицу O с универсумом $\{\tilde{1},\ \tilde{0},\ \tilde{a} \vee \tilde{a},\ \tilde{a} \wedge \tilde{a}\}$. Это значит, что $C_N \leqslant C_O$.

Определим отображение φ: $\varphi(\tilde{1}) = 1$, $\varphi(\tilde{0}) = 0$, $\varphi(\tilde{a} \vee \tilde{a}) = \varphi(\tilde{a} \wedge \tilde{a}) = 2$. Отображение φ — матричный гомоморфизм из O на M. Поэтому $C_O = C_M$. Следовательно, $C_N \leqslant C_M$. Так как $N \in SP_f(M)$, также имеет место $C_M \leqslant C_N$. Таким образом, $C_N = C_M$.

Как показал разбор случаев, приведенный выше, $N \in SP_f(M)$ влечет $C_N \in \{C_{\tau_0}, C_{CPC}, C_M\}$. Из этого вытекает, что $|\mathbb{L}(C_M)| = 3$. ■

Теперь рассмотрим случай $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$. Результат, аналогичный приведенному ниже, был получен в работе [Paoli, Pra Baldi, 2021, Th. 5.3]. Однако наш метод существенно отличается от использованного в этой статье.

Теорема 6. *Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $[F] = [\downarrow_3]$. Тогда степень максимальности C_M равняется 4.*

Доказательство. Достаточно показать, что $N \in SP_f(M)$ влечет $C_N \in \{C_M, C_{CPC \times M}, C_{CPC}, C_{\tau_1}\}$. Пусть $N \in SP_f(M)$. Допустим, что $N \in SP_f(M)$. Это значит, что в $SP_f(M)$ найдется изоморфная копия N с универсумом $A \subseteq E_3^n$ для некоторго n. Не теряя общности, будем считать, что A — универсум N. Полагаем, что $D \subseteq A$ — класс выделенных значений N.

Возможны два случая: либо $\{2\}^n \subseteq A$, либо $A \cap \{2\}^n = \varnothing$.

Случай 1. Пусть $\{2\}^n \subseteq A$.

Если $\{2\}^n = A$, то $C_N = C_{\tau_1}$.

Если $\{2\}^n \neq A$, имеет место одно из двух. Либо A содержит такой элемент $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, что $a_i = 2$ и $a_j \in \{0, 1\}$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Либо для всех $\tilde{a} \in A$ верно, что $\tilde{a} \neq \tilde{2}$ влечет $\tilde{a} \in E_2^n$.

Пусть A содержит такой элемент $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, что $a_i = 2$ и $a_j \in \{0, 1\}$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда N имеет подматрицу O с универсумом $\{\tilde{a} \wedge \sim\tilde{a}, \tilde{a} \vee \sim\tilde{a}, \tilde{2}\}$. Матрица O изоморфна матрице $M \times \tau_1$ Следовательно, $C_O = C_{M \times \tau_1} = C(M)$. При этом $C_O \geqslant C_N$. Следовательно, $C_M \geqslant C_N$. Поскольку известно, что $C_N \geqslant C_M$, получаем $C_N = C_M$.

Пусть $\tilde{a} \in E_2^n$, коль скоро $\tilde{a} \in A$ и $\tilde{a} \neq \tilde{2}$. Тогда N имеет подматрицу O с универсумом $\{\tilde{a} \wedge {\sim}\tilde{a}, \tilde{a} \vee {\sim}\tilde{a}, \tilde{2}\}$, которая изоморфна M. Снова получаем $C_N = C_M$.

Случай 2. Пусть $A \cap \{2\}^n = \varnothing$.

Если $A \subseteq E_2^n$, то $N \in SP_f(CPC)$, и $C_N \geqslant C_{CPC}$. В таком случае $C_N \in \{C_{CPC}, C_{\tau_1}\}$.

Пусть A содержит такой элемент $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, что $a_i = 2$ и $a_j \in \{0, 1\}$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Если $A \cap \{2\}^n = \varnothing$, то существует координата, на которой каждый набор из A имеет значение 0 или 1. Не теряя общности, полагаем, что такова первая координата, то есть $a_1 \in \{0, 1\}$ для каждого набора $(a_1, \ldots, a_n) \in A$.

В этом случае $N \in SP_f(CPC \times M)$ и $C_N \geqslant C_{CPC \times M}$. Покажем, что тогда $C_N \in \{C_{CPC \times M}, C_{CPC}, C_{\tau_1}\}$.

Пусть $\alpha \in C_{CPC}(X)$ и $\alpha \notin C_N(X)$. В таком случае для каждой оценки v в CPC верно следующее: если $v(\alpha) = 0$, то найдется такая формула $\gamma \in X$, что $v(\gamma) = 0$. Если $\alpha \notin C_N(X)$, то $w(X) \subseteq D$ и $w(\alpha) \notin D$ для некоторой оценки w в N.

Для каждой оценки w в N верно, что $w(\alpha) = (u_1(\alpha), \ldots, u_n(\alpha))$, где $u_1, \ldots, u_n$ — некие оценки в M. В силу того, что $a_1 \in \{0, 1\}$ для каждого набора $(a_1, \ldots, a_n) \in A$, u_1 — оценка в CPC. Так как $w(X) \subseteq D$, имеет место $u_1(X) \subseteq \{1\}$. Поскольку $\alpha \in C_{CPC}(X)$, получаем $u_1(\alpha) = 1$.

В то же время, поскольку $w(\alpha) \notin D$, $u_i(\alpha) = 0$ для некоторого $i \in \{2, \ldots, n\}$. Не теряя общности, полагаем, что $i = 2$. Таким образом, $w(\alpha) = \tilde{a}$, где $\tilde{a} = (1, 0, a_3, \ldots, a_n)$.

Поскольку $w(X) \subseteq D$, также имеем для некоторой формулы $\gamma \in X$: $w(\gamma) = \tilde{c}$, где $(1, 2, c_3, \ldots, c_n)$. Иначе мы получили бы противоречие с посылкой $\alpha \in C_{CPC}(X)$, так как u_2 оказалась бы оценкой в CPC.

В силу определений операций M, A содержит также следующие наборы:

- ${\sim}\tilde{a} = (0, 1, {\sim}a_3, \ldots, {\sim}a_n)$;
- $\tilde{a} \vee \tilde{a} = (1, 1, a_3 \vee a_3, \ldots, a_n \vee a_n)$;
- $\tilde{a} \wedge \tilde{a} = (0, 0, a_3 \wedge a_3, \ldots, a_n \wedge a_n)$;
- ${\sim}\tilde{c} = (0, 2, {\sim}c_3, \ldots, {\sim}c_n)$.

Пусть $\beta \in C_N(Y)$. Тогда для каждой оценки w в N верно, что $w(Y) \subseteq \{1, 2\}^n$ влечет $w(\beta) \in \{1, 2\}^n$.

Обозначим как W^* множество таких оценок w^* в N, что $w^*(p) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1 \in \{0, 1\}$. Ясно, что для каждой оценки w^* из W^* верно следующее: $w^*(Y) \subseteq \{1\} \times \{1, 2\}^{n-1}$ влечет $w^*(\beta) \in \{1\} \times \{1, 2\}^{n-1}$.

Отобразим множество W^* в множество $Val(CPC \times M)$: если $w^*(p) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то $\psi[w^*](p) = (a_1, a_2)$. Если $w^*(Y) \subseteq \{1\} \times \{1,2\}^{n-1}$ влечет $w^*(\beta) \in \{1\} \times \{1,2\}^{n-1}$, то $\psi[w^*](Y) \subseteq \{1\} \times \{1,2\}$ влечет $\psi[w^*](\beta) \in \{1\} \times \{1,2\}$.

Отображение ψ сюръективно, так как $\{\tilde{a}, {\sim}\tilde{a}, \tilde{a} \vee \tilde{a}, \tilde{a} \wedge \tilde{a}, \tilde{c}, {\sim}\tilde{c}\} \subseteq A$. То есть $\psi(W^*) = Val(CPC \times M)$.

Таким образом, коль скоро $w(Y) \subseteq \{1,2\}^n$ влечет $w(\beta) \in \{1,2\}^n$ для любой оценки w в N, также верно, что $u(Y) \subseteq \{1\} \times \{1,2\}$ влечет $u(\beta) \in \{1\} \times \{1,2\}$ для любой оценки u в $CPC \times M$. Следовательно, если $\beta \in C_N(Y)$ то $\beta \in C_{CPC\times M}(Y)$.

Это значит, что $C_N \leqslant C_{CPC\times M}$ Однако мы уже установили, что $C_N \geqslant C_{CPC\times M}$. Поэтому $C_N = C_{CPC\times M}$.

Таким образом, если $\alpha \in C_{CPC}(X)$ и $\alpha \notin C_N(X)$ для некоторых $X \subseteq S$ и $\alpha \in S$, то $C_N = C_{CPC\times M}$. Если же $\alpha \in C_{CPC}(X)$ влечет $\alpha \in C_N(X)$, то $C_N \in \{C_{CPC}, C_{\tau_1}\}$. Это завершает рассмотрение последнего случая.

Принимая во внимание все рассмотренные случаи, получаем: если $C_N \geqslant C_M$, то $C_N \in \{C_M, C_{CPC\times M}, C_{CPC}, C_{\tau_1}\}$. Из этого вытекает, что $|\mathbb{L}(C_M)| = 4$. ■

7. Матрицы для $\downarrow_4$

Данный раздел посвящен степеням максимальности для логик, следования которых детерминированы матрицами вида $\langle\{0,1,2\}, F, \{1\}\rangle$ и $\langle\{0,1,2\}, F, \{1,2\}\rangle$, где $[F] = [\downarrow_4]$. Исторически первым примером такой матрицы является матрица логики Собочиньского [Sobociński, 1952], где $D = \{1,2\}$, а базовые операции $\supset$ и $\sim$ отвечают приведенным ниже таблицам.

x	$\sim x$
0	1
1	0
2	2

$\supset$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	0
2	0	1	2

В работе [Grigolia, Finn, 1993] подобные матрицы рассматриваются для языка со связками $\wedge, \vee, \sim$, причем конъюнкция и дизъюнкция могут определяться несколькими способами. Ниже приведены таблицы для двух вариантов конъюнкции ($\wedge_4$ и $\wedge_4^*$) и двух вариантов дизъюнкции ($\vee_4$ и $\vee_4^*$).

$\wedge_4$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	2

$\vee_4$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	2

$\wedge_4^*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee_4^*$	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	2

Лемма 3. $[\downarrow_4] = [\wedge_4, \vee_4^*, \sim] = [\wedge_4^*, \vee_4, \sim] = [\supset, \sim]$.

Доказательство. Сперва покажем, что $[\wedge_4, \vee_4^*, \sim] = [\wedge_4^*, \vee_4, \sim] = [\supset, \sim]$. Покажем, что $[\wedge_4, \vee_4^*, \sim] \subseteq [\wedge_4^*, \vee_4, \sim]$.

- $x \vee_4^* y = (x \wedge_4^* y) \vee_4 (\sim x \wedge_4^* y) \vee_4 (x \wedge_4^* \sim y)$.
- $x \wedge_4 y = \sim(\sim x \vee_4^* \sim y)$.

Покажем, что $[\wedge_4^*, \vee_4, \sim] \subseteq [\supset, \sim]$.

- $x \wedge_4^* y = \sim(x \supset \sim y)$.
- $x \vee_4 y = \sim x \supset y$.

Покажем, что $[\supset, \sim] \subseteq [\wedge_4, \vee_4^*, \sim]$.

- $x \supset y = ((\sim x \vee_4^* y) \wedge_4 \sim x) \vee_4^* ((\sim x \vee_4^* y) \wedge_4 y)$.

Теперь покажем, что $[\downarrow_4] = [\wedge_4, \vee_4^*, \sim]$.

- $\sim x = x \downarrow_4 x$; $x \vee_4^* y = \sim(x \downarrow_4 y)$; $x \wedge_4 y = \sim(\sim x \vee_4^* \sim y)$.
- $x \downarrow_4 y = \sim(x \vee_4^* y)$.

■

Рассмотрим степень максимальности C_M, начав со случая $M = \langle\{0, 1, 2\}, F, \{1\}\rangle$.

Теорема 7. *Пусть* $M = \langle\{0, 1, 2\}, F, \{1\}\rangle$, *где* $[F] = [\downarrow_4]$. *Тогда степень максимальности* C_M *не меньше* $\aleph_0$.

Доказательство. Определим вспомогательную операцию: $x \circ y = \sim(x \wedge_4 y) \wedge_4^* (x \wedge_4^* y)$. Таблица истинности для $\circ$ имеет следующий вид:

$\circ$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	2

Пусть $\circ_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$. Для каждого натурального $n \geqslant 2$ имеет место:

1. $\circ_n(a_1, \ldots, a_n) = 1$, если $(a_1, \ldots, a_n)$ содержит в точности одну единицу, а остальные члены этого набора — двойки;
2. $\circ_n(a_1, \ldots, a_n) = 2$, если $(a_1, \ldots, a_n)$ состоит из двоек;
3. $\circ_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$ в остальных случаях.

Пусть $\Phi_n(p_1, \dots, p_n) \in S$ такая формула от n переменных, что $w(\Phi(p_1, \dots, p_n)) = \circ_n(w(p_1), \dots, w(p_n))$ для любой оценки $w \in Val(M)$.

Рассмотрим последовательность матриц, где M^k — результат умножения матрицы M на саму себя k раз:

$$M^2, M^3, \dots, M^n, \dots$$

Поскольку $f(x_1, \dots, x_n) = 2$, е.т.е. $x_1 = \dots = x_n = 2$, для каждого $k \geqslant 2$ множество $E_3^k \setminus \{2\}^k$ — универсум подматрицы M^k. Обозначим подматрицу M^k с универсумом $E_3^k \setminus \{2\}^k$ как $\bar{M}^k$.

В силу Факта 2, $C_{M^k} \subseteq C_{\bar{M}^k}$. В силу Факта 3, $C_M = C_{M^k}$. Таким образом, $C_M \subseteq C_{\bar{M}^k}$.

Можно показать, что последовательность

$$C_{\bar{M}^2}, C_{\bar{M}^3}, \dots, C_{\bar{M}^n}, \dots$$

образует счетную цепь в $\mathbb{L}(C_M)$.

Покажем, что $l \geqslant k$ влечет $C_{\bar{M}^l} \leqslant C_{\bar{M}^k}$.

Пусть $l \geqslant k$. Определим отображение ψ из $E_3^k \setminus \{2\}^k$ в $E_3^l \setminus \{2\}^l$: $\psi(a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_l)$, где

$$b_i = \begin{cases} a_i, \text{ если } i \leqslant k; \\ a_k, \text{ если } i > k. \end{cases}$$

Поскольку ψ — матричный гомоморфизм из $\bar{M}^k$ в $\bar{M}^l$, имеет место $C_{\bar{M}^l} \leqslant C_{\bar{M}^k}$ (см. Факт 1).

Когда $l < k$, имеет место $p_0 \notin C_{\bar{M}^k}(\Phi_k(p_1, \dots, p_k))$, однако $p_0 \in C_{\bar{M}^l}(\Phi_k(p_1, \dots, p_k))$.

Сперва покажем, что $p_0 \notin C_{\bar{M}^k}(\Phi_k(p_1, \dots, p_k))$.

Для этого достаточно рассмотреть такую оценку $u \in Val(\bar{M}^k)$, что $u(p_0) \in \{0\}^k$, а для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ выполняется следующее условие: $u(p_i) = (a_1, \dots, a_k)$, где $a_i = 1$ и $a_j = 2$ для всех $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$. Поскольку $u(\Phi_k(p_1, \dots, p_k)) \in \{1\}^k$, также верно, что $p_0 \notin C_{\bar{M}^k}(\Phi_k(p_1, \dots, p_k))$.

Теперь покажем, что $p_0 \in C_{\bar{M}^l}(\Phi_k(p_1, \dots, p_k))$.

Для каждой оценки $u \in Val(\bar{M}^l)$ найдутся такие $w_1, \dots, w_l \in Val(M)$, что $u(\alpha) = (w_1(\alpha), \dots, w_l(\alpha))$, коль скоро $\alpha \in S$.

Если $u(p_i) \in E_3^l \setminus \{1, 2\}^l$ для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$, то $w_j(p_i) = 0$ для некоторой оценки $w_j \in \{w_1, \dots, w_l\}$. В этом случае $w_j(\Phi_k(p_1, \dots, p_k)) = 0$. Но тогда $u(\Phi_k(p_1, \dots, p_k)) = (a_1, \dots, a_l)$, где $a_j = 0$ для некоторого $j \in \{1, \dots, l\}$.

Допустим, что $u(p_i) \in \{1,2\}^l \setminus \{2\}^l$ для всех $i \in \{1,\dots,k\}$.

Пусть Θ^l — множество всех таких наборов вида $(a_1,\dots,a_l)$, что $a_i = 1$ для некоторого $i \in \{1,\dots,l\}$, и $a_j = 2$ для всех $j \in \{1,\dots,l\} \setminus \{i\}$. Множество Θ^l содержит l элементов.

Поскольку $l < k$, если $u(p_i) \in \{1,2\}^l \setminus \{2\}^l$ для всех $i \in \{1,\dots,k\}$, то $u(p_r) = u(p_s) \in \Theta^l$ или $u(p_r) \in \{1,2\}^l \setminus \Theta^l$ для некоторых $r, s \in \{1,\dots,k\}$. В этом случае найдется такая оценка $w_j \in \{w_1,\dots,w_l\}$, что $w_j(p_r) = w_j(p_s) = 1$ для некоторых $r, s \in \{1,\dots,k\}$. Но тогда $w_j(\Phi_k(p_1,\dots,p_k)) = 0$. Отсюда вновь получаем $u(\Phi_k(p_1,\dots,p_k)) = (a_1,\dots,a_l)$, где $a_j = 0$ для некоторого $j \in \{1,\dots,l\}$.

Таким образом, для любой оценки $u \in Val(\bar{M}^l)$ верно, что $u(\Phi_k(p_1,\dots,p_k)) \notin \{1,2\}^l$. Из этого следует, что $p_0 \in C_{\bar{M}^l}(\Phi_k(p_1,\dots,p_k))$.

Мы показали, что $l < k$ влечет $C_{\bar{M}^l} > C_{\bar{M}^k}$ для любых $k, l \geqslant 2$. Это означает, что $\mathbb{L}(C_M)$ содержит счетную цепь, и $|\mathbb{L}(C_M)| \geqslant \aleph_0$. ■

Теперь рассмотрим случай $M = \langle\{0,1,2\}, F, \{1,2\}\rangle$.

Теорема 8. *Пусть* $M = \langle\{0,1,2\}, F, \{1,2\}\rangle$, *где* $[F] = [\downarrow_4]$. *Тогда степень максимальности* C_M *не меньше* $\aleph_0$.

Доказательство. Аналогично Теореме 7. В случае $D = \{1\}$ класс выделенных значений матрицы $\bar{M}^l$ есть $\{1\}^l$. В случае $D = \{1,2\}$ класс выделенных значений матрицы $\bar{M}^l$ есть $\{1,2\}^l \setminus \{2\}^l$. В ходе доказательства Теоремы 7 мы показали, что для любой оценки $u \in Val(\bar{M}^l)$ верно, что $u(\Phi_k(p_1,\dots,p_k)) \notin \{1,2\}^l$, коль скоро $l < k$ и $k \geqslant 2$. ■

8. Матрицы для $\downarrow_5$

В этом разделе мы исследуем степени максимальности для логик, следования которых детерминированы матрицами вида $\langle\{0,1,2\}, F, \{1\}\rangle$ и $\langle\{0,1,2\}, F, \{1,2\}\rangle$, где $[F] = [\downarrow_5]$. В отличие от предыдущих случаев, автору неизвестны логики, матрицы которых базировались бы на $\downarrow_5$. С точки зрения теории функций многозначной логики, свойства $[\downarrow_5]$ рассматриваются в [Makarov, 2015], [Makarov & Makarov, 2017].

Определим вспомогательные операции $\sim x = x \downarrow_5 y$, $x \vee_5 y = \sim(x \downarrow_5 y)$, $x \wedge_5 y = \sim(\sim x \vee_5 \sim y)$. Эти операции отвечают следующим таблицам:

$\downarrow_5$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	0	2
2	0	0	2

$\wedge_5$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	0	0	2

$\vee_5$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	1	1	2

x	$\sim x$
0	1
1	0
2	2

Факт 8. Для каждой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащей $[\downarrow_5]$, верно, что найдется такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, при котором выполняется следующее условие: $f(a_1, \ldots, a_n) = 2$, е.т.е. $a_i = 2$.

Рассмотрим случай $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1\} \rangle$.

Теорема 9. *Пусть* $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1\} \rangle$, *где* $[F] = [\downarrow_5]$. *Тогда степень максимальности* C_M *не меньше* $\aleph_0$.

Доказательство. Определим еще одну вспомогательную операцию: $x \bullet y = \downarrow_5 (\downarrow_5 (x, y), y) \wedge_5 \downarrow_5 (\downarrow_5 (\sim x, y), y)$. Таблица истинности для $\bullet$ имеет следующий вид:

$\bullet$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	1	0	2

Ясно, что $x_1 \bullet x_2 = 2$, е.т.е. $x_2 = 2$ и $x_1 \bullet x_2 = 1$, е.т.е. $x_1 = 2$ и $x_2 = 0$.

Рассмотрим функцию g_i от $n \geqslant 3$ переменных.

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_{j_1} \bullet x_i) \wedge_5 \ldots \wedge_5 (x_{j_{n-2}} \bullet x_i) \wedge x_n,$$

где каждому индексу из множества $\{j_1, \ldots, j_{n-2}\}$ соответствует уникальный индекс из множества $\{1, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}$.

В силу определений $\wedge$ и $\bullet$, функция $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 1 на том наборе $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = 0$, $a_1 = \ldots = a_{i-1} = a_{i+1} = \ldots = a_{n-1} = 2$, $a_n = 1$. Если $a_n = 2$, то $g_i(a_1, \ldots, a_n) = 2$. На всех наборах, кроме перечисленных выше, $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 0.

Определим функцию f_n:

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1, \ldots, x_n) \vee g_2(x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee g_{n-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

В силу определений $\vee$ и g_i, имеет место следующее:

1. $f_n(a_1, \ldots, a_n) = 1$, если $a_i = 0$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $a_j = 2$ для всех $j \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}$, и $a_n = 1$;

2. $f_n(a_1, \ldots, a_n) = 2$, если $a_n = 2$;

3. $f_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$ в остальных случаях.

Пусть $\Phi_n(p_1, \ldots, p_n) \in S$ такая формула от n переменных, что $w(\Phi_n(p_1, \ldots, p_n)) = f_n(w(p_1), \ldots, w(p_n))$ для любой оценки $w \in Val(M)$.

Рассмотрим последовательность матриц, где M^k — результат умножения матрицы M на саму себя k раз:

$$M^2, M^3, \dots, M^n, \dots$$

В силу Факта 8, множество $E_3^k \backslash \{2\}^k$ — универсум подматрицы M^k. Обозначим подматрицу M^k с универсумом $E_3^k \setminus \{2\}^k$ как $\bar{M}^k$. В силу Факта 2, $C_{M^k} \subseteq C_{\bar{M}^k}$. В силу Факта 3, $C_M = C_{M^k}$. Таким образом, $C_M \subseteq C_{\bar{M}^k}$.

Покажем, что последовательность

$$C_{\bar{M}^2}, C_{\bar{M}^3}, \dots, C_{\bar{M}^n}, \dots$$

образует счетную цепь в $\mathbb{L}(C_M)$.

Сперва продемонстрируем, что $l \geqslant k$ влечет $C_{\bar{M}^l} \leqslant C_{\bar{M}^k}$.

Допустим, что $l \geqslant k$. Определим отображение ψ из $E_3^k \setminus \{2\}^k$ в $E_3^l \setminus \{2\}^l$: $\psi(a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_l)$, где

$$b_i = \begin{cases} a_i, \text{ если } i \leqslant k; \\ a_k, \text{ если } i > k. \end{cases}$$

Поскольку ψ — матричный гомоморфизм из $\bar{M}^k$ в $\bar{M}^l$, имеет место $C_{\bar{M}^l} \leqslant C_{\bar{M}^k}$ (см. Факт 1).

Теперь докажем, что при $l < k$ имеет место следующее: $p_0 \notin C_{\bar{M}^k}(\Phi_{k+1}(p_1, \dots, p_{k+1}))$, однако $p_0 \in C_{\bar{M}^l}(\Phi_{k+1}(p_1, \dots, p_{k+1}))$.

Покажем, что $p_0 \notin C_{\bar{M}^k}(\Phi_{k+1}(p_1, \dots, p_{k+1}))$.

Достаточно рассмотреть такую оценку $u \in Val(\bar{M}^k)$, что $u(p_0) \in \{0\}^k$, $u(p_{k+1}) \in \{1\}^k$, и для всех $i \in \{1, \dots, k\}$ верно следующее: $u(p_i) = (a_1, \dots, a_k)$, где $a_i = 0$ и $a_j = 2$, коль скоро $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$. Поскольку $u(\Phi_{k+1}(p_1, \dots, p_{k+1})) \in \{1\}^k$, также верно, что $p_0 \notin C_{\bar{M}^k}(\Phi_k(p_1, \dots, p_k))$.

Теперь покажем, что $p_0 \in C_{\bar{M}^l}(\Phi_{k+1}(p_1, \dots, p_{k+1}))$.

Для каждой оценки $u \in Val(\bar{M}^l)$ найдутся такие $w_1, \dots, w_l \in Val(M)$, что $u(\alpha) = (w_1(\alpha), \dots, w_l(\alpha))$, коль скоро $\alpha \in S$.

Если $u(p_{k+1}) \notin \{1\}^l$, то $w_j(p_{k+1}) \in \{0, 2\}$ для некоторой оценки $w_j \in \{w_1, \dots, w_l\}$. В этом случае $w_j(\Phi_{k+1}(p_1, \dots, p_{k+1})) \in \{0, 2\}$. Но тогда $u(\Phi_{k+1}(p_1, \dots, p_{k+1})) = (a_1, \dots, a_l)$, где $a_j \in \{0, 2\}$ для некоторого $j \in \{1, \dots, l\}$.

Если $u(p_{k+1}) \in \{1\}^l$ и $u(p_i) \in E_3^l \setminus \{0, 2\}^l$ для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$, то $w_j(p_i) = 1$ для некоторой оценки $w_j \in \{w_1, \dots, w_l\}$. В этом случае $w_j(\Phi_{k+1}(p_1, \dots, p_{k+1})) = 0$. Но тогда $u(\Phi_{k+1}(p_1, \dots, p_{k+1})) = (a_1, \dots, a_l)$, где $a_j = 0$ для некоторого $j \in \{1, \dots, l\}$.

Пусть $u(p_{k+1}) \in \{1\}^l$ и $u(p_i) \in \{0,2\}^l \setminus \{2\}^l$ для всех $i \in \{1,\ldots,k\}$.

Обозначим как Ξ^l множество всех таких наборов вида $(a_1,\ldots,a_l)$, что $a_i = 0$ для некоторго $i \in \{1,\ldots,l\}$, и $a_j = 2$ для всех $j \in \{1,\ldots,l\} \setminus \{i\}$. Множество Ξ^l содержит l элементов.

Поскольку $l < k$, если $u(p_i) \in \{0,2\}^l \setminus \{2\}^l$ для всех $i \in \{1,\ldots,k\}$, то $u(p_r) = u(p_s) \in \Xi^l$ или $u(p_r) \in \{0,2\}^l \setminus \Xi^l$ для некоторых $r,s \in \{1,\ldots,k\}$. В этом случае найдется такая оценка $w_j \in \{w_1,\ldots,w_l\}$, что $w_j(p_r) = w_j(p_s) = 0$ для некоторых $r,s \in \{1,\ldots,k\}$. Но тогда $w_j(\Phi_{k+1}(p_1,\ldots,p_{k+1})) = 0$.

Отсюда вновь получаем $u(\Phi_{k+1}(p_1,\ldots,p_{k+1})) = (a_1,\ldots,a_l)$, где $a_j = 0$ для некоторого $j \in \{1,\ldots,l\}$. Таким образом, для любой оценки $u \in Val(\bar{M}^l)$ верно, что $u(\Phi_{k+1}(p_1,\ldots,p_{k+1})) \notin \{1\}^l$. Из этого следует, что $p_0 \in C_{\bar{M}^l}(\Phi_{k+1}(p_1,\ldots,p_{k+1}))$.

Мы показали, что $l < k$ влечет $C_{\bar{M}^l} > C_{\bar{M}^k}$ для любых $k,l \geqslant 2$. Это означает, что $\mathbb{L}(C_M)$ содержит счетную цепь, и $|\mathbb{L}(C_M)| \geqslant \aleph_0$. ■

Теперь рассмотрим случай $M = \langle\{0,1,2\}, F, \{1,2\}\rangle$.

Теорема 10. *Пусть $M = \langle\{0,1,2\}, F, \{1,2\}\rangle$, где $[F] = [\downarrow_5]$. Тогда степень максимальности C_M не меньше $\aleph_0$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность матриц, где M^k — результат умножения матрицы M на саму себя k раз:

$$M^2, M^3, \ldots, M^n, \ldots$$

В силу Факта 8, множество Λ^k всех наборов вида $(a_1,\ldots,a_k)$, содержащих в точности одну двойку — универсум подматрицы M^k. Обозначим подматрицу M^k с универсумом Λ^k как $\tilde{M}^k$. В силу Факта 2, $C_{M^k} \subseteq C_{\tilde{M}^k}$. В силу Факта 3, $C_M = C_{M^k}$. Таким образом, $C_M \subseteq C_{\tilde{M}^k}$.

Теперь покажем, что для всех $k,l \geqslant 2$ имеет место следующее: $C_{\tilde{M}^k} \neq C_{\tilde{M}^l}$, коль скоро $l > k$.

Пусть $l > k$ и $k \geqslant 2$.

Обозначим как $\Phi_n(p_1,\ldots,p_n)$ такую формулу языка S, что $w(\Phi_n(p_1,\ldots,p_n)) = {\sim}(w(p_1) \wedge_5 \ldots \wedge_5 w(p_n))$ для всех $w \in Val(M)$.

Покажем, что $p_0 \in C_{\tilde{M}^l}(p_1,\ldots,p_k,\Phi_k(p_1,\ldots,p_k))$.

Поскольку $\tilde{M}^l$ — подматрица M^l с универсумом Λ^l, классом выделенных значений $\tilde{M}^l$ является множество Υ^l всех таких наборов вида $(a_1,\ldots,a_l)$, что $a_i = 2$ для некоторого $i \in \{1,\ldots,l\}$ и $a_j = 1$ для всех $j \in \{1,\ldots,l\} \setminus \{i\}$. Множество Υ^l содержит l элементов.

Каждая оценка $u \in Val(\tilde{M}^l)$ может быть представлена следующим образом: $u(p) = (w_1(p),\ldots,w_l(p))$, где $w_1,\ldots,w_n \in Val(M)$.

Так как $l > k$, для всякой оценки $u \in Val(\tilde{M}^l)$ верно следующее. Если $u(p_i) \in \Upsilon^l$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ и $u(p) = (w_1(p), \dots, w_l(p))$, найдется такое $s \in \{1, \dots, l\}$, что $w_s(p_1) = \dots = w_s(p_k) = 1$. В силу определений $\sim$ и $\wedge_5$, это влечет $w_s(\Phi_n(p_1, \dots, p_k)) = 0$. Но тогда $u(\Phi_n(p_1, \dots, p_k)) \notin \Upsilon^l$. Таким образом, $u(p_1, \dots, p_k) \subseteq \Upsilon^l$ влечет $u(\Phi_n(p_1, \dots, p_k)) \notin \Upsilon^l$ для всех $u \in Val(\tilde{M}^l)$. Следовательно, $p_0 \in C_{\tilde{M}^l}(p_1, \dots, p_k, \Phi_k(p_1, \dots, p_k))$.

Теперь покажем, что $p_0 \notin C_{\tilde{M}^k}(p_1, \dots, p_k, \Phi_k(p_1, \dots, p_k))$.

Поскольку множество Υ^k содержит k элементов, существует такая оценка $u \in Val(\tilde{M}^k)$, что для всех $i, j \in \{1, \dots, k\}$ выполняются следующие условия: $u(p_i) \in \Upsilon^k$, $u(p_i) \neq u(p_j)$, $u(p_0) \notin \Upsilon^k$. Пусть $u(p) = (w_1(p), \dots, w_k(p))$, где $w_1, \dots, w_k \in Val(M)$. Тогда для каждого $r \in \{1, \dots, k\}$ найдется такое $i \in \{1, \dots, k\}$, что $w_r(p_i) = 2$. В силу определений $\sim$ и $\wedge_5$, это влечет $w_r(\Phi_n(p_1, \dots, p_k)) = 1$, если $w_r(p_k) = 1$, и $w_r(\Phi_n(p_1, \dots, p_k)) = 2$, если $w_r(p_k) = 2$. Таким образом, $u(p_1, \dots, p_k, \Phi_k(p_1, \dots, p_k)) \subseteq \Upsilon^k$, причем $u(\Phi_k(p_1, \dots, p_k)) = u(p_k)$. В то же время $u(p_0) \notin \Upsilon^k$. Следовательно, $p_0 \notin C_{\tilde{M}^k}(p_1, \dots, p_k, \Phi_k(p_1, \dots, p_k))$.

Итак, для всех $k, l \geqslant 2$, где $l > k$, существует такое множество $\{X, \alpha\}$, что $\alpha \notin C_{\tilde{M}^k}$ и $\alpha \in C_{\tilde{M}^l}$. То есть $C_{\tilde{M}^k} \neq C_{\tilde{M}^l}$. В силу того, что $|\{\tilde{M}^k | k \geqslant 2\}| = \aleph_0$ и $C_M \subseteq C_{\tilde{M}^k}$ для всех $k \geqslant 2$, имеем $|\mathbb{L}(C_M)| \geqslant \aleph_0$. ■

9. Заключение

Мы рассмотрели степени максимальности для логик, задаваемых матрицами вида $\langle\{0, 1, 2, \}, F, D\rangle$, где $[F] = [\downarrow_i]$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant 5$, а D есть $\{1\}$ или $\{1, 2\}$.

Теоремы 1, 2, 3, 5, 6 не только устанавливают степень максимальности для следования, детерминированного каждой из соответствующих матриц, но и позволяют дать для них полное описание решетки $\mathbb{L}(C_M)$.

Теорема 3 дает точный ответ на вопрос о мощности соответствующей решетки $\mathbb{L}(C_M)$, однако структура этой решетки подлежит дальнейшему уточнению. С точки зрения автора, было бы интересно идентифицировать ее конечные участки и описать их внутреннее устройство.

Теоремы 7, 8, 9, 10 дают лишь нижнюю границу мощности интересующих нас решеток. Это делает актуальным вопрос о том, являются ли соответствующие решетки в точности счетными или среди них есть такие, которые имеют мощность континуума.

Наконец, отметим общее разнообразие результатов. Все рассмотренные матрицы объединяет то, что они обладают минимальной выразительной силой в своем классе. То есть по меньшей мере одна из этих матриц определима в каждой трехзначной логике, полученной добавлением третьего значения к классической логике. Однако, как оказалось, степень максимальности следований, детерминированных этими матрицами, варьируется от 2 до бесконечности.

Представляется целесообразным в ходе дальнейших исследований рассмотреть вопрос о том, можно ли сформулировать критерии, позволяющие оценить мощность решетки $\mathbb{L}(C_M)$ для произвольно взятой трехзначной **C**-расширяющей матрицы M на основе выразительных возможностей ее операций.

Литература

Бочвар, 1938 – *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287–308.

Девяткин, 2017 – *Девяткин Л.Ю.* Неклассические модификации многозначных матриц классической логики. Часть II // Логические исследования. 2017. Т. 23. № 1. С. 11–47.

Девяткин и др., 2007 – *Девяткин Л.Ю., Карпенко А.С., Попов В.М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. 2007. Т. 18. С. 50–62.

Карпенко, 2010 – *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

Марченков, 2004 – *Марченков С.С.* Функциональные системы с операцией суперпозиции. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 104 с.

Томова, 2010 – *Томова Н.Е.* Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования. 2010. Т. 16. С. 233–258.

Томова, 2012 – *Томова Н.Е.* Естественные трехзначные логики: функциональные свойства и отношения. М.: ИФ РАН, 2012. 89 с.

Ciuni, 2015 – *Ciuni R.* Conjunction in paraconsistent weak Kleene logic // Logica Yearbook 2014 / Ed. by P. Arazim and M. Dancák. London: College Publications, 2015. P. 61–76.

Grigolia, Finn, 1993 – *Finn V.K., Grigolia R.* Nonsense logics and their algebraic properties // Theoria. 1993. Vol. 59. No. 1–3. P. 207–273.

Gödel, 1986 – *Gödel K.* Kurt Gödel: Collected works — Volume I: Publications 1929–1936. Oxford University Press, 1986. 504 p.

Devyatkin, 2020 – *Devyatkin L.* The Set of closed classes P_{k+1} that can be homomorphically mapped on P_k has the cardinality of continuum // Moscow University Mathematics Bulletin. 2020. Vol. 75. No. 1. P. 47–48.

Kleene, 1938 – *Kleene S.C.* On notation for ordinal numbers // The Journal of Symbolic Logic. 1938. Vol. 3. No. 4. P. 150–155.

Kleene, 1952 – *Kleene S.C.* Introduction to metamathematics. Groningen: Wolters–Noordhoff Publishing, 1952. 560 p.

Łukasiewicz, 1970 – *Łukasiewicz J.* On three-valued Logic / Jan Łukasiewicz. Selected Works. North–Holland, 1970. P. 87–88.

Makarov, 2015 – *Makarov A.V.* Description of all minimal classes in the partially ordered set $\mathcal{L}_2^3$ of closed classes of the three-valued logic that can be homomorphically mapped onto the two-valued logic // Moscow University Mathematics Bulletin. 2015. Vol. 70. No. 1. P. 48.

Makarov & Makarov, 2017 – *Makarov A.V.*, *Makarov V.V.* Countablity of the set of closed overclasses of some minimal classes in the partly ordered set $\mathcal{L}_2^3$ of all closed classes of three-valued logic that can be mapped homomorphically onto two-valued logic // Moscow University Mathematics Bulletin. 2017. Vol. 72. No. 1. P. 35–36.

Paoli, Pra Baldi, 2021 – *Paoli F., Pra Baldi M.* Extensions of paraconsistent weak Kleene logic // Logic Journal of the IGPL. 2021. Vol. 29. No. 5. P. 798–822.

Post, 1921 – *Post E.L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // American journal of mathematics. 1921. Vol. 43. No. 3. P. 163–185.

Sobociński, 1952 – *Sobociński B.* Axiomatization of a partial system of three-value calculus of propositions // The journal of computing systems (St. Paul). 1952. Vol. 1. No. 1. P. 23–55.

Tokarz, 1973 – *Tokarz M.* Connections between some notions of completeness of structural propositional calculi // Studia Logica. 1973. Vol. 32. P. 77–91.

Tomova, 2012 – *Tomova N.E.* A lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics // Reports on Mathematical Logic. 2012. No. 47. P. 173–182.

Wójcicki, 1988 – *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi. Dordrecht: Springer, 1988. 473 p.

Wojtylak, 1979 – *Wojtylak P.* Matrix representations for structural strengthenings of a propositional logic // Studia Logica. 1979. Vol. 38. No. 3. P. 263–266.

Wojtylak, 1981 – *Wojtylak P.* Mutual interpretability of sentential logic I // Reports on Mathematical Logic. 1981. Vol. 11. P. 69–89.

Zygmunt, 1974 – *Zygmunt J.* A note on direct products and ultraproducts of logical matrices // Studia Logica. 1974. Vol. 33. P. 349–357.

Leonid Yu. Devyatkin

Three-valued generalizations of classical logic in weak languages: the degree of maximality

Leonid Yu. Devyatkin
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Abstract: This paper is deals with the degrees of maximality of consequence relations within the class of **C**-extending three-valued logics with languages of minimal expressive power. A logic is defined as **C**-extending if its operations coincide with those of classical logic when their domain is restricted to classical truth values. The degree of maximality of a logic is understood as the set of all its extensions in the same language. Every three-valued **C**-extending logic can be seen as a linguistic expansion of one of ten three-valued logics. We provide an assesment of the degree of maximality for each of these ten logics. In cases where the degree of maximality is finite, we have obtained exact values. In instances where it proves to be infinite, a lower bound for the cardinality of the lattice of extensions of the corresponding logic is provided. The exception is one system, for which it is demonstrated that the degree of maximality of its consequence relation has the cardinality of the continuum. The paper is devoted to the investigation of proof-theoretic properties of three-valued logics based on the expressive capabilities of their languages. The obtained results raise several questions, outlining new directions for research in this field.

Keywords: propositional calculi, many-valued logics, **C**-extending logics, expressive power of formal languages, degree of maximality

For citation: Devyatkin L.Yu. "Tryohznachnye obobshcheniya klassicheskoj logiki v bednyh yazykah: stepen' maksimal'nosti sledovaniya" [Three-valued generalizations of classical logic in weak languages: the degree of maximality], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2024, Vol. 30, No. 2, pp. 44–71. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-44-71 (In Russian)

Acknowledgements. The author is grateful to the anonymous reviewer for their comments, which helped to significantly improve the paper. In particular, the author is thankful for the suggested title of the paper, which reflects its content more accurately than the author's original choice.

References

Bochvar, 1938 – Bochvar, D.A. Ob odnom trekhznachnom ischislenii i ego primenenii k analizu paradoksov klassicheskogo rasshirennogo funkcional'nogo ischisleniya [On a three-valued logical calculus and its application to the analysis of the paradoxes of the classical extended functional calculus], *Matematicheskij sbornik* [Sbornik Mathematics], 1938. Vol. 4, No. 2, pp. 287–308. (In Russian)

Devyatkin, 2017 – Devyatkin, L.Yu. "Neklassicheskie modifikacii mnogoznachnyh matric klassicheskoj logiki. Chast' II" [Non-classical modifications of many-valued matrices of the classical propositional pogic. Part II], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2017, Vol. 23, No. 1, pp. 11–47. (In Russian)

Devyatkin et al., 2007 – Devyatkin, L.Yu., Karpenko, A.S., Popov, V.M. "Trekhznachnye harakteristicheskie matricy klassicheskoj propozicional'noj logiki" [Three-valued characteristic matrices of classical propositional logic], *Trudy nauchno-issledovatel'skogo seminara Logicheskogo centra Instituta filosofii RAN* [Proceedings of the research seminar of the Logical Center of the Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences], 2007, Vol. 18, pp. 50–62. (In Russian)

Karpenko, 2010 – Karpenko, A.S. *Razvitie mnogoznachnoj logiki* [The Development of Many-Valued Logics]. M.: LKI, 2010. 448 p. (In Russian)

Marchenkov, 2004 – Marchenkov, S.S. *Funktsional'nye sistemy s operatsiei superpozitsii* [Functional systems with superposition operation], M., 2004. 104 p.

Tomova, 2010 – Tomova, N.E. "Implikativnye rasshireniya regulyarnyh logik Klini" [Implicative extensions of regular Kleene logics], *Logical Investigations*, 2010, Vol. 16, pp. 233–258. (In Russian)

Tomova, 2012 – Tomova, N.E. *Estestvennye trekhznachnye logiki: funkcional'nye svojstva i otnosheniya* [Natural Three-valued Logics: Functional Properties and Relations]. M.: IPh RAS, 2012. 89 p. (In Russian)

Ciuni, 2015 – Ciuni, R. "Conjunction in paraconsistent weak Kleene logic", *Logica Yearbook 2014*, ed. by P. Arazim and M. Dancák. London: College Publications, 2015, pp. 61–76.

Grigolia, Finn, 1993 – Finn, V.K., Grigolia, R. "Nonsense logics and their algebraic properties", *Theoria*, 1993, Vol. 59, No. 1–3, pp. 207–273.

Gödel, 1986 – Gödel, K. *Kurt Gödel: Collected works — Volume I: Publications 1929–1936*. Oxford University Press, 1986. 504 p.

Devyatkin, 2020 – Devyatkin, L. "The Set of closed classes P_{k+1} that can be homomorphically mapped on P_k has the cardinality of continuum", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2020, Vol. 75, No. 1, pp. 47–48.

Kleene, 1938 – Kleene, S.C. "On notation for ordinal numbers", *The Journal of Symbolic Logic*, 1938, Vol. 3, No. 4, pp. 105–155.

Kleene, 1952 – Kleene, S.C. *Introduction to metamathematics*. Groningen: Wolters–Noordhoff Publishing, 1952. 560 p.

Łukasiewicz, 1970 – Łukasiewicz, J. "On three-valued Logic" / *Jan Łukasiewicz. Selected Works*. North–Holland, 1970, pp. 87–88.

Makarov, 2015 – Makarov, A.V. "Description of all minimal classes in the partially ordered set $\mathcal{L}_2^3$ of closed classes of the three-valued logic that can be homomorphically mapped onto the two-valued logic", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2015, Vol. 70, No. 1, p. 48.

Makarov & Makarov, 2017 – Makarov, A.V., Makarov, V.V. "Cardinality of the continuum of closed superclasses of some minimal classes in the partially ordered set $\mathcal{L}_2^3$", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2009, Vol. 74, No. 4, p. 174.

Paoli, Pra Baldi, 2021 – Paoli, F., Pra Baldi, M. "Extensions of paraconsistent weak Kleene logic", *Logic Journal of the IGPL*, 2021, Vol. 29, No. 5, pp. 798–822.

Post, 1921 – Post, E.L. "Introduction to a general theory of elementary propositions", *American journal of mathematics*, 1921, Vol. 43, No. 3, pp. 163–185.

Sobociński, 1952 – Sobociński, B."Axiomatization of a partial system of three-value calculus of propositions", *The journal of computing systems (St. Paul)*, 1952, Vol. 1, No. 1, pp. 23–55.

Tokarz, 1973 – Tokarz, M. "Connections between some notions of completeness of structural propositional calculi", *Studia Logica*, 1973, Vol. 32, pp. 77–91.

Tomova, 2012 – Tomova N.E. "A lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics", *Reports on Mathematical Logic*, 2012, No. 47, pp. 173–182.

Wójcicki, 1988 – Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi*, Springer, 1988. 473 p.

Wojtylak, 1979 – Wojtylak, P. "Matrix representations for structural strengthenings of a propositional logic", *Studia Logica*, 1979, Vol. 38, No. 3, pp. 263–266.

Wojtylak, 1981 – Wojtylak, P. "Mutual interpretability of sentential logic I", *Reports on Mathematical Logic*, 1981, Vol. 11, pp. 69–89.

Zygmunt, 1974 – Zygmunt, J. "A note on direct products and ultraproducts of logical matrices", *Studia Logica*, 1974, Vol. 33, pp. 349–357.

Логические исследования
2024. Т. 30. № 2. С. 72–88
УДК 16

Logical Investigations
2024, Vol. 30, No. 2, pp. 72–88
DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-72-88

Философия и логика
Philosophy and Logic

Masoud Alvand

Rethinking logical disagreements: a critique of verbalism and a normative constraints approach

Masoud Alvand
University of Isfahan,
Daneshgah St., Isfahan, 8174673441, Iran.
E-mail: alvandm@gmail.com

Abstract: Logical pluralism posits that various conceptions of logic can coexist, suggesting that all acceptable judgments about the validity of an argument are valid without rivalry. This view implies that disagreements between logical theories are merely verbal. Contrary to Kouri Kissel's proposal of metalinguistic negotiation as an explanation for logical disagreements, this article challenges the notion that such disputes are purely verbal. Employing inference to the best explanation, the author argues in favor of normative restrictions on belief in premises and conclusions as a more compelling explanation for logical disagreements.

Keywords: logical pluralism, metalinguistic negotiation, logical disagreement, normativity of logic, inference to the best explanation

For citation: Alvand M. "Rethinking logical disagreements: a critique of verbalism and a normative constraints approach", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2024, Vol. 30, No. 2, pp. 72–88. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-72-88

1. Introduction

Logical systems, serving as theories of the logical consequences relation, often diverge in their views on the nature or instances of this relation, or sometimes both. Consequently, different logical theories can exhibit disagreements regarding the validity of arguments. A well-known illustration of such rivalry exists in the disagreement between intuitionistic logic and relevant logic(s) with classical logic.

Classical logicians generally define a valid argument as one that preserves truth:

> The sentence X *follows logically* from the sentences of the class K if and only if every model of the class K is also a model of the sentence X [Tarski, 1983, p. 417].

This definition implies that sentence X logically follow from the set of sentences K if and only if, in any model where the set K is true, sentence X is also true. Consequently, being truth-preserving becomes a sufficient condition for argument validity. However, relevant logicians adopt a more stringent stance, considering truth preservation as necessary but not solely sufficient for inference validity. According to them, implication paradoxes arise from this specific understanding of logical validity. To avoid these paradoxes, relevant logicians argue that the conclusion must not only preserve truth but also be related to the premises, ensuring that the conclusion logically follows from the given premises:

> The present approach, however, directly replaces the Classical Account with the Relevant Account, and extracts the notion of relevance from the new criterion for validity. For if the conclusion really does follow from the premises, then they must be (logically) relevant to it [Read, 1988, p. 4].

Hence, the relevant logician introduces an alternative conception of logical validity, diverging from the classical understanding. This deviation arises from a disagreement with the classical perspective on the nature of logical validity, driven by the aim to preclude arguments that, in their view, lack validity. Consequently, a prominent illustration of the rivalry between different logical systems surfaces in the ongoing debate between relevant logicians and classical logicians regarding the very essence of logical validity.

Furthermore, when we substitute Kripke models with the models in Tarski's definition of logical validity, an intuitionistic logician perceives truth-preservation in these models as a sufficient condition for logical validity. However, a divergence emerges when comparing their stances with classical logicians, especially on instances such as the Double Negation rule. Within the realm of intuitionistic logic, Michael Dummett stands out for his robust advocacy, elucidating the distinctions between intuitionistic and classical logic. In one of his seminal articles championing intuitionistic logic against its classical counterpart, he articulates his position:

> The question with which I am here concerned is: What plausible rationale can there be for repudiating, within mathematical reasoning, the canons of classical logic in favour of those of intuitionistic logic? $<\ldots>$ I am concerned only with the standpoint of the intuitionists themselves, namely that classical mathematics employs forms of reasoning which are not valid on any legitimate construal of mathematical statements [Dummett, 1978, p. 215].

Therefore, Dummett, acting in the capacity of an intuitionistic logician, endeavors to bolster his viewpoint on "validity" by critiquing classical notions of validity. In doing so, he proposes his perspective as a potentially superior alternative to classical validity.

Despite the common intuition that logical theories are in competition, two obstacles challenge this perspective: the variability in meaning of logical constants across logical systems and the concept of logical pluralism. Both factors lead us to consider logical validity as a property tied to specific systems, with judgments of different logical systems about argument validity seemingly talking past each other. The aim of this article is to demonstrate that logical disagreements carry significance, and disputes among logicians are not merely verbal.

The article is structured as follows: In the second section, we provide a brief explanation of the two obstacles to rivalry in different logics. The third section delves into Kouri Kissel's solution for explaining logical disagreements. Through the concept of metalinguistic negotiation, Kouri Kissel attempts to illustrate that logical disagreements align with the pluralistic view of logic, suggesting that logicians are involved in reasoning on a metalinguistic level and critiquing each other's perspectives. Moving to the fourth section, we examine the challenges posed by this explanation of logical disagreements. Finally, in the fifth section, an alternative solution will be presented that aims to address these challenges without encountering the identified problems.

1.1. Meaning variance of logical constants

The diversity in meanings assigned to logical constants across various logical systems raises the question of whether logical disagreements might be considered meaningless. As an illustration, consider the possible world semantics of negation in classical logic and Routley's semantics[1] for it in relevant logic respectively:

$$\sim A\ is\ tru\ in\ w\ iff\ A\ is\ false\ in\ w$$

$$\sim A\ is\ true\ in\ w\ iff\ A\ is\ not\ false\ in\ w^*$$

The assertion that altering the truth condition of a logical constant suffices to change its meaning implies that theories attributing different truth conditions to negation ascribe distinct meanings to it. Consequently, when these theories diverge on the question of argument validity, their disagreement is deemed verbal. The meaning variance of logical constants, according to Quine, leads to the belief that paraconsistent logicians and classical logicians are not engaged in a common discourse; their discussions revolve around different issues:

[1] In this interpretation, each world, w, comes with a mate, w^*, its star world, such that $\sim A$ is true at w if A is false, not at w, but at w^*. See [Priest, 2008, p. 151].

> My view of this dialogue is that neither party knows what he is talking about. They think they are talking about negation, '$\sim$', 'not'; but surely the notation ceased to be recognizable as negation when they took to regarding some conjunctions of the form '$p\ .\ \sim p$' as true, and stopped regarding such sentences as implying all others. Here, evidently, is the deviant logician's predicament: When he tries to deny the doctrine he only changes the subject [Quine, 1970, p. 81].

Quine's perspective on non-classical logic as opposed to classical logic is encapsulated in the slogan: ***changing logic is changing the subject***. According to this viewpoint, a classical logician discusses one thing, while a non-classical logician discusses something else. Therefore, disagreements between non-classical and classical logicians are deemed meaningless.

1.2. Logical pluralism

Logical pluralism posits that there is more than one right logic, but it can be viewed in various ways. Carnap, for instance, contends that the question of the right logic is meaningless. In his view, we are free to choose a linguistic framework governed by specific rules, and no philosophical argument is necessary to justify this choice. Simply stating one's syntactic rules clearly is sufficient [Carnap, 1937, p. 51–52].

Shapiro offers a different view, asserting that the rightness of a logic depends on its structure and application context. For example, he argues that the axioms of constructive analysis in mathematics and classical analysis in mathematics are compatible with intuitionistic and classical logics, respectively. Each set of axioms produces various structures, and according to Shapiro, each structure requires a different logic for correctness within that specific context [Caret, Kouri Kissel, 2020, p. 4].

Beall and Restall, drawing inspiration from Tarski's definition of logical validity, contend that "validity" does not carry the same meaning across all logical systems. According to them, each logical system requires a different meaning of "logical validity":

> (GTT): An argument is valid$_x$ if and only if, in every case$_x$ in which the premises are true, so is the conclusion [Beall, 2006, p. 29].

Thus, Cases adopts different meanings in various logics, leading to distinct meanings of validity in these logics. If "Case" is regarded as a consistent and complete world, it results in "classical validity". If considered as an inconsistent and incomplete world, it yields "relevant validity". Finally, defining it as a structure gives rise to "intuitionistic validity" [Ibid., p. 31–32].

Therefore, logical pluralism suggests that multiple logics can adequately capture logical consequence relations if a logical system is viewed as a theory of such relations. For instance, Beall and Restall prioritize the question of argument validity in any logical system, asserting that all (acceptable) logical systems provide correct answers to this question. Consequently, they argue that logical disagreements regarding "validity" are meaningless[2]:

> These two accounts of consequence are *different* but, with respect to the chief question of Logic (what arguments are valid?), they are not *rivals*. There is no sense in calling the two accounts *rivals* with respect to whether such and so argument is valid. Qua answers to Logic's chief question, the two accounts do not compete [Beall, 2006, p. 44].

Logical pluralism posits that all logical theories are right, rendering them incapable of being rivals. Additionally, the meaning variance of logical constants prevents a direct comparison between these theories. Despite these challenges, logicians openly engage in disputes with opposing logical theories, advocating for their respective perspectives. Two possible approaches to understanding these disagreements are to dismiss them as purely verbal disputes or to seek an explanation. In the following section, we will explore Kouri Kissel's proposed solution to this intricate problem.

2. Metalinguistic negotiation explanation for logical disagreement

As a pluralist, Kouri Kissel contends that logical pluralism initially appears inconsistent with the prospect of meaningful dialogue between different logical theories. However, she recognizes this inconsistency as undesirable and endeavors to present a solution [Kouri Kissel, 2019, p. 1]. While she specifically advocates a particular form of logical pluralism, her proposed solution can be viewed as a defense of the broader possibility of dialogue between logical theories, irrespective of the specific conception of logical pluralism embraced.

Kouri Kissel's approach to logical pluralism falls within the realm of domain-specific logical pluralism, where "domain" refers to a specific field of discussion, such as mathematics or quantum mechanics, around which people engage in arguments. In this view, the rightness of a logic is contingent upon the goals

[2]Other conceptions of logical pluralism also aim to alleviate logical disagreements concerning the nature or instances of validity (or both). For instance, Carnap's conventional pluralism, which permits any choice for a language framework bound by certain rules, and pluralism that grounds the correctness of logic in its structure and field of application similarly do not view different logics as rivals. These perspectives consider logical disagreements to be meaningless and assert that the judgment of any acceptable logical system about validity is correct. Consequently, Steinberger concludes that logical pluralism doesn't resolve logical disagreements but rather dissolves them and pluralists have been the heroes in ending these pointless disputes [Steinberger, 2019, p. 3].

of participants in the argumentative conversation and the specific domain in question [Kouri Kissel, 2019, p. 3]. Consequently, the selection of the right logic and connectives hinges on their alignment with the deductive aims of participants and its ability to guide deductive practices appropriately [Ibid., p. 3–4].

As an example, consider a classical logician and an intuitionistic logician who employ two distinct logics, not for different domains, but for the same domain. The classical logician applies classical logic to analyze mathematics, while the intuitionistic logician utilizes intuitionistic logic for the same purpose. Due to the different meanings of logical constants in these two logics, the two logicians do not use the same language when discussing the analysis of mathematics. Consequently, their disputes about the validity of mathematical arguments are deemed verbal because they employ different meanings for logical terms. However, Kouri Kissel asserts that despite this challenge, the logicians do not dismiss their discussions:

> But this may not always be the case: there may still be a disagreement in place about who is doing analysis in the best way even after the practitioners realize that they are using different logical rules and connectives. In effect, merely verbal disputes are resolved once the different meaning/usage of the term in question is recognized, while these cross-language disputes may not be so easily sorted [Ibid., p. 5].

Indeed, according to Kouri Kissel, in Carnap's approach to pluralism, the disagreement between two logicians is considered verbal. In this understanding of pluralism, when two logicians adopt different linguistic frameworks, the meanings of logical terms are determined by the rules of their respective linguistic frameworks, resulting in different meanings [Ibid., p. 4]. Consequently, their conversation, particularly in the context of mathematical argument analysis, appears to be rendered impossible due to the divergence in the meanings of logical terms.

Beall and Restall, guided by (GTT), acknowledge different meanings for the term "validity" itself, despite maintaining a shared understanding of logical constants. Consequently, when engaging in disputes over the validity of mathematical arguments, classical and intuitionistic logicians may find themselves talking past each other, as their distinct meanings of "validity" lead to a lack of mutual understanding.

According to Kouri Kissel, logicians, even after acknowledging the use of different meanings of "validity", persist in debating the validity of mathematical arguments and engage in genuine discussions. To clarify this ongoing dispute, she introduces the concept of metalinguistic negotiation, defined as "disagreements about the proper deployment of linguistic representations" [Ibid., p. 6] citing [Plunkett, Sundell, 2013, p. 3]. Metalinguistic negotiation involves two crucial characteristics: firstly, participants use words metalinguistically to discuss their correct use. What is critical in this negotiation is that the words under discussion are not merely mentioned but actively used. Secondly, metalinguistic negotiations are held to answer the question of what is the correct meaning of a word in a specific context and which word should be employed in it [Kouri Kissel, 2019, pp. 6–7].

In an illustrative example provided by Kouri Kissel, a metalinguistic negotiation unfolds between two individuals in a room who disagree about whether the room is cold. One attempts to raise the temperature by asserting, “The room is cold”, while the other disputes this claim. The crux of their disagreement lies in differing definitions of “coldness”: the first person considers the room cold when the temperature is below 70 degrees Celsius, while the second person holds that “coldness” applies when the temperature is below 65 degrees Celsius. Despite the verbal disagreement and the realization that they attribute different meanings to “coldness”, the dispute does not end. Instead, each participant endeavors to persuade the other by presenting arguments to either maintain or alter the room temperature. This persistence in discussion, even after recognizing the differing meanings, exemplifies a metalinguistic negotiation in action:

> This is a hallmark of metalinguistic negotiation. Each is using the term “cold” metalinguistically to demonstrate what they think the proper meaning/usage should be — in this sense, the debate has a normative characteristic about how “cold” ought to be used, and whether they ought to attempt to change the temperature in the office. In this case, they each use “cold” metalinguistically to make a claim about the proper extension of the term [Ibid., p. 6].

Indeed, in the given example, the roommates engage in a metalinguistic negotiation, which operates at a higher level than the object language. The disagreement revolves around the meaning that should be ascribed to the word “cold” in their conversation, with each participant advocating for their interpretation. Their efforts are directed at convincing one another regarding the correct meaning or usage of the term “cold” in the context of their goal, which is either maintaining or changing the room temperature. This aligns with the key characteristics of metalinguistic negotiations, where individuals, while using a particular word (such as “cold”), dispute its intended meaning and strive to establish the accurate meaning or usage.

Kouri Kissel’s perspective on metalinguistic negotiation offers an explanation for why the disagreement between different logicians is genuine rather than merely verbal. Consider classical and intuitionistic logicians as an example. The classical logician asserts that the excluded middle is a theorem, while the intuitionistic logician disputes this, maintaining that it is not. This discrepancy arises from differences in the meanings of logical constants in their respective logical systems or the disagreement over the term "theorem".

While Kouri Kissel acknowledges the challenge of precisely determining the nature of disagreement in metalinguistic negotiation[3], she emphasizes that the essence of the discussion revolves around disputes over the validity of excluded middle. Despite the initial recognition that logicians may attribute different meanings to the contested word, the discussion does not end. Instead, it transitions to a higher level beyond the object language. At this level, logicians engage in arguments to establish the best meaning of the term, ultimately aiming to determine the right logic for the analysis of mathematics that aligns with their deductive goals:

> We can see these two participants as arguing about the best way to approach analysis, in particular about what the term "theorem" ought to mean. In rejecting the claim that the fundamental theorem follows from the axioms of analysis, the intuitionistic analyst suggests that the classical analyst has the wrong axioms and logical rules in place [Kouri Kissel, 2019, p. 8].

3. Logic of metalinguistic negotiation

I must acknowledge that, unconsciously, I held the assumption that logical disagreements were synonymous with metalinguistic disagreements. Yet, upon delving into Kouri Kissel's article and examining her nuanced arguments, I am now convinced that this explanation lacks persuasiveness. In the subsequent section, I will scrutinize the shortcomings of this perspective and, concurrently, present my proposed solution to elucidate the nature of logical disagreements.

According to Kouri Kissel, in a dispute, the parties ***argue*** about the right meaning of a word in a metalinguistic negotiation. For instance, classical and intuitionistic logicians engage in a metalinguistic negotiation where they debate the meanings of terms like "or", "negation", or "theorem" to determine which logic better analyzes mathematics. In this context, if she employs the term "argumentation" in a logical sense, we must inquire about the logical rules guiding the parties' arguments. Are they following the rules of intuitionistic logic or classical logic?

According to inferential semantics for logical constants, a logical constant's meaning is established by the rules that govern it — introduction and elimination rules [Boghossian, 2003; Gentzen, 1934; Prawitz, 1977]. For example,

[3] It's noteworthy that Kouri Kissel herself acknowledges the complexity of determining the exact nature of disagreement in metalinguistic negotiation, and she defers the solution of this intricate problem for another time [Kouri Kissel, 2019, p. 11, footnote 14].

the divergence in the inference rules governing "negation" in the sequent calculus for classical and intuitionistic logic results in these logics allowing different meanings for this logical constant:

Classic	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta}\ (L\neg)$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}\ (R\neg)$
Intuitionistic	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow}\ (L\neg)$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A}\ (R\neg)$

If classical and intuitionistic logicians are engaged in a metalinguistic negotiation about, for example, which meaning should be attributed to the term "or", they employ two distinct terms in their arguments. Consequently, resolving the dispute over the meaning of "or" in the very metalinguistic negotiation also necessitates a meta-metalinguistic negotiation. This is crucial to determine the best meaning for using that term in the metalinguistic negotiation. Clearly, to identify the optimal definition of "or" in a meta-metalinguistic negotiation, a meta-meta-metalinguistic negotiation is required as well. In other words, even if we consider most philosophical disputes to be a metalinguistic negotiation about which concepts should be used (as [Plunkett, 2015] does), the situation with logic and logical disputes differs.

During a metalinguistic negotiation in logical disputes, logicians use rules for their arguments that define the meaning of logical terms. Disagreements in the application of these rules lead to disagreements in the meanings of the terms. According to Kouri Kissel, engaging in a metalinguistic negotiation is necessary to transform the disagreement into a genuine one. In contrast, two metaphysicians, for instance, can use the same rules and meanings of logical terms in their disputes during a philosophical discussion about "time". However, when the subject of the dispute is the rules and terms themselves, how can they be compelled to apply the rules of inference or terms approved by the other one? Each logician certainly does not prefer any logic to his own and favors it over any other logic.

One might argue that, in an implicit convention, classical logic is assumed to be the logic of the metalanguage for all logics, used to express the semantics of their logical constants. Read challenges this traditional interpretation of metalinguistic logic, considering it fundamentally at odds with logical pluralism. The core concept of logical pluralism posits that all interpretations of "logical validity" are correct, and therefore, all judgments made by acceptable logics regarding the validity of an argument are right. However, Read contends that allowing classical logic in the metalanguage of all logics implies that the only correct logic for the semantics of logics is classical. This, according to Read, contradicts the fundamental idea of logical pluralism:

> If one allows object— and metalanguage to drift apart, then a split personality and logical pluralism are just around the corner. The right response is to insist on doing one's semantics in the logic in which one believes [Read, 2006, p. 17].

Furthermore, Read asserts that if a proponent of relevant or intuitionistic logic considers a classical inference, such as EFQ or Double Negation, to be invalid, they should not permit classical logic even in the semantic framework of their own logic:

> ...if one believes that, e.g., double negation elimination, or EFQ are invalid (as constructivist and relevantist do, respectively), then one should reject the canons of classical logic even, or especially, when applied to the semantic study of one's chosen account of validity [Ibid., p. 17].

Read raises the question: "if we take classical logic as the only way of meta-theoretical semantic interpretation, then how can we understand the main speech of non-classical logic?" To address the concerns of non-classical logics, such as relevant and intuitionistic logics, it becomes imperative to relinquish the combination of non-classical theory with classical meta-theory. Instead, one must embrace alternative forms of non-classical semantic theories to comprehend the core essence of these logics [Ibid., p. 13].

In summary, Read contends that the reduction of logical disputes to mere verbal disagreements stems from the inclusion of the semantics of a specific logic (namely, classical logic) in the metalanguage of non-classical logic. As an illustration, he references Routley's semantics for negation:

> Either this has nothing to do with semantics, but enables one to manipulate the uninterpreted symbol "$\sim$" in pure semantics for relevance logic; or it does explain the meaning of "$\sim$", in which case, classical and relevance logic are discussing different connectives. If (T*) gives the meaning of "$\sim$", then its meaning is different from the negation in classical logic and, as Prior put it, classical and relevance logicians are "simply talking past one another" [Ibid., p. 14].

Hence, if the selection of a single logic for the metalanguage of all logical systems goes against the essence of logical pluralism, and every logician is permitted to adopt a logic in the metalanguage, how can a metalinguistic negotiation be effectively resolved? Kouri Kissel establishes a criterion to distinguish between a purely verbal dispute and a metalinguistic negotiation. In a purely verbal dispute, the contention ends once the parties recognize that they ascribe different meanings to the same term. This is because such a dispute does not involve a genuine disagreement over the desired term's meaning. On the other hand, in a metalinguistic negotiation, even after acknowledging their disparate meanings of a word, the discussion persists until a consensus is reached regarding its correct use or meaning. However, what if they persist in arguing for their accepted meaning against each other, employing different meanings of the word in their dispute? Would this not also qualify as a purely verbal argument? Their ongoing disagreement over the word's meaning, rather than merely mentioning it, suggests that, based on Kouri Kissel's criteria, they do not bring the dispute to a close.

4. What is the purpose of logical disagreements?

In reviewing the example presented by Kouri Kissel, where two individuals in a room held different meanings of "coldness", it initially seemed that their dispute over room temperature was merely verbal. However, Kouri Kissel argued that they were engaged in a metalinguistic negotiation, *disputing the right meaning of "coldness" to determine the appropriate action: whether to maintain or change the room temperature.* In this context, the dispute appears to be ultimately about determining the right course of action.

According to Kouri Kissel's perspective on metalinguistic negotiation, the dispute wouldn't be considered verbal because it doesn't end without any resolution after revealing their disagreement over the meaning of "coldness". Instead, the discussion culminates in a decision — whether to maintain or change the temperature. Focusing on the ultimate purpose of the dispute provides an explanation that extends beyond mere verbal disagreement. Despite attributing different meanings to "coldness", the discussion results in a tangible outcome, demonstrating that the dispute is a genuine disagreement over the concept of "coldness" rather than a purely verbal dispute.

In essence, by examining the ultimate reaction and the resolution of the dispute, we can discern the actual nature of the disagreement. This suggests that, far from being merely verbal, there was a substantive and real dispute over the meaning of "coldness".

Now let us consider a dispute between two logicians: two logicians disagree about the validity of an argument; Despite taking different meanings of "validity", both of them argue in favor of the judgment of his logic about the validity (or invalidity) of the argument. This dispute seems verbal because they have different meanings of "validity" (or terms like "or" or "negation", etc.). However, compared to the last example, if we ask what is the purpose of the dispute and what is the appropriate reaction after resolving the dispute for the logicians, there will be no need to resort to metalinguistic negotiation to explain the disagreement. Why do logicians oppose rival theories of "validity" or its instances (or both) and present a new theory to solve potential problems? Isn't the essence of that dispute what appropriate reaction they should take to the conclusion if they believe the argument premises? In fact, the best explanation for the fact that the dispute is not merely verbal is the changes in the belief system of those two logicians, which creates the validity of that argument; compare it with the example where the dispute was whether to maintain or change the room temperature. Thus, it seems that, regarding the ultimate reaction, the best explanation for logical disagreement is applying normative restrictions to the premises and the conclusion of the argument.

The idea that the logical validity of an argument implies that we cannot (or should not, or there is no reason to) believe its premises without believing its conclusion, and how our belief system is structured based on logical rules, has been introduced in philosophical literature as the normativity of logic. [MacFarlane, 2004] explored 36 different forms of normativity in logic (if it is normative), analyzing their strengths and weaknesses. Field expanded on this exploration, recognizing the challenges linked to a traditional definition of validity as necessarily truth-preserving. He suggests that applying normative restrictions on beliefs in premises and conclusions is a crucial condition for logical validity:

> If an argument is valid, then we shouldn't fully believe the premises without fully believing the conclusion [Field, 2015, p. 43].

Field, while not explicitly considering the normativity of logic as a sufficient condition for logical validity, [MacFarlane, 2017] argues, essentially acknowledged it as such, leading to a normative analysis of validity. However, taking a definitive stance on this matter is not necessary to articulate my perspective. Regardless of whether validity is defined as necessarily truth preservation or construed through normative constraints on belief in premises and conclusion, what is crucial for my argument is that the best explanation for elucidating the logical disagreement between two logicians lies in their ultimate response to resolve their dispute. This response entails a requirement for the acceptance of the conclusion, assuming belief in the premises of an argument.

The Inference to the Best Explanation methodology can elucidate how normative constraints on premises and conclusion can be a better explanation for genuine disagreements between logical theories. This methodology does not prioritize the manner in which an explanation is deemed the best. There is no imperative to scrutinize the specific events leading to the determination that a theory qualifies as the best explanation. It disregards how the dispute between logicians unfolds and the specific logical rules or logical terms they employ for their argumentative disputes or whether their arguments are conducted on a metalinguistic level. The assessment of a theory as the best explanation involves external factors such as adequacy to the data, simplicity, consistency, explanatory power, and so on [Priest, 2016, p. 32].

Crucially, this approach provides a straightforward resolution to the challenging issue of meaning variance of logical constants. Despite the apparent incommensurability arising from the meaning variance of logical terms, logicians often assert that their logical systems disagree with others and engage in arguments to support their respective systems. The normative constraints approach, by transcending the specific meaning of particular system for logical terms, provides a straightforward explanation for these logical differences. The focus shifts from what logicians mean by logical terms to whether they should accept the conclusion after accepting the premises. Consequently, the normative constraint on the premises and the conclusion serves as a *simple* and effective explanation for the intricate problem of the meaning variance of logical constants. Furthermore, even when considering logical disagreements as disputes about logical terms, as Kouri Kissel suggests, the metalinguistic negotiations about these terms are deferred to a higher level, which remains indefinitely open-ended and lacks a clear resolution. This advantage brings more simplicity and explanatory power to this approach than Kouri Kissel' view at the same time.

To assess the superior data adequacy of the normative constraints approach, let us scrutinize an argument governed by different logics. Kouri Kissel aligns herself with a version of domain-dependent pluralism, contending that the appropriate logic or connectives depend on the domain or context of use. Consider the mixed argument from [Tappolet, 1997, p. 209]:

a) Wet cats are funny.

b) This cat is wet.

c) This cat is funny.

Sentences (a) and (c) pertain to the aesthetic domain, while (b) belongs to the empirical domain. Setting aside concerns about soundness, an inquiry into its validity arises. If logic is indeed domain-dependent, the predicament surfaces: which logic should be employed to assess the validity of an argument with premises and a conclusion from different domains? As argued by [Stei, 2023, p. 107], "the governing logic is that of the argument's weakest member.

Alternatively, in case the logics in question cannot be ordered according to their strength, the argument will be governed by the intersection of the logics in question". Regardless of the choice, the outcome is consistent: "The result is that, in broadening the frame of reference in terms of the domains involved in an argument, the domain-pluralist's assessment of validity-in-D approaches the monist's conception of validity" [Stei, 2023, p. 108].

However, a critical concern arises: How can a pluralist, especially one subscribing to domain-dependence, maintain her pluralistic approach when assessing the validity of arguments involving different domains governed by distinct logics? The initial concern in this article was to explain logical disagreements while preserving a pluralistic approach. Yet, the question of the logical validity of mixed arguments and the ensuing disagreement seems to erase pluralism. Can the metalinguistic negotiation approach to logical disagreement resolve the tension between logical pluralism and the assessment of validity for these arguments? It appears that logical pluralism has already dissipated, leaving no room for metalinguistic negotiation to choose the best logic for assessing the validity of the arguments.

Contrastingly, the normative constraints approach to logical disagreements adeptly elucidates the assessment of argument validity governed by different logics while unwaveringly upholding the tenets of logical pluralism. The domain-dependent pluralist was compelled to choose the weakest logic or intersection between the involved domains to evaluate the validity of mixed arguments, and this reduced pluralism to monism. However, in the normative constraints approach, there is no prerequisite to initially agree on a logic to resolve the dispute over the validity of that argument. It suffices to examine whether, by accepting the premises of that argument, we can (or should or there is a reason to) believe the conclusion as well. In this case, the disagreement between two logicians regarding arguments containing sentences from different domains, can be resolved without abandoning the logics that govern those domains and without necessitating a consensus on a singular logic. Therefore, the normative constraints approach can explain cases of logical disagreements that the metalinguistic negotiations view cannot resolve, establishing its superiority in terms of data adequacy.

5. Conclusion

Logical systems, being theories of logical consequence relations, can disagree on the nature or instances of this relation, or both. However, the semantic variety of logical constants and the presence of logical pluralism pose significant obstacles, rendering logical systems incommensurable and their alleged disagreements seemingly meaningless. Kouri Kissel attempts to elucidate this disagreement through metalinguistic negotiation, wherein parties engage in argumentation to convince each other about the optimal meaning of the disputed terms.

However, a critical question arises: which logic should they employ in their arguments during the metalinguistic negotiation? If the subject of the dispute is not logic itself, the metalinguistic negotiation might not end as a purely verbal dispute, and the parties may reach an agreement on the meaning to be adopted. Conversely, if the disputed subject is logic, the metalinguistic negotiation necessitates a meta-metalinguistic negotiation to establish the meaning of the disputed terms in the metalinguistic negotiation. This recursive pattern continues with each level requiring an additional metalinguistic negotiation, creating an infinite regress.

Therefore, while adopting Kouri Kissel's framework of ultimate reaction to explain metalinguistic negotiation, I posit normative restrictions on the premises and conclusion of an argument as the superior explanation for logical disagreement. Utilizing the inference to the best explanation, I argue that the normative constraints approach effectively addresses logical disagreements while circumventing the challenges posed by the semantic variance of logical constants and logical pluralism.

Acknowledgements. 1) This article is based upon funded by Iran National Science Foundation (INSF) and University of Isfahan under project No. 4004481. 2) I am grateful to Graham Priest for reading the draft of this paper and for his valuable feedback.

References

Beall, 2006 – Beall, J., Restall, G. *Logical Pluralism*. Oxford: Clarendon Press, 2006.

Boghossian, 2003 – Boghossian, P. "Blind reasoning", *Proceedings of the Aristotelian Society Supplementary*, 2003, Vol. 77, pp. 225–248.

Caret, Kouri Kissel, 2020 – Caret, C.R., Kouri Kissel, T. "Pluralistic perspectives on logic: an introduction", *Synthese*, 2020, Vol. 198, pp. 4789–4800.

Carnap, 1937 – Carnap, R. *The Logical Syntax of Language*. New York: Harcourt, Brace and Company, 1937.

Dummett, 1978 – Dummett, M. "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic", in: *Truthand Other Enigmas*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1978, pp. 215–247.

Field, 2009 – Field, H. "Pluralism in Logic", *The Review of Symbolic Logic*, 2009, Vol. 2, Is. 2, pp. 342–361.

Field, 2015 – Field, H. "What is logical validity?", in: *Foundation of logical consequence*, eds. by C.R. Caret, O. Hjortland. Oxford University Press, 2015, pp. 33–70.

Gentzen, 1934 – Gentzen, G. "Untersuchungen über das logische Schließen II", *Math. Zeitschrift*, Vol. 39, pp. 405–431. Translated in: *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, ed. by M.E. Szabo. North Holland, 1969.

Kouri Kissel, 2019 – Kouri Kissel, T. "Metalinguistic negotiation and logical pluralism", *Synthese*, 2019, Vol. 198, pp. 4801–4812.

MacFarlane, 2004 – MacFarlane, J. "In what sense (if any) is logic normative for though?", unpublished. For presentation at the Central Division APA. [`https://johnmacfarlane.net/normativity_of_logic.pdf`, accessed on 28.08.2024]

MacFarlane, 2017 – MacFarlane, J. "Is Logic a Normative Discipline?", Presented at Conference on the Normativity of Logic, University of Bergen. [`https://johnmacfarlane.net/normative.pdf`, accessed on 28.08.2024]

Plunkett, Sundell, 2013 – Plunkett, D., Sundell, T. "Disagreement and the semantics of normative and evaluative terms", *Philosophers' Imprint*, 2013, Vol. 13, No. 23, pp. 1–37.

Plunkett, 2015 – Plunkett, D. "Which Concepts Should We Use?: Metalinguistic Negotiations and The Methodology of Philosophy", *Inquiry*, 2015, Vol. 58, No. 7–8, pp. 828–874.

Prawitz, 1977 – Prawitz, D. "Meaning and proofs: on the conflict between classical and intuitionistic logic", Theoria, 1977, Vol. 43, pp. 2–40.

Priest, 2008 – Priest, G. *An introduction to non-classical logics.* Second edition. Cambridge University Press, 2008.

Priest, 2016 – Priest, G. "Logical disputes and the a priori", *Princ1ṕios: Revista de Filosofia (UFRN)*, 2016, Vol. 23, No. 40, pp. 30–57.

Quine, 1970 – Quine, W.V.O. *Philosophy of Logic.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1970.

Read, 1988 – Read, S. *Relevant Logic: A Philosophical Examination of Inference.* Oxford: Basil Blackwell, 1988.

Read, 2006 – Reed, S. "Monism: The One True Logic", in: D. DeVidi and T. Kenyon (eds.), *A Logical approach to philosophy: Essays in honour of Graham Solomon.* Springer, 2006, pp. 193–209.

Stei, 2023 – Stei, E. *Logical pluralism and Logical consequence.* Cambridge university Press, 2023.

Steinberger, 2019 – Steinberger, F. "Logical pluralism and logical normativity", *Philosophers' Imprint*, 2019, Vol. 19, No. 12, pp. 1–19.

Tappolet, 1997 – Tappolet, C. "Mixed Inferences: A Problem for Pluralism about Truth Predicates", *Analysis*, 1997, Vol. 57, No. 3, pp. 209–210.

Tarski, 1983 – Tarski, A. "On the Concept of Logical Consequence". in: *Logic, Semantics, Metamathematics*, ed. by J. Corcoran. Indianapolis: Hackett, 1983, pp. 409–420.

Переосмысление логических разногласий: критика вербализма и подход, основанный на нормативных ограничениях

Масуд Альванд
Исфаханский Университет, Иран.
E-mail: alvandm@gmail.com

Аннотация: Логический плюрализм утверждает, что различные концепции логики могут сосуществовать, предполагая, что все приемлемые суждения о достоверности аргумента действительны без соперничества. Эта точка зрения подразумевает, что разногласия между логическими теориями носят чисто словесный характер. Вопреки предложению Коури Киссела о метаязыковых переговорах в качестве объяснения логических разногласий, эта статья ставит под сомнение представление о том, что такие споры носят чисто вербальный характер. Используя вывод наилучшего объяснения, автор приводит доводы в пользу нормативных ограничений на веру в посылки и выводы как более убедительного объяснения логических разногласий.

Ключевые слова: логический плюрализм, металингвистические переговоры, логические разногласия, нормативность логики, вывод наилучшего объяснения

Логические исследования
2024. Т. 30. № 2. С. 89–110
УДК 162.6

Logical Investigations
2024, Vol. 30, No. 2, pp. 89–110
DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-89-110

Теория и практика аргументации
Theory and Practice of Argumentation

Е.Н. Лисанюк

То ли чаю испить, то ли повеситься, или Логические аспекты желаний в аргументации о действиях

Елена Николаевна Лисанюк
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Российская Федерация, 105066, г. Москва, ул. Ст. Басманная, д. 21/4, стр. 1.
E-mail: elisanyuk@hse.ru

Аннотация: Мы предлагаем методику логико-аргументативного анализа утверждений о желаниях, выступающих посылками недемонстративных практических аргументов о действиях, или делиберативных аргументов, позволяющую оценивать такие аргументы как приемлемые или нет в зависимости от разновидности желания. Делиберативные аргументы о том, как поступать для осуществления желания, широко распространены, однако их репрезентацию и оценку затрудняют некогнитивный характер желаний, сложности в разграничении между когнитивными и некогнитивными элементами строения, а также отсутствие внятных критериев приемлемости. В зависимости от связи желания с внутренним состоянием агента и положением дел в мире мы делим их на относительные, предполагающие приведение положения дел в соответствии с желаемым, и абсолютные, не предполагающие этого; реконструируем одиночные делиберативные аргументы при помощи схемы аргументации «к последствиям», разграничивая выражающую приоритетное желание некогнитивную целевую посылку и когнитивную целе-средственную посылку, выражающую мнение об эффективности предпочтений в способах его реализации; и представляем заключение такого аргумента как интенцию — мысле-действие агента, принимающего обязательство придерживаться данной линии поведения, по аналогии с дискурсивным обязательством считать истинным заключение демонстративного аргумента. На основе идеи условного обязательства, разработанного Й. ван Бентемом, Д. Гросси и Ф. Лью для динамической деонтической логики действий, мы предлагаем семантическую экспликацию обусловливания между предпочтениями и приоритетами и оцениваем приемлемость таких аргументов в зависимости от того, позволяет ли предпочтительный способ осуществить приоритетное желание. Это позволяет объяснить, почему в составе практических аргументов лишь относительные желания поддаются обоснованию и критике, но не абсолютные. Результаты проиллюстрированы на примере желаний И. Обломова и А. Штольца из романа И.А. Гончарова «Обломов», а также других литературных персонажей.

Ключевые слова: некогнитивные предложения, делиберативные аргументы, действие, практическая аргументация, оценка аргументов, условные предложения, обязательство

Для цитирования: *Лисанюк Е.Н.* То ли чаю испить, то ли повеситься, или Логические аспекты желаний в аргументации о действиях // Логические исследования / Logical Investigations. 2024. Т. 30. № 2. С. 89–110. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-89-110

Введение

Желания — это внутренние психологические состояния рациональных агентов, доступные им в интроспективном опыте от первого лица. Изучение желаний подразумевает рефлексию агента по их поводу, достаточную для того, чтобы их обдумывать, сообщать о них другим, рассуждать об их реализации или браться за нее, подбирая подходящие средства, а также определенную связь с положением дел в мире, ведущую к действиям по его изменению в некоторых случаях, но не во всех. Например, в известном споре между героями романа Ивана Александровича Гончарова «Обломов» Ильей Обломовым и его другом Андреем Штольцем Обломов признается, что желал бы пить чай с женой на террасе своего дома в Обломовке, принимать гостей и вести там светскую жизнь, и ему доставляет удовольствие сама мысль об этом, а мысли о том, что для осуществления своего желания ему нужно выезжать в свет в Петербурге, чтобы встречаться с избранницей, жениться, построить в Обломовке дом, переехать туда с женой, вызывают у него беспокойство и, напротив, желание избежать каких-либо действий по реализации этих мечтаний, в особенности — выездов в свет. Несмотря на то, что Штольц согласен с Обломовым в желании избегать светской жизни в Петербурге, он вынужден появляться в свете, чтобы встречаться с людьми в целях реализации своего более важного желания трудиться для развития бизнеса [Гончаров, 1998, с. 172–186]. Подпольный человек из повести Федора Михайловича Достоевского «Записки из подполья», как и Обломов, хотел бы избежать беспокойства, и для этого ему требуется возможность пить чай, когда вздумается, вплоть до «свету провалиться, а чтоб мне чай всегда пить» [Достоевский, 1973, с. 174], однако он не стал бы пить чай в каждый момент времени. Дядя Ваня из пьесы Антона Павловича Чехова «Дядя Ваня», как и Обломов, испытывает удовольствие при мысли о желании повеситься погожим днем [Чехов, 1986, с. 71], хотя он и не собирается вешаться. Сведения о желаниях других доступны из утверждений о них вида

Желание Желаю [чтобы] X,

где X символизирует воображаемое действие или ситуацию. Содержание утверждений такого вида носит некогнитивный характер и не сообщает о знаниях или мнениях агентов желаний по поводу положения дел в мире, как в следующих выражениях, реконструирующих желания упомянутых выше персонажей:

Желание Дяди Вани* Желаю повеситься погожим днем (*ППД*),

Желание Обломова* Желаю пить чай на террасе (*ПЧТ*),

*Желание** Обломова* Желаю не выезжать в свет (*не-ВС*),

Желание Подпольного человека* Желаю пить чай, когда вздумается (*ПЧВ*),

Желание Штольца* Желаю развивать бизнес (*РБ*),

*Желание** Штольца* Желаю не выезжать в свет (*не-ВС*).

Для краткости условимся их записывать, опуская слово «Желаю» и используя прописные русские буквенные символы вместо X для указания на содержания желаний, бесскобочно, где возможно, оставляя латинские и греческие символы для выражения отношений. Некоторая громоздкость записи продиктована сложной обусловленностью желаний в связи с агентами и текущими ситуациями, так что одинаковые содержания, как *не-ВС* в *Желании** Штольца* и *Желании** Обломова* или *ПЧ* в *Желании* Обломова* и *Желании* Подпольного человека* не создают тождественности желаний.

Если рассматривать желания как выражающие намерения агентов придерживаться определенной линии поведения, то они похожи на условные императивы — делиберативные обязательства, которые агенты берутся исполнить, сначала сформулировав практическое рассуждение о том, как нужно поступать для достижения желаемого, а затем — придерживаясь обоснованной в нем линии поведения, модифицируемой, где нужно по обстоятельствам. Схожесть с императивами открывает перспективу использовать для моделирования желаний идею условного динамического обязательства из деонтической логики [van Benthem et al., 2014], связывающую представление об «идеальной» ситуации, где выполняются все нормы, с ее реализацией или максимизацией в достижении этого [Hansson, 1969; Governatori, Rotolo, 2010]:

$$M, S \vDash O(\gamma \mid \varphi) \Leftrightarrow Max([[\varphi]]_M) \subseteq [[\gamma]]_M \tag{1}$$

В (1) γ и φ — это ситуации, в том числе полученные в результате действий субъектов нормы и образующие содержание условной нормы, O — сильный модальный оператор «обязательно», M — модель на Крипке-фрейме $F = (S, \preccurlyeq)$, $[[\cdot]]_M$ — истинностная функция на модели M, а S — это множество ситуаций, описывающих (не-)выполнение норм и упорядоченное при помощи Max по степени приближения к «идеальности» на основе отношения $\preccurlyeq$-предпочтительности вроде «столь же хорошо или лучше, чем». Формулой

$$Max([[\varphi]]_M) \subseteq [[\gamma]]_M$$

в семантике деонтической логики, а также других ответвлений философской логики выражают идею максимизации выполнения необходимого условия φ относительно γ, например в семантике контрфактических кондиционалов вида $\varphi \Rightarrow \gamma$ [Stalnaker, 1968].

Если представить намерение реализовать желание G путем достижения γ при помощи действия F, выполняющего φ, как взятие агентом на себя мысленного обязательства поступать определенным образом, т.е. представить обязательство $O(G \mid F)$ по аналогии с обязательством $O(\gamma \mid \varphi)$ [Лисанюк, 2014], то (1) отражает идею ранжирования желаний и способов их осуществления, когда агенту порой приходится отказаться от реализации одного желания в пользу другого или довольствоваться сносными, но не наилучшими средствами для этого, как происходит с желаниями Обломова и Штольца. Практические рассуждения, формулирующие приоритеты в осуществлении желаемого и предпочтения в том, что требуется сделать для этого, играют важную роль в моделировании желаний.

В отличие от предложений, описывающих положения дел и обладающих истинностными значениями, благодаря чему их можно обосновывать или опровергать, с желаниями это сделать затруднительно вследствие их метафизических, семантических и прагматических свойств, препятствующих логическому анализу желаний и их изучению в качестве элементов логической формы — строения демонстративных умозаключений. Вместе с тем некогнитивные утверждения, выражающие желания, а также цели, ценности или намерения рассуждающих, в рассуждениях о действиях используются наряду с когнитивными предложениями [Anscombe, 1957], хотя провести границу между ними бывает непросто, что наряду с отсутствием внятных критериев оценки ограничивает моделирование практических рассуждений [Millgram, 2001]. Так, в рассуждениях Штольца и Обломова о своих желаниях первые посылки ШБ1* и ОС1** мы трактуем как выражающие приоритетные желания авторов и, стало быть, носящие некогнитивный характер, хотя их можно бы понимать и в когнитивном ключе как мнение о приоритетности ожидаемых ситуаций, в которых они реализуются:

Рассуждение Штольца*

ШБ1* *Желание* РБ приоритетнее, чем Желание** не-ВС.*

ШБ2* *Чтобы достичь РБ, лучше выполнить ВС, а не не-ВС.*

ШБ3* *Значит, ради достижения РБ мне нужно выполнить ВС, а не не-ВС.*

*Рассуждение** Обломова*

ОС1** *Желание** не-ВС приоритетнее всего, включая ВС.*

ОС2** *Чтобы достичь не-ВС, лучше выполнить не-ВС, а не что-то иное, включая ВС.*

ОС3** *Значит, ради достижения не-ВС мне нужно выполнить не-ВС, а не что-то иное.*

Вторые посылки ШБ2* и ОС2** выражают мнения авторов об их предпочтениях в способах осуществления желаемого или их выполнимости. Они носят прогностический и когнитивный характер, хотя их можно бы понять в некогнитивном ключе как элементы (строения) намерения придерживаться определенной линии поведения, к которому приходят в заключении.

Сравним *Рассуждение* Штольца* с его рассуждением по поводу конкурирующей линии поведения для реализации того же приоритетного *Желания* Штольца*:

*Рассуждение** Штольца*

ШБ1** *Желание* РБ приоритетнее, чем Желание** не-ВС.*

ШБ2** *Чтобы достичь РБ, лучше выполнить не-ВС, а не ВС.*

ШБ3** *Значит, ради достижения РБ мне нужно выполнить не-ВС, а не ВС.*

В контексте приоритетности *Желания* Штольца* перед *Желанием** Штольца Рассуждение* Штольца* представляется более приемлемым и устойчивым к критике, чем *Рассуждение** Штольца*, предлагающее менее эффективный путь и поэтому уязвимое для контраргументации. В самом деле, если бы Штольц стал, бездействуя, как Обломов, избегать выездов в свет, это сузило бы возможности для встреч с партнерами и негативно повлияло бы на реализацию *Желания* Штольца.*

Отметим, что сформулировать возражение к *Рассуждению** Обломова* непросто. В нем *Желание** Обломова* предъявлено как абсолютно приоритетное, способ его осуществления, совпадающий с содержанием *Желания** Обломова*, утверждается безальтернативно, поэтому странно будет сомневаться в том, что для того, чтобы не выезжать в свет, необходимо не выезжать в свет. Однако если бы в ШБ2** говорилось об альтернативных способах, например что не выезжать в свет предпочтительнее, чем уехать в деревню, это открыло бы перспективу для контраргументации по поводу их эффективности.

Таким образом несмотря на то, что рассуждения о действиях являются недемонстративными, схожи с императивами и включают трудные для логического анализа некогнитивные элементы вроде желаний, их можно оценивать как приемлемые или нет, хотя и не все из них одинаково легко поддаются такому оцениванию. Тем не менее, поскольку логико-аргументативное исследование состоит в установлении критериев приемлемости для широкого класса рассуждений, включающего недемонстративные [Prakken, Vreeswijk, 2002], постольку в контексте аргументации о действиях возможно говорить о критике или опровержении желаний, если выявить критерии, в соответствии с которыми одни желания оказываются пригодными для обоснования поступков в споре, тогда как другие — непригодными [Микиртумов, Фролов, 2022].

Эти соображения указывают на возможность логико-аргументативного анализа желаний в русле решения проблемы Фреге-Гича [Geach, 1965], которая была обнаружена в связи с императивами в праве и морали и заключается в том, чтобы, признавая затруднения с верификацией утверждений о некогнитивных состояниях, настаивать на необходимости иметь способ репрезентации и оценки включающих их рассуждений. Несмотря на ограничения логического анализа желаний, мы надеемся изучить их в логико-аргументативном ключе и уточнить влияние желаний на приемлемость аргументов о действиях, рассмотрев желания в качестве их несамостоятельных элементов.

1. Свойства желаний и их логические аспекты

В этом разделе мы выделим разновидности желаний на основе свойств, влияющих на возможность их изучения в логико-аргументативных терминах.

Метафизическое свойство состоит в некогнитивном и нефактивном характере желаний. Они не описывают положения дел в мире, не выражают знаний или мнений агентов о ситуациях — их когнитивных состояниях, и не являются сообщениями о том, какие предложения агенты считают истинными. Вместе с тем желания влияют на ситуации в мире, поведение и психологическое состояние агентов желаний, поэтому в зависимости от того, связано их влияние с мотивацией поступков, достижением удовлетворения или получением удовольствия [Schroeder, 2004], можно выделить соответственно мотивирующее М-желание, удовлетворяющее У-желание и доставляющее удовольствие Д-желание.

Семантическое свойство состоит в затруднительности приписать желаниям истинностные значения в том же смысле, в каком их приписывают предложениям, выражающим когнитивные состояния, из-за того, что направление соответствия между содержанием желания и положением дел в мире устанавливается неодинаково для разных желаний. М-желание носит относительный характер. Будучи связано по меньшей мере с двумя ситуациями, текущей и предпочитаемой ей целевой, задающей приоритет агента, М-желание устремляет его посредством действия или бездействия привести или сохранять текущее положение в мире в соответствии с желаемым. Примером М-желания является *Желание* Штольца РБ*. Достижение поставленной цели способно вызвать удовлетворение агента результатами своих действий в смысле У-желания, но необходимой связи между удовлетворением и максимизацией в достижении цели нет, как показано в теории принятия решений [Саймон, 2000]. Реализация У-желания замкнута на оценку агентом положения дел во внешнем или внутреннем мире по сравнению с желаемым. В первом случае У-желания носят относительный характер, подразумевая, что одни ситуации агенту видятся лучше других, и в этом У-желания схожи с М-желаниями, но во втором случае У-желания носят абсолютный характер и не связаны с приоритетностью каких-либо ситуаций для агента. Относительными У-желаниями являются *Желание** Штольца* и *Желание** Обломова*, а абсолютным — У-желание Подпольного человека *ПЧВ*. Абсолютный характер носит Д-желание — стремление агента к изменению своего психоэмоционального состояния. Несмотря на то, что Д-желание может сопровождать действия агента по изменению ситуации во внешнем мире ради достижения какой-либо цели или удовлетворения, оно не является их необходимым элементом. Примерами Д-желаний могут служить *Желание* Дяди Вани* или *Желание* Обломова*.

Таким образом, семантическое свойство желаний позволяет поделить их на относительные и абсолютные. К первым относятся М-желания, связанные с упорядочением ситуаций по приоритетности для агента. Абсолютные желания вообще не связаны с ситуациями, таковы Д-желания. У-желания могут быть и относительными, и абсолютными, и деление желаний на две группы позволяет отвлекаться от их промежуточного характера. Оно затрагивает и третье прагматическое свойство желаний, связанное с утверждениями о них — особыми речевыми действиями, которые, не обладая условиями истинности, обладают условиями успешности или эффективности [Серль, 1986]. Благодаря прагматическому свойству сообщения, содержащие утверждения о желаниях, могут быть распознаны адресатами как несущие сведения о желаниях, а не об иных внутренних состояниях вроде ценностей, намерений и т.д. Условия эффективности утверждений об относительных и абсолютных желаниях неодинаковые. Относительные желания предполагают, что обязанность привести факты в соответствие с желаемым возложена на агента желания, в отличие от абсолютных желаний, не предполагающих этого.

Итак, если рассматривать желание как единое некогнитивное состояние, то будет затруднительно не только установить направление соответствия между фактами и желаемым или приписать желанию истинностное значение, но и выявить особенности влияния желания на ситуации в мире, поведение или психологическое состояние агентов, которые позволили бы оценить обоснованность практических аргументов, ссылающихся на них. Деление желаний сначала на М-, У- и Д-желания, а затем на относительные и абсолютные дает возможность уточнить их свойства для их логико-аргументативного исследования.

2. Дискурсивные и делиберативные обязательства

Когда расходится с положением дел в мире пропозициональное содержание утверждения о когнитивном состоянии говорящего, то вступает в дело требование, которое можно назвать дискурсивным обязательством. В соответствии с ним от рациональных агентов ожидают, что в такой ситуации они пересмотрят свое утверждение или откажутся от него, для того чтобы придерживаться знаний как истинных обоснованных мнений о чем-либо, т.е. истинных предложений, выведенных из посылок, пока они не опровергнуты [Gettier, 1963], см. дискуссию в [Ламберов, 2010; Куслий, 2011]. Свойства желаний не предполагают подобного обязательства, ведь того факта, что желаемое не является действительным положением дел, равно как и обратной ситуации, когда желаемое совпадает с действительностью, может быть недостаточно для того, чтобы рациональный агент отказался от своих целей и желаний [Schueler, 1995].

Вместе с тем нет ничего необычного в том, чтобы критически оценивать пригодность того или иного желания для обоснования или критики линии поведения в составе делиберативного рассуждения [Фролов, 2022]. Тот факт, что практические аргументы можно оценить как приемлемые или нет, подразумевает, что, предъявляя их, авторы считают выполнимой отстаиваемую в них линию поведения и готовы ее придерживаться при определенных условиях, если ее удается отстоять в споре, либо отказаться от нее, если приемлемым оказался аргумент в поддержку конкурирующей линии поведения, как в *Рассуждении* Штольца* и *Рассуждении** Штольца*. Такое обязательство автора по аналогии с дискурсивным обязательством будем называть делиберативным.

В отличие от дискурсивного, делиберативное обязательство носит условный характер в связи с текущей ситуацией, личностью рассуждающего, его желаниями и намерениями, а также относительно диалога, в котором они предъявлены, потому что желания незамкнуты относительно своих следствий и неполны относительно средств их осуществления, ведь агенты желаний не стремятся достичь каждой из ситуаций, где их желания были бы реализованы, и они не предполагают использовать для этого сразу все имеющиеся средства [Серль, 2004]. Вместе с тем поскольку в духе (1) для осуществления желания агенту требуется начать руководствоваться одним из своих желаний в качестве приоритетной цели, отложив прочие, и избрать тот или иной подходящий способ действий по его осуществлению, постольку это открывает возможность оценить практический аргумент, обосновывающий или критикующий это конкретное намерение.

3. Аргументы о действиях

В этом разделе мы обсудим особенности практических аргументов в аспекте их обоснования и критики. Практические, или делиберативные, аргументы по поводу действий — это рассуждения о том, что делать в данной ситуации или как поступать для достижения какой-либо цели, предъявляемые в диалоге в условиях расхождения во мнениях. По поводу действий расхождения во мнениях возникают между людьми не в силу недочетов когнитивного характера — логических ошибок или ошибок в вычислениях, а когда требуется обсудить «правило, которое нужно применить, основания, которые необходимо принять в расчет, значение, придаваемое ценностям, интерпретации и оценки фактов» [Perelman, 1980, p. 150]. Делиберативные аргументы используют для обоснования или критики как уже совершенных, так и будущих поступков. Во втором случае, но не в первом, они могут быть частью процесса принятия решения, рационального, когда оно основано на рассуждениях, либо иррационального, например принятого под влиянием эмоций. Если расхождения во мнениях нет, то аргументы избыточны, поэтому необходимость обоснования и критики в практической аргументации возникает, когда нужно избрать приоритетное желание или цель, а также один из подходящих путей для их реализации [Лисанюк, 2018].

Двойственная умозрительная и эмпирическая природа практических рассуждений образует три ключевых некогнитивных параметра их оценки: агентный, учитывающий личные особенности актора, деонтологический, зависящий от норм или ценностей, и консеквенциалистский, связанный с возможными последствиями реализации поступка и отношением между текущим и желаемым положением дел. Примером нулевой линии в оценке практической аргументации, которая отвлекается от этих параметров, сводя двойственную природу делиберативных рассуждений к теоретическим, или дискурсивным, является подход Платона. Он трактовал практические рассуждения как рассуждения по поводу знаний о благе и справедливости и отказывал рассудительности в специфике по сравнению со знанием или мнением [Платон, 1986].

На нулевую линию полагается гилетический, или реалистский, взгляд на желания, объективирующий их относительно агентов, так что сведения о желаниях других оказываются доступны в третьем лице и без сообщений агентов желаний о них. Сегодня в поддержку гилетического взгляда свидетельствуют результаты нейропсихологических [Лурия, 2003] и нейробиологических исследований [Damasio, 1994], а также технологический прогресс в изучении деятельности мозга, открывшие перспективу получения объективных данных о психоэмоциональных состояниях людей, влияющих на их поведение [Wagar, Thagard, 2004]. Объективация желаний подразумевает возможность контроля над их реализацией независимо от агентов желаний, как это происходит при лечении заболеваний, управлении покупательским поведением, использовании стимулирующих веществ, включая средства улучшения (работы организма) человека [Savulescu, 2009; Аргонов, 2008]. Гилетический взгляд сближает желания с когнитивными состояниями агентов. Его преимуществом является возможность поставить под сомнение желания других, как это можно сделать с их мнениями или знаниями, правда, лишь посредством нулевой линии. Мы здесь придерживаемся противоположного экспрессивного, или нон-когнитивистского, взгляда, предполагающего ненулевую линию в практической аргументации. Его преимуществом является сохранение водораздела между теоретическими и практическими рассуждениями, а также дискурсивными и делиберативными обязательствами, а ограничением — то, что не всякое желание окажется пригодным для обоснования или опровержения в практической аргументации.

Одним из пионеров ненулевой линии был Аристотель, поставивший во главу угла их связь с личностью рассуждающего и его поведением, что заложило основу для агентного и консеквенциалистского параметров их оценки. По Аристотелю, практическое рассуждение направлено не на выведение истинного заключения, а на порождение в душе правильного намерения достигать целей в благоразумных поступках, характеризующих тех, кто обладает добродетелью рассудительности [Аристотель, 1983, VI 1140b25–30]. На необходимый характер связи практического рассуждения со свободой воли, выступающей рациональным основанием выбора линии поведения по осуществлению желаний, указывал Кант, выдвинувший требование деонтологической оценки практических рассуждений на их соответствие моральному закону [Кант, 1965, с. 326].

В XX в. дискуссии о роли некогнитивных состояний в рассуждениях увенчались формулированием понятия интенции — мысле-действия, выражающего отношение агента к действию, которое он намеревается осуществить [Davidson, 1963; Bratman, 1987]. В метафизическом аспекте понятие интенции позволило преодолеть разрыв между умозрительной и эмпирической сторонами практического рассуждения [Dennett, 1971]. В прагмасемантическом аспекте оно дало возможность отождествить с интенцией, выступающей ключевым элементом делиберативного обязательства, заключение практического рассуждения, посредством которого агент фиксирует перед собой или другими готовность осуществить обоснованное рассуждением намерение [Brandom, 1994; Scanlon, 1998]. Например, в *Рассуждении** Обломова* он возлагает на себя делиберативное обязательство по реализации *Желания** Обломова не-ВС*, а Штольц в *Рассуждении* Штольца* берет на себя делиберативное обязательство осуществить *Желание* Штольца РБ* путем участия в светской жизни и отказа от осуществления *Желания** Штольца не-ВС*. Если после этого Штольц стал бы воздерживаться от выездов в свет, как Обломов, а Обломов продолжил бы выезжать в свет, как Штольц, то такое поведение обоих назвали бы непоследовательным как идущее вразрез с взятыми на себя делиберативными обязательствами. Понятие интенции открыло перспективу формального изучения рациональных агентов при помощи BDI-моделей (мнений-желаний-интенций), в которых консеквенциалистские, агентные и деонтологические аспекты их поведения трактуют как порождаемые на разных уровнях их интеллектуальных профилей [Rao, Georgeff, 1995].

Помимо того, что верификация посылок и проверка корректности формы неприменимы к оценке делиберативного рассуждения, ее затрудняют другие ограничения, преодолению которых способствовало представление его заключения в качестве интенции. Предъявление агентом желания как элемента мотивации поступка обычно является результатом других рассуждений по избранию наилучшей из рассматриваемых мотиваций, которые по этой причине нельзя однозначно толковать как предшествующие намерению действовать, наподобие того, как посылки предшествуют заключению дискурсивного рассуждения. Отождествление заключения практического аргумента с интенцией позволило связать оценку его приемлемости с наиболее эффективной мотивацией поступка [Bex et al., 2009], а также сформулировать модулярный подход к его репрезентации, согласно которому интенция выступает его заключением лишь на завершающем этапе, которому предшествуют рассуждения по поводу оценки текущей ситуации, релевантности правил, ценностей или норм, избрание целей и средств и т.п. [Macagno, Walton, 2018].

Ориентиром для оценки практических рассуждений служат схемы аргументации — наследующие античным идеям диалектических топов высказывательные формы, которые, в отличие от логической формы демонстративных умозаключений, фиксируют не строение, а особенность содержательной связи посылок и заключения, позволяя оценивать их приемлемость при помощи критических вопросов относительно этой связи [Walton et al., 2008]. Строение делиберативного аргумента на завершающем этапе чаще всего воплощает 2-посылочную схему аргументации «к последствиям». Целевая Посылка 1 выражает некогнитивное состояние — целеполагающее приоритетное желание рассуждающего, а целе-средственная Посылка 2, выражающая когнитивное состояние, — его мнение о предпочитаемых путях осуществления желаемого, выступающее одновременно предположением об их эффективности:

Схема делиберативного аргумента «к последствиям».

Посылка 1. *Цель G1 приоритетнее для меня, чем цель G2.*

Посылка 2. *Чтобы достичь G1, нужно выполнить действие D, а не F, потому что D лучше, позволит осуществить G1, чем F.*

Заключение. *Значит, ради достижения G1 я выполню D, а не F.*

С помощью этой Схемы выше реконструированы *Рассуждения** и *** Штольца* и *Рассуждение** Обломова.* Сложное условное предложение в Посылке 2 носит прогностический характер, его консеквентом выступает утверждение о приоритетном желании из Посылки 1. В Посылке 1 автор упорядочивает предполагаемые ситуации по степени желательности их осуществления, обусловливая их предпочитаемыми путями в Посылке 2. [Atkinson, Bench-Capon, 2007] предлагают обширный список критических вопросов, сокращенно — *КВ*, к аргументам «к последствиям». В свете (1) и в контексте делиберативного обязательства автора рассуждения мы сосредоточимся на ключевом из них:

КВ Позволяют ли предлагаемые в Посылке 2 пути осуществить желаемое из Посылки 1?

Положительный ответ на *КВ*, в силу своей совместимости с заключением проверяемого делиберативного аргумента, указывает на его приемлемость, а отрицательный ответ отклоняет его, будучи несовместим с заключением.

4. Приоритеты и предпочтения в оценке практических аргументов

В этом разделе мы проверим *Рассуждение* Штольца* и *Рассуждение** Обломова* при помощи *КВ*, используя идеи упорядочения предпочтений относительно приоритета из (1).

Для положительного ответа на *КВ* необходимо и достаточно, чтобы по меньшей мере одна из предполагаемых агентом ситуаций реализации желания, приоритетного в Посылке 1 и достигнутого каким-либо из предпочтительных способов, предъявленных в Посылке 2, была лучше ситуации, где не выполняется условие из Посылки 1. Когда аргумент и контраргумент противостоят по поводу способа реализации, как в *Рассуждениях** и *** Штольца*, то для положительного ответа необходимо, чтобы приоритет из Посылки 1 был реализован более предпочтительным способом, в противоположном случае ответ отрицательный. Это отражает идею (1) упорядочения предпочтений в способах относительно приоритета в желаниях, но не наоборот.

Для того чтобы дать ответ на *КВ* к *Рассуждению* Штольца* и *Рассуждению** Обломова*, уточним их приоритеты и предпочтения. Разумно полагать, что для того, чтобы агент посчитал лучшей некую ситуацию, достаточно, чтобы в ней выполнялось его приоритетное желание по сравнению с теми ситуациями, где этого не происходит, а из таких лучших ситуаций более предпочтительными будут те, где оно реализовано эффективнее — быстрее, дешевле, более полно и т.п. Отношение «приоритетнее, чем» может упорядочивать не только пары, но и наборы желаний. Однако для оценки практического рассуждения, формулирующего намерение агента осуществить одно конкретное желание, мы ограничимся упорядочением одиночных желаний и будем считать его строгим в целях оценки рассуждений, исходя из допущения, что для каждого своего намерения относительно данного желания агент по порядку формулирует отдельное рассуждение. Строгое упорядочение приоритетов между желаниями относительно множества предполагаемых ситуаций их реализации в смысле «лучше, чем» обозначим символом $\prec$ и запишем следующим образом:

Приоритет Штольца* *не-РБ* $\prec$ *РБ*.

*Приоритет** Штольца* *ВС* $\prec$ *не-ВС*.

Приоритет Обломова* *не-ПЧТ* $\prec$ *ПЧТ*.

*Приоритет** Обломова* *ВС* $\prec$ *не-ВС*.

Приоритет Дяди Вани* $\quad$ *не-ППД* $\prec$ *ППД.*

Приоритет Подпольного человека* $\quad$ *не-ПЧВ* $\prec$ *ПЧВ.*

В отличие от приоритетов, по замыслу (1) упорядочение предпочтений в способах осуществления желаемого нестрогое. Это отражает идею о том, что агенту не требуется полагаться сразу на все из них и обычно нет необходимости строго придерживаться какого-то одного, ведь в противном случае способ осуществления стал бы частью приоритетного желания. Скорее, взявшись за исполнение такого желания, агенту придется воспользоваться сначала одним из подходящих способов, и если это пойдет не лучшим образом или не сработает, то другим и т.д. С учетом предпочтительных путей реализации желаемого общее нестрогое $\preccurlyeq$-упорядочение для относительного *Желания* Штольца* таково:

Предпочтения Штольца

(*ВС* и *не-РБ*) $\preccurlyeq$ (*не-ВС* и *не-РБ*) $\preccurlyeq$ (*ВС* и *РБ*) $\preccurlyeq$ (*не-ВС* и *РБ*),

где «и» обозначает нечто вроде пересечения или умножения желаний, за неимением возможности использовать конъюнкцию. Такое упорядочение позволяет дать положительный ответ на *КВ* к *Рассуждению* Штольца*, отклонив отрицательный ответ на него. По сравнению с линиями поведения, не предполагающими реализации наиболее важного для него *Желания* РБ*, лучшей линией поведения оказывается (*ВС* и *РБ*) — осуществление приоритетного желания способом, следующим за самым предпочтительным, хотя она и не является наилучшей за недостижимостью последней, вытекающей из *Рассуждения** Штольца.*

Абсолютный характер желаний Обломова, Дяди Вани и Подпольного человека означает, что предпочитаемые пути реализации приоритетного желания совпадают с его содержанием, потому что абсолютное желание не предполагает рассмотрения других менее приоритетных желаний или менее предпочтительных путей их достижения:

Предпочтение Обломова* $\quad$ *не-ПЧТ* $\preccurlyeq$ *ПЧТ.*

*Предпочтение** Обломова* $\quad$ *ВС* $\preccurlyeq$ *не-ВС.*

Предпочтение Дяди Вани* $\quad$ *не-ППД* $\preccurlyeq$ *ППД.*

Предпочтение Подпольного человека* $\quad$ *не-ПЧВ* $\preccurlyeq$ *ПЧВ.*

Совпадение порядков приоритета и предпочтения в рассуждениях об абсолютных желаниях содержательно не делает тождественными желание и способ его реализации, однако оно исключает отрицательный ответ на

KB к таким рассуждениям, превращая их в неопровержимые. Кроме этого, оно тривиализирует положительный ответ на KB, замыкая предпочтительные пути реализации такого желания на приведение положения дел в соответствие с приоритетом, который сводится к этому предпочтению в действии. Таким образом, если практические рассуждения по поводу относительных желаний поддаются опровержению и их можно оценить как приемлемые или нет, то с рассуждениями по поводу абсолютных желаний сделать этого нельзя. Это означает, что лишь первые могут быть предметом логико-аргументативного исследования в предпринятом нами стиле, а вторые — либо не могут, либо нуждаются в иных подходах для этого, для чего с учетом успехов в нейронауках, о которых было сказано выше, потребуется уточнить логические аспекты интроспекции [Castañeda, 1966; Lewis, 1979; Percus, Sauerland, 2003].

Семантическое основание этого важного вывода связано с идеей условного модифицируемого обязательства (1), в соответствии с которым, взявшись за осуществление относительного желания определенным способом в смысле приведения положения дел в соответствие с желаемым, агент обусловливает свое стремление двояким образом, подчиняя предпочтительные средства приоритетности цели. В силу семантического свойства осуществление абсолютного желания, не связанного с упорядочением предполагаемых ситуаций относительно приоритета, размывает границу между ним и предпочтениями, превращая такое желание в нечто вроде мечты, совместимой если и не с любым положением дел, то с любым способом его реализации:

$$M, S \vDash O(\gamma \mid \top \vee \bot) \Leftrightarrow \mathit{Max}([[\top \vee \bot]]_M) \subseteq [[\gamma]]_M, \tag{1'}$$

где $\top$ и $\bot$ символизируют ожидаемое предпочтительное положение дел и его отсутствие соответственно.

5. Заключение

Мы предприняли логико-аргументативное исследование практического рассуждения о действиях по осуществлению желания и выявили критерий определения приемлемости подобных рассуждений, сформулированный при помощи идеи модифицируемого условного обязательства. Для этого мы классифицировали семантические особенности желаний, поделив их на относительные и абсолютные, представили заключение практического рассуждения как интенцию, посредством которой автор берет на себя обязательства по реализации своего намерения в отношении наиболее важного желания одним из предпочтительных способов, и уточнили семантическое основание для проверки приемлемости такого рассуждения путем экспликации отношения обусловливания между приоритетностью желаний и предпочтительностью средств их реализации. В результате удалось показать, что несмотря на то, что желания являются некогнитивными состояниями и не поддаются логическому анализу, возможен их логико-аргументативный анализ в качестве элементов практического рассуждения, позволяющий дать ответ на вопрос, является такое рассуждение приемлемым или нет, правда, только для относительных желаний.

Литература

Аргонов, 2008 – *Аргонов В.А.* Искусственное программирование потребностей человека: путь к деградации или новый толчок развития? // Вопросы философии. 2008. № 12. С. 22–37.

Аристотель, 1983 – *Аристотель.* Никомахова этика // *Аристотель.* Соч.: в 4 т. Т. 4. М.: Мысль, 1983. С. 53–294.

Гончаров, 1998 – *Гончаров И.А.* Обломов // *Гончаров И.А.* Полное собрание сочинений и писем: в 20 т. Т. 4. СПб.: Наука, 1998. 640 с.

Достоевский, 1973 – *Достоевский Ф.М.* Записки из подполья // *Достоевский Ф.М.* Полное собрание сочинений в тридцати томах. Т. 5. Повести и рассказы. 1862–1866. Л.: Наука, 1973. С. 99–179.

Кант, 1965 – *Кант И.* Критика практического разума // *Кант И.* Соч.: в 6 т. Т. 1. Ч. 1. М., 1965. 544 с.

Куслий, 2011 – *Куслий П.С.* Знание, проблема Геттиера и некоторые дискуссии в современной отечественной эпистемологии // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2011. № 2 (14). С. 34–54.

Ламберов, 2010 – *Ламберов Л.Д.* Как важно быть серьезным: о некоторых критиках Геттиера // Эпистемология и философия науки. 2010. Т. XXVI. № 4. С. 84–90.

Лисанюк, 2018 – *Лисанюк Е.Н.* Действие, норма и ценность в практической аргументации // Аргументация в праве и морали / Под ред. Е.Н. Лисанюк. СПб.: Алеф-Пресс, 2018. С. 9–36.

Лисанюк, 2014 – *Лисанюк Е.Н.* Лояльный агент и отменяемость в деонтической логике // Известия УрФУ. Серия 3. Общественные науки. 2014. № 1 (125). С. 22–244.

Лурия, 2003 – *Лурия А.Р* Основы нейропсихологии. М.: Издательский центр «Академия», 2003. 384 с.

Микиртумов, Фролов, 2022 – *Микиртумов И.Б., Фролов К.Г.* Нонкогнитивизм и моральные высказывания // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2022. № 70. С. 189–197.

Платон, 1986 – *Платон.* Хармид / Пер. С.Я. Шейнман-Топштейн // *Платон.* Диалоги / Под ред. А.Ф. Лосева и др. М.: Мысль, 1986. С. 296–326.

Саймон, 2000 – *Саймон Г.А.* Теория принятия решений в экономической теории и в науке о поведении // Вехи экономической мысли. Т. 2. Теория фирмы / Под ред. В.М. Гальперина. СПб.: Экономическая школа, 2000. С. 54–72.

Серль, 1986 – *Серль Дж.* Классификация иллокутивных актов // Новое в зарубежной лингвистике. Выпуск XVII. М.: Прогресс, 1986. С. 170–194.

Серль, 2004 – *Серль Дж.* Рациональность в действии / Пер. с англ. А. Колодия, Е. Румянцевой. М.: Прогресс-Традиция, 2004. 336 с.

Фролов, 2022 – *Фролов К.Г.* Об опровержении желаний // Аналитическая философия: траектории истории и векторы развития: сб. научн. тр. Международной научной конференции, посвященной 80-летию научного руководителя Института философии и права СО РАН В.В. Целищева, Новосибирск, 25–26 февраля 2022 г. / Под ред. А.В. Хлебалина. Новосибирск: Офсет ТМ, 2022. С. 69–75.

Чехов, 1986 – *Чехов А.П.* Полное собрание сочинений и писем в 30 т. Соч.: в 18 т. Т. 13. Пьесы (1895–1904). М.: Наука, 1986. С. 61–116.

Anscombe, 1957 – *Anscombe E.* Intention. Oxford: Basil Blackwell, 1957. 93 p.

Atkinson, Bench-Capon, 2007 – *Atkinson K., Bench-Capon T.* Practical reasoning as presumptive argumentation using action based alternating transition systems // Artificial Intelligence. 2007. No. 171. C. 855–874.

van Benthem et al., 2014 – *Benthem J. van, Grossi D., Liu F.* Priority structures in deontic logic // Theoria. 2014. No. 80. P. 116–152.

Bex et al., 2009 – *Bex F., Bench-Capon T., Katie Atkinson K.* Did he jump or was he pushed?: Abductive practical reasoning // Artificial Intelligence and Law. 2009. Vol. 17. No. 2. P. 79–99.

Davidson, 1963 – *Davidson D.* Actions, Reasons, and Causes // The Journal of Philosophy. 1963. No. 60 (23). P. 685–700.

Bratman, 1987 – *Bratman M.* Intention, plans, and practical reason. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1987. 208 p.

Brandom, 1994 – *Brandom R.* Making It Explicit: Reasoning, Representing, and Discursive Commitment. Cambridge: Harvard University Press, 1994. 741 p.

Castañeda, 1966 – *Castañeda H.* ‘He’: A Study in the Logic of Self-Consciousness // Ratio. 1966. Vol. 8. P. 130–157.

Damasio, 1994 – *Damasio A.R.* Descartes’ error. New York: G.P. Putnam’s Sons, 1994. 336 p.

Dennett, 1971 – *Dennett D.C.* Intentional systems // Journal of Philosophy. 1971. No. 68. P. 87–106.

Geach, 1965 – *Geach P.T.* Assertion // The Philosophical Review. 1965. Vol. 74. No. 4. P. 449–465.

Gettier, 1963 – *Gettier E.L.* Is Justified True Belief Knowledge? // Analysis. 1963. Vol. 23. P. 121–123.

Governatori, Rotolo, 2010 – *Governatori G., Rotolo A.* Changing legal systems: Legal abrogations and annulments in defeasible logic // The Logic Journal of IGPL. 2010. Vol. 18. No. 1. P. 157–194.

Hansson, 1969 – *Hansson B.* An analysis of some deontic logics // Nous. 1969. No. 3. P. 373–398.

Lewis, 1979 – *Lewis D.* Attitudes De Dicto and De Se // The Philosophical Review. 1979. Vol. 88. P. 513–543.

Macagno, Walton, 2018 – *Macagno F., Walton D.* Practical Reasoning Arguments: A Modular Approach. Argumentation. 2018. Vol. 32. No. 4. P. 519–547.

Millgram, 2001 – *Millgram E.* (ed.) Varieties of practical reasoning. MIT, 2001. 504 p.

Percus, Sauerland, 2003 – *Percus O., Sauerland U.* On the LFs of attitude reports // Proc. of Sinn und Bedeutung. Vol. 7. 2003. P. 228–242.

Perelman, 1980 – *Perelman H.* Justice, Law and Argument. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1980. 194 p.

Prakken, Vreeswijk, 2002 – *Prakken H., Vreeswijk G.* Logic for Defeasible Argumentation // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 4 / Ed. by D.M. Gabbay, F. Guenthner. Dordrecht: Kluwer, 2002. P. 218–319.

Price, 1989 – *Price H.* Defending Desire-as-Belief. Mind. 1989. Vol. 98. P. 119–127.

Rao, Georgeff, 1995 – *Rao A.S., Georgeff M.P.* BDI-agents: From Theory to Practice // Proc. of the First International Conference on Multiagent Systems (ICMAS'95). 1995. P. 312–319.

Savulescu, 2009 – *Savulescu J.* The Human Prejudice and the Moral Status of Enhanced Beings: What Do We Owe the Gods? // Savulescu J., Bostrom N. (ed.). Human Enhancement. Oxford University Press, 2009. P. 211–250

Scanlon, 1998 – *Scanlon T.* What We Owe to Each Other. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998.

Schroeder, 2004 – *Schroeder T.* Three Faces of Desire. NY, US: Oxford University Press, 2004. 224 p.

Schueler, 1995 – *Schueler G.* Desire: Its Role in Practical Reason and the Explanation of Action. Cambridge, MA: MIT Press, 1995.

Stalnaker, 1968 – *Stalnaker R.* A theory of conditionals // Rescher N. (ed.) Studies in Logical Theory. Oxford: Basil Blackwell, 1968. P. 98–112.

Wagar, Thagard, 2004 – *Wagar B.M., Thagard P.* Spiking Phineas Gage: A neurocomputational theory of cognitive-affective integration in decision making // Psychological Review. 2004. No. 111. P. 67–79.

Walton et al., 2008 – *Walton D., Reed Ch., Macagno F.* Argumentation schemes. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 456 p.

Elena N. Lisanyuk

Either drink tea or hang yourself, or Logical aspects of desires in argumentation about actions

Elena N. Lisanyuk
Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
National Research University Higher Scool of Economics,
21/4 Staraya Basmannaya Str., 105066, Moscow, Russian Federation.
E-mail: elisanyuk@hse.ru

Abstract: We propose a methodology for logical-argumentative analysis of desires employed as premises of deliberative arguments, the non-demonstrative practical arguments about actions intended to fulfill them. Representation and evaluation of deliberative arguments are hampered by the non-cognitive nature of desires, difficulties in distinguishing between their cognitive and non-cognitive elements, and vague criteria for their acceptability. We suggest a solution by dividing desires into relative, which require bringing the state of affairs in accordance with the desired, and absolute, which do not imply this; reconstructing deliberative arguments using the "to consequences" argumentation scheme; distinguishing between a non-cognitive goal premise expressing a priority desire and a conditional cognitive goal-means premise expressing agent's opinion about efficacy of her preferences in the way of its implementation; and representing the conclusion of such an argument as an intention by which the agent makes a commitment to adhere to the line of behavior, by analogy with the commitment to consider the conclusion of a demonstrative argument true. Based on the idea of the conditional obligation in dynamic deontic action logic, we semantically explicate the conditioning the preferences by the priority and evaluate the acceptability of such arguments depending on whether the preferred way allows the priority desire to be fulfilled. This provides an explanation why only relative, but not absolute desires can be justified or criticized in that way. We illustrate the results using the examples from the Russian literature.

Keywords: non-cognitive propositions, deliberative arguments, action, practical argumentation, evaluation of arguments, conditional propositions, obligation

For citation: Lisanyuk E.N. "To li chayu ispit', to li povesit'sya, ili Logicheskie aspekty zhelanii v argumentatsii o deistviah" [Either drink tea or hang yourself, or Logical aspects of desires in argumentation about actions], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2024, Vol. 30, No. 2, pp. 89–110. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-89-110 (In Russian)

References

Anscombe, 1957 – Anscombe, E. *Intention.* Oxford: Basil Blackwell, 1957. 93 pp.

Argonov, 2008 – Argonov, V.A. "Iskusstvennoe programmirovanie potrebnostej cheloveka: put' k degradacii ili novyj tolchok razvitija?" [Is artificial programming of human needs a way to degradation or impetus to development], *Voprosy filosofii* [Issues in philosophy], 2008, No. 12, pp. 22–37. (In Russian)

Aristotel', 1983 – Aristotel'. "Nikomahova etika" [Nikomachean ethics], in: *Aristotel'. Soch.: v 4 t.* T. 4 [Writings in 4 vols, vol. 4]. Moscow: Mysl', 1983, pp. 53–294. (In Russian)

Atkinson, Bench-Capon, 2007 – Atkinson, K., Bench-Capon, T. "Practical reasoning as presumptive argumentation using action based alternating transition systems", *Artificial Intelligence*, 2007, No. 171, pp. 855–874.

van Benthem et al., 2014 – Benthem, J. van, Grossi, D., Liu, F. "Priority structures in deontic logic", *Theoria*, 2014, No. 80, pp. 116–152.

Bex et al., 2009 – Bex, F., Bench-Capon, T., Atkinson, K. "Did he jump or was he pushed?: Abductive practical reasoning", *Artificial Intelligence and Law*, 2009, Vol. 17, No. 2, pp. 79–99.

Bratman, 1987 – Bratman, M. *Intention, plans, and practical reason.* Cambridge, MA: Harvard University Press. 208 pp.

Brandom, 1994 – Brandom, R. *Making It Explicit: Reasoning, Representing, and Discursive Commitment.* Cambridge: Harvard University Press, 1994. 741 pp.

Castañeda, 1966 – Castañeda, H. "'He': A Study in the Logic of Self-Consciousness", *Ratio*, 1966, Vol. 8, pp. 130–157.

Chehov, 1986 – Chehov, A.P. *Polnoe sobranie sochinenij i pisem v tridcati tomah. Sochinenija v vosemnadcati tomah. Tom trinadcatyj. P'esy (1895–1904)* [Complete collection of writings and letters in 30 vol. Writing in 18 vols. Vol. 13. Plays (1895–1904)] Moscow: Nauka, 1986, pp. 61–116. (In Russian)

Damasio, 1994 – Damasio, A.R. *Descartes' error.* New York: G.P. Putnam's Sons, 1994. 336 pp.

Davidson, 1963 – Davidson, D. "Actions, Reasons, and Causes", *The Journal of Philosophy*, 1963, No. 60, No. 23, pp. 685–700.

Dennett, 1971 – Dennett, D.C. "Intentional systems", *Journal of Philosophy*, 1971, No. 68, pp. 87–106.

Dostoevskji, 1973 – Dostoevskij, F.M. "Zapiski iz podpol'ja" [Notes from underground], in: *Polnoe sobranie sochinenij v tridcati tomah. T. 5. Povesti i rasskazy. 1862–1866* [Complete collection of writing in 30 vols. Vol. 5. Novels and stories. 1862–1866] Leningrad: Nauka, 1973, pp. 99–179. (In Russian)

Frolov, 2022 – Frolov, K.G. "Ob oproverzhenii zhelanij" [On refutation of desires], in: *Analiticheskaja filosofija: traektorii istorii i vektory razvitija: sb. nauchn. tr. Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, posvjashhennoj 80-letiju nauchnogo rukovoditelja IFP SO RAN V. V. Celishheva, Novosibirsk, 25–26 fevralja 2022 g.* [Analytical philosophy: trajectories of history and vectors of development: collection of scientific papers of the International scientific conference dedicated to the 80th anniversary of the scientific director of the Institute of Philosophy and Law of Siberian branch of the Russian Academy of Sciences Tselischev V.V., Novosibirsk, 25–26.02.2022], ed. by Hlebalin A.V. Novosibirsk: Ofset TM, 2022, pp. 69–75. (In Russian)

Geach, 1965 – Geach, P.T. "Assertion", *The Philosophical Review*, 1965, Vol. 74, No. 4, pp. 449–465.

Gettier, 1963 – Gettier, E.L. "Is Justified True Belief Knowledge?", *Analysis*, 1963, Vol. 23, pp. 121–123.

Goncharov, 1998 – Goncharov, I.A. "Oblomov. Roman v 4-h ch." [Oblomov. A novel in 4 vols.], in: *Polnoe sobranie sochinenij i pisem in 20 tomah, tom. 4* [Complete collection of writings and letters on 20 vols. vol. 4], St. Petersburg: Nauka, 1998. 640 pp. (In Russian)

Governatori, Rotolo, 2010 – Governatori, G., Rotolo, A. "Changing legal systems: Legal abrogations and annulments in defeasible logic", *The Logic Journal of IGPL*, 2010, Vol. 18, No. 1, pp. 157–194.

Hansson, 1969 – Hansson, B. "An analysis of some deontic logics", *Nous*, 1969, No. 3, pp. 373–398.

Kant, 1965 – Kant, I. "Kritika prakticheskogo razuma" [A Critique of practical reason], in: *Kant I. Sochinenija v shesti tomah. T. 1. Ch. 1* [Writing in 6 vols, vol. 1, part 1]. Moscow: Mysl', 1965. 544 pp. (In Russian)

Kuslij, 2011 – Kuslij, P.S. "Znanie, problema Gettiera i nekotorye diskussii v sovremennoj otechestvennoj jepistemologii" [Knowledge, Gettier's problem and some discussions in contemporary local epistemology], *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofija. Sociologija. Politologija* [Herald of Tomsk State University. Philosophy, Sociology. Politology], 2011, No. 2 (14), pp. 34–54. (In Russian)

Lamberov, 2010 – Lamberov, L.D. 'Kak vazhno byt' ser'eznym: o nekotorykh kritikakh Gettiera" [How is it important to be serious], *Epistemology and Philosophy of science*, 2010, Vol. XXVI, No. 4, pp. 84–90. (In Russian)

Lewis, 1979 – Lewis, D. "Attitudes De Dicto and De Se", *The Philosophical Review*, 1979, Vol. 88, pp. 513–543.

Lisanjuk, 2018 – Lisanjuk, E.N. "Dejstvie, norma i cennost' v prakticheskoj argumentacii" [Actions, norms and values in practical argumnetation], in: *Argumentacija v prave i morali* [Argumentation in law and morals], ed. by E.N. Lisanjuk. St. Petersburg: Alef-Press, 2018, pp. 9–36. (In Russian)

Lisanjuk, 2014 – Lisanjuk, E.N. "Lojal'nyj agent i otmenjaemost' v deonticheskoj logike" [Loyal agents and defeasibility in deontic logic], *Izvestija UrFU Serija 3. Obshhestvennye nauki* [News of Ural Federal University, series 3. Social science], 2014, Vol. 1 (125), pp. 22–244. (In Russian)

Lurija, 2003 – Lurija, A.R. *Osnovy nejropsihologii.* Moscow: Publ. Center 'Akademija', 2003. 384 pp. (In Russian)

Macagno, Walton, 2018 – Macagno, F. Walton, D. "Practical Reasoning Arguments: A Modular Approach", *Argumentation*, 2018, Vol. 32, No. 4, pp. 519–547.

Mikirtumov, Frolov, 2022 – Mikirtumov, I.B., Frolov, K.G. "Nonkognitivizm i moral'nye vyskazyvanija" [Non-cognitivity and moral statements], *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofija. Sociologija. Politologija* [Herald of Tomsk State University. Philosophy, Sociology. Politology], 2022, No. 70, pp. 189–197. (In Russian)

Millgram, 2001 – Millgram, E. (ed.) *Varieties of practical reasoning.* MIT, 2001. 504 pp.

Percus, Sauerland, 2003 – Percus, O., Sauerland, U. "On the LFs of attitude reports", *Proc. of Sinn und Bedeutung*, 2003, Vol. 7, pp. 228–242.

Perelman, 1980 – Perelman, H. *Justice, Law and Argument.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1980. 194 pp.

Platon, 1986 – Platon. "Harmid" [Harmid], in: *Platon. Dialogi* [Dialogues], ed. by A.F. Losev et. al. Moscow: Mysl', 1986, pp. 296–326. (In Russian)

Prakken, Vreeswijk, 2002 – Prakken, H., Vreeswijk, G. "Logic for Defeasible Argumentation", in: *Handbook of Philosophical Logic.* Vol. 4 / Ed. by D.M. Gabbay, F Guenthner. Dordrecht: Kluwer, 2002, pp. 218–319.

Price, 1989 – Price, H. "Defending Desire-as-Belief", *Mind*, 1989, Vol. 98, pp. 119–127.

Rao, Georgeff, 1995 – Rao, A.S., Georgeff, M.P. "BDI-agents: From Theory to Practice", *Proc. of the First International Conference on Multiagent Systems (ICMAS'95)*, 1995, pp. 312–319.

Savulescu, 2009 – Savulescu, J. "The Human Prejudice and the Moral Status of Enhanced Beings: What Do We Owe the Gods?", in: *Human Enhancement*, ed. by J. Savulescu, N. Bostrom. Oxford University Press, 2009, pp. 211–250.

Scanlon, 1998 – Scanlon, T. *What We Owe to Each Other.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998.

Schroeder, 2004 – Schroeder, T. *Three Faces of Desire.* NY, US: Oxford University Press, 2004. 224 pp.

Schueler, 1995 – Schueler, G. *Desire: Its Role in Practical Reason and the Explanation of Action.* Cambridge, MA: MIT Press, 1995.

Simon, 2000 – Simon, G.A. "Teorija prinjatija reshenij v jekonomicheskoj teorii i v nauke o povedenii" [Decision theory in economics and behavioral science], in: *Vekhi ekonomicheskoi mysli. T. 2. Teorija firmy* [Milestones of Economic Thought. Vol. 2. Theory of the firm], ed. by V.M. Hal'perin. St. Petersburg: Economic school, 2000, pp. 54–72. (In Russian)

Searle, 1986 – Sjorl', Dzh. "Klassifikatsiya illokutivnykh aktov" [Classification of illocutionary actsa], in: *Novoe v zarubezhnoj lingvistike. Vypusk XVII* [The new in foreign linguistics. Issue XVII]. Moscow: Progress, 1986, pp. 170–194. (In Russian)

Searle, 2004 – Sjorl', Dzh. *Racional'nost' v dejstvii* [Rationality in action]. Moscow: Ptogress-Tradicija, 2004. 336 pp. (In Russian)

Stalnaker, 1968 – Stalnaker, R.A. "Theory of conditionals", in: *Studies in Logical Theory*, ed. by N. Rescher. Oxford: Basil Blackwell, 1968, pp. 98–112.

Wagar, Thagard, 2004 – Wagar, B.M., Thagard, P. "Spiking Phineas Gage: A neurocomputational theory of cognitive-affective integration in decision making", *Psychological Review*, 2004, No. 111, pp. 67–79.

Walton et al., 2008 – Walton, D., Reed, Ch., Macagno, F. *Argumentation schemes.* Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 456 pp.

Логические исследования
2024. Т. 30. № 2. С. 111–131
УДК 16

Logical Investigations
2024, Vol. 30, No. 2, pp. 111–131
DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-111-131

История логики

History of Logic

Х.К. Кадыг-оол

Идеи неклассической логики Хью Макколла*

Хулербен Кок-оолович Кадыг-оол
Тувинский государственный университет.
Российская Федерация, 667001, г. Кызыл, ул. Колхозная, д. 125а.
E-mail: hoolerben@yandex.ru

Аннотация: В рамках статьи предпринимается попытка относительно полно рассмотреть идеи неклассической логики шотландского логика, математика и философа Хью Макколла (1837–1909). Впечатленный идеями Дж. Буля, Макколл в 1877 г. предложил свой вариант логической системы, предвосхищая некоторые идеи современной логики. В 1880 г. шотландец указал на неадекватность понимания импликации как отношения следования, а также поставил задачу определить новую импликацию. В результате своих исследований Макколл определил импликацию с помощью оператора «необходимости», а также пришел к идее ограниченности двузначной логики, ввел новые значения, которые можно также трактовать как модальности, причем не только алетические. Еще одной интересной идеей шотландского ученого можно считать вероятностную трактовку истинности высказываний (1897 г.). Он указал на существование вероятных высказываний, принимающих истинностное значение из интервала между 1 и 0. Идеи Х. Макколла вызвали заметную дискуссию, в том числе обширную критику со стороны самых известных ученых-логиков того времени. Несмотря на то, что впоследствии его идеи были во многом забыты, тем не менее можно утверждать, что работы шотландского ученого предвосхитили некоторые значимые открытия в логике конца XIX – начала XX в. В частности, К.И. Льюис ссылался на работы Макколла, указывал, что его идеи основываются на исследованиях последнего, но в более поздних трудах уже не упоминает его. Относительную известность труды шотландца получают уже во второй половине XX в., прежде всего в англоязычной научной литературе, при этом в отечественных трудах по истории логики имя Макколла практически не упоминается.

Ключевые слова: Хью Макколл, история логики, неклассическая логика, строгая импликация, модальная логика, многозначная логика, Бертран Расселл, Готлоб Фреге, Николас Решер

* Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за указание на важные, актуальные источники, посвященные анализу логических идей Х. Макколла. Их использование существенным образом повлияло на качество статьи. Также хотелось бы поблагодарить Н.Е. Томову за помощь в организационных моментах, без которой первый опыт публикации статьи в настоящем журнале мог превратиться в подлинное испытание.

Для цитирования: *Кадыг-оол Х.К.* Идеи неклассической логики Хью Макколла // Логические исследования / Logical Investigations. 2024. Т. 30. № 2. С. 111–131. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-111-131

Введение

Шотландский ученый Хью Макколл (1837–1909) является одним из тех исследователей, чьи работы не были по достоинству оценены во время их появления, впоследствии были практически забыты (по крайней мере, на какое-то время), затем пережили своеобразный ренессанс.

Логическое наследие Макколла многогранно и обширно. Его основные идеи, которые могут быть связаны с некоторыми «неклассическими» разделами современной логики, были представлены в серии статей под общим названием «Символическое мышление» (всего 8 работ соответственно под номерами I–VIII) [MacColl, 1880; MacColl, 1897; MacColl, 1900; MacColl, 1902; MacColl, 1903; MacColl, 1905a; MacColl, 1905b; MacColl, 1906a], а также в книге «Символическая логика и ее приложения» [MacColl, 1906b] и некоторых других. Помимо исследований в области логики и математики, шотландский ученый также создавал труды по религиозной этике и был писателем.

В отечественной литературе, посвященной истории логики, имя Макколла упоминается довольно редко. Так, в классическом труде по истории математической логики Н.И. Стяжкина имеются весьма сжатые сведения о достижениях шотландского исследователя [Стяжкин, 1967, с. 356–357]. Более подробно некоторые аспекты (связанные с модальностями) были рассмотрены в диссертационном исследовании Х.К. Кадыг-оола [Кадыг-оол, 2013].

В англоязычной литературе исследования наследия Макколла заметно разнообразнее и обширнее. Следует отметить, что на рубеже XIX и XX вв. его идеи бурно обсуждались, но, скорее, в негативном ключе [Там же, с. 44–48]. Тем не менее во второй половине прошлого столетия многие его концепции были совершенно заслуженно оценены в заметно более позитивном контексте. Так, Н. Решер в своей классической работе «Многозначная логика» упоминает Макколла как одного из «отцов-основателей»[1] многозначной логики, наряду с Ч.С. Пирсом и Н.А. Васильевым [Rescher, 1969, p. 4]. В 1998 г. его работам был посвящен отдельный номер «Северного журнала философии» [Nordic journal of philosophy, 1998], в него были включены материалы по итогам отдельной конференции «Хью Макколл и традиция логики» (29 марта – 1 апреля 1998 г.). При этом в одном из

[1]В оригинале — “the founding father”.

наиболее фундаментальных трудов по истории логики Ю.М. Бохеньского [Bochenski, 1961], шотландский ученый упоминается лишь единожды в связи с относительно недавними (на момент выхода книги) исследованиями К.И. Льюиса [Ibid., p. 403]. В настоящее время интерес к идеям Макколла является более системным. В частности, была выпущена отдельная книга, которая не только содержит антологию важнейших работ, но и анализ его идей [Rahman, Redmond, 2007]. Наконец, в четвертом томе фундаментальной серии «Справочник по истории логики», посвященном британской логике XIX в., идеям шотландского ученого посвящен отдельный раздел [Rahman, Redmond, 2008]. Также невозможно не отметить еще один отдельный номер научного журнала, а именно — «Философии науки», целиком посвященный исследованиям наследия Хью Макколла [Philosophia scientiæ, 2011].

Таким образом, неоднозначные оценки вклада Хью Макколла в дальнейшее развитие логики на протяжении первой половины и середины XX в., недостаточный интерес к его трудам в отечественных историко-логических исследованиях, на мой взгляд, обуславливают наличие научной проблемы в истории логики. Главная цель настоящей работы — относительно полное представление некоторых идей шотландского логика, связанных с разными направлениями современной неклассической логики. Прежде всего под этими идеями подразумеваются (i) анализ свойств «традиционной» импликации и отношения выводимости, а также вытекающее из него определение новой импликации, (ii) новации, связанные с многозначностью и модальностями. Следовательно, настоящая работа является исследованием по истории логики. Достижение указанной цели возможно прежде всего при поставленных задачах анализа всех основных научных работ-первоисточников шотландского логика, а также интерпретации некоторых результатов с помощью средств современной логики. Очевидно, также было необходимо изучить современные работы, посвященные анализу идей Хью Макколла. Некоторые из обозначенных идей шотландского ученого вызвали полемику и критику. Таким образом, еще одной задачей данной статьи стал анализ обозначенных научных прений.

Помимо методов историко-научного исследования, применялись методы формальной логики, в частности использовались элементы формализованных языков классической пропозициональной логики и пропозициональной алетической модальной логики. Определяются они стандартным образом. Иные требуемые определения приводятся по ходу изложения материала.

1. Логико-методологические основы исследований Макколла

Главным источником вдохновения для изысканий Хью Макколла стали работы выдающегося британского логика и математика Джорджа Буля. По мнению шотландского ученого, идеи последнего очистили логику от «джунглей трудностей» [MacColl, 1880, p. 47]. Также стоит отметить, что сам Макколл прежде всего математик, что выражается во многих аспектах его исследований: используемые символы[2], применение математических методов исследования (на тот момент он был одним из новаторов), аналогии с разными разделами математики и т.д. Из всего сказанного выше вытекает главный мотив его исследований — алгебраизация логики.

По мнению разных исследователей, Хью Макколл достиг выдающихся успехов в данном направлении. Так, Бертран Расселл в своей рецензии на одну из книг шотландца [MacColl, 1906b] указал на отличительную особенность подхода последнего: он анализировал высказывания целиком, в то время как все остальные опирались на анализ классов. В свою очередь, это позволяло Макколлу исследовать импликации высказываний, а не включение одних классов в другие [Russell, 1906, p. 255]. По мнению выдающегося британского ученого и философа, именно шотландский логик стал основателем теории символической пропозициональной логики и импликации, осуществив прорывные исследования [Ibid.].

В современных исследованиях данные тезисы были детализированы. Так, В. Пекхаус указал на признание Эрнстом Шредером первенства Х. Макколла в формулировке пропозициональной логики. Немецкий ученый употреблял термин «пропозициональная логика Макколла – Пирса» [Peckhaus, 1998, p. 20]. Ирвинг Анеллис в своих исследованиях указал на влияние работ шотландского логика на идеи Чарльза Пирса. Последний был хорошо знаком с работами Макколла [Anellis, 2011].

Макколл исследовал понятие «формальной логики», сформулировал следующее определение: наука о рассуждении с помощью репрезентирующих символов, данные символы используются как синонимичная замена более длинных выражений, которые часто требуются [MacColl, 1897, p. 493].

[2] По моему мнению, разработанная им система обозначений несколько громоздка и не совсем интуитивно понятна, в связи с чем в настоящей работе практически не будет использована, кроме некоторых единичных случаев, специально обозначенных. Схожей точки зрения придерживался В. Пекхаус, более того, он считал, что не совсем удачная система символов могла стать одним из факторов, негативно повлиявшим на дальнейшее распространение идей Макколла [Peckhaus, 1998, p. 31].

По мнению шотландского логика, логика делится на два направления: чистая и прикладная. Данная классификация также заимствуется из математики: чистая математика (геометрия, алгебра, дифференциальное исчисление и др.), прикладная математика (механика, оптика, астрономия и др.). В свою очередь, чистая логика — максимально абстрактная, общая наука, насколько это возможно, независимая от любого отдельного предмета исследования. Иными словами, ее принципы и правила рассуждения имеют постоянную силу вне зависимости от предмета исследования [MacColl, 1880, p. 48]. Так, прикладная логика является попросту применением описанных выше правил и принципов в разных отдельных науках и сферах, включая саму математику, а также физику, медицину, даже политику и повседневные обыденные ситуации [Ibid.].

В свою очередь рассуждение также может быть двух видов: ментальное и символическое. Первый вид не подразумевает использование каких-либо символов, часто является неосознанным, спонтанным и т.д. Второе связано с обращением к помощи разных символов с учетом того, что человеческая память естественным образом может быть несовершенной. Наконец, отсюда вытекает идея постоянных (логические термины) и временных терминов (переменные для высказываний) [Ibid., p. 49].

На мой взгляд, обобщенное описание логико-методологических принципов демонстрирует, как математический подход Макколла, говоря условно, «естественным» образом приводит к идеям неклассической логики, которые, в свою очередь, позволяют ему анализировать некоторые философские проблемы: детерминизм, суть дедуктивного (в логическом смысле) рассуждения и др. Таким образом, (относительно) строгие определения логических связок и исследование их свойств методами математики в некотором роде сами по себе наводят на ограниченность «классического» фрагмента логики. В связи с этим можно вспомнить знаменитое мнение Яна Лукасевича, согласно которому великие философские системы буквально распадаются при применении к ним требований современной математики. Поэтому «философию необходимо перестроить» и «подкрепить ее новой логикой» [Лукасевич, 1993, с. 191]. Я считаю, можно утверждать о более ранних попытках формализованного решения Макколлом некоторых философских вопросов. При этом применение его «неклассических» логических идей (т.е. той самой новой логики, по мнению Лукасевича) к указанным выше философским проблемам, по моему мнению, было весьма продуктивным.

2. Импликация и логическое следование

В исследованиях импликации и логического следования Макколла особенно важны следующие моменты: исследование т.н. парадоксов материальной импликации и попытки определить иную импликацию, а также последовавшая из данного анализа идея многозначности.

Прежде всего стоит отметить, что Макколл явно сформулировал проблему соотношения (материальной) импликации и логического следования. В некоторых случаях из истинных посылок требуется вывести заключение, т.е. предпринимаются попытки продемонстрировать, что заключение истинно в силу истинности посылок. Нечто отличное представляет собой ситуация, когда посылки не являются истинными. В таком случае мы не пытаемся вывести заключение (это невозможно ввиду неистинности посылок), а стремимся доказать высказывание: «Множество посылок имплицирует заключение» [MacColl, 1897, p. 494]. Соответственно, в первом случае представлено логическое следование, во втором — импликация. Данная связка имеет и важное методологическое значение, которое выражается в «законе импликации». Речь идет о том, что с ее помощью из накопленного опыта [MacColl, 1880, p. 52], который является антецедентным, получается новое знание (консеквент). На мой взгляд, данный «закон импликации» тесно связан с простейшим видом дедуктивного умозаключения *modus ponens*. Также Макколл утверждал, что субъект и предикат в простых высказываниях на самом деле связаны импликацией [Ibid.].

Наконец, шотландский логик выделил две разные логические связки (в оригинальной символике):

– «:» для обозначения импликации;

– «$\therefore$» для обозначения особой связки «следовательно» [Ibid., p. 55].

Определение последней: $A \therefore B = A(A : B)$, т.е. «$A$, следовательно, B» равно $A \wedge (A \rightarrow B)$. В данном определении можно еще более явно увидеть связь между отношением логического следования (выраженного у Макколла связкой «следовательно») и *modus ponens*. Несмотря на то, что работы, посвященные данным вопросам, отличаются хронологически, в целом очевиден единый подход при анализе проблемы соотношения логического следования и импликации.

Рассмотрим более детально определение «импликации» и несколько пояснений к данной логической связке в работе 1880 г. Определение:

– консеквент должен быть истинным в силу того, что истинен антецедент [Ibid., p. 51].

На мой взгляд, можно отметить, что, скорее всего, Макколл стремился определить «импликацию» как более адекватную для выражения отношения «следования».

Пояснения:

– если антецедент истинен, то консеквент должен быть истинным;

– всегда, когда антецедент истинен, консеквент также является истинным [MacColl, 1880, p. 51].

По моему мнению, первое пояснение можно выразить в соответствующем формализованном языке следующим образом: $A \to \Box B$.

Макколл утверждал о равносильности $A \to B$ и $A \equiv A \wedge B$, что указывает на свойства материальной импликации, ложной в единственном случае, когда антецедент истинен, а консеквент — ложен. Также шотландский логик указывал на следующий факт: $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$ [Ibid., p. 53].

Последняя формула требует более детального рассмотрения. Макколл отметил, что между формулами можно поставить и знак эквивалентности. Но поскольку, как я отмечал выше, он по факту определял импликацию с помощью модальностей, указанная выше формула может быть лишь импликативной. Доказательство шотландского ученого: отрицание эквивалентных формул также, очевидно, должно быть эквивалентным. По мнению Макколла, результат отрицания импликации $(A \to B)$ может быть представлен следующим образом: $(\Diamond A \wedge \neg\Box B)$ [Ibid., p. 54]. Подобное отрицание импликации выглядит, на мой взгляд, несколько спорно, но, скорее всего, оно связано с первым пояснением к определению импликации, рассмотренным немногим ранее. При этом результатом отрицания $(\neg A \vee B)$, очевидно, является $(A \wedge \neg B)$. Таким образом, по мнению Макколла, отрицание импликации приводит лишь к *возможности* $(A \wedge \neg B)$, в то время как отрицание $(\neg A \vee B)$ приводит к *необходимости* $(A \wedge \neg B)$ [Ibid.]. Так, при рассмотренной интерпретации отрицания указанных двух формул не являются эквивалентными, соответственно, взятые без отрицания, они также не могут быть эквивалентными.

Исследуя дальше свойства импликации, Макколл, в частности, отмечал следующие важные факты: $0 \to A = 1$ (вне зависимости от истинностных значений A), $0 \to 0 = 1$. И что весьма важно, шотландец назвал приведенные факты «аномальными» [Ibid., p. 55], т.е. фактически указав на парадоксальность рассматриваемых утверждений.

Еще одно важное определение, которое будет далее использовано: импликации условных высказываний — импликации, антецеденты или консеквенты которых являются сложными высказываниями [Ibid., p. 51].

Подводя промежуточный итог, отмечу следующее: в работах 1880 и 1897 гг. Макколл сформулировал важные проблемы, связанные с логическими и философскими свойствами импликации, и рассмотрел способы их формализованного анализа с помощью алгебры логики. Дальнейшие статьи показывают эволюцию его идей, которые приводят к еще более разнообразным и интересным результатам, напрямую связанным с основаниями современных многозначной и модальной логик. Очевидно, что рассмотрение свойств импликации также заметно коррелирует с основами релевантной логики.

Так, в работе 1902 г. Макколл привел определение импликации с использованием особой истинностной оценки (в системе Макколла, а фактически — это «невозможность», т.е. получается модализированная формула, см. след. параграф): $A \to B$ эквивалентно $\neg \diamond (A \wedge \neg B)$ [MacColl, 1902, p. 364].

Наконец, в некотором роде окончательные определения приводятся в работе 1908 г.:

«“A — ложно или B — истинно” — необходимо истинно (во всех положениях дел)» [MacColl, 1908, p. 453].

Эквивалентное определение (также приводилось ранее): «Невозможно, чтобы $A \wedge \neg B$».

Очевидным образом напрашивается сравнение последних определений логической связки со «строгой» импликацией К.И. Льюиса. Перед началом подобного анализа зафиксируем следующие факты:

– Х. Макколл сформулировал проблему соотношения импликации и отношения следования, обозначив, что это не одно и то же;

– шотландский ученый явным образом указал на парадоксальность некоторых свойств импликации, поставил цель определить импликацию таким образом, чтобы она более адекватно соответствовала понятию «следования»;

– для достижения указанной цели Макколл, скорее всего, первым разработал особый алгебраический аппарат (на основе разработок Дж. Буля), включавший многие инновационные идеи, связанные с разными разделами современной неклассической логики;

– шотландскому логику удалось сформулировать новую импликацию, лишенную парадоксов «традиционной» импликации.

В связи с последним тезисом следует непременно отметить, что сам же Макколл немедленно обнаружил возможность переноса парадоксальных свойств «традиционной» импликации на его импликацию. В частности, речь идет о формулах типа $\neg \diamond A \to \Box B$. Но Макколл утверждал, что здесь нет парадокса, если применить его определение. Так, последняя формула по определению выражает следующий факт: «невозможно, чтобы $\neg \diamond A$ было истинным и $\Box B$ было ложным». Утверждения $\neg \diamond A = 1$,

$\Box B = 0$ по отдельности являются невозможными. Очевидно, что их конъюнкция также является невозможной. Таким образом, получается очевидный факт: невозможное является невозможным, что, в свою очередь, есть необходимо-истинное высказывание [MacColl, 1903, p. 357].

Перейдем к сравнительному анализу идей Макколла и Льюиса. Американский логик был прекрасно знаком с работами Макколла (см. библ. [Lewis, 1918]). Льюис с прямыми ссылками на работы и многочисленными упоминаниями шотландца перенял множество идей из работы последнего «Символическая логика и ее приложения» [MacColl, 1906b]. В частности, американский исследователь использовал истинностные оценки Макколла. А определение строгой импликации и вовсе полностью совпадало с рассмотренным выше определением импликации шотландского логика. В оригинальной нотации: $\sim (A - B)$, где «$\sim$» — невозможность, «$-$» — отрицание [Lewis, 1918, p. 293].

В упомянутом выше «Северном журнале философии» высказывалось мнение, что К.И. Льюис впоследствии предпринял немало усилий, чтобы исключить упоминания о влиянии работ Макколла на свои открытия. В частности, в переиздании работы 1918 г. была исключена целая треть книги. А в совместном труде с К.Г. Лэнгфордом 1932 г. «Символическая логика» ссылок на Хью Макколла уже не было совсем [Read, 1998, p. 59]. При этом, на мой взгляд, следует отметить, что именно американский логик, пусть и совершенно очевидно позаимствовав основы своей логики у шотландца, далее сформулировал системы модальной логики в духе идей Расселла – Уайтхеда (т.е. как формализованные синтаксические системы), чего не было у последнего. Таким образом, Льюис, вне всяких сомнений, совершенно заслуженно считается одним из пионеров модальной логики, но, как я считаю, каждый раз при упоминании об этом непременным должно быть указание на источник его вдохновения, а именно — на работы Хью Макколла.

Учитывая все вышеприведенное в настоящем параграфе, отмечу и отчасти повторюсь, что исследования шотландского ученого имели весьма важное, ключевое значение при постановке рассмотренных выше проблем и попытках их решить. В частности, В. Пекхаус особо подчеркивал тот факт, что Макколл за десятилетие до исследований Э. Шредера понимал и использовал пропозициональные формулы (включая импликацию) в заметно более прогрессивном, современном ключе [Peckhaus, 1998, p. 30].

Наконец, именно из анализа свойств импликации Макколл пришел к идее многозначности. Выше упоминались импликации условных высказываний. Приведем более точные определения для дальнейшего анализа в следующем параграфе. В статье 1902 г. шотландский логик дал пояснения, рассматривая две схемы рассуждения: $A \wedge B \to C$ и $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$[3]. Первая является схемой для индуктивного рассуждения, когда некоторое знание выводится из эмпирических данных (т.е. из конъюнкции простых высказываний). Стоит заметить, что все высказывания при подобном рассуждении — простые в том смысле, что в них непосредственно утверждается о некоторой ситуации в действительности. Импликация в подобном высказывании называется простой. В свою очередь, транзитивность состоит из нескольких простых импликаций, а главная связка в ней — импликация второго уровня. Ее (формулы) истинность уже не зависит от эмпирических данных, т.е. носит формальный характер [MacColl, 1902, p. 368].

3. Многозначность и модальности

Макколл впервые обозначил недостаточность двух истинностных оценок в 1897 г. [MacColl, 1897, p. 496]. Выше упоминалось, что Н. Решер обозначил его в качестве одного из отцов-основателей многозначной логики. Скорее всего, американский логик имел в виду следующее: Макколл был в некотором роде идеологом. Потому что далее в своем труде он (Решер) назвал подлинных пионеров многозначной логики — Я. Лукасевича и Э. Поста, которым удалось построить соответствующие формализованные системы [Rescher, 1969, p. 7–9].

Какой же конкретный вклад в формулировку и дальнейшее развитие идеи многозначности внес Макколл? Сразу отмечу, что многозначность в работах шотландского ученого тесно связана с модальностями, в связи с чем анализ данных направлений объединен в одном параграфе. Итак, шотландский ученый совершенно явно сформулировал положение об ограниченности использования в некоторых случаях лишь двух истинностных значений — истины и лжи. В ранее упомянутой статье Макколл указал на те случаи, когда двух значений не хватает: речь идет о формулах, когда антецедентом и консеквентом некоторой импликативной формулы, в свою очередь, являются импликативные формулы. Буквально утверждалось следующее:

«При работе с импликациями более высокого уровня (т.е. с импликациями импликаций) исчисление с двумя измерениями слишком ограниченно, таким образом, в подобных случаях мы должны принять *трехчастную* классификацию наших высказываний. Мы часто имеем случаи, когда требуется рассматривать не просто истинные или ложные высказывания, но

[3]Макколл в указанной статье утверждал, что впервые данная формула появилась именно в его работах.

также *необходимые*..., *невозможные*... и *вероятностные*» [MacColl, 1897, p. 496].

Известно утверждение Яна Лукасевича, что при создании первой системы многозначной логики именно он впервые указал (в 1920 г.) на наличие обособленного принципа в классической логике — двузначности, опираясь на логические идеи Аристотеля и стоиков [Лукасевич, 1959, с. 280–281]. Соответственно, при построении многозначной логики следует отказаться от него, т.е. речь идет о новом принципе: истинностных оценок может быть больше, чем истина и ложь. При этом вышеприведенный фрагмент из работы шотландского ученого наглядно демонстрирует, что Макколл фактически утверждал то же самое.

В упомянутом выпуске «Северного журнала философии» в одной из статей приводится точка зрения, согласно которой шотландский логик не может считаться «многозначником», в частности предпринимается попытка опровергнуть мнение Решера об «отцах-основателях» многозначной логики. Далее истинностные оценки Макколла рассматриваются как модальности, соответственно, делается вывод: последний не мог внести значимого вклада в развитие поливалентной логики [Simons, 1998].

Указанная точка зрения, на мой взгляд, имеет под собой веские основания. При этом автор статьи сослался лишь на одну работу шотландца. Я считаю, Макколл мог в некотором смысле естественным образом запутаться в своих идеях, одновременно нащупывая основы как современной модальной, так и многозначной логик. В любом случае, убежден, что приведенный выше фрагмент из его работы принципиально указывает на ограниченность приписывания высказываниям в качестве истинностных значений только 1 или 0. Как я уже говорил выше, скорее всего, именно в этом смысле Решер указывал на Макколла как на одного из своеобразных идеологов многозначной логики. При этом нетрудно убедиться, что, несмотря на некоторую путаницу, его идеи относительно многозначности были «технически» верными. К примеру, Макколл утверждал: при трех истинностных значениях («необходимо-истинно», «невозможно-истинно», «вероятностно-истинно»[4]) формула $(A\to B)\to((C\to A)\to(C\to B))$ является логическим законом. При трактовке указанных истинностных значений как 1, $^1/_2$ и 0 в трехзначной логике Я. Лукасевича L_3 (см., напр., [Карпенко, 2007, с. 32]) приведенная формула является тавтологией. Шотландский логик утверждал, что в обратную сторону импликация не является логическим законом [MacColl, 1897, p. 496], что также подтверждается

[4]Данный перевод обозначений для терминов Х. Макколла является авторским, вторые части слов «-истинно» добавлены для подчеркивания того, что обсуждается идея многозначности.

в L_3. Позволю себе подвести итог и одновременно несколько уточнить весьма важные идеи Х. Макколла относительно многозначности: формально-истинные высказывания (т.е. истинность которых устанавливается вне зависимости от эмпирических данных) не могут быть лишь истинными или ложными (в отличие от тех самых простых высказываний, описанных в конце предыдущего параграфа). Для этого и требуется введение дополнительных истинностных значений. Так, в примерах самого Макколла: необходимым является высказывание «$2+3=5$», невозможным — «$2+3=8$», вероятностным (variable) — «$x=4$»[5].

Факт того, что идеи многозначности в некотором роде шли вперемежку с идеями модальной логики, подтверждается тем, что, помимо указанных выше трех истинностных оценок, Макколл оставил значения «истина» и «ложь», подчеркивая, что истинное высказывание не всегда необходимо истинно, а ложное — не всегда необходимо ложно [MacColl, 1897, p. 497]. Таким образом, для современных исследователей логики является очевидным фактическое разделение высказываний на модализированные и ассерторические.

Стоит отметить, что шотландский ученый в разных работах выделял несколько видов высказываний, которые не являются необходимыми или невозможными, а также истинными или ложными. Всего их три вида [Кадыг-оол, 2013, с. 39]:

1. переменные высказывания (variable), значения — некоторое рациональное число из $[0, 1]$;
2. вероятные высказывания (probable), вероятность их истинности превышает ${}^{1}/_{2}$;
3. возможные высказывания (possible), их можно выразить как $\diamond A = \neg\neg \diamond A$, т.е. как высказывания с модальным оператором возможности.

Макколл был убежден в тесной связи математической теории вероятностей и «всех проблем формальной логики» [MacColl, 1900, p. 76]. Очевидно, что и приведенные абзацем выше описания разных типов высказываний существенно испытывали влияние вероятностного подхода.

В работе 1900 г. стало более явным, что отличные от 0 и 1 истинностные оценки фактически понимаются как модальности. Так, Макколл принимал запись «A» как сокращение для «$A = 1$». Для обозначения истинностных

[5]Например, при возможных значениях x — $2, 4$ и 6, истинностным значением высказывания «$x = 4$» является ${}^{1}/_{3}$ [MacColl, 1897, p. 496].

оценок шотландский логик использовал греческие буквы в верхних индексах. Например, выражение «необходимо, что A — ложно» в его оригинальной записи выглядит следующим образом: $A^{\iota\epsilon}$, где ι,ϵ — обозначения для «ложно» и «необходимо истинно» соответственно. Далее для записи формул будет использован язык пропозициональной модальной логики. Принимается сокращение «A» для «$A = 1$», вместо «$A = 0$» использовалась запись «$\neg A$». Один из примеров Макколла: $\Box\Box\neg\neg\Diamond A$. Далее он сократил его до $\Box\Box\Diamond A$. Таким образом, формулы многозначной логики Макколла (в его понимании, а по факту — еще и модализированные) можно преобразовывать, в частности упрощать на основе очевидных равносильностей [MacColl, 1900, p. 75].

На неточность «модальных» идей Макколла указывали Ш. Рахман и Х. Редмонд. В частности, они предположили, что шотландский ученый мог понимать модализированные высказывания как один из вариантов квантифицированных. В данном смысле его модальности в чем-то оказываются схожими с кванторами Г. Фреге ([Rahman, Redmond, 2008, p. 544], также см. след. параграф). И эти же исследователи указывали на некоторые неточности формализованного языка Макколла в целом [Ibid., p. 548].

Разумеется, выявленные погрешности не стоит воспринимать как принижение достоинств рассмотренных новаций шотландского ученого. Мне представляется, что его идеи и занятая им впоследствии принципиальная позиция по их терпеливому, скрупулезному отстаиванию в противовес суровой критике (более подробно см. след. параграф) являются ярким примером развития науки согласно парадигмальной теории Томаса Куна [Кун, 1977]. Подведу итоги настоящего параграфа. Макколл сформулировал следующее принципиальное положение: в некоторых случаях требуется использование более чем двух истинностных оценок. При этом его новые истинностные оценки по факту являлись еще и модальностями. Помимо этого, следует отметить очередной интересный факт: шотландский логик сформулировал и использовал не только алетические модальности, но и, например, «известно, что A». В частности, выяснилось, что его теория модальностей есть система модальной логики Р. Фейса — T [Read, 1998].

4. Влияние идей Макколла на развитие логики

Ранее уже вскользь отмечалось, что идеи Макколла в момент их появления вызвали ожесточенную критику со стороны виднейших ученых-логиков и научного сообщества в целом. Так, Г. Фреге считал, что модальности могут быть сведены к высказываниям с кванторами общности и существования соответственно, а никаких иных истинностных значений, кроме истины и лжи, быть не может. Б. Расселл критиковал вероятностные истинностные значения Макколла, утверждая, что они появляются исключительно из-за неоднозначности некоторых слов, обвиняя последнего также в том, что тот пытается перенести в логику дефекты обыденной речи [Russell, 1906, p. 265]. Великий математик и логик также утверждал, что высказывания могут быть лишь истинными или ложными. В свою очередь, необходимые и невозможные высказывания — это попросту логические законы и тождественно-ложные высказывания соответственно [Ibid.]. Также фактически Расселл повторял аргумент Фреге, связанный со сравнением модальностей с квантифицированными высказываниями [Ibid., p. 259].

Иные ученые, критикуя разработки Макколла, высказывали возражения субъективного характера. В частности, один из значимых логиков начала XX в. Артур Томас Шерман использовал следующий аргумент против шотландца: раз настолько выдающиеся умы современности, как Фреге и Расселл, не приемлют идей Макколла, то они попросту ложные, поскольку логическое сообщество открыто для любых новых, но полезных идей [Кадыг-оол, 2013, с. 47]. Помимо указанного, новшества шотландского логика объявлялись, к примеру, «ненужным усложнением» [Hibben, 1907, p. 191] и т.д.

Напомню, что тот же Бертран Расселл, критикуя определенные идеи Макколла, в то же время высоко оценивал вклад последнего в другие области логики. По сложившемуся у меня мнению, «классические» фрагменты идей шотландского логика высоко ценились. Более того, как уже было указано, он существенно повлиял на дальнейшее развитие классической пропозициональной логики. Но, вероятно, не в последнюю очередь из-за своего чрезмерного желания дистанцироваться от современников и резковатых ответных обвинений в неспособности понять его открытия, идеи Макколла вызывали неприятие. В свою очередь, скорее всего, сам шотландский ученый в результате занятой принципиальной позиции также мог, с одной стороны, в чем-то неправильно понимать идеи своих современников, с другой — игнорировать их. В частности, В. Пекхаус предположил, что шотландский ученый не до конца усвоил подходы Шредера и Пирса. Так, Макколл критиковал последних за то, что их импликации утверждали лишь включение одних классов в другие, в то время как значение этих связок зависело от значения переменных [Peckhaus, 1998, p. 30].

В конце упомянутого выше критического обзора Б. Расселл высказал мнение: не стоит опрометчиво критиковать выбивающиеся из общей колеи, «немодные» в данный момент идеи, поскольку неизвестно, что будет впоследствии [Russell, 1906, p. 206]. Разумеется, выдающийся ученый оказался прав. Дальнейшее развитие логики показало колоссальный потенциал исследований шотландского логика.

С именем Хью Макколла отчасти связан переход от логического монизма к плюрализму [Rahman, Redmond, 2008; Grattan-Guinness, 2011]. А. Граттан-Гинесс привел следующие экспликации терминов «логический монизм», «логический плюрализм». Логический монизм подразумевает, что лишь одна теория имеет право называться «логикой». Все остальные теории являются неверными или относятся не к логике. Соответственно, логический плюрализм подразумевает наличие нескольких разных теорий, которые являются логикой. При этом Граттан-Гинесс утверждал, что Макколл не был плюралистом в современном понимании, скорее, он пытался расширить область той единственной логической теории, которая была на тот момент [Grattan-Guinness, 2011, p. 194]. Принимая данную точку зрения, хотел бы отметить, что до плюрализма в указанном смысле Макколлу, образно выражаясь, буквально не хватило одного шага, а именно (возможно, в этом заключается определенная ирония) — идей его главных оппонентов, Фреге и Расселла. По моему предположению, применив аксиоматический метод в своих работах, Макколл мог незамедлительно открыть разные системы и, таким образом, стать первым плюралистом в истории современной логики[6].

5. Логика и философия

Данный параграф частично обобщает приведенные выше результаты анализа работ Х. Макколла.

Прежде всего, вернусь к его весьма продуктивной идее прикладной логики, согласно которой методы данной науки могут быть применены повсеместно. Приведу замечательную цитату из работы 1903 г.:

«Современная символическая логика, в отличие от достопочтенной логики, изучаемой в школах, является прогрессивной наукой; она не может претендовать на завершенность или совершенство» [MacColl, 1903, p. 364].

Также Макколл отметил, что отныне математики вынуждены искать ответы на некоторые наиболее сложные вопросы именно в логике и больше не имеют права называть последнюю бесполезной или неприменимой к иным областям знания [Ibid.].

Весьма примечательно, что при этом шотландский логик прекрасно осознавал возможные пределы применения логики. По мнению Макколла, зачастую исследователи подменяют символами реальность и буквально «поклоняются формулам собственного изобретения. <. . . > Тем не менее,

[6] Разумеется, стоит отметить, что Х. Макколл, к сожалению, не дожил до выхода в свет главной работы Б. Расселла и А. Уайтхеда “Principia Mathematica”.

все формулы, основанные в разной степени на произвольных соглашениях или определениях, непременно должны иметь свои пределы применимости. Когда мы заставляем их выходить за эти пределы... они порождают странные парадоксы, которые некоторые выдающиеся логики и математики принимают с удивительной готовностью... но в которые обычный человек, обладающий здравым смыслом, упорно отказывается верить» [MacColl, 1905b, p. 397].

Помимо рассмотренных выше аспектов соотношения импликации и отношения следования, Макколл также разобрал суть условных высказываний с точки зрения субъективности, психологизма в логике. Очевидно, логика подразумевает стремление к полному исключению субъективности. Но это не всегда возможно, когда речь заходит об основных понятиях, первых принципах и т.д. В частности, когда речь идет об импликации и следовании. В повседневной речи утверждения $A \to B$ или «A, следовательно, B», как правило, подразумевают, что знание, заключенное в B, тем или иным образом связано со знанием в A. При этом в логике возможны рассуждения вида «$7 \times 9 = 63$, следовательно, $2 + 1 = 3$». Для пресловутого здравого смысла, т.е. с содержательной или субъективной точек зрения, подобное утверждение является бессмысленным. В то время как при использовании определения для «$\because$» указанное высказывание тут же становится ясным, определенным — формально необходимым [MacColl, 1906b, p. 82–83].

Практически каждую свою работу Макколл заканчивал рассуждениями более философского характера, которые иногда затрагивали несколько неожиданные темы. Так, шотландский логик опровергал мнения определенных ученых, что некоторые животные, как и люди, способны рассуждать по схемам силлогизмов. Согласно Макколлу, некорректность подобного убеждения заключалась в некорректном понимании природы логической истины: она имеет формально-необходимый характер. И именно по этой причине доступна лишь человеку, в языке которого можно адекватно выражать подобные истины [MacColl, 1902, p. 368].

Также, на мой взгляд, заслуживает упоминания трактовка недетерминированных высказываний как дизъюнктивных сложных высказываний [MacColl, 1880, p. 50]. Я считаю, что в связи с этим можно провести некоторые параллели с идеями Н. Решера при определении особой импликации, для которой вводится истинностное значение T, F. В свою очередь, оно понимается дизъюнктивно: некоторое высказывание может быть истинным или ложным в зависимости от конкретных обстоятельств [Rescher, 1969, p. 167].

Заключение

Исследования Хью Макколла были во многом уникальными и новаторскими для своего времени (на рубеже XIX и XX вв.). В них содержались прогрессивные идеи, связанные сразу с несколькими направлениями современной неклассической логики.

Несмотря на обширную критику и почти полное забвение в первой половине XX в. Макколл оказал существенное влияние на дальнейшее развитие логики. В частности, его идеи подтолкнули К.И. Льюиса к созданию своих систем модальной логики.

Можно сказать, что в настоящее время несправедливость в оценках логического наследия Хью Макколла преодолена. Тем не менее изучение его идей далеко от завершения. До сих пор недостаточно исследованными остаются работы шотландского ученого, связанные с философией языка, методологией науки и некоторыми другими темами.

Литература

Кадыг-оол, 2013 – *Кадыг-оол Х.К.* Основные этапы развития и формирования современной модальной алетической логики: дис. ... канд. филос. наук. М., 2013. 111 с.

Карпенко, 2007 – *Карпенко А.С.* Логики Лукасевича и простые числа. М.: ЛКИ/URSS, 2007. 256 с.

Кун, 1977 – *Кун Т.* Структура научных революций. М.: Прогресс, 1977. 300 с.

Лукасевич, 1959 – *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Изд. иностранной литературы, 1959. 312 с.

Лукасевич, 1993 – *Лукасевич Я.* О детерминизме (пер. В.Л. Васюкова) // Логические исследования. 1993. Т. 2. С. 190–205.

Стяжкин, 1967 – *Стяжкин Н.И.* Формирование математической логики. М.: Наука, 1967. 508 с.

Anellis, 2011 – *Anellis I.H.* MacColl's influences on Pierce and Schröder // Philosophia scientie, 2011. Vol. 15. No. 1. P. 97–128.

Bochenski, 1961 – *Bochenski J.M.* A history of formal logic. Notre Dame, USA: Univ. of Notre Dame Press, 1961. 567 p.

Hibben, 1907 – *Hibben J.G.* Review. Reviewed Work(s): Symbolic Logic and Its Applications by Hugh MacColl: The Development of Symbolic Logic by A.T. Shearman // The Philosophical Review. 1907. Vol. 16. No. 2. P. 190–194.

Grattan-Guinness, 2011 – *Grattan-Guinness I.* Was Hugh MacColl a logical pluralist or a logical monist? A case study in the slow emergence of metatheorising // Philosophia scientiæ, 2011. Vol. 15. No. 1. P. 189–203.

Lewis, 1918 – *Lewis C.I.* A survey of symbolic logic. Berkeley: Univ. of California Press, 1918. 436 p.

MacColl, 1880 – *MacColl H.* Symbolical reasoning // Mind. 1880. Vol. 5. No. 17. P. 45–60.

MacColl, 1897 – *MacColl H.* Symbolical reasoning (II) // Mind. New series. 1897. Vol. 6. No. 24. P. 493–510.

MacColl, 1900 – *MacColl H.* Symbolical reasoning (III) // Mind. New series. 1900. Vol. 9. No. 33. P. 75–84.

MacColl, 1902 – *MacColl H.* Symbolical reasoning (IV) // Mind. New series. 1902. Vol. 11. No. 43. P. 352–368.

MacColl, 1903 – *MacColl H.* Symbolical reasoning (V) // Mind. New series. 1903. Vol. 12. No. 47. P. 355–364.

MacColl, 1905a – *MacColl H.* Symbolical reasoning (VI) // Mind. New series. 1905. Vol. 14. No. 53. P. 74–81.

MacColl, 1905b – *MacColl H.* Symbolical reasoning (VII) // Mind. New series. 1905. Vol. 14. No. 55. P. 390–397.

MacColl, 1906a – *MacColl H.* Symbolical reasoning (VIII) // Mind. New series. 1906. Vol. 15. No. 60. P. 504–518.

MacColl, 1906b – *MacColl H.* Symbolic logic and its applications. New York and Bombay: Longmans, Green, and Co, 1906. 141 p.

MacColl, 1908 – *MacColl H.* ‘If’ and ‘imply’ // Mind. New series. 1908. Vol. 17. No. 67. P. 453–455.

Nordic journal of philosophy, 1998 – *Nordic journal of philosophy* // Proceedings of the conference Hugh MacColl and the tradition of logic. Ernst-Moritz-Arndt-Universitat Greifswald. March 29 – April 1, 1998. Vol. 3. No. 1.

Peckhaus, 1998 – *Peckhaus V.* Hugh MacColl and the German algebra of logic // Nordic journal of philosophy. 1998. Vol. 3. No. 1. P. 17–34.

Philosophia scientiæ, 2011 – *Philosophia scientiæ* Hugh MacColl after One Hundred Years, 2011. Vol. 15. No. 1.

Rahman, Redmond, 2007 – *Rahman S., Redmond J.* Hugh Maccoll. An overview of his logical works with anthology. London: College Publications, 2007. 500 p.

Rahman, Redmond, 2008 – *Rahman S., Redmond J.* Hugh Maccoll and the birth of logical pluralism // Handbook of the history of logic. Vol. 4. British logic in the Nineteenth Century / Ed. by D.M. Gabbay, J. Woods. Amsterdam: Elsevier, 2008. P. 533–604.

Read, 1998 – *Read S.* Hugh MacColl and the algebra of strict implication // Nordic journal of philosophy. 1998. Vol. 3. No. 1. P. 59–83.

Rescher, 1969 – *Rescher N.* Many-valued logic. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969. 288 p.

Russell, 1906 – *Russell B.* Review. Reviewed work: Symbolic Logic and Its Applications. Hugh MacColl // Mind. New series. 1906. Vol. 15. No. 58. P. 255–260.

Simons, 1998 – *Simons P.* MacColl and many-valued logic: an exclusive conjunction // Nordic journal of philosophy. 1998. Vol. 3. No. 1. P. 85–90.

Khulerben K. Kadyg-ool

Non-classical logic concepts of Hugh MacColl

Khulerben K. Kadyg-ool
Tuvan State University,
125a Kolkhoznaya, Kyzyl, 667001, Russian Federation.
E-mail: hoolerben@yandex.ru

Abstract: In this article we attempt to review the main ideas of non-classical logic of Hugh MacColl, logician, mathematician and philosopher (1837–1909). Based on the ideas of G. Boole MacColl impressively advanced in the fields of studying implication and the nature of inference. This research led the Scottish scholar to an idea that there can be more than two traditional truth-values, 1 and 0, respectively. And by the same time MacColl discovered and defined different types of modalities. Thus, his investigations were breaking-through for his time and anticipated some of milestone innovations in logic of the XX century. His works caused combative debates when released. Most famous logicians of his time criticized all his initiatives, sometimes even calling them 'useless complication'. However, his ideas inspired C.I. Lewis for his first systems of modal logic and his strict implication. But in his later works Lewis did all not to mention MacColl. The second half of the XX century is a period of some kind of interest for the Scottish logician's works revival. Still, the ideas of MacColl are not that familiar in Russia.

Keywords: Hugh MacColl, history of logic, non-classical logic, strict implication, modal logic, many-valued logic, Bertrand Russell, Gottlob Frege, Nicholas Rescher

For citation: Kadyg-ool Kh.K. "Idei neklassicheskoi logiki Kh'yu Makkolla" [Non-classical logic concepts of Hugh MacColl], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2024, Vol. 30, No. 2, pp. 111–131. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-2-111-131 (In Russian)

Acknowledgements. The author expresses sincere appreciation to the anonymous reviewer for pointing out important, up-to-date sources that are concerned with the H. Maccoll's logical ideas analysis. Their use essentially improved the article's quality. I would also thank N.E. Tomova for organizational help, without it my first publishing experience in this journal would become a real test.

References

Anellis, 2011 – Anellis, I.H. "MacColl's influences on Pierce and Schröder", *Philosophia scientie*, 2011, Vol. 15, No. 1, pp. 97–128.

Bochenski, 1961 – Bochenski, J.M. *A history of formal logic.* Notre Dame, USA: Univ. of Notre Dame Press, 1961. 567 pp.

Hibben, 1907 – Hibben, J.G. "Review. Reviewed Work(s): Symbolic Logic and Its Applications by Hugh MacColl: The Development of Symbolic Logic by A.T. Shearman", *The Philosophical Review*, 1907, Vol. 16, No. 2, pp. 190–194.

Grattan-Guinness, 2011 – Grattan-Guinness, I. "Was Hugh MacColl a logical pluralist or a logical monist? A case study in the slow emergence of metatheorising", *Philosophia scientiæ*, 2011, Vol. 15, No. 1, pp. 189–203.

Kadyg-ool, 2013 – Kadyg-ool, Kh.K. "Osnovnye etapy razvitiya i formirovaniya sovremennoj modal'noj aleticheskoj logiki" [Main periods of modern modal alethic logic development and forming]: *diss. ... kand. filos. nauk.* [Candidate of Philosophy thesis], Moscow, 2013. 111 pp. (In Russian)

Kuhn, 1977 – Kuhn, T. *Struktura nauchnykh revolyutsii* [The structure of scientific revolutions]. Moscow: Progress, 1977. 300 pp. (In Russian)

Karpenko, 2007 – Karpenko, A.S. *Logiki Lukasevicha i prostye chisla* [Łukasiewicz logics and primes]. Moscow: LKI/URSS, 2007. 256 pp. (In Russian)

Lewis, 1918 – Lewis, C.I. *A survey of symbolic logic*. Berkeley: Univ. of California Press, 1918. 436 pp.

Lukasevich, 1959 – Lukasevich, Ya. *Aristotelevskaya sillogistika s tochki zreniya sovremennoj formal'noj logiki* [Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic]. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1959. 312 pp. (In Russian)

Lukasevich, 1993 – Lukasevich, Ya. "O determinizme" (per. V.L. Vasyukova) [On determinism, trans. V.L. Vasyukov] *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], 1993, Vol. 2, pp. 190–205. (In Russian)

MacColl, 1880 – MacColl, H. "Symbolical reasoning", *Mind*, 1880, Vol. 5, No. 17, pp. 45–60.

MacColl, 1897 – MacColl, H. "Symbolical reasoning (II)", *Mind. New series*, 1897, Vol. 6, No. 24, pp. 493–510.

MacColl, 1900 – MacColl, H. "Symbolical reasoning (III)", *Mind. New series*, 1900. Vol. 9, No. 33, pp. 75–84.

MacColl, 1902 – MacColl, H. "Symbolical reasoning (IV)", *Mind. New series*, 1902, Vol. 11, No. 43, pp. 352–368.

MacColl, 1903 – MacColl, H. "Symbolical reasoning (V)", *Mind. New series*, 1903, Vol. 12, No. 47, pp. 355–364.

MacColl, 1905a – MacColl, H. "Symbolical reasoning (VI)", *Mind. New series*, 1905, Vol. 14, No. 53, pp. 74–81.

MacColl, 1905b – MacColl, H. "Symbolical reasoning (VII)", *Mind. New series*, 1905, Vol. 14, No. 55, pp. 390–397.

MacColl, 1906a – MacColl, H. "Symbolical reasoning (VIII)", *Mind. New series*, 1906, Vol. 15, No. 60, pp. 504–518.

MacColl, 1906b – MacColl, H. *Symbolic logic and its applications*. New York and Bombay: Longmans, Green, and Co, 1906. 141 pp.

MacColl, 1908 – MacColl, H. "'If' and 'imply'", *Mind. New series*, 1908, Vol. 17, No. 67, pp. 453–455.

Nordic journal of philosophy, 1998 – "Nordic journal of philosophy", *Proceedings of the conference Hugh MacColl and the tradition of logic*, Ernst-Moritz-Arndt-Universitat Greifswald, March 29 – April 1, 1998, Vol. 3, No. 1.

Peckhaus, 1998 – Peckhaus, V. "Hugh MacColl and the German algebra of logic" *Nordic journal of philosophy*, 1998, Vol. 3, No. 1, pp. 17–34.

Philosophia scientiæ, 2011 – "Philosophia scientiæ", *Hugh MacColl after One Hundred Years*, 2011, Vol. 15, No. 1.

Rahman, Redmond, 2007 – Rahman, S., Redmond, J. *Hugh Maccoll. An overview of his logical works with anthology.* London: College Publications, 2007. 500 pp.

Rahman, Redmond, 2008 – Rahman, S., Redmond, J. "Hugh Maccoll and the birth of logical pluralism", in: *Handbook of the history of logic. Vol. 4. British logic in the Nineteenth Century*, ed. by D.M. Gabbay, J. Woods. Amsterdam: Elsevier, 2008, pp. 533–604.

Read, 1998 – Read, S. "Hugh MacColl and the algebra of strict implication" *Nordic journal of philosophy*, 1998, Vol. 3, No. 1, pp. 59–83.

Rescher, 1969 – Rescher, N. *Many-valued logic.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1969. 288 pp.

Russell, 1906 – Russell, B. "Review. Reviewed work: Symbolic Logic and Its Applications. Hugh MacColl", *Mind. New series*, 1906, Vol. 15, No. 58, pp. 255–260.

Simons, 1998 – Simons, P. "MacColl and many-valued logic: an exclusive conjunction" *Nordic journal of philosophy*, 1998, Vol. 3, No. 1, pp. 85–90.

Styazhkin, 1967 – Styazhkin N.I. *Formirovanie matematicheskoj logiki* [Forming of mathematical logic]. Moscow: Nauka, 1967. 508 pp. (In Russian)

Библиография журнала «Логические исследования»

Авторский указатель журнала «Логические исследования», Т. 21–30[1]

[1]Составители: Девяткин Л.Ю., Томова Н.Е.

Bibliography of "Logical Investigations"

Author's Index of "Logical Investigations", vol. 21–30[1]

[1]Compiled by Devyatkin L.Yu., Tomova N.E.

Информация для авторов

• Журнал «Логические исследования» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики см. на сайте журнала `http://logicalinvestigations.ru`)

• Все статьи, планируемые к публикации в журнале «Логические исследования», проходят процедуру анонимного рецензирования.

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате $\LaTeX\,2_\varepsilon$

• При подготовке рукописи в $\LaTeX\,2_\varepsilon$ необходимо использовать стилевой класс `LIarticle.cls` и шаблон `LI_template.tex` (если рукопись на русском языке) или `LI_template_eng.tex` (если рукопись на английском языке), которые размещены в правилах предоставления рукописей на сайте `http://logicalinvestigations.ru`. Здесь же размещены подробные рекомендации по подготовке рукописи.

• Объем рукописи не должен превышать 25 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, списки литературы, аннотации (на русском и английском языках).

Статьи следует направлять в электронном виде в редакцию через сайт
`http://logicalinvestigations.ru`

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: `http://logicalinvestigations.ru`)

• All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process.

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the $\LaTeX\,2_\varepsilon$ format.

• While typesetting a paper, the class file `LIarticle.cls` and the template `LI_template_eng.tex` should be used; both files can be accessed at `http://logicalinvestigations.ru`. Here you can also find detailed guidelines for preparing your paper.

• Papers should not exceed 25 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

Submissions should be sent in electronic form through the website:
`http://logicalinvestigations.ru`

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2024. Том 30. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: *ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.*

Главный редактор: *В.И. Шалак*

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технический редактор: *Е.А. Морозова*

Корректор: *И.А. Мальцева*

Художники: *Н.Н. Попов*, *С.Ю. Растегина*

Подписано в печать с оригинал-макета 01.10.2024.
Формат 70 x 100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Для набора греческого текста использован пакет Teubner.
Усл. печ. л. 11,49. Уч.-изд. л. 8,7. Тираж 1 000 экз. Заказ № 24.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Разработка LaTeX-класса стилевого оформления оригинал-макета: *А.Е. Коньков*

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
`http://logicalinvestigations.ru`