Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 31. Number 1

Moscow
2025

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 31. Номер 1

Москва
2025

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2025. Volume 31. Number 1

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the catalogue of Russian Post is ПН145
Subscription index in the catalogue of Ural-Press is 42046

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com
Website: https://logicalinvestigations.ru

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2025. Том 31. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 3 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «5.7 – философские науки»)

Подписной индекс каталога Почты России — ПН145
Подписной индекс каталога Урал-Пресс — 42046

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 426
Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com

Сайт: https://logicalinvestigations.ru

TABLE OF CONTENTS

В НОМЕРЕ

Эдуард Федорович
КАРАВАЕВ
(28.03.1938–25.10.2024)

25 октября 2024 г. ушел из жизни Эдуард Федорович Караваев — представитель ленинградской/петербургской логической школы, специалист по неклассической логике и философии науки, доктор философских наук, почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации.

Эдуард Федорович родился в Ленинграде. Пережив блокаду, в 1962 г. он закончил Ленинградский институт авиационного приборостроения — ЛИАП, и работал проектировщиком счетно-решающих устройств и автоматов в НИИ радиоэлектроники. В 1972 г. он защитил диссертацию на тему «Временная логика. Формирование основных идей и современное состояние», в которой предложил аксиоматизацию понятия одновременности на основе модели ветвящегося времени А. Прайора, а в 1988 — докторскую диссертацию «Философские проблемы временной логики», посвященную логическому исследованию представлений о времени.

С 1967 г. Э.Ф. Караваев преподавал философию и логику, а 1980–1981 гг. заведовал кафедрой философии в ЛИАПе. В 1985–1991 гг. был завкафедрой философии в Ленинградском электротехническом институте связи. В 1993 г. стал первым заведующим кафедры философии науки и техники Санкт-Петербургского государственного университета. В 2011–2020 гг. был профессором кафедры логики СПбГУ, где работал совместителем с 1972 г.

Э.Ф. Караваев опубликовал более 300 работ, внес значительный вклад в развитие временной и деонтической логики в России, его монография «Основания временной логики» (1983) — одна из первых отечественных работ по временной логике. Средствами деонтической логики он обосновал невозможность формального устранения моральных дилемм и юридических коллизий, а также создания непротиворечивых содержательных нормативных кодексов; средствами временной логики показал несостоятельность логического обоснования фатализма; предложил уточнение для теоремы Байеса при помощи вычисления разности шансов за и против гипотез с учетом временной квалификации их реализации.

Эдуард Федорович был строгим и доброжелательным преподавателем, взыскательным ученым и опытным организатором науки, воспитал несколько поколений учеников, среди которых — И.Б. Микиртумов, Е.Н. Лисанюк, О.Ю. Гончарко, П.А. Шапчиц и др. Многим он был верным другом, примером человека высоких нравственных идеалов, а также широты интересов, простиравшихся от создания машинных языков для связи с внеземными цивилизациями до истории Ленинграда/Петербурга и тонкостей музыкального и изобразительного искусства.

Сотрудники сектора логики ИФ РАН

Логические исследования
2025. Т. 31. № 1. С. 9–23
УДК 16

Logical Investigations
2025, Vol. 31, No. 1, pp. 9–23
DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-9-23

Философия и логика
Philosophy and Logic

В.Л. Васюков

Категорная формальная эпистемология

Владимир Леонидович Васюков
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: vasyukov4@gmail.com

Аннотация: В статье предлагается использовать потенциал методов категорной логики для расширения рамок формальной эпистемологии, принимая во внимание, что современная формальная эпистемология представляет собой междисциплинарную исследовательскую программу, которая включает в себя философские, математические, компьютерные, статистические, психологические и экономические аспекты, требующие использования логических, математических и компьютерных методов наряду с корректными стратегиями для рассуждений о знании, убеждениях и суждениях. Использование систем категорной логики вместо систем модальной эпистемической логики позволяет включить в орбиту рассмотрения вопросы не только степеней убежденности суждений (эпистемической или субъективной вероятности), но и степеней убежденности эпистемических выводов и их взаимосвязи. Для оценки этих связей вводится агентность и «байесианская» параметризация эпистемических выводов путем приписывания условной вероятности получения одних эпистемических суждений из других. Для достижения этой цели осуществляется переход от категорий к 2-категориям, в которых объектами уже являются сами выводы. Степени убежденности в двухуровневых дедуктивных 2-категориях можно ввести, параметризуя значениями условной вероятности стрелки второго уровня (2-стрелки, или, в другой терминологии, 2-клетки). В этом случае речь уже идет о степени условной достоверности тех или иных выводов, характеризуя выбор того или иного вывода как достоверного с помощью категорных конструкций на стрелках второго уровня. При этом, связывая условную вероятность с эпистемическими выводами, мы в категорной эпистемологии уменьшаем степень убежденности для случая сложных выводов, увеличивая ее одновременно для случая более простых выводов между одними и теми же формулами.

Ключевые слова: формальная эпистемология, логическая эпистемология, категорная эпистемология, дедуктивные 2-категории, вероятностная параметризация

Для цитирования: *Васюков В.Л.* Категорная формальная эпистемология // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 1. С. 9–23. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-9-23

1. Введение

В современной эпистемологии можно достаточно четко выделить два подхода: (1) традиционный (mainstream), или содержательный, подход, использующий концептуальный анализ и имеющий дело либо с «обыденными» (folksy), либо с чрезмерно спекулятивными примерами или контрпримерами; и (2) формальный подход, использующий многообразие инструментария и методов логики, теории вычислений или теории вероятностей для целей теории познания (см.: [Hendrics, 2006]). До последнего времени эти подходы развивались в основном в полной изоляции друг от друга.

Формальная эпистемология представляет собой методологический подход к традиционной аналитической эпистемологии. Согласно этому взгляду, целью формальной эпистемологии является использование потенциала формальных методов для привнесения строгости и ясности в традиционные философские исследования. Формальная эпистемология — не просто методологический инструмент для эпистемологов, но самостоятельная дисциплина со всеми вытекающими последствиями. С этой точки зрения формальная эпистемология представляет собой междисциплинарную исследовательскую программу, которая включает в себя философские, математические, компьютерные, статистические, психологические и экономические аспекты, требующие использования логических, математических и компьютерных методов наряду с корректными стратегиями для рассуждений о знании, убеждениях, суждениях и принятии решений.

Логическая эпистемология восходит к работам Х. фон Вригта (1951) и особенно к работам Я. Хинтикки начала 1960-х гг. В этот период эпистемическая логика превратилась в мощное направление исследований, получившее множество важных интерпретаций. Общее эпистемологическое значение логики знания вначале до некоторой степени отрицалось сторонниками традиционной эпистемологии, но ввиду того, что она получила использование в компьютерных исследованиях, лингвистике и теории игр, ее стали широко использовать эпистемологи при разработке различных философских теорий познания. В этой связи можно даже говорить о логических эпистемологиях во множественном числе.

Эпистемическая логика (именно так прежде называли логическую эпистемологию) в значительной степени была связана с системами модальной логики. Эти системы допускали эпистемические интерпретации, поэтому главные технические результаты эпистемической логики ведут свое начало именно оттуда. Фразы типа «Агент x знает, что A» были формализованы как модальный оператор знания K_xA в формальном языке, который интерпретировался с помощью стандартного аппарата модальной логики, т.е. семантики возможных миров с отношением достижимости между ними.

Истолкование смысла подобного оператора основывалось на использовании идущей из традиционной эпистемологии идеи, что агент x, иначе агент, применяющий некоторый метод исследования, знает гипотезу h настолько, насколько удовлетворяются следующие условия:

1) x полагает, что h,

2) h имеет место,

3) полагание оправдано (подтверждается).

Эти три пункта стандартного определения философски истолковываются по-разному. Полагание (вера) обычно рассматривалось как психологически примитивное или диспозициональное психологическое состояние. Это состояние могло существовать независимо от его проявления. Полагание не привносит никаких серьезных трудностей в качестве компонента познания. Первое условие служит, по сути дела, для связывания агента x с гипотезой h. Знание предполагает полагание, что h, но этого недостаточно для познания h. Полагание может оказаться ложным. Люди могут верить в то, что фактически ложно, но познание не является настолько снисходительным. Это и влечет требование принятия пункта 2. Подобный анализ, соответственно, предполагает в качестве дополнительного условия, что знание h влечет истинность h. Истинность заранее предполагается в качестве необходимого компонента.

Утверждение о знании требует, чтобы связи между условием полагания и условием истинности были «адекватными». Однако этого мало для получения знания. Верное полагание может быть результатом слепой удачи, ясновидения, угадывания и т.д. Полагания, порожденные подобными процедурами, не ведут к знанию. Причина в том, что подобные процедуры являются чересчур неясными и, по-видимому, недостоверными, даже если полагания верны. Адекватная связь условий 1 и 2 здесь разорвана, и поэтому должно быть обязательно выполненным условие 3.

Это условие подразумевает вспомогательные причины, объясняющие, почему должны быть выполнены первые два условия. Агент может получить необходимое и достаточное подтверждение, требуемое знанием, только лишь на основании этих причин и выполнения двух других условий.

Формально-эпистемологический же подход обязывал еще и ограничить диапазон оператора знания с помощью алгебраических условий, накладываемых на отношение достижимости между возможными мирами.

Одним из недостатков подобного подхода в логической эпистемологии первого поколения была пассивность познающего агента; его использовали только для индексирования отношения достижимости. В логической эпистемологии второго поколения (так ее назвал Я. Хинтикка в 2003 г.) агент уже активен. Ван Бентем, Фейджин, Хальперн, Мозес и Варди, Ауман, Сталнакер и другие с помощью теории игр продемонстрировали, как логическая эпистемология может описывать важные свойства рациональности агента. Они также показали, каким образом теория игр способствует общему пониманию таких понятий эпистемологии, как знание, убеждение и пересмотр убеждений. Ротт (2003) смоделировал «информационную экономию», или «консерватизм», и рассмотрел когнитивную экономику и проблемы рационального выбора для агентов. Балтаг, Мосс и Солецкий (1999) разработали комбинацию эпистемической логики и теории пересмотра убеждений для изучения деятельности и обновления знаний в процессе игры. Еще один подход в логической эпистемологии навеян так называемой немонотонной логикой, связанной с логикой с умолчаниями (default logic) Рейтера и автоэпистемической логикой Р. Мура.

К середине 1990-х гг. восходит идея комбинирования статической эпистемологии первого поколения с динамической теорией пересмотра убеждений, разработанной еще в 1980-х гг. Алькурроном, Гарденфорсом и Макинсоном, и которая представляет собой теорию рационального изменения убеждений (расширение, сужение или пересмотр) в свете нового (возможно, конфликтного) свидетельства. В 1994 г. де Рийке показал, что аксиомы теории пересмотра убеждений, определяющие расширение и пересмотр, могут быть переведены на объектный язык динамической модальной логики. В это же самое время Кристер Сегерберг продемонстрировал, как полная теория пересмотра убеждений может быть сформулирована в модальной логике.

Еще одна разновидность формальной эпистемологии, так называемая байесианская эпистемология, обязана своим названием священнику Томасу Байесу (1701–1761), который доказал важную теорему, лежащую в основании вычисления условной вероятности, центральной для теории подтверждения (некоторые исследователи склонны называть эту разновидность формальной эпистемологии «колмогоровской»). Байесианская эпистемология основывается на двух основных идеях — субъективной вероятности и байесовской условности. В основании теории субъективной вероятности лежит идея о том, что убеждения различаются по своей степени. Некоторые более сильны или обладают большей степенью достоверности или убедительности, чем другие. Эта простая интуитивная идея кажется беспроблемной.

Однако если стоит задача сформировать основание теории числовых вероятностей, то желательно иметь способ различать степени убежденности. Ортодоксальный байесовский способ действий разработан Ф. Рамсеем (1926) и Л. Севиджем (1954). Их идея заключается в том, что чем сильнее чья-то степень убежденности в высказывании, тем более рискованна разница, которая нужна при ставке на то, что высказывание истинно.

Ключевым моментом в байесовской эпистемологии является то, что субъективная вероятность подчиняется исчислению вероятностей. Байесианцы порой попросту говорят, что они отождествляют степень вероятности со степенями убежденности. Меры убежденности достаточно хороши, если они достаточно сильны. Р. Джеффри (1992) предложил даже радикальную версию байесианизма, которая преуменьшает значение знания и принимает в расчет только степени убежденности. Правила подтверждения отбрасываются, частью по скептическим мотивам, и нет никакой определенности ни в чем, за исключением законов логики (или, скорее, вероятности, равной 1 для этих законов). Подобно тому, как радикальные сторонники теории вероятностей полностью отказываются от определенности, так и Джеффри отказывается от достоверного знания как такового.

К несчастью, является всеобщим убеждение, что у реальных людей нет степеней убежденности, которые соответствуют исчислению вероятностей. Это может быть продемонстрировано тщательными психологическими экспериментами, подобно тому, как Тверский и Канеман (1974) показали это на примере вымышленной женщины по имени Линда.

Были предложены и другие принципы байесианской эпистемологии, но ни один из них не был поддержан большинством байесианцев. Так, ван Фраассен в качестве решения проблемы, являются ли законы вероятности единственными стандартами синхронной когерентности для степеней убежденности, предложил дополнительный принцип (рефлексия или специальная рефлексия), который считается специальным случаем еще более общего принципа общей рефлексии. Существуют также два различных понятия вероятности: вероятность, которая характерна для степеней убежденности (эпистемическая или субъективная вероятность), и вероятность, которая характерна для случайных событий, таких как бросание монеты (шанс). Де Финетти считал их ошибочными и утверждал, что существует только один вид вероятности — субъективная вероятность. Для байесианцев, уверенных в существовании обеих типов вероятности, важным вопросом является следующий: «Каково отношение между этими типами вероятности (или каково оно должно быть)»? В качестве ответа были выдвинуты разные предложения, в основном касающиеся принципов непосредственного вывода. Как правило, принципы непосредственного вывода рассматривались как принципы вывода субъективной или эпистемической вероятности из убеждений об объективных шансах. Так, например, считает Дж. Поллок (1990). Д. Льюис меняет направление вывода на противоположное и предлагает выводить убеждения относительно субъективных шансов из субъективных эпистемических вероятностей с помощью своего (пересмотренного) принципа принципов. М. Стривенс (2004) утверждает, что как раз льюисовский принцип принципов придает байесианской эпистемологии ее индуктивный характер. Другие авторы (Леви, Маер, Каплан) предлагают принцип рационального принятия в качестве оценки того, когда будет рационально принять утверждение в качестве истинного, а не просто рассматривать его как вероятное.

2. Дедуктивные категории для формальной эпистемологии

Для использования теоретико-категорного аппарата в исследованиях в области формальной эпистемологии в качестве первого шага следует построить теоретико-категорную семантику языков некоторых логических эпистемологий, а также варианты теоретико-категорной семантики для байесианской эпистемологии. Поскольку чаще всего вероятность добавляется к системе пропозициональной логики в качестве нового отношения между высказываниями в виду того, что через истинностные характеристики вероятность не может быть выражена, то можно воспользоваться вместо пропозициональной логики системами категорной логики, в которых объектами логической (дедуктивной) категории выступают формулы, а стрелками (морфизмами) — кодированные выводы одних формул из других (см.: [Lambek, Scott, 1986; Васюков, 2005]).

В подобной дедуктивной категории для каждого объекта (формулы) A существует специальная стрелка (вывод), стрелка тождества $1_A : A \vdash A$ и очевидная транзитивность выводов передается с помощью операции композиции, которая, будучи применена к стрелкам $f : A \vdash B$ и $g : B \vdash C$, порождает стрелку $g \circ f : A \vdash C$. В сущности, композиция представляет собой некоторую форму правила сечения:

$$\frac{f : A \vdash B \quad g : B \vdash C}{g \circ f : A \vdash C}.$$

Помимо этого в дедуктивной категории следующие уравнения между выводами имеют место:

$$f \circ 1_A = f, 1_B \circ f = f, (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

для всех $f : A \vdash B, g : B \vdash C, h : C \vdash D$.

Первые два из их говорят о том, что тождественный вывод ничего не добавляет к имеющемуся результату, а второе говорит о том, что порядок шагов выводов не существенен, важен лишь результат, шаги можно комбинировать.

Подразумевая под объектами дедуктивной категории формулы, под стрелками — доказательства и под операциями на стрелках — правила вывода, мы получаем простейшую импликативную (экспоненциальную) категорию, если допускаем, что существует формула T(= истина) и бинарная операция $\supset$ (= «если..., то») для образования импликации $A \supset B$ из двух данных формул A и B. Кроме этого, мы вводим следующие два правила вывода:

$$\frac{f : A \vdash B}{\ulcorner f \urcorner : T \vdash A \supset B}$$

$$\frac{g : T \vdash A \supset B}{g^s : A \vdash B}$$

и дополнительные тождества:

$$\ulcorner f \urcorner^s = f,$$

$$\ulcorner g^s \urcorner = g$$

для всех $\ulcorner f \urcorner : A \vdash B$ и $g : T \vdash C \supset D$.

Следуя подобным путем, мы получаем *декартову (конъюнктивно-импликативную) категорию*, вначале добавляя к нашему исходному языку дедуктивной категории бинарную операцию $\wedge$ (= и) для образования конъюнкции $A \wedge B$ из двух данных объектов-формул A и B. Затем мы вводим дополнительные стрелки и правила вывода:

$$\mathbf{O}_A : A \vdash T$$

$$\pi_{AB} : A \wedge B \vdash A$$

$$\pi'_{AB} : A \wedge B \vdash B$$

$$\frac{f : C \vdash A \quad g : C \vdash B}{f \wedge g : C \vdash A \wedge B}$$

$$\xi_{AB} : A \wedge (A \supset B) \vdash B$$

$$\frac{h : C \wedge B \vdash A}{h^* : C \vdash B \supset A}$$

и дополнительные тождества

$$f = \mathbf{O}_A, \text{для всех } f : A \vdash T$$

$$\pi_{AB} \circ (f \wedge g) = f$$

$$\pi'_{AB} \circ (f \wedge g) = g$$

$$\pi_{AB} \circ h \wedge \pi'_{AB} \circ h = h$$

для всех $f : C \vdash A, g : C \vdash B, h : C \vdash A \wedge B$.

Декартово замкнутую дедуктивную категорию мы получаем путем наделения декартовой категории дополнительной структурой, удовлетворяющей следующим тождествам:

$$\xi_{AB} \circ (h^* \circ \pi_{CB} \wedge \pi'_{CB})) = h$$

$$\xi_{AB} \circ (k \circ \pi_{CB} \wedge \pi'_{CB})^* = k$$

для всех $h : C \wedge B \vdash A$ и $k : C \vdash (B \supset A)$.

Стрелка $\xi_{AB} : B \wedge (B \supset A) \vdash A$ при этом обладает следующим универсальным свойством, называемым *экспоненцированием*:

> для любой стрелки $h : C \wedge B \vdash A$ существует единственная стрелка $h^* : C \vdash B \supset A$, такая, что $\xi_{AB} \circ (h^* \wedge 1_B) = h$.

Для *декартово бизамкнутой дедуктивной категории* помимо конъюнкции и импликации в языке обычно требуется еще и наличие дизъюнкции и константы «ложь» (инициального объекта), т.е. формулы $\perp$ и операции $\vee$ ($=$ или) на формулах, а также следующих дополнительных стрелок:

$$f = \Box_A : \perp \vdash A$$

$$\rho_{AB} : A \vdash (A \vee B)$$

$$\rho'_{AB} : B \vdash (A \vee B),$$

выполняющих дополнительные тождества:

$$f = \Box_A \text{ для всех } f : \perp \vdash A$$

$$(f \vee g)\rho_{AB} = f$$

$$(h \circ \rho_{AB}) \vee (g \circ \rho'_{AB}) = h$$

для всех $f : A \vdash C$, $g : B \vdash C)$ и $h : A \vee B \vdash C$.

По сути дела, декартово бизамкнутая дедуктивная категория представляет собой позитивное интуиционистское пропозициональное исчисление, стрелки которого выполняют вышеприведенные тождества. Если мы хотим получить категорный аналог классической логики в нашем языке, то нам следует добавить следующую стрелку:

$$(A \supset \perp) \supset \perp \vdash A$$

или равносильную ей стрелку

$$T \vdash A \vee (A \supset \perp).$$

Удобство использования дедуктивных категорий связано с тем обстоятельством, что мы легко переходим к любым категориям, обладающим подобной же структурой, но уже не связанной с дедуктивными выводами, заменяя формулы на произвольные объекты (обладающие определенной структурой), а стрелки-выводы — просто на некоторые стрелки, описывающие связь между предполагаемыми объектами. Подобные категории будут уже представлять собой модели нашей дедуктивной категории, т.е. они будут описывать некоторую теоретико-категорную семантику нашего первоначального языка дедуктивных категорий.

Модальные операторы можно точно так же ввести в дедуктивные категории, обогащая язык с помощью одноместной операции $\Box$ (= необходимо) для образования новой формулы $\Box A$ из формулы-объекта A. Дополнительные новые стрелки будут зависеть от принимаемых модальных аксиом, в частности, выбирая стрелку

$$d_{AB} : \Box(A \supset B) \vdash \Box A \supset \Box B$$

и частичную унарную операцию на стрелках:

$$\frac{f : T \vdash A}{nec(f) : T \vdash \Box A}$$

$$\frac{f : A \vdash B}{\Box f : \Box A \vdash \Box B},$$

мы получаем (добавляя соответствующие тождества на стрелках типа $(d_{AB} \circ nec(f))^s = \Box(f^s)$ для $f : T \vdash (A \supset B)$) категорный эквивалент нормальной модальной логики — модальную декартово бизамкнутую дедуктивную категорию $MCBC$.

Модальные эпистемические операторы K (= известно, что) для использования в формулах типа KA в дедуктивных категориях вводятся по той же схеме, что и алетические модальные операторы. Дополнительные новые стрелки будут зависеть от принимаемых эпистемических модальных аксиом. В частности, добавляя стрелку $d_{AB} : K(A \supset B) \vdash KA \supset KB$ и частичную унарную операцию на стрелках

$$\frac{f : T \vdash A}{nec(f) : T \vdash KA}$$

$$\frac{f : A \vdash B}{Kf : KA \vdash KB},$$

мы получаем (с соответствующими тождествами типа $(d_{AB} \circ nec(f))^s = K(f^s)$ для $f : T \vdash A \supset B$) категорию, отвечающую нормальной эпистемической модальной логике — эпистемическую декартово бизамкнутую дедуктивную категорию $ECBC$.

Однако нас интересуют эпистемические модальные операторы типа K_xA (агент x знает, что A). Если субъект в нашем рассмотрении один и тот же, то в этом случае нам достаточно эпистемических расширений $MCBC$. Если же мы хотим рассматривать знания различных агентов, т.е. используя операторы типа $K_xA, K_eA, K_zA, \ldots$, то в этом случае нам понадобится семейство эпистемических операторов знания разных агентов, т.е. параметризованные модальные операторы, а для них в нашем языке отсутствуют средства выражения. Здесь на помощь приходят еще одни конструкции из языка категорной логики — так называемые функторы.

Функторы можно расценивать как категорный аналог переводов между логиками. Функтор $\mathbf{F}$ из дедуктивной категории $\mathbf{C}$ в дедуктивную категорию $\mathbf{D}$ представляет собой функцию, сопоставляющую каждой формуле A категории $\mathbf{C}$ формулу $\mathbf{F}(A)$ категории $\mathbf{D}$, а каждой стрелке $f : A \vdash B$ категории $\mathbf{C}$ — стрелку $\mathbf{F}(f) : \mathbf{F}(A) \vdash \mathbf{F}(B)$, и при этом

$$\mathbf{F}(1_A) = 1_{\mathbf{F}(A)}$$

$$\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f).$$

Если задать теперь на нашей $MCBC$ систему эндофункторов (т.е. систему функторов из категории $\mathbf{C}$ в категорию $\mathbf{C}$), то в качестве формул K_xA, K_yA, K_zA мы будем рассматривать результат действия функторов $\mathbf{F}_x(A), \mathbf{F}_y(A), \mathbf{F}_z(A)$ с параметрами x, y, z. При этом у нас будут в результате возникать формулы-объекты типа $\mathbf{F}_x(A) \wedge \mathbf{F}_y(B)$ и выводы типа $\mathbf{F}_x(A) \wedge \mathbf{F}_y(B) \vdash \mathbf{F}_y(B)$, т.е. будут описываться ситуации, связанные с взаимодействием агентов. Для того, чтобы получить категорию $\mathbf{K}$-функторов, в рамках которой описывается это взаимодействие, дополнительно введем стрелки

$$K_{xy}(A, B) : \mathbf{K}_x(A) \vdash \mathbf{K}_y(B),$$

представляющие собой композиции стрелок

$$K_{xy}(A) : \mathbf{K}_x(A) \vdash \mathbf{K}_y(A),$$

$$\mathbf{K}_y(f) : \mathbf{K}_y(A) \vdash \mathbf{K}_y(B),$$

$$\mathbf{K}_x(f) : \mathbf{K}_x(A) \vdash \mathbf{K}_x(B),$$

$$K_{xy}(B) : \mathbf{K}_x(B) \vdash \mathbf{K}_y(B)$$

и соответствующие тождества

$$\mathbf{K}_y(f) \circ K_{xy}(A) = K_{xy}(B) \circ \mathbf{K}_x f = K_{xy}(A, B).$$

Степень убежденности, которую байесианцы отождествляют со степенью вероятности, можно также ввести в $MCBC$ с помощью задания системы эндофункторов на данной категории, но теперь приписывая степень вероятности в качестве параметра каждому функтору данной системы и определяя на множестве функторов операции, позволяющие учитывать взаимоотношения между степенями убежденности. По сути дела, подобные функторы будут представлять собой теоретико-категорную интерпретацию модальных операторов типа $K_r A$ — «известно со степенью убежденности r, что A». Можно даже расширить подобный подход на случай эпистемических операторов знания различных агентов, добавляя степень убежденности в качестве второго параметра, рассматривая операторы $\mathbf{K}_x^r A$ — «агенту x известно со степенью убежденности r, что A».

3. Формальная эпистемология в дедуктивных 2-категориях

Однако более естественным представляется рассматривать степень убежденности не формул, но выводов, поскольку дедуктивные категории призваны передать структуру логической эпистемологии, а для нее главным является логический вывод. Одним из способов достичь этой цели является переход от категорий к 2-категориям, в которых объектами являются сами выводы [Baez, 1997]. Степени убежденности в двухуровневых дедуктивных 2-категориях можно ввести, параметризуя значениями вероятности стрелки второго уровня (2-стрелки). В этом случае речь уже будет идти о степени условной достоверности тех или иных выводов, характеризуя выбор того или иного вывода как достоверного с помощью категорных конструкций на стрелках второго уровня.

2-стрелки представляют собой 2-клетки, или отображения в терминологии Маклейна [Маклейн, 2004, с. 312], причем их можно перемножать двумя способами: горизонтальным и вертикальным. Таким образом, если у нас имеются стрелки $\mathbf{K}_x(f), \mathbf{K}_x(g) : \mathbf{K}_x(A) \vdash \mathbf{K}_x(B)$, то дополнительно имеется 2-клетка $\alpha : \mathbf{K}_x(f) \Longrightarrow \mathbf{K}_x(g)$ с областью $\mathbf{K}_x(A)$ и кообластью $\mathbf{K}_x(B)$, что записывается как $\alpha : \mathbf{K}_x(f) \Longrightarrow \mathbf{K}_x(g) : \mathbf{K}_x(A) \vdash \mathbf{K}_x(B)$. Для 2-клеток существует два вида умножения – вертикальное $\beta \bullet \alpha : \mathbf{K}_x(f') \circ \mathbf{K}_x(f) \Longrightarrow \mathbf{K}_x(g') \circ \mathbf{K}_x(g) : \mathbf{K}_x(A) \vdash \mathbf{K}_x(C)$ (где $\beta : \mathbf{K}_x(f') \Longrightarrow \mathbf{K}_x(g') : \mathbf{K}_x(B) \vdash \mathbf{K}_x(C)$) и горизонтальное $\beta * \alpha : \mathbf{K}_x(f) \Longrightarrow \mathbf{K}_x(h) : \mathbf{K}_x(A) \vdash \mathbf{K}_x(B)$ (где $\beta : \mathbf{K}_x(g) \Longrightarrow \mathbf{K}_x(h) : \mathbf{K}_x(A) \vdash \mathbf{K}_x(B)$).

2-клетки образуют категорию относительно горизонтального умножения, и для любой формулы $\mathbf{K}_x(A)$ имеется единичная 2-клетка $\mathbf{1} : \mathbf{1} \Longrightarrow \mathbf{1} : \mathbf{K}_x(A) \vdash \mathbf{K}_x(A)$ — двусторонняя единица для подобного умножения. Точно так же 2-клетки образуют категорию относительно вертикального умножения, и существует единичная 2-клетка $\mathbf{1}_f : f \Longrightarrow f$ относительно этого умножения.

2-стрелку можно изобразить на диаграмме как «двуугольник» (см. [Васюков, 2005]):

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}_x(A) \arrow[r, bend left=50, "\mathbf{K}_x(f)"] \arrow[r, bend right=50, "\mathbf{K}_x(g)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_{Pr(\mathbf{K}_x(g)|\mathbf{K}_x(f))}"] & \mathbf{K}_x(B),
\end{tikzcd}$$

т.е. в виде параметризованного 2-морфизма $\alpha_{Pr(\mathbf{K}_x(g)|\mathbf{K}_x(f))} : \mathbf{K}_x(f) \Longrightarrow \mathbf{K}_x(g)$ между морфизмами $\mathbf{K}_x(f), \mathbf{K}_x(g) \ : \ \mathbf{K}_x(A) \ \vdash \ \mathbf{K}_x(B)$, где $Pr(\mathbf{K}_x(g)|\mathbf{K}_x(f))$ есть условная вероятность. Мы можем «горизонтально» соединить 2-морфизмы

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}_x(A) \arrow[r, bend left=50, "\mathbf{K}_x(f)"] \arrow[r, bend right=50, "\mathbf{K}_x(g)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_{Pr(\mathbf{K}_x(h)|\mathbf{K}_x(f))}"] \arrow[rr, bend left=70, "\mathbf{K}_x(h)\circ\mathbf{K}_x(f)"] \arrow[rr, bend right=70, "\mathbf{K}_x(i)\circ\mathbf{K}_x(g)"'] \arrow[rr, phantom, bend right=45, "\Downarrow(\beta\bullet\alpha)_{Pr(\mathbf{K}_x(h)|\mathbf{K}_x(f))\times Pr(\mathbf{K}_x(g)|\mathbf{K}_x(i))}"] & \mathbf{K}_x(B) \arrow[r, bend left=50, "\mathbf{K}_x(h)"] \arrow[r, bend right=50, "\mathbf{K}_x(i)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta_{Pr(\mathbf{K}_x(i)|\mathbf{K}_{x(g)})}"] & \mathbf{K}_x(C)
\end{tikzcd}$$

для получения параметризованного 2-морфизма
$(\beta \bullet \alpha)_{Pr(\mathbf{K}_x(i)|\mathbf{K}_x(h))\times Pr(\mathbf{K}_x(g)|\mathbf{K}_x(f))} : \mathbf{K}_x(h) \circ \mathbf{K}_x(i) \Longrightarrow \mathbf{K}_x(f) \circ \mathbf{K}_x(h)$ и «вертикально» соединить их

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}_x(A) \arrow[r, bend left=60, "\mathbf{K}_x(f)"] \arrow[r, "\mathbf{K}_x(g)" description] \arrow[r, bend right=60, "\mathbf{K}_x(h)"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\alpha_{Pr(\mathbf{K}_x(g)|\mathbf{K}_x(f))}"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\beta_{Pr(\mathbf{K}_x(h)|\mathbf{K}_x(g))}"'] \arrow[r, phantom, bend right=80, "\Downarrow(\beta * \alpha)_{Pr(\mathbf{K}_x(g)|\mathbf{K}_x(h))+Pr(\mathbf{K}_x(g)|\mathbf{K}_x(f))}"'] & \mathbf{K}_x(B)
\end{tikzcd}$$

для получения параметризованного 2-морфизма
$(\beta * \alpha)_{Pr(\mathbf{K}_x(g)|\mathbf{K}_x(h))+Pr(\mathbf{K}_x(g)|\mathbf{K}_x(f))} : \mathbf{K}_x(f) \Longrightarrow \mathbf{K}_x(h)$.

Таким образом, связывая условную вероятность с эпистемическими выводами, мы в категорной эпистемологии уменьшаем степень убежденности для случая сложных выводов, увеличивая ее одновременно для случая более простых выводов между одними и теми же формулами.

Литература

Васюков, 2005 – *Васюков В.Л.* Категорная логика. М.: АНО Институт логики, 2005. 194 с.

Маклейн, 2004 – *Маклейн С.* Категории для работающего математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 352 с.

Baez, 1997 – *Baez J.C.* Introduction to n-Categories // URL: `https://arxiv.org/abs/q-alg/9705009` (дата обращения: 26.03.2025).

Hendrics, 2006 – *Hendrics V.F.* Mainstream and Formal Epistemology. New York: Cambridge University Press, 2006. 188 p.

Lambek, Scott, 1986 – *Lambek J., Scott P.J.* Introduction to higher order categorical logic. London: Cambridge University Press, 1986. 293 p.

Vladimir L. Vasyukov

Categorical formal epistemology

Vladimir L. Vasyukov
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: vasyukov4@gmail.com

Abstract: The main point of article is to employ the potential of categorical logic methods in order to expand the scope of formal epistemology, taking into account that modern formal epistemology is in fact an interdisciplinary research program that includes philosophical, mathematical, computational, statistical, psychological, and economic aspects that require the use of logical, mathematical, and computer methods along with correct strategies for reasoning about the knowledge, beliefs and judgments. The exploitation of systems of categorical logic instead of systems of modal epistemic logic makes it possible to include in the orbit of consideration not only the degrees of belief of judgments (epistemic or subjective probability), but also the degrees of belief of epistemic conclusions and their interconnection. To assess these connections, agency and "Bayesian" parameterization of epistemic conclusions are introduced by assigning the conditional probability of deriving some epistemic judgments from others. To achieve this goal, a transition is made from categories to 2-categories, in which the objects are already the conclusions themselves. Degrees of belief in two-level deductive 2-categories can be introduced by parameterizing the values of the conditional probability of the second-level arrows (2-arrows or, in other terminology, 2-cells). In this case, we are already talking about the degree of conditional reliability of certain conclusions, characterizing the choice of one or another conclusion as reliable with the help of categorical constructions on the second-level arrows. At the same time, by associating conditional probability with epistemic conclusions, we reduce in categorical epistemology the degree of belief for the case of complex conclusions, while increasing it simultaneously for the case of simpler conclusions between the same formulas.

Keywords: formal epistemology, logical epistemology, categorical epistemology, deductive 2-categories, probability parametrization

For citation: Vasyukov V.L. "Kategornaya formal'naya epistemologiya" [Categorical formal epistemology], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 1, pp. 9–23. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-9-23 (In Russian)

References

Baez, 1997 – Baez, J.C. "Introduction to n-Categories", [https://arxiv.org/abs/q-alg/9705009, accessed on 26.03.2025].

Hendrics, 2006 – Hendrics, V.F. *Mainstream and Formal Epistemology*. New York: Cambridge University Press, 2006. 188 p.

Lambek, Scott, 1986 – Lambek, J., Scott, P.J. *Introduction to higher order categorical logic*. London: Cambridge University Press, 1986. 293 p.

Mac Lane, 2004 – Mac Lane, S. *Categorii dlia rabotayushchego mathematica* [Categories for the Working Mathematician]. Moscow: PHYSMATHLIT, 2004. 352 p. (In Russian)

Vasyukov, 2005 – Vasyukov, V.L. *Kategornaya logika* [Categorical Logic]. Moscow: ANO Institute of Logic, 2005. 194 p. (In Russian)

Логические исследования
2025. Т. 31. № 1. С. 24–46
УДК 510.644+164.03+004.047

Logical Investigations
2025, Vol. 31, No. 1, pp. 24–46
DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-24-46

Неклассическая логика
Non-classical Logic

Н.Н. Непейвода

Логики условных вычислений с ошибками*

Николай Николаевич Непейвода
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН.
Российская Федерация, 152021, Ярославская область, Переславский район, с. Веськово, ул. Петра Первого, д. 4а.
E-mail: nnn@nnn.botik.ru

Аннотация: В компьютерных программах недопустимо игнорировать практически неизбежное наличие ошибок. Как гласит аксиома Шуры-Буры: «Если программа на самом деле абсолютно правильна, она никому не нужна». А в задачах точных вычислений и в суперкомпьютерах возникает необходимость управления вычислениями от исключительных ситуаций. Для описания такого исполнения недостаточно адекватна двузначная и трехзначная логика. Некоторые ошибки, такие как переполнения или деление на ноль, могут быть обработаны и идентифицируются логическим значением $\mathfrak{u}$. Но такие, как «синий экран смерти», фатальны: исправлены внутри программы быть не могут. Множество S значений пополняется мягкой ошибкой $\mathfrak{u}$ и фатальной ошибкой $\perp$. Здесь рассматривается следующая семантика: $\mathfrak{u}$ это сигнал, что однозначное решение не найдено и интерпретируется как $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$, а $\perp$ — как логический провал $\varnothing$. Рассматриваются лишь непрерывные в топологии $S_\perp$ вычисления. Базисом логики принимается условный оператор **if** A **then** B **else** C **fi** и логические константы $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}, \perp\}$. Исследуются логики, соответствующие различным вариантам организации вычислений данного оператора. Полностью описаны взаимные выразимости этих вариантов. Показано, что различные вариации вычислений порождают, в частности, логики Клини, Лукасевича, Гёделя.

Ключевые слова: четырехзначная логика, логики Клини, логика Гжегорчика, логика Гёделя, управление вычислениями, функциональная полнота, условные операторы, обработка ошибок

* Проект 125021302067-9 ИПС РАН. Автор благодарен ИПС РАН, давшему возможность свободно заниматься фундаментальными исследованиями в разных областях. А работа рецензентов и редакции оказалась просто отличной: они детально проанализировали все доказательства и формулы. Статья, в исходном виде обладавшая всеми свойствами первой публикации в новом для автора направлении: некрасивые доказательства, многочисленные мелкие шероховатости и ошибки — дошла, возможно, до уровня второй статьи. Некоторые результаты данного исследования опубикованы в материалах XX конференции разработчиков свободного программного обеспечения, Переславль-Залесский, 2024, с. 15–20 и на Национальном суперкомпьютерном форуме 2024 (интернет-публикация).

Для цитирования: *Непейвода Н.Н.* Логики условных вычислений с ошибками // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 1. С. 24–46. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-24-46

1. Мотивировка исследования

В теории вычислимости условный оператор **if** B **then** M **else** N **fi** является в некотором роде «штрихом Шеффера». Маккарти [McCarthy, 1963] дал более абстрактное, чем конкретные модели типа машин Тьюринга либо рекурсивных функций, определение вычислимости через рекурсивные схемы. Условное выражение Φ имеет вид

$$\mathbf{if}\ A\ \mathbf{then}\ S\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}, \tag{1}$$

где A — логическое выражение, а S, T — выражения со значениями из одного и того же типа данных. Его тип — общий тип данных S, T.

Определение 1. *Рекурсивная схема по Маккарти* — совокупность определений

$$\begin{gathered} f_1(x_1,\ldots,x_k) \leftarrow \Phi_1(x_1,\ldots,x_k,f_1,\ldots,f_n) \\ \cdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_k) \leftarrow \Phi_n(x_1,\ldots,x_k,f_1,\ldots,f_n), \end{gathered} \tag{2}$$

где Φ_i — условные выражения; $f_i,\ i = 1,\ \ldots,\ n$ — суть определяемые функции; $x_i,\ i = 1,\ \ldots,\ k$ — суть предметные переменные.

Математическую модель рекурсивных схем над произвольными типами данных дал Д. Скотт [Scott, 1970], дополнив каждый тип значений ошибкой $\perp$ и рассмотрев его как непрерывную полурешетку $S_\perp$ с наименьшим элементом $\perp$.

Эта концепция может работать над разнообразными типами данных и исходными функциями, включая функции высших порядков [Barendregt, 1984; Carayol, Serre, 2021]. Она требует строгой типизации переменных, констант и функций. Она сильнее, чем типизированное λ-исчисление. Здесь рассматривается ее модификация, где имеется еще одно дополнительное значение $\mathfrak{u}$ (так называемая мягкая ошибка, исправимая ошибка, неудача, исключение, неопределенность).

При работе с ИИ и с трудными либо неразрешимыми задачами часто применяются параллельные, совместные и распределенные вычисления. По этой причине возникают и используются разные режимы исполнения условного оператора, но в теории рассматривается лишь один, стандартный:

вычислить значение условия и затем соответствующую альтернативу. Далее, в вычислениях часто возникает ситуация, когда решение не найдено либо вычисления вышли в подозрительную область данных (например, переполнение). Такие ситуации требуют специальной обработки, и в некоторых системах программирования, например, в Прологе, управление происходит в большинстве случаев за счет обработки неудач. При этом необходимо отличать неудачу или исключение от краха (часто называемого «неисправимая ошибка», «фатальная неудача», «фатальная ошибка», «авария»), приводящего к завершению работы. Поэтому для анализа различных случаев обработки условий выбраны четырехзначные логики со значениями $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}, \bot\}$, где $\mathfrak{u}$ интерпретируется как неудача либо устранимая ошибка, а $\bot$ — как крах.

Если взять исходные типы **logical**[1] и натуральных чисел **nat**, константу 0, предикат $Z(x) \equiv (x = 0)$, функции S добавления 1 и Pd уменьшения на 1, принимая $Pd(0) = 0$, все они с неподвижными точками $\mathfrak{u}, \bot$, то с помощью рекурсивных схем первого порядка (без функционалов) получаются рекурсивные функции. Рекурсивные схемы стали основой языков функционального программирования и искусственного интеллекта, сплошь и рядом в современных языках программирования логические связки определяются через **if** [Meijer et al., 1991].

Единственный способ обработать ошибку — заблокировать условия ее появления. Такой подход к ошибкам в общем случае использован в денотационной семантике по Скотту, являющейся стандартной в современном теоретическом программировании [Митчелл, 2010]. Множество значений V пополняется ошибкой $\bot$ до $V_\bot$, и вводится частичный порядок, где $\bot$ — минимальный элемент (*подъем* типа). Подъем порождает топологию, и все вычислимые функции рассматриваются как непрерывные (в [Там же] называемые также *генерические*) в скоттовской топологии. То есть если $f(\vec{x}, \bot, \vec{z}) = a,\ a \neq \bot$, то при всех y $f(\vec{x}, y, \vec{z}) = a$[2]. Мы используем два варианта скоттовского структурирования истинностных значений.

$$\begin{array}{ccc} & & S_2 \\ S_1 & & \{T, F\} \\ \{T, F, U\} & & \backslash\ / \\ \backslash \mid / & & U \\ \bot & & \mid \\ & & \bot \end{array} \qquad (3)$$

[1]Тип логических значений может быть богаче, чем стандартный **bool** с двумя значениями.

[2]Заметим, что еще в работе [Clarke, 1979] было доказано, что фраза: «Без ограничения общности можно рассматривать одноместные функции», как в λ-исчислении, недопустима в случае рассмотрения ошибок. Тем не менее такое повторяется вновь и вновь.

Таким образом, задача данной работы исследовать логики, порождаемые разными вариациями оператора **if** A **then** B **else** C **fi** над четырехзначными логическими функциями. Определения рассматриваются без рекурсии и функционалов высших порядков. Все они непрерывны в топологии S_1.

Теоретически достаточно рассматривать определения, где A, B, C — выражения из ранее определенных функций, но для удобства рассматриваем вместо схемы

$$\begin{array}{rl} A \leftarrow & \textbf{if } A_1 \textbf{ then } B_1 \textbf{ else } C_1 \textbf{ fi} \\ B \leftarrow & \textbf{if } A_2 \textbf{ then } B_2 \textbf{ else } C_2 \textbf{ fi} \\ C \leftarrow & \textbf{if } A_3 \textbf{ then } B_3 \textbf{ else } C_3 \textbf{ fi} \\ D \leftarrow & \textbf{if } A \textbf{ then } B \textbf{ else } C \textbf{ fi} \end{array} \tag{4}$$

определение с одним длинным многоступенчатым оператором:

$$\begin{array}{rll} D \leftarrow & \textbf{if} & \textbf{if } A_1 \textbf{ then } B_1 \textbf{ else } C_1 \textbf{ fi} \\ & \textbf{then} & \textbf{if } A_2 \textbf{ then } B_2 \textbf{ else } C_2 \textbf{ fi} \\ & \textbf{else} & \textbf{if } A_3 \textbf{ then } B_3 \textbf{ else } C_3 \textbf{ fi} \\ & \textbf{fi} & \end{array} \tag{5}$$

или, сокращая чаще всего встречающиеся вложения **if**:

$$\begin{array}{rll} D \leftarrow & \textbf{if} & \textbf{if } A_1 \textbf{ then } B_1 \textbf{ else } C_1 \textbf{ fi} \\ & \textbf{then} & \textbf{if } A_2 \textbf{ then } B_2 \textbf{ else } C_2 \textbf{ fi} \\ & \textbf{elif} & A_3 \textbf{ then } B_3 \\ & \textbf{else} & C_3 \\ & \textbf{fi}. & \end{array} \tag{6}$$

2. Пополнение трехзначных логик значением $\perp$

Начнем с нескольких замечаний о трехзначных логиках Клини.

В логиках Клини три значения: $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}\}$. Значение $\mathfrak{u}$ интерпретируется как «мягкая» ошибка, которую возможно пытаться обработать. Три трехзначных логики Клини обозначаются: $\mathbb{K}_1$ (слабая трехзначная логика), $\mathbb{K}_2$ (сильная трехзначная логика), $\mathbb{K}_3$ (несимметричная трехзначная логика, называемая еще «lisp-логика»). С вычислительной точки зрения слабая трехзначная логика соответствует последовательным вычислениям с полной обработкой логических значений без попыток устранить ошибку, несимметричная — последовательной неполной (до первого успеха или неудачи) обработке, позволяющей иногда обойти ошибку, сильная — совместной обработке с попыткой получить результат, несмотря на частную ошибку. Естественно, сильная возможна, лишь если нет краха, а lisp-логика позволяет работать с крахом.

Определим четырехзначные расширения логик Клини. Отрицание во всех определяется одинаково:

A	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\neg A$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$

Слабая логика Клини $\mathbb{K}_1$:

$A \wedge B$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

$A \vee B$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

(7)

Сильная логика Клини $\mathbb{K}_2$:

$A \wedge B$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\perp$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

$A \vee B$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\perp$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

(8)

Lisp-логика $\mathbb{K}_3$:

$A \wedge B$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

$A \vee B$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

(9)

Смешанная логика $\mathbb{K}_{3,2}$, где $\mathfrak{u}$ обрабатывается как в $\mathbb{K}_2$, а $\perp$ как в $\mathbb{K}_3$:

$A \wedge B$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

$A \vee B$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

(10)

Заметим, что фрагменты $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}\}$ и $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \perp\}$ в слабой и lisp логиках совпадают друг с другом, а в сильной различны. Четырехзначные расширения будем обозначать так же, как стандартные логики Клини, трехзначность в случае необходимости будем оговаривать.

Вторая интерпретация сильной трехзначной догики Клини соответствует, в частности, распределенным вычислениям [Tanenbaum, van Steen, 2002; Ford, 2020], когда трудная задача решается на многих независимых компьютерах, каждый из которых обрабатывает свою часть информации, возможно, пользуясь также результатами ранее проведенных другими вычислений, пока в конце концов не удается найти полное решение. Тогда $\mathfrak{u}$ понимается как результат: данный фрагмент вычислений не позволил приблизиться к окончательному решению, и нужно без разрушения вычислительного процесса проигнорировать его.

Применительно к нашей системе в основном сохраняются взаимосвязи между логиками Клини ([Комендантская, 2009; Томова, 2010; Arieli, Avron, 2015; Карпенко, 2010]). Введем сокращение $A \supset B \triangleq \neg A \vee B$. Позитивный фрагмент логики — связки $\wedge, \vee, \supset$ без $\neg$. Если нужно уточнить, какой логике принадлежит связка, это обозначается нижним индексом. Пропозициональные константы для наших логических значений обозначим T, F, U, $\bot$.

Утверждение 1.

1. Логика $\mathbb{K}_1$ выразима в логиках $\mathbb{K}_2$ и $\mathbb{K}_{3,2}$.
2. Логика $\mathbb{K}_2$ выразима в $\mathbb{K}_{3,2}$.
3. Остальные пары логик невыразимы друг через друга.
4. Позитивные фрагменты логик слабее полных и находятся в тех же отношениях.
5. Пропозициональные константы невыразимы ни в одной из клиниевских логик.
6. T, F выразимы друг через друга, каждая из U, $\bot$ невыразима через все остальные константы. В позитивном фрагменте ни одна константа не выразима через остальные.

Доказательство.

1. $(A \vee_1 B) = ((A \supset_i A) \wedge_i (B \supset_i B)) \wedge_i (A \vee_i B)$.
$(A \wedge_1 B) = ((A \wedge_i \neg A) \vee_i (B \wedge_i \neg B)) \vee_i (A \wedge_i B)$.
Определения одинаковы для $\mathbb{K}_2$ и $\mathbb{K}_{3,2}$.

2. $(A \vee_2 B) = (B \wedge_{3,2} \neg B) \vee_{3,2} (A \vee_{3,2} B)$.
$(A \wedge_2 B) = (B \vee_{3,2} \neg B) \wedge_{3,2} (A \wedge_{3,2} B)$.

3. В логике $\mathbb{K}_1$ невыразимы остальные, поскольку в ней любая формула, где одна из переменных есть $\bot$, имеет значение $\bot$, а любая формула, где одна из переменных есть u, имеет значение u либо $\bot$.

В логике $\mathbb{K}_2$ невыразима $\mathbb{K}_{3,2}$, поскольку в ней любая формула, где одна из переменных есть $\perp$, имеет значение $\perp$.
Логика $\mathbb{K}_3$ взаимно невыразима с остальными, поскольку в $\mathbb{K}_3$, если первая переменная в формуле имеет значение $\mathfrak{u}$, то вся формула имеет значение $\mathfrak{u}$. Предположим, что некоторая формула $\mathfrak{A}[A, B]$ выражает в $\mathbb{K}_3$ $(A \vee_2 B)$. Если $A = \mathfrak{t}, B = \mathfrak{u}$, то значение $\mathfrak{A}[A, B] = \mathfrak{t}$, и первой буквой в $\mathfrak{A}[A, B]$ является A. Но тогда в $\mathfrak{A}[B, A]$ первой буквой является B, и ее значение равно $\mathfrak{u}$ вместо $\mathfrak{t}$.

4. В позитивных фрагментах невыразима ни одна функция, не принимающая значения $\mathfrak{t}$. Такова $\neg(A \supset_i A)$.

5. Поскольку если значение всех пропозициональных букв $\mathfrak{u}$, то значение всей формулы $\mathfrak{u}$, а если все значения букв булевы, то значение всей формулы булево, ни одна формула не может быть константой.

6. Легко следует из остальных. ■

Помимо логик Клини, нам понадобятся импликации Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$ и Гёделя $\mathbf{G}_3$ [Карпенко, 2010, с. 121]. Их четырехзначные пополнения обозначим[3] через $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A \supset_L B & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \perp \\ \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \perp \\ \mathfrak{f} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} \\ \mathfrak{u} & \mathfrak{t} & \mathfrak{u} & \mathfrak{t} & \perp \\ \perp & \perp & \perp & \perp & \perp \end{array} \tag{11}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A \supset_R B & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \perp \\ \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \perp \\ \mathfrak{f} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} \\ \mathfrak{u} & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{t} & \perp \\ \perp & \perp & \perp & \perp & \perp \end{array} \tag{12}$$

Возникают также две интересные модификации импликации Гёделя R_* (33) и $R^\star$ (34), порождаемые оператором $\mathbf{if}_4$. Их таблицы истинности даны в параграфе, посвященном этому оператору.

Импликация Гёделя оказывается с вычислительной точки зрения плохо совместима со стандартным отрицанием и порождает свое:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \perp \\ \neg_R A & \mathfrak{f} & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \perp \end{array} \tag{13}$$

[3] Наше четырехзначное пополнение не совпадает с четырехзначной логикой Гёделя $\mathbf{G}_4$. Поэтому для него принято другое обозначение.

Добавление констант — нетривиальная операция для всех логик. В частности, новой является одноместная функция $A \vee U$.

3. Варианты вычисления условных операторов

Рассмотрим различные операторы работы с условиями в присутствии ошибок. Поскольку рассматривается лишь процесс вычисления, получившиеся значения будем обозначать константами. В дальнейших определениях три простейших случая, когда условие дает определенный результат или крах, совпадают, поэтому мы их выпишем однократно:

$$\begin{aligned} &\mathbf{if}\ \bot\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi} = \bot;\\ &\mathbf{if}\ T\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi} = B;\\ &\mathbf{if}\ F\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi} = C. \end{aligned} \tag{14}$$

3.1. Стандартный условный оператор

Стандартный условный оператор — $\mathbf{if}_1\ A\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_1$. Если A имеет значение T, то вычисляется B, если значение F — C; если U либо $\bot$, то альтернативы не вычисляются и значение есть, соответственно, U или $\bot$. Таким образом, любая ошибка может быть обойдена, если она в невычисляемой альтернативе, но даже мягкая ошибка в условии неустранима.

$$\mathbf{if}_1\ U\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_1 = U.$$

Оператор $\mathbf{if}_1$ в денотационной семантике интерпретируется как работающий на множестве S_2.

3.2. Сибирский условный оператор

Новосибирская школа ВЦ СО АН СССР предложила в начале 1980-х годов оператор[4] $\mathbf{if}_2\ A\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_2$. Он вычисляется параллельно. Если в обеих альтернативах получается одно и то же значение, вычисление заканчивается и оно выдается. Это даже сильнее формального определения. Если в условии одна из распространенных мягких ошибок — зацикливание или слишком большая длительность вычислений, то оно может быть прервано не досчитанным до конца, даже если конец — крах. Но рассчитывать, что в таком случае может быть обойден крах в условии, невозможно, он чаще всего произойдет раньше, чем будут просчитаны до конца обе альтернативы. Таким образом, отбросив случай обработки незавершенных вычислений, получаем следующее определение — $\mathbf{if}_2$.

[4]Не смог найти ссылку на это. Препринт ВЦ СОАН, где это было опубликовано, давно потерялся.

Определение 2. Сибирский условный оператор «параллельный **if**».

a) $\mathbf{if}_2\ U\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_2 = \bot$, если хоть одно из B, C есть $\bot$; этот пункт применяется раньше последующих;

b) $\mathbf{if}_2\ U\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_2 = U$, если хоть одно из B, C есть U; этот пункт применяется раньше последующих;

c) $\mathbf{if}_2\ U\ \mathbf{then}\ T\ \mathbf{else}\ F\ \mathbf{fi}_2 = U$;

d) $\mathbf{if}_2\ U\ \mathbf{then}\ F\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}_2 = U$;

e) $\mathbf{if}_2\ U\ \mathbf{then}\ T\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}_2 = T$;

f) $\mathbf{if}_2\ U\ \mathbf{then}\ F\ \mathbf{else}\ F\ \mathbf{fi}_2 = F$.

Этот оператор, как и все последующие, непрерывен лишь в S_1.

3.3. Максимальный условный оператор

Рассмотрим еще одну разновидность условного оператора, связанную со стратегией как можно более агрессивной обработки мягкой ошибки в ситуациях, когда она является скорее отметкой подозрительной либо не до конца разрешенной ситуации. Применим семантику с интерпретациями $\mathfrak{u}$ как $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$, а $\bot$ как логический провал $\varnothing$. Она соответствует вычислениям при решении трудных либо неразрешимых задач [Marché, Zantema, 2007; de Angelis, Govind, 2024], в частности, при их организации как распределенных вычислений. Она также использована для управления по неудачам в вычислениях, управляемых переполнениями [Непейвода, 2017]. В этих случаях логично принять решение: если при неопределенности условия одно и то же значение встречается в обеих альтернативах, оно встречается и в результате. И если таковое единственно, то результат полностью определен.

Определение 3. Максимальный условный оператор «однозначный **if**».

a) $\mathbf{if}_3\ U\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_3 = \bot$, если хоть одно из B, C есть $\bot$;

b) $\mathbf{if}_3\ U\ \mathbf{then}\ T\ \mathbf{else}\ F\ \mathbf{fi}_3 = U$;

c) $\mathbf{if}_3\ U\ \mathbf{then}\ F\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}_3 = U$;

d) $\mathbf{if}_3\ U\ \mathbf{then}\ T\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}_3 = T$;

e) $\mathbf{if}_3\ U\ \mathbf{then}\ F\ \mathbf{else}\ F\ \mathbf{fi}_3 = F$;

f) $\mathbf{if}_3\ U\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ U\ \mathbf{fi}_3 = B$;

g) $\mathbf{if}_3\ U\ \mathbf{then}\ U\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_3 = C$.

3.4. Оптимистичный условный оператор

В этом случае первый попавшийся после констатации отсутствия решения определенный результат принимается.

Определение 4. Оптимистичный условный оператор «прологовский **if**».
а) $\mathbf{if}_4\ U\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_4 = B$, если B не есть U.
б) $\mathbf{if}_4\ U\ \mathbf{then}\ U\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_4 = C$.

Отдельного пункта насчет $\bot$ не нужно. Видно, что этот вид условного оператора легче реализуется, чем два предыдущих, поэтому он распространен в современном программировании, в частности, при управлении по неудачам в Прологе [Bratko, 2012].

Утверждение 2. Для всех $\mathbf{if}_i$ неопределимы логические константы. Более того, ни одна константа не определима через остальные.

Очевидно из рассмотрения определений операторов.

4. Логические эффекты вычислений

4.1. Общий случай

Поскольку ни один из условных операторов не позволяет определить константы либо одну логическую константу через остальные, мы рассматриваем по умолчанию определимость в базисах $\mathbf{if}_i, T, F, U, \bot$. Для сокращения и упрощения скобочной структуры вместо **else if** ... **fi fi** пишем **elif** ... **fi**.

Заметим, что $\vee$ и $\wedge$ определимы без использования констант:

$$\begin{gathered} A \vee B \leftarrow \mathbf{if}\ A\ \mathbf{then}\ A\ \mathbf{else}\ B\ \mathbf{fi}, \\ A \wedge B \leftarrow \mathbf{if}\ A\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ A\ \mathbf{fi}. \end{gathered} \tag{15}$$

Для отрицания и импликации константы необходимы:

$$\begin{gathered} A \supset B \leftarrow \mathbf{if}\ A\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}, \\ \neg A \leftarrow \mathbf{if}\ A\ \mathbf{then}\ F\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}. \end{gathered} \tag{16}$$

В программировании предпочитают определить $\vee$ и $\wedge$ также через константы, что немного эффективнее с точки зрения вычислений:

$$\begin{gathered} A \vee B \leftarrow \mathbf{if}\ A\ \mathbf{then}\ T\ \mathbf{else}\ B\ \mathbf{fi}, \\ A \wedge B \leftarrow \mathbf{if}\ A\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ F\ \mathbf{fi}. \end{gathered} \tag{17}$$

Утверждение 3. Для всех $\mathbf{if}_i$ определимы в фрагменте $\{T, F, \bot\}$ трехзначные логики $\mathbb{K}_1$ и $\mathbb{K}_3$ и неопределима сильная логика $\mathbb{K}_2$. В $\mathbf{if}_1$ определимость в фрагменте $\{T, F, U\}$ такая же.

Доказательство. Логика $\mathbb{K}_1$ требует модификации определений (15) и импликации:

$$\begin{aligned} A \wedge B &= \textbf{if } A \textbf{ then } B \textbf{ elif } B \textbf{ then } A \textbf{ else } A \textbf{ fi}, \\ A \vee B &= \textbf{if } A \textbf{ then if } B \textbf{ then } A \textbf{ else } A \textbf{ fi else } B \textbf{ fi}, \\ A \supset B &= \textbf{if } A \textbf{ then } B \textbf{ elif } B \textbf{ then } T \textbf{ else } T \textbf{ fi}. \end{aligned} \tag{18}$$

Логика $\mathbb{K}_3$ определяется как (15) и (16).

Фрагмент $\{T, F, \bot\}$ для всех операторов один и тот же. Неопределимость $\mathbb{K}_2$ доказывается тем, что в первом исполняемом условии $\bot$, а в $\mathbf{if}_1$ также U, обойти невозможно.

■

4.2. j-функции

Один из главных инструментов последующего анализа — модифицированные j_x функции Россера–Тюркетта [Rosser, Turquette, 1952; Карпенко, 2010].

Определение 5. Логическая функция выделения значения $j_x(A)$ равна $\bot$ на $\bot$, $\mathfrak{t}$ на x и $\mathfrak{f}$ на двух остальных значениях.

Теорема 1 (Свойства j-функций)**.**
1. Во всех $\mathbf{if}_i$ *все* $j_x(A)$ *определимы друг через друга.*
2. В $\mathbf{if}_1$ *и* $\mathbf{if}_2$ $j_x(A)$ *не определимы.*
3. В $\mathbf{if}_3$ *и* $\mathbf{if}_4$ *все* $j_x(A)$ *определимы.*
4. Любая непрерывная функция четырехзначной логики определима через $\mathbf{if}_i$ *и функцию* $j_U(A)$*.*

Доказательство. Поскольку j-функции не принимают значение $\mathfrak{u}$, преобразования их для всех видов условных операторов одинаковы, и пишутся без индексов.

1. Определим j_x через j_U:

$$\begin{cases} j_T(A) \leftarrow & \textbf{if } \neg j_U(A) \textbf{ then } A \textbf{ else } F \textbf{ fi} \\ j_F(A) \leftarrow & \textbf{if } \neg j_U(A) \textbf{ then } \neg A \textbf{ else } F \textbf{ fi} \end{cases}. \tag{19}$$

И наоборот, выразим j_U через каждое из j_x:

$$j_U(A) = \neg j_T(A) \wedge \neg j_T(\neg A), \tag{20}$$

$$j_U(A) = \neg j_F(A) \wedge \neg j_F(\neg A). \tag{21}$$

2. Согласно предыдущему пункту, достаточно доказать неопределимость j_U. Сформулируем инвариант.

В $\mathbf{if}_1$ и $\mathbf{if}_2$, если выражение $\mathbb{A}$ от одной логической переменной таково, что $\mathbb{A}[U] = T$, то $\mathbb{A}[A] = T$ при всех $A \neq \bot$.

Для доказательства достаточно рассмотреть элементарные выражения, содержащие A, тогда как для более сложных все будет выполнено по индукции.

В $\mathbf{if}_1$ равенством из условия обладают лишь два выражения: $\mathbf{if}\ T\ \mathbf{then}\ T\ \mathbf{else}\ A\ \mathbf{fi}$ и $\mathbf{if}\ F\ \mathbf{then}\ A\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}$, где заключение очевидно.

В $\mathbf{if}_2$ к ним добавляется $\mathbf{if}\ A\ \mathbf{then}\ T\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}$, для него заключение тоже очевидно.

Пункт 2 доказан.

3. Достаточно определить j_U. Определение одинаково для обоих операторов, поэтому индексы опущены.

$$j_U(A) \leftarrow \mathbf{if}\ \mathbf{if}\ A\ \mathbf{then}\ \neg A\ \mathbf{else}\ A\ \mathbf{fi}\ \ \mathbf{then}\ T\ \mathbf{elif}\ A\ \mathbf{then}\ \neg A\ \mathbf{else}\ A\ \mathbf{fi}. \tag{22}$$

Но в $\mathbf{if}_4$, поскольку обычным образом определяемое отрицание стало $\neg_R A$, нужно построить стандартное отрицание. Легче всего это сделать, сначала определив $j_T(A)$ и $j_F(A)$, заодно упрощается определение $j_U(A)$:

$$\begin{aligned} j_T(A) &\leftarrow\ \mathbf{if}\ U\ \mathbf{then}\ A\ \mathbf{else}\ F\ \mathbf{fi}, \\ j_F(A) &\leftarrow \neg_R(A), \\ j_U(A) &\leftarrow\ \mathbf{if}\ j_T(A)\ \mathbf{then}\ F\ \mathbf{elif}\ j_F(A)\ \mathbf{then}\ F\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}, \\ \neg A &\leftarrow\ \mathbf{if}\ j_T(A)\ \mathbf{then}\ F\ \mathbf{elif}\ j_F(A)\ \mathbf{then}\ T\ \mathbf{else}\ U\ \mathbf{fi}. \end{aligned} \tag{23}$$

4. Для построения общей логической функции по ее истинностной таблице воспользуемся j_x-функциями. Обобщим j_x-функцию на вектор истинностных значений. Функция $j_{\vec{x}}$ представляет собой конъюнкцию $j_V(x_i)$ для всех элементов вектора $\vec{x}$, равных $\mathfrak{v}$, для всех $\mathfrak{v} \in \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}\}$. По определению конъюнкция нуля членов есть ложь. Тем самым на любом векторе $\vec{y}$, образующемся из $\vec{x}$ заменой $\bot$ на значения из $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}\}$, она равна $\mathfrak{t}$, а на остальных векторах значений — $\mathfrak{f}$. Такое решение принято, поскольку мы рассматриваем лишь непрерывные логические функции, и на таких $\vec{y}$ не равное $\bot$ значение будет тем же. А с вычислительной точки зрения избегаем проверки значений, которые дадут $\bot$.

Пусть $\varphi(\vec{x})$ — логическая функция. Перечислим в некотором порядке все векторы значений переменных $\vec{a}^i, i = 1,\ \ldots,\ m$, где $\varphi(\vec{a}^i)$ не принимает значение $\bot$; через $\mathfrak{v}_i$ обозначим соответствующие значения φ.

$$\varphi(\vec{x}) \leftarrow \mathbf{if}\ j_{\vec{a}^1}(\vec{x})\ \mathbf{then}\ \mathfrak{v}_1\ \mathbf{elif}\ \ldots\ \mathbf{elif}\ j_{\vec{a}^m}(\vec{x})\ \mathbf{then}\ \mathfrak{v}_m\ \mathbf{elif}\ \bot\ \mathbf{fi}. \tag{24}$$

Пункт 4 доказан. ■

4.3. Сравнение силы разных if

Из пункта 4 теоремы 1 следует, что и через $\mathbf{if}_3$, и через $\mathbf{if}_4$ выражаются все функции, в том числе остальные $\mathbf{if}_i$, а из пункта 2, что $\mathbf{if}_1$ и $\mathbf{if}_2$ слабее. Поэтому остается установить отношения между первыми двумя операторами.

Утверждение 4. Операторы $\mathbf{if}_1$ и $\mathbf{if}_2$ не выражаются друг через друга.

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}[A,B,C]$ есть выражение $\mathbf{if}_2$, такое, что $\mathbb{A}[\mathfrak{u},\perp,\perp] = \mathfrak{u}$. Покажем, что оно может быть преобразовано к эквивалентной форме, в которой не встречаются B,C.

Первое преобразование (14) одинаково для всех $\mathbf{if}_i$. После него все условные выражения начинаются с A,B,C,U либо составного условного выражения. Эту форму зафиксируем как $\mathbb{A}^*$ и проведем дальнейшие преобразования в частном случае $\mathfrak{u},\perp,\perp$.

Пользуясь (14), заменим все выражения, начинающиеся с B,C, на $\perp$. Теперь B,C могут стоять лишь в альтернативах. Далее, заменяем все условные операторы, начинающиеся с U либо A, в какой-либо альтернативе которых стоит одно из $B,C,\perp$, на $\perp$, поскольку в $\mathbf{if}_2$ оператор со значением условия U в одной из альтернатив которого стоит $\perp$, дает $\perp$. Повторяя эти операции, превращаем любое выражение $\mathbb{A}^*$, в котором осталось хоть одно из B,C в $\perp$, чего не может быть по предположению.

Невыразимость $\mathbf{if}_1$ в $\mathbf{if}_2$ доказана.

Пусть $\mathbb{A}[A,B,C]$ есть выражение $\mathbf{if}_1$, претендующее на роль

$$\mathbf{if}_2\ A\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_2.$$

Проведем преобразование по правилам (14) и дополнительному, специфическому для $\mathbf{if}_1$, правилу эквивалентности

$$\mathbf{if}\ U\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi} = U.$$

После этого в полученной эквивалентной форме $\mathbb{A}^\star$ не остается условных выражений, начинающихся с константы. Рассмотрим три случая. Если получившееся выражение начинается с A, то при $A = \mathfrak{u}$ все оно превращается в U, так как условия постепенно им становятся, а далее, независимо от значений альтернатив, будет U. Если начинается с B, то аналогично, при $B = \perp$ все превращается в $\perp$, что не соответствует определению $\mathbf{if}_2$. Аналогично для C.

Невыразимость $\mathbf{if}_2$ в $\mathbf{if}_1$ доказана. ■

Отметим вычислительную интерпретацию значения $\mathfrak{u}$ в $\mathbf{if}_1$, некорректную для последующих вариантов. $\mathbf{if}_1$ может пониматься как проверка возможности закончить вычисления быстро, и тогда $\mathfrak{u}$ означает, что вычисления продолжаются нормально. Крах $\perp$ тогда интерпретируется как ошибочный счет или же ошибка и завершение программы. В частности, такова стратегия обработки результатов в соревнованиях по решению неразрешимых задач [Marché, Zantema, 2007; de Angelis, Govind, 2024], где безжалостно карается ошибка, но не наказывается отказ от решения некоторого конкретного случая.

Уникальное свойство $\mathbf{if}_1$ приводит к следующему результату.

Утверждение 5. $\mathbf{if}_1$ невыразим через остальные $\mathbf{if}_i$ без констант.

Доказательство. Согласно определению,

$$\mathbf{if}_1\ U\ \mathbf{then}\ \perp\ \mathbf{else}\ \perp\ \mathbf{fi}_1 = U.$$

Для всех других $\mathbf{if}_i$ получить что-то, кроме $\perp$, выражением, использующим все три переменные A, B, C при их значениях $U, \perp, \perp$ невозможно. Докажем это индукцией по построению. Инвариант индукции: если в выражении встречается B или C, то его значение — $\perp$.

Если выражение есть просто B или C, то инвариант тривиален, и базис индукции доказан. В случае, если в каком-то подвыражении B либо C оказывается в первом условии, то все это подвыражение есть $\perp$. Значит, достаточно рассмотреть в индукционном переходе лишь выражения, у которых в условии стоит A. Но тогда, если в выражении

$$\mathbf{if}_1\ A\ \mathbf{then}\ \mathbb{B}\ \mathbf{else}\ \mathbb{C}\ \mathbf{fi}_1$$

в одном из $\mathbb{B}, \mathbb{C}$ встречаются B, C, то по предположению индукции его значение — $\perp$. Пусть это $\mathbb{B}$. Тогда при вычислении возникает один из двух случаев:

$$\mathbf{if}_i\ U\ \mathbf{then}\ \perp\ \mathbf{else}\ U\ \mathbf{fi}_i, \qquad \mathbf{if}_i\ U\ \mathbf{then}\ \perp\ \mathbf{else}\ \perp\ \mathbf{fi}_i.$$

Но оба этих случая при любом i, кроме 1, дают $\perp$.

Случай $\mathbb{C}$ рассматривается симметрично. ■

Перейдем к рассмотрению логик, порождаемых условными операторами.

4.4. Стандартный if

Четырехзначная логика $\mathbf{if}_1$ совпадает с lisp-логикой $\mathbb{K}_3$, поскольку $\mathbf{if}_1$ определим в $\mathbb{K}_3$:

$$\mathbf{if}_1\ A\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_1 \leftarrow (A \supset_3 B) \wedge_3 (\neg A \supset_3 C). \tag{25}$$

4.5. Сибирский if

Логические возможности оператора $\mathbf{if}_2$ богаче. Он порождает любопытную четырехзначную импликацию, соединяющую в себе возможности двух логик Клини.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A/B & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \bot \\ \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \bot \\ \mathfrak{f} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} \\ \mathfrak{u} & \mathfrak{t} & \mathfrak{u} & \mathfrak{u} & \bot \\ \bot & \bot & \bot & \bot & \bot \end{array} \tag{26}$$

Утверждение 6. В $\mathbf{if}_2$ определимы логики $\mathbb{K}_2$ и $\mathbb{K}_{3,2}$.

Доказательство.
Логика $\mathbb{K}_{3,2}$ определяется как (17) и (16). Логика $\mathbb{K}_2$ определяется через $\mathbb{K}_{3,2}$. ■

Пополнение константами сильной и lisp-логики нетривиально. Оно позволяет определить новую связку, соответствующую надежным вычислениям путем дублирования. Дадим ее определение через $\mathbf{if}_2$ и через сильную клиниевскую логику с константами (напомним, что $\wedge_1$ определим в $\mathbb{K}_2$):

$$A \parallel B \quad \leftarrow \quad \mathbf{if}_2\ U\ \mathbf{then}\ A\ \mathbf{else}\ B\ \mathbf{fi}_2 \tag{27}$$
$$A \parallel B \quad \leftarrow \quad ((A \wedge_2 B) \vee_2 (\neg A \wedge_2 \neg B) \vee_2 U) \wedge_1 A. \tag{28}$$

Таблица истинности этой связки

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A \parallel B & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \bot \\ \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{u} & \mathfrak{u} & \bot \\ \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \bot \\ \mathfrak{u} & \mathfrak{u} & \mathfrak{u} & \mathfrak{u} & \bot \\ \bot & \bot & \bot & \bot & \bot \end{array} \tag{29}$$

Через нее очевидным образом определяется связка, соответствущая n-кратному дублированию счета, например, трехкратный счет: $A \parallel (B \parallel C)$, и связки, соответствующие голосованию, например, 2 из 3:

$$V(A,B,C) \leftarrow (A \parallel B) \vee_2 (A \parallel C) \vee_2 (C \parallel B). \tag{30}$$

Существенно, что дизъюнкция берется в версии сильной клиниевской логики.

4.6. Максимальный if

Интересен и богат с логической точки зрения оператор $\mathbf{if}_3$.

Утверждение 7. Логика Лукасевича Ł_3 определима в фрагменте $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}\}$.

Доказательство. Определение расширенной импликации Лукасевича то же, что и у импликаций для ранее рассмотренных операторов.

$$A \supset_L B \leftarrow \ \mathbf{if}_3\ A\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}_3.$$

Ее таблица истинности приведена ранее (11).

Остальные связки также определяются стандартно с константами. Как показано в [Томова, 2010], добавление импликации Лукасевича к логике Клини порождает полную логику Лукасевича.

■

Замечание 1. Выразимость в $\mathbf{if}_3$ с константами равносильна логике Лукасевича с константами.

4.7. Агрессивный if

$\mathbf{if}_4$ соответствует дисциплине последовательного выполнения, где $\mathfrak{u}$ понимается как отсутствие определенного решения, а не как ошибка. Первым вычисляется A, если оно дало решение, без дальнейших вариантов вычисляется соответствующая альтернатива. Если решения не нашлось, вычисляется B, если и оно не дало решения, то C. Он выразим[5] через $\mathbf{if}_3$:

$$\mathbf{if}_4 \leftarrow \mathbf{if}_3\ \neg j_U(A)\ \mathbf{then}\ \mathbf{if}_3\ A\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \ \mathbf{fi}_3\ \mathbf{elif}_3\ \neg j_U(B)\ \mathbf{then}\ B\ \mathbf{else}\ C\ \mathbf{fi}_3. \tag{31}$$

Отрицание $\neg_4 A \leftarrow \mathbf{if}_4\ A\ \mathbf{then}\ F\ \mathbf{else}\ T\ \mathbf{fi}_4$ имеет нестандартную таблицу истинности:

A	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$	$\perp$
$\neg_4 A$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\perp$

Таким образом, $\neg_4 A$ есть заодно $\neg_R$ и j_F.

Отдельного рассмотрения требует импликация в связи с агрессивностью $\mathbf{if}_4$ и двумя естественными вариантами отрицания.

[5]Стандартное отрицание пишется без индекса.

В логиках всех остальных операторов стандартно определяемая (16) импликация имеет ту же таблицу истинности, что и

$$A \supset B \leftarrow \mathbf{if}\ \neg A\ \mathbf{then}\ T\ \mathbf{else}\ B\ \mathbf{fi}. \qquad (32)$$

Рассмотрим импликации, порождаемые разными отрицаниями и разными определениями, в логике $\mathbf{if}_4$. Импликация (16) не зависит от выбранного отрицания и имеет таблицу истинности импликации Гёделя (12). Импликация (32) существенно зависит от отрицания. Если ее задать через стандартное отрицание, определенное для этого оператора в (23), то получается следующая таблица истинности:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A \supset_{R_*} B & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \perp \\ \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \perp \\ \mathfrak{f} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} \\ \mathfrak{u} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} \\ \perp & \perp & \perp & \perp & \perp \end{array} \qquad (33)$$

Если же ее определить через $\neg_4 A$, то она дает другую связку:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A \supset_{R^\star} B & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \perp \\ \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{u} & \perp \\ \mathfrak{f} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} & \mathfrak{t} \\ \mathfrak{u} & \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{t} & \perp \\ \perp & \perp & \perp & \perp & \perp \end{array} \qquad (34)$$

Для логик, порождаемых операторами $\mathbf{if}_i$, полной системой связок является совокупность соответствующих стандартных импликации, отрицания и констант. Это следует из результатов [Томова, 2010].

Остановимся на взаимосвязи наших систем с четырехзначными семантиками Белнапа и Данна [Anderson et al., 2017]. У нас в некотором смысле выделенных значений два: $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$, которые являются определенными управляющими сигналами. Значение $\mathfrak{u} = \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$ не переопределенное, а недоопределенное. Решетки значений нет, есть лишь стандартная скоттовская полурешетка $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}\}_\perp$.

5. Дальнейшие задачи и приложения

В статье [Непейвода, 2017] было рассмотрено применение логики оператора $\mathbf{if}_1$ для формализации свойств вычислений, приводящих к выходу за пределы допустимой области значений. При этом операции первоначально определены без учета ограниченности области допустимых значений, и требуется дать аппарат для проверки сохранения их свойств при вычислениях с переполнениями. Поскольку результат применения функции над аргументами внутри области может привести к выходу за пределы, основным понятием становится не истина, а справедливость: сохранение алгебраических преобразований на вычислениях, давших переполнение [Коржавина, Князьков, 2019b; Коржавина, Князьков, 2019a].

В этих статьях было показано, что с вычислительной точки зрения в четырехзначной lisp-логике предикатов $\mathfrak{u}$ и $\perp$ различаются, и вычислительная интерпретация кванторов, где подкванторное выражение принимает все четыре значения, приводит к ситуации истинностного провала (logical gap). Это с логической точки зрения следствие нерегулярности логики (операции некоммутативны).

Четырехзначная логика первоначально появилась в формализации вычислений, управляемых неудачами (переполнениями, ошибками и т.п.) почти эмпирически. Когда стала ясна ее полезность, возник вопрос о логических свойствах, которые помогли этому. Логические статьи ответа на этот вопрос не дали, основаниями у логик были соображения о понимании расплывчатых аргументов философов или описания интересных с внутренней точки зрения логической науки математических моделей.

Здесь удалось пройти от дисциплин вычисления к порождаемым логикам. На самом деле это лишь один из примеров, какие широкие логические возможности открываются при анализе феноменов информатики, если действовать нестандартно. И заодно, какое устойчивое основание они могут давать неклассическим логикам. Например, появилась вычислительная интерпретация логики Лукасевича как логики описания процессов с обработкой ошибок, в отличие от логик Клини, где рассматривается лишь вопрос обхода ошибок.

Выяснилась фундаментальная роль логических констант, и возникает общая задача: проверка соотношений между логиками без констант. Случай $\mathbf{if}_1$ показал, что они могут быть другими.

Стало ясно, что как фундамент для вычислительных моделей операторы $\mathbf{if}_2, \mathbf{if}_3, \mathbf{if}_4$ дают более сильную систему рекурсивных схем над вычислениями с неудачами и ошибками, чем стандартный условный оператор. Это требует дальнейших исследований. Требуется исследование логики предикатов, основанной на этих операторах, и заодно выяснение, не расходятся ли на логике предикатов эквивалентные в логике высказываний операторы $\mathbf{if}_3, \mathbf{if}_4$.

Интересен тот случай, когда четырехзначной логикой не обойтись: логика условных операторов с обработкой незавершенных вычислений. Но здесь не обойтись и пятизначной. Так что дополнительно возникает вопрос о разумном пятом значении.

Очевидно, что наши операторы дают дисциплины для параллельных и особенно распределенных вычислений, это также вопрос дальнейших исследований и приложений.

Литература

Карпенко, 2010 – *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2013. 444 с.

Комендантская, 2009 – *Комендантская Е.Ю.* Функциональная взаимовыразимость регулярных логик Клини // Логические исследования. 2009. № 15. С. 116–128.

Коржавина, Князьков, 2019a – *Коржавина А.С., Князьков В.С.* Метод умножения с масштабированием результата для высокоточных модулярно-позиционных интервально-логарифмических вычислений // Инженерные технологии и системы. 2019. Т. 29. № 2. С. 187–204.

Коржавина, Князьков, 2019b – *Коржавина А.С., Князьков В.С.* Реализация высокоточных вычислений в базисе модулярно-интервальной арифметики // Программные системы: теория и приложения. 2019. Т. 10. № 3 (42). С. 81–127.

Митчелл, 2010 – *Митчелл Дж.* Основания языков программирования. М.; Ижевск: R&C Dynamics, 2010. 719 с.

Непейвода, 2017 – *Непейвода Н.Н.* Использование локализации и переполнения для управления параллельными и распределенными вычислениями // Программные системы: теория и приложения. 2019. Т. 8. № 3 (4). С. 87–107.

Томова, 2010 – *Томова Н.Е.* Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования. 2010. № 16. С. 233–258.

Anderson et al., 2017 – *Anderson A.R., Dunn J.M., Belnap N.D.* Entailment, Vol. II: The Logic of Relevance and Necessity. Princeton: Princeton University Press, 2017.

Arieli, Avron, 2015 – *Arieli O., Avron A.* Three-Valued Paraconsistent Propositional Logics // New Directions in Paraconsistent Logic / Ed. by J.-Y. Béziau et al. New Delhi: Springer India, 2015. P. 91–129.

Barendregt, 1984 – *Barendregt H.P.* The lambda calculus. Its syntax and semantics. Revised edition. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol. 103. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1984.

Bratko, 2012 – *Bratko I.* Prolog programming for artificial intelligence (4th ed.). Harlow, England; New York: Addison Wesley, 2012.

Carayol, Serre, 2021 – *Carayol A., Serre O.* Higher-order recursion schemes and their automata models // Pin J.-É. (ed.). Handbook of Automata Theory, 2, European Mathematical Society. 2021. P. 1295–1341. URl: `https://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440/18746/2/02whole.pdf` (дата обращения: 14.03.2025).

Clarke, 1979 – *Clarke E.M.* Programming Language Constructs for Which It Is Impossible To Obtain Good Hoare Axiom Systems // Journal of the ACM. 1979. Vol. 26. Iss. 1. P. 129–147.

de Angelis, Govind, 2024 – *de Angelis E., Govind H.V.K.* CHC-COMP 2023: Competition Report // EPTCS 402. 2024. P. 83–104. URL: `https://arxiv.org/pdf/2404.14923v1` (дата обращения: 14.03.2025).

Ford, 2020 – *Ford N.* Distributed systems // Fundamentals of Software Architecture: An Engineering Approach (1st ed.). Sebastopol: O'Reilly Media, 2020. P. 146–147.

Marché, Zantema, 2007 – *Marché C., Zantema H.* The Termination Competition // Term Rewriting and Applications. New York: Springer, 2007. P. 303–313.

McCarthy, 1963 – *McCarthy J.* A Basis for a Mathematical Theory of Computation // Computer Programming and Formal Systems. 1963. Vol. 35. P. 33–70.

Meijer et al., 1991 – *Meijer E., Fokkinga M.M., Paterson R.* Functional Programming with Bananas, Lenses, Envelopes and Barbed Wire // Hughes J. (ed.) Functional Programming Languages and Computer Architecture. FPCA 1991. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 523. Berlin; Heidelberg: Springer, 1991. P. 124–144.

Rosser, Turquette, 1952 – *Rosser J.B., Turquette A.R.* Many-Valued Logics. Amsterdam, North-Holland, 1952.

Scott, 1970 – *Scott D.* Outline of a Mathematical Theory of Computation // Proc. Fourth Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems. 1970. P. 169–176.

Tanenbaum, van Steen, 2002 – *Tanenbaum A.S., van Steen M.* Distributed systems: principles and paradigms. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2002.

Nikolai N. Nepejvoda

Logics of conditional computations with errors

Nikolai N. Nepejvoda
Ailamazyan Program Systems Institute of RAS,
4a Petra I st., s. Ves'kovo, Pereslavskii raion, Yaroslavskaya obl., 152021, Russian Federation.
E-mail: nnn@nnn.botik.ru

Abstract: The conditional operator **if** A **then** S **else** T **fi** is a "Scheffer" for programming: McCarthy showed that computable functions can be represented as recursive schemes using conditional expressions. This approach needs to consider errors. Thus in modern computer science data types are enriched by the error $\perp$. This error is considered as fatal, but in praxis many errors are recoverable. Thus we considered recoverable error $\mathfrak{u}$ as fourth logical value and investigated logics of various disciplines to handle $\mathfrak{u}$. Another logical interpretation of $\mathfrak{u}$ is the unsolved problem $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$. This treatment of $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$ differs from usual as overdefined [Anderson et al., 2017]. Four disciplines of handling conditional statements and induced logics are considered. All they can be viewed as extensions of three-valued logics by lisp logic for fragment $\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \perp$. Logic $\mathbf{if}_1$ of standard sequential computation is an extension of lisp logic. Logic of parallel computations, where $\mathbf{if}_2\ \mathfrak{u}\ \ \mathbf{then}\ \mathfrak{x}\ \mathbf{else}\ \mathfrak{x}\ \ \mathbf{fi} = \mathfrak{x}$ is extended $\mathbf{Ł}_3$. Logic of maximal conditional when $\mathfrak{x}$ occurring in both alternatives is accepted: $\mathbf{if}_3\ \mathfrak{u}\ \ \mathbf{then}\ \mathfrak{z}\ \mathbf{else}\ \mathfrak{y}\ \ \mathbf{fi} = \mathfrak{x}$ is extended $\mathbf{G}_3$. Logic of Prolog, where $\mathbf{if}_4\ \mathfrak{u}$ is the first occurring definite value $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$ has its own implication and negation, but is equivalent to logic of $\mathbf{if}_3$. Operators $\mathbf{if}_3$ and $\mathbf{if}_4$ are logically complete: each continuous in $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}\}_\perp$ function is expressible. Operators $\mathbf{if}_1$ and $\mathbf{if}_2$ are logically incomplete and mutually inexpressible. Operators $\mathbf{if}_2$ and $\mathbf{if}_3$ induce strategies for parallel and distributed processes. $\mathbf{if}_1$ corresponds to traditional sequential programs, $\mathbf{if}_4$ corresponds to Prolog.

Keywords: four-valued logics, Kleene logics, $\mathbf{Ł}_3$, Gödel logic, computation strategies, completeness, conditional operators, error handling

For citation: Nepejvoda N.N. "Logiki uslovnyh vychislenii s oshibkami" [Logics of conditional computations with errors], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 1, pp. 24–46. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-24-46 (In Russian)

Acknowledgements. Project 125021302067-9 PSI RAS.

References

Anderson et al., 2017 – Anderson, A.R., Dunn, J.M., Belnap, N.D. *Entailment, Vol. II: The Logic of Relevance and Necessity.* Princeton: Princeton University Press, 2017.

Arieli, Avron 2015 – Arieli, O., Avron, A. "Three-Valued Paraconsistent Propositional Logics", in: *New Directions in Paraconsistent Logic*, ed. by J.-Y. Béziau et al. New Delhi: Springer India, 2015, pp. 91–129.

Barendregt, 1984 – Barendregt, H.P. *The lambda calculus. Its syntax and semantics. Revised edition. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 103.* Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1984.

Bratko, 2012 – Bratko, I. *Prolog programming for artificial intelligence (4th ed.).* Harlow, England; New York: Addison Wesley, 2012.

Carayol, Serre, 2021 – Carayol, A., Serre, O. "Higher-order recursion schemes and their automata models", Pin J.-É. (ed.), *Handbook of Automata Theory, 2, European Mathematical Society*, 2021, pp. 1295–1341. [`https://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440/18746/2/02whole.pdf`, accessed on 14.03.2025].

Clarke, 1979 – Clarke, E.M. "Programming Language Constructs for Which It Is Impossible To Obtain Good Hoare Axiom Systems", *Journal of the ACM*, 1979, Vol. 26, Iss. 1, pp. 129–147.

de Angelis, Govind, 2024 – de Angelis, E., Govind, H.V.K. "CHC-COMP 2023: Competition Report", *EPTCS 402*, 2024, pp. 83–104. [`https://arxiv.org/pdf/2404.14923v1`, accessed on 14.03.2025].

Ford, 2020 – Ford, N. "Distributed systems", in: *Fundamentals of Software Architecture: An Engineering Approach (1st ed.).* Sebastopol: O'Reilly Media, 2020, pp. 146–147.

Karpenko, 2010 – Karpenko, A.S. *Razvitie mnogoznachnoi logiki* [The development of multi-valued logic]. Moscow: LKI Publishers, 2013. 444 p. (In Russian)

Komendantskaya, 2009 – Komendantskaya, E.Yu. "Funktsional'naya vzaimovyrazimost' regulyarnykh logik Klini" [Functional interdependence of regular Kleene logics], *Logical investigations*, 2009, No. 15, pp. 116–128. (In Russian)

Korzhavina, Knyazkov, 2019a – Korzhavina, A.S., Knyazkov, V.S. "Metod umnozheniya s masshtabirovaniem rezul'tata dlya vysokotochnykh modulyarno-pozitsionnykh interval'no-logarifmicheskikh vychislenii" [The Multiplication Method with Scaling the Result for High-Precision Residue Positional Interval Logarithmic Computations], *Engineering Technologies and Systems*, 2019, Vol. 29, No. 2, pp. 187–204. (In Russian)

Korzhavina, Knyazkov, 2019b – Korzhavina, A.S., Knyazkov, V.S. "Realizatsiya vysokotochnykh vychislenii v bazise modulyarno-interval'noi arifmetiki" [High-precision computations using residue-interval arithmetic on FPGAs], *Program Systems: Theory and Applications*, 2019, Vol. 10, No. 3 (42), pp. 81–127. (In Russian)

Marché, Zantema, 2007 – Marché, C., Zantema, H. "The Termination Competition", in: *Term Rewriting and Applications.* New York: Springer, 2007, pp. 303–313.

McCarthy, 1963 – McCarthy, J. "A Basis for a Mathematical Theory of Computation", *Computer Programming and Formal Systems*, 1963, Vol. 35, pp. 33–70.

Meijer et al., 1991 – Meijer, E., Fokkinga, M.M., Paterson, R. "Functional Programming with Bananas, Lenses, Envelopes and Barbed Wire", in: Hughes J. (ed.), *Functional Programming Languages and Computer Architecture. FPCA 1991. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 523.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1991, pp. 124–144.

Mitchell, 2010 – Mitchell, J.C. *Osnovaniya yazykov programmirovaniya* [Foundations for Programming Languages]. Moscow, Izhevsk: R&C Dynamics, 2010. 719 p. (In Russian)

Nepejvoda, 2017 – Nepejvoda, N.N. "Ispol'zovanie lokalizatsii i perepolneniya dlya upravleniya parallel'nymi i raspredelennymi vychisleniyami" [Using overflows to control parallel and distributed computations], *Program systems: Theory and applications*, 2017, Vol. 8, No. 3 (34), pp. 87–107. (In Russian)

Rosser, Turquette, 1952 – Rosser, J.B., Turquette, A.R. *Many-Valued Logics*. Amsterdam, North-Holland, 1952.

Scott, 1970 – Scott, D. "Outline of a Mathematical Theory of Computation", *Proc. Fourth Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems*, 1970, pp. 169–176.

Tanenbaum, van Steen, 2002 – Tanenbaum, A.S., van Steen, M. *Distributed systems: principles and paradigms*. NJ, Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2002.

Tomova, 2010 – Tomova, N.E. "Implikativnye rasshireniya regulyarnykh logik Klini" [Implicative extensions of regular Kleene logics], *Logical investigations*, 2010, No. 16, pp. 233–258. (In Russian)

Логические исследования
2025. Т. 31. № 1. С. 47–73
УДК 510.644

Logical Investigations
2025, Vol. 31, No. 1, pp. 47–73
DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-47-73

Н.Е. Томова

О дуальности логических систем: паралогики

Наталья Евгеньевна Томова
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Аннотация: Статья посвящена вопросам дуальности логических систем. Паранепротиворечивые и параполные логики принято рассматривать в качестве дуальных. Поскольку в литературе системы, обладающие паранепротиворечивыми и параполными свойствами, встречаются под различными названиями, отдельно исследован вопрос терминологии. Опираясь на известные исследования, феномен дуальности паранепротиворечивых и параполных систем рассмотрен в различных аспектах: с точки зрения дедуктивного аппарата, теории логических матриц, алгебраических структур, а также относительно интуитивной, содержательной интерпретации паралогик.

Ключевые слова: паранепротиворечивая логика, параполная логика, интуиционистская логика, дуальная интуиционистская логика, дуальность

Для цитирования: *Томова Н.Е.* О дуальности логических систем: паралогики // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 1. С. 47–73. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-47-73

Настоящая статья продолжает цикл работ, связанных с исследованием паралогик — паранепротиворечивых, параполных и паранормальных систем. Паранепротиворечивые логики подходят для работы с противоречивыми контекстами, позволяя осуществлять нетривиальные выводы. Одно из принятых определений паранепроиворечивых логик — логики, в которых из противоречия не следует все, что угодно. Под параполными логиками обычно понимают системы, в которых не имеет места закон исключеннного третьего, они применимы для корректной работы в условиях недостаточности, неполноты информации.

В рамках данной статьи мы остановимся на вопросах, связанных с дуальностью логических систем в рамках класса паралогик. Паранепротиворечивые и параполные логики рассматривают в качестве таковых (см., например: [Carnielli, Rodrigues, 2016; Middelburg, 2021]). В литературе, посвященной данной тематике, понятие дуальности используется в разных смыслах. Например, Н. да Коста определяет дуальность между паранепротиворечивой логикой и интуиционистской (параполной) в том, что если в первой не имеет места закон непротиворечия, то во второй не имеет места закон исключенного третьего [Da Costa, 1974, p. 498], [Marcos, 2005b]. В. Карниелли с коллегами говорят о дуальности между этими логиками на уровне отношения следования: в паранепротиворечивой логике «из противоречия не следует все, что угодно», в интуиционистской (параполной) логике возможна ситуация, когда ни формула, ни ее отрицание не выводимы [Carnielli et al., 2020].

В статье будет показано, что дуальные системы могут быть построены различными способами, на различных основаниях. Отметим, что литература до данному вопросу достаточно обширна.

Предложенная работа носит обзорный характер. Опираясь на известные исследования, мы рассмотрим различные аспекты феномена дуальности паранепротиворечивых и параполных систем. При этом некоторые направления исследования мы рассмотрим более подробно, другие же только обозначим и укажем соответствующую литературу.

1. Определения

Для удобства восприятия материала приведем базовые определения, остальные определения при необходимости будут приведены по ходу изложения материала.

Пусть $Var = \{p, q, r \dots\}$ — счетное множество пропозициональных переменных и $Con = \{\S_1, \dots \S_n\}$ — конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке $\S_i$ сопоставлено натуральное число $a(\S_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Хотя бы для одного $i \in \{1, \dots n\}$ имеет место $a(\S_i) \neq 0$. Множество формул For определяется индуктивно стандартным образом:

(1) $Var \subseteq For$,

(2) для каждого такого $\S_i \in Con$, что $a(\S_i) = k$, $\S_i(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in For$, если $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in For$,

(3) ничто иное не принадлежит For.

Алгебру формул $\mathcal{L} = \langle For, \S_1, \dots, \S_n \rangle$ будем называть *пропозициональным языком.*

Множества формул из For называются *теориями.* Для их обозначения будем использовать символы $\mathcal{T}, \mathcal{S}$.

Отношением следования для пропозиционального языка $\mathcal{L}$ называем бинарное отношение $\vdash$ между $\mathcal{T} \subseteq For$ и $\varphi \in For$, отвечающее условиям:

- если $\varphi \in \mathcal{T}$, то $\mathcal{T} \vdash \varphi$ (рефлексивность);
- если $\mathcal{T} \vdash \varphi$ и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, то $\mathcal{T}' \vdash \varphi$ (монотонность);
- если $\mathcal{T} \vdash \varphi$ и $\mathcal{T}', \varphi \vdash \psi$, то $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \vdash \psi$ (транзитивность).

Если $\vdash$ также замкнуто относительно всех эндоморфизмов (подстановок) $\mathcal{L}$, называем такое следование *структурным*.

Если $\mathcal{L}$ — пропозициональный язык и $\vdash$ — структурное логическое следование на $\mathcal{L}$, то $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — *пропозициональная логика*. Далее, если не оговорено иное, будем рассматривать логики, заданные в стандартном языке, в котором имеются связки $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$.

Отношением следования со множественными посылками и заключениями для пропозиционального языка $\mathcal{L}$ называем бинарное отношение $\vdash$ между $\mathcal{T} \subseteq For$ и $\mathcal{S} \subseteq For$, отвечающее условиям:

- если $\mathcal{T} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$, то $\mathcal{T} \vdash \mathcal{S}$;
- если $\mathcal{T} \vdash \mathcal{S}$, где $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ и $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$, то $\mathcal{T}' \vdash \mathcal{S}'$;
- если $\mathcal{T}, \mathcal{Z}_1 \vdash \mathcal{Z}_2, \mathcal{S}$, где $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}_1 \cap \mathcal{Z}_2 = \varnothing$ ($\mathcal{Z} \subseteq For$), то $\mathcal{T} \vdash \mathcal{S}$ [Shoesmith, Smiley, 1978, p. 29].

Теория $\mathcal{T}$ *противоречива*, е.т.е. существует такая формула φ, что:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \quad \text{и} \quad \mathcal{T} \vdash \neg\varphi.$$

Теория $\mathcal{T}$ *тривиальна*, е.т.е. для любой формулы φ верно, что:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi.$$

Логическая матрица для $\mathcal{L}$ — это структура $\mathcal{M} = \langle V, f_1, \dots, f_k, D \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \dots, f_k \rangle$ алгебра того же типа, что и пропозициональный язык $\mathcal{L}$, V — множество истинностных значений и f_i — функция на V той же местности, что и $\S_i$; $D \subseteq V$ — непустое собственное подмножество V. Когда $\mathcal{M}$ — матрица для $\mathcal{L}$, гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой* $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$.

Матричное отношение следования есть множество $Cn(\mathcal{M})$ упорядоченных пар $\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle$, таких, что для всякой оценки h в $\mathcal{M}$ выполняется условие: если $h(\mathcal{T}) \subseteq D$, то $h(\varphi) \in D$.

Следованием со множественными посылками и заключениями (multiple-premises, multiple-conclusions consequence relation), порождаемым $\mathcal{M}$, называется множество $Cn_m(\mathcal{M})$ упорядоченных пар $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$, таких, что для всякой оценки h в $\mathcal{M}$ выполняется условие: если $h(\mathcal{T}_1) \subseteq D$, то $h(\mathcal{T}_2) \cap D \neq \varnothing$.

2. О терминологии

В исследованиях, посвященных проблеме дуальности логик, мы встречаемся с различной терминологией. Это, на наш взгляд, требует пояснения.

В 1975 г. Ф. Миро Кесада (по просьбе Н. да Коста) вводит термин «паранепротиворечивая логика», им же позже введен термин «параполная логика» [D'Ottaviano, Gomes, 2020][1].

В литературе прослеживается устойчивая традиция исследовать логические системы, в том или ином смысле дуальные интуиционистской логике. Дуальная интуиционистская логика была исследована с помощью семантических методов (алгебраических, реляционных) и дедуктивных (аксиоматические, секвенциальные исчисления) (см., например: [Czermak, 1977; Goodman, 1981; Urbas, 1996]).

Понятия «дуальная интуиционистская логика», «анти-интуиционистская логика» могут использоваться для определения систем с паранепротиворечивыми свойствами; параполные системы встречаются под названием «слабо интуиционистская логика», «интуиционистская логика»[2].

Концепция дуального интуиционизма впервые появляется в работах К. Поппера в 40-х гг. XX в. примерно в одно и то же время, когда независимым образом зарождается представление о паранепротиворечивости — первые системы паранепротиворечивых логик появляются в 1940–1960-е гг.[3]

К. Поппер[4] поддерживал идею, что фальсификация некоторого суждения как эпистемический шаг к его опровержению — это не то же самое, что предположение о ложности суждения, и согласно [Carnielli et al., 2007], по-видимому, это соображение привело его к мысли о паранепротиворечивой логике, дуальной интуиционистской[5], хотя позже и отвергнутой им как слишком слабой, чтобы быть полезной.

Как указано в [Ibid., p. 83], те, кто развивал дуальный интуиционизм, с одной стороны, и идею паранепротиворечивости, с другой, независимым

[1] О вопросах, связанных с определением паранепротиворечивых и параполных логик, см.: [Томова, 2022; Томова, 2023].

[2] Если говорить об отличии интуиционистской логики от параполной, то хотя обе программы предполагают, что в соответствующих логических системах отсутствует закон исключенного третьего (или соответствующее ему правило вывода), но программа интуиционизма более требовательна в том смысле, что, например, также предполагает отказ от закона двойного отрицания.

[3] В 1948 г. С. Яськовский построил первую систему не-адъюнктивной паранепротиворечивой логики $\mathbf{D}_2$ [Jaśkowski, 1969]. Независимым образом паранепротиворечивая логика была предложена в докторских диссертациях Ф. Асеньо в 1954 г. и Н. да Косты в 1963 г. [Da Costa, 1963]. Ф. Асеньо предложил первую многозначную паранепротиворечивую логику, Н. да Коста предложил систему аксиом для семейства паранепротиворечивых логик и первую кванторную систему паранепротиворечивой логики [Priest, 2002, p. 295].

[4] Более подробно об исследованиях К. Поппера по дедуктивной логике см.: [Binder et al., 2007a].

[5] К.Дж. Коэн разработал эту систему в виде секвенциального исчисления [Binder et al., 2007a, p. 17].

друг от друга образом осознали то, что должна существовать логика рассуждения из гипотез, допускающая в определенных случаях утверждения и их отрицания как истинные (в случае паранепротиворечивости) или допускающая утверждения и их отрицания в качестве неопровержимых (в случае фальсификационизма). О паранепротиворечивом характере логики фальсификационизма см.: [Shramko, 2005][6]. Здесь же высказано предположение, что параполная логика также может иметь общие методологические основания с концепцией верификационизма в методологии науки.

Интересен тот факт, что впервые вопрос о построении логики, дуальной интуиционистской, возникает одновременно с задачей формализации самой интуиционистской логики.

Формализация интуиционистской логики была предложена А. Гейтингом в ответ на конкурсное задание Г. Маннури, предложенное им в 1927 г. и которое во второй своей части содержало задание дуализации полученной системы:

> «...Предлагается
>
> 1. построить логическую систему, которая, насколько это возможно, отражает идеи Брауэра;
> 2. исследовать, можно ли из создаваемой системы получить дуальную, (формально) поменяв местами принцип исключенного третьего и принцип непротиворечия»[Troelstra, 1990, p. 4][7].

Таким образом, если рассматривать вопрос исторически, касаясь самой терминологии, то логическую систему, дуальную *паранепротиворечивой* логике, принято называть *параполной*, а логику, дуальную *интуиционистской* — *анти-интуиционистской*, или *дуальной интуиционистской* логикой. То есть различие терминологии, как представляется, обусловлено направлением исследования: в одном случае отправная точка — это паранепротиворечивая логика с соответствующими свойствами, в другом —

[6]Паранепротиворечивая логика (или дуальная интуиционистская логика), по словам Д. Миллера [Miller, 2000], является подходящей логической основой для фальсификационизма.

[7]Как указывает А. Капснер в [Kapsner, 2014, p. 129], неизвестно, почему автор конкурсного вопроса, Г. Маннури, мог заинтересоваться такой дуальной системой, и пытался ли еще кто-либо когда-либо серьезно ответить на вторую часть вопроса. Оригинальная запись А. Гейтинга утеряна, и в последующих публикациях о дуальной системе ничего не упоминается. К. Поппер и более поздние разработчики дуальной интуиционистской логики, по-видимому, не знали о задаче Г. Маннури.

интуиционистская. При этом интуиционистскую логику можно рассматривать как определенный вид параполной логики, а анти-интуиционистскую или дуальную интуиционистскую — как специфические паранепротиворечивые системы.

Однако стоит отметить, что не все логики, рассматриваемые в качестве дуальных интутиционистской логике, обладают паранепротиворечивыми свойствами (см.: [Stopa, 2022, p. 54–55]).

Обратим внимание, что уже в вышеприведенной цитате виден один из подходов к пониманию дуальности логических систем. Так, если в интуиционистской логике не имеет места принцип исключенного третьего, то в дуальной системе не должен иметь места принцип непротиворечия.

3. Дуальность в логике

С понятием дуальности мы можем встречаться в различных контекстах (см., например: [Demey, Smessaert, 2016]), оно широко распространено во многих областях знания. Как пишет М.Ф. Атия: «По сути, дуальность дает две разные точки зрения на один и тот же объект. Есть много вещей, на которые существуют две разные точки зрения, и, в принципе, они дуальны» [Atiyah, 2007, p. 69]. В математике и физике возникновение понятия дуальности объясняется изобретением проективной геометрии [Da Ré et al., 2020, p. 317]. С процессом алгебраизации логики, который начался в XIX в., интерес к подобным структурам распространился и на логику. С. Клини в [Клини, 1973, с. 34–37], рассматривая вопросы двойственности (дуальности), ссылается на Д. Гильберта и В. Аккермана [Гильберт, Аккерман, 1947] и А. Чёрча [Чёрч, 1960, § 16], а также указывает, что впервые логическая двойственность отмечена Э. Шрёдером [Schröder, 1877].

В рамках логического подхода мы можем говорить о дуальности на уровне логических операций (и соответствующих связок), формул, о дуальных отношениях следования, о дуальности между логическими системами.

С. Клини [Клини, 1973, с. 34–37] проанализировал дуальность между логическими операциями конъюнкции и дизъюнкции в классической логике. При этом в размышлениях Клини важна идея о том, что противопоставление истины и лжи лежит в основе понятия дуальности в логике, и отрицание — тот инструмент, который мы можем использовать для выражения отношений дуальности такого рода [Da Ré et al., 2020, p. 317].

Дадим определение двойственных (дуальных) функций и, соответственно, дуальных логических связок.

Функция $g(x_1, \ldots, x_m)$ является двойственной (дуальной) к функции $f(x_1, \ldots, x_m)$, если $g(x_1, \ldots, x_m) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$, где $^-$ — операция инвертирования значения[8] [Марченков, 2014, с. 27].

В классической логике две n-местные логические связки $\circledcirc$ и $\circledcirc^d$ называются дуальными, если:

$$\sim \circledcirc(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \equiv \circledcirc^d(\sim \varphi_1, \ldots, \sim \varphi_n)^9,$$

где $\equiv$ — классическая эквивалентность, $\sim$ — классическое отрицание [Carnielli, Rodrigues, 2021, p. 571].

В данном случае дуализация (двойственность) является непосредственным следствием свойства инволюции: $0 = {\sim}1$ и $1 = {\sim}0$.

Пример дуальности классической конъюнкции $\wedge$ и дизъюнкции $\vee$ (инволюция $\sim$ — самодуальна): формула $\varphi \wedge \psi$ логически эквивалентна формуле $\sim (\sim \varphi \vee \sim \psi)$ и формула $\varphi \vee \psi$ логически эквивалентна формуле $\sim (\sim \varphi \wedge \sim \psi)$.

Так, формулы, выражающие принцип непротиворечия и принцип исключенного третьего, могут быть рассмотрены в качестве дуальных:

$$\sim (\varphi \wedge \sim \varphi) \quad \text{и} \quad \sim \varphi \vee \varphi^{10}.$$

Далее также увидим, что отрицание играет важную роль при установлении дуальности между отношениями следования. Фактически отрицание лежит в основе широко распространенной концепции дуальности, которую некоторые авторы называют *дуальность относительно отрицания* (*negation duality*) [Da Ré et al., 2020, p. 317]. Суть идеи *дуальности относительно отрицания* заключается в том, чтобы, имея некоторый вывод, переходить от формул в посылках к формулам в заключении, и наоборот, заменяя эти формулы их отрицаниями. Мотивация действовать таким образом следует из понимания отношения следования.

В классической логике истина и ложь соотносятся следующим образом: *ложность = неистинность* и, наоборот, *истинность = неложность*. Отсюда при определении отношения логического следования мы имеем два эквивалентных подхода.

В общем случае удобно рассматривать определение логического следования в терминах мультиследования, когда возможны множественные посылки и множественные заключения[11].

[8] То есть замена 0 на 1 и 1 на 0 в случае булевых функций.

[9] В определении использована наша нотация.

[10] $\sim\sim \varphi \equiv \varphi$.

[11] Такое определение приведено нами на с. 49.

В стандартном определении отношения логического следования выражена идея сохранности истинности от посылок к заключениям, поскольку речь идет о том, что если все посылки истинны, то некоторые заключения истинны. Но можно отношение следования рассматривать с другой точки зрения, как отношение, сохраняющее ложность от заключений к посылкам: если все заключения ложны, то по крайней мере одна из посылок ложна.

И в случае классической логики это два эквивалентных подхода. Соответственно, мы имеем два равнозначных определения мультиследования.

(1) $\langle X, Y\rangle \in Cn(\mathcal{M}) \iff \forall h(h(X) \subseteq D \Rightarrow h(Y) \cap D \neq \varnothing)$;

(2) $\langle X, Y\rangle \in Cn(\mathcal{M}) \iff \forall h(h(Y) \subseteq \bar{D} \Rightarrow h(X) \cap \bar{D} \neq \varnothing)$,
где $\bar{D} = V \setminus D$.

Однако, если *ложность* $\neq$ *неистинность* или *истинность* $\neq$ *неложность*, эквивалентность нарушается. Дуальные отношения следования возникают всегда, когда *ложь* $\neq$ *неистина*.

Определения дуальности логических систем синтаксически (в терминах мультиследования) и семантически находим в работах: [Brunner, Carnielli, 2005],[Marcos, 2005a, p. 290],[Девяткин, 2018, § 1.1.3.].

Пусть $\mathcal{T} \subseteq For$, тогда $\mathcal{T}^d$ — результат замены во множестве формул $\mathcal{T}$ всех связок на дуальные. Пусть $\mathbf{L}_1 = \langle \mathcal{L}_1, \vdash_1\rangle$. Говорим, что логика $\mathbf{L}_2 = \langle \mathcal{L}_2, \vdash_2\rangle$ дуальна к $\mathbf{L}_1 = \langle \mathcal{L}_1, \vdash_1\rangle$, если $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1^d$ и $\mathcal{T}^d \vdash_2 \mathcal{S}^d \iff \mathcal{S} \vdash_1 \mathcal{T}$.

Используя понятие дуальности относительно отрицания, некоторые авторы приводят следующее определение дуальных логических систем [Da Ré et al., 2020, p. 318].

Пусть $\neg\colon For \to For$ — функция, сопоставляющая каждой формуле ϕ ее отрицание $\neg\phi$, и $\neg\mathcal{T} = \{\neg\alpha \mid \alpha \in \mathcal{T}\}$, для $\mathcal{T} \subseteq For$.

Следования $\vdash_{\mathbf{L}}$ и $\vdash_{\mathbf{L}^\neg}$ *дуальны относительно отрицания*, если:

$\mathcal{T} \vdash_{\mathbf{L}} \mathcal{S}$, е.т.е. $\neg\mathcal{S} \vdash_{\mathbf{L}^\neg} \neg\mathcal{T}$ (см. также: [Cobreros, 2013, p. 474]).

Логика $\mathbf{L}$ *дуальна относительно отрицания* логике $\mathbf{L}^\neg$, е.т.е. следование в $\mathbf{L}$ дуально относительно отрицания следованию в $\mathbf{L}^\neg$, и наоборот.

Таким образом, чтобы получить дуальную логическую систему, мы исходное следование прочитываем справа налево, заменяя логические связки дуальными, где это необходимо (некоторые связки могут быть самодуальными). Так, например, любое правило исключения для конъюнкции может быть охарактеризовано как дуальное соответствующему правилу введения для дизъюнкции.

Дуальность логических матриц

Пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ такие матрицы, что $\vdash_1 = Cn_m(\mathcal{M}_1)$ и $\vdash_2 = Cn_m(\mathcal{M}_2)$. Матрица $\mathcal{M}_2$ дуальна $\mathcal{M}_1$, когда

$$\langle X, Y\rangle \in Cn_m(\mathcal{M}_1) \iff \langle Y, X\rangle \in Cn_m(\mathcal{M}_2).$$

Далее также распространяется понятие дуальности с мультиследования на обычное следование и теории: если матрица $\mathcal{M}$ задает следование (теорию), то дуал следования (теории) будет задавать соответствующая матрица $\mathcal{M}^d$. В [Девяткин, 2018, § 1.1.3.] на примере трехзначной матрицы приводится построение, которое иллюстрирует, как получить из паранепротиворечивой матрицы параполную, и наоборот.

Пример. Известно, что трехзначная слабая интуиционистская (параполная) логика $\mathbf{I}^1$ дуальна трехзначной паранепротиворечивой логике Сетте $\mathbf{P}^1$. Рассмотрим алгоритм построения дуальных матриц на примере этих логическиих систем.

$\mathfrak{M}^{P1} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \neg_{P1}, \rightarrow_{P1}, \{1, 1/2\}\rangle$,

где $\neg_{P1}$ и $\rightarrow_{P1}$ определяются таблицами

x	$\neg_{P1} x$
1	0
1/2	1
0	1

$\rightarrow_{P1}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

$\mathfrak{M}^{I1} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \neg_{I1}, \rightarrow_{I1}, \{1\}\rangle$,

где $\neg_{I1}$ и $\rightarrow_{I1}$ определяются таблицами

x	$\neg_{I1} x$
1	0
1/2	0
0	1

$\rightarrow_{I1}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1	1
0	1	1	1

Итак, следуя [Там же, с. 21], построим логическую матрицу, дуальную $\mathfrak{M}^{P1}$. Ее дуалом будет матрица $\mathfrak{M}^{P1'}$, которая отличается от $\mathfrak{M}^{P1}$ только классом выделенных значений $\bar{D} = \{0\}$.

Далее, определим отображение ι:

$\iota(0) = 1,\ \iota(1/2) = 1/2,\ \iota(1) = 0.$

Пусть

$\neg^*_{P1}(x) := \iota(\neg_{P1}\iota(x));$

$x \to^*_{P1} y := \iota(\iota(x) \to_{P1} \iota(y)).$

Итак, имеем матрицу $\mathfrak{M}^{P1^*} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \neg^*_{P1}, \to^*_{P1}, \{1\}\rangle$, где $\neg^*_{P1}$ и $\to^*_{P1}$ определяются таблицами

x	$\neg^*_{P1}x$
1	0
1/2	0
0	1

$\to^*_{P1}$	1	1/2	0
1	0	0	0
1/2	1	0	0
0	1	0	0

Поскольку $\iota\iota x = x$, матрица $\mathfrak{M}^{P1^*} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \neg^*_{P1}, \to^*_{P1}, \{1\}\rangle$ изоморфна матрице $\mathfrak{M}^{P1'} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \neg_{P1}, \to_{P1}, \{0\}\rangle$ относительно ι.

Таким образом, матрица $\mathfrak{M}^{P1*}$ есть дуал матрицы $\mathfrak{M}^{P1}$.

Очевидно, $\neg^*_{P1}(x)$ есть $\neg_{I1}(x)$, также в $\mathfrak{M}^{P1^*}$ следующим образом можем определить $\to_{I1}$:

$x \to_{I1} y := \neg^*_{P1}(y \to^*_{P1} x).$

Таким образом, данное построение иллюстрирует, в каком смысле матрицы $\mathfrak{M}^{P1}$ и $\mathfrak{M}^{I1}$ могут быть рассмотрены в качестве дуальных. Обратим внимание на то, что в качестве дуальной импликации выступает ко-импликация, а далее через ко-импликацию и отрицание определяем импликацию с хорошими свойствами — импликацию $\to_{I1}$, соответствующую импликации параполной логики $\mathbf{I}^1$.

Другой пример применения процедуры дуализации логических матриц — построение из трехзначной матрицы интуиционистской логики $\mathbf{G}_3$ дуальной трехзначной матрицы логики Брауэра $\mathbf{G}^*_3$ [Карпенко, 2010, с. 49]. Особенностью последней является то, что в силу функциональных свойств операций матрицы в ней нельзя определить импликацию с хорошими[12] свойствами.

[12] Например, со свойствами естественной импликации, см.: [Томова, 2012, с. 31–32].

4. Подходы к дуальности между паралогиками

Существует несколько точек зрения на природу дуальности между паранепротиворечивыми и параполными логиками.

4.1. Дуальность на теоретико-доказательном и семантическом уровнях

В 1960-х гг. Н. да Коста разработал паранепротиворечивую логику C_1 и связанную с ней иерархию подобных паранепротиворечивых пропозициональных логик C_n, где $0 < n < \omega$. В качестве обязательного условия паранепротиворечивости он указывал требование неверификации закона непротиворечия, т.е. в исчислении формула $\sim (\varphi \wedge \sim \varphi)$ не является допустимой схемой аксиом.

С этой точки зрения в паранепротиворечивой логике формула $\sim (\varphi \wedge \sim \varphi)$ не является законом, в то время как в интуиционистской логике не является законом формула $\varphi \vee \sim \varphi$.

На этом основании некоторые исследователи заключают, что естественно рассматривать паранепротиворечивую и интуиционистскую логику в качестве *дуальных*.

По словам Р. Сильвана (Роутли), «логика C_ω в некотором смысле дуальна интуиционистской логике» [Sylvan, 1990, p. 48]. При этом вопрос дуальности рассматривается и с семантической, и с теоретико-доказательной точек зрения.

Как указывает Г. Прист [Priest, 2009, p. 165], одним из мотивов, побудивших Н. да Косту разработать паранепротиворечивую логику C_ω, было стремление дуализировать интуиционистское отрицание. Интуиционистский подход к отрицанию предполагает возможным, что ни φ, ни $\sim \varphi$ не имеют места. Таким образом, в логике с дуальным подходом к отрицанию возможно, что имеют место и φ, и $\sim \varphi$ одновременно. При этом возникает вопрос, каким образом такая дуализация может быть осуществлена.

Да Коста строит дуализацию следующим образом. C_ω и **Int** могут быть представлены как расширения позитивного фрагмента интуиционистской логики $\mathbf{Int}^+$.

В C_ω добавляются аксиомы:

1. $A \vee \sim A$,

2. $\sim\sim A \to A$.

В **Int**:

3. $\sim (A \wedge \sim A)$,

4. $A \to \sim\sim A$.

Таким образом, в интуиционистской логике отсутствует аксиома, соответствующая закону исключенного третьего, — $A \vee \sim A$, и присутствует аксиома, соответствующая закону непротиворечия, — $\sim (A \wedge \sim A)$; имеется закон введения двойного отрицания и отсутствует закон исключения двойного отрицания. Обратная ситуация в случае паранепротиворечивой логики C_ω и другими C-логиками да Косты.

Дуальность между системами также прослеживается на семантическом уровне: «...в то время как интуиционизм, по сути, сосредоточен на явно неполных ситуациях, исключая противоречивые, C-системы допускают противоречивые ситуации, но устраняют неполные ситуации» [Sylvan, 1990, p. 49].

«Паранепротиворечивые системы да Косты являются результатом одного из способов создания чего-то, что естественным образом можно рассматривать в качестве дуала интуиционистской логики», — указывает Г. Прист [Priest, 2007, p. 154] и далее пишет, что возможны и другие способы дуализации. Сам он предлагает дуализировать семантику Крипке для интуиционистской логики.

Семантика Крипке для интуиционистской логики представляет собой структуру $\langle W, R, v \rangle$, где W — множество возможных миров, R — бинарное отношение на W, обладающее свойствами рефлексивности и транзитивности, v — функция, приписывающая значение истинности каждой пропозициональной переменной p в каждом возможном мире w.

Имеет место принцип сохранности истинности:

если wRw' и $v_w(p) = 1$, тогда $v_{w'}(p) = 1$.

Функция оценки определяется следующим образом:

$v_w(A \wedge B) = 1$, е.т.е. $v_w(A) = 1$ и $v_w(B) = 1$,

$v_w(A \vee B) = 1$, е.т.е $v_w(A) = 1$ или $v_w(B) = 1$,

$v_w(A \to B) = 1$, е.т.е для всех w' таких, что wRw', если $v_{w'}(A) = 1$, тогда $v_{w'}(B) = 1$,

$v_w(\neg A) = 1$ е.т.е для всех w' таких, что wRw', $v_{w'}(A) = 0$.

Далее, как указывает Г. Прист [Priest, 2009, p. 166], чтобы получить логику, которая была бы точно такой же, как интуиционистская, за исключением дуального отрицания, все условия истинности остаются такими же, кроме условия истинности для отрицания, которое заменяется дуальным:

$v_w(\neg A) = 1$ е.т.е для некоторых w' таких, что $w'Rw$, $v_{w'}(A) = 0$.

Логику, в которой таким образом определено отрицание, Г. Прист называет в честь Н. да Косты *логикой Да Косты* (*Da Costa Logic*). Если $\vDash_I$ — семантическое отношение следования в интуиционистской логике, и $\vDash_D$ — в логике Да Косты, то, как указывает Прист, вполне ожидаемо, что свойства отрицания в логике Да Косты дуальны свойствам отрицания в интуиционистской логике:

$$\begin{array}{l|l}
\vDash_I A \to \neg\neg A & \nvDash_D A \to \neg\neg A \\
\nvDash_I \neg\neg A \to A & \vDash_D \neg\neg A \to A \\
\vDash_I (A \wedge \neg A) \to B & \nvDash_D (A \wedge \neg A) \to B \\
\nvDash_I B \to (A \vee \neg A) & \vDash_D B \to (A \vee \neg A).
\end{array}$$

В. Карниелли с коллегами в своих работах, посвященных вопросам дуальности (см., например: [Carnielli et al., 2020]), указывают, что Н. да Коста, усматривая дуальность между формулами 1, 2 и 3, 4, заключал на этом основании о дуальности между паранепротиворечивой логикой и интуиционистской, однако, как они отмечают, такой подход, по их мнению, несколько вводит в заблуждение. Поскольку дуальность между этими логиками имеет место не на уровне формул, как полагал да Коста, а на уровне правил вывода, отношения следования и заключается прежде всего в том, что в паранепротиворечивых системах следование *неэксплозивно*, т.е. «из противоречия не следует все, что угодно», в интуиционистской логике следование *неимплозивно*, т.е. формула и ее отрицание (закон исключенного третьего) могут быть не выводимы[13].

Отношение следования называется *эксплозивным* (explosive), если $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ для любых $\varphi, \psi \in For$.

Классическая логика и большинство стандартных неклассических логик, в том числе интуиционистская, являются эксплозивными.

Отношение следования называется *имплозивным* (implosive), если $\psi \vdash \varphi, \neg\varphi$ для любых $\varphi, \psi \in For$.

[13]Также существует мнение, что закон непротиворечия и закон исключенного третьего отражают существенные свойства классического отрицания. Однако более существенная характеризация классического отрицания связана не с верификацией законов непротиворечия и исключенного третьего, а со свойствами отношения логического следования [Carnielli, Rodrigues, 2021]. Так, например, принцип «из противоречия следует все, что угодно» (принцип эксплозивности) не просто говорит о невозможности принятия противоречия в силу его ложности (о чем говорит принцип непротиворечия), но указывает на худшее последствие принятия противоречия, о его разрушающем действии, о тривиализации теории.

Обратим внимание, что в терминах следования со множественными посылками и заключениями *закон непротиворечия* и *закон исключенного третьего* могут быть представлены следующим образом: $\varphi, \neg\varphi \vdash$ и $\vdash \varphi, \neg\varphi$ [Macias et al., 2023].

В случае эксплозивности и имплозивности следования имеем, что классически $\varphi \vee \neg\varphi$ следует из всего, и из $\varphi \wedge \neg\varphi$ следует все, что угодно. Таким образом, неимплозивность следования в параполной логике и неэксплозивность в паранепротиворечивой логике рассматриваются как дуальные свойства.

Замечание. Иногда паранепротиворечивую логику определяют как логику, в которой не верифицируется закон Дунса Скота $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$, а параполную логику — как логику, в которой не верифицируется закон Клавия $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$. Так, с одной стороны, закон Дунса Скота можно рассматривать как формульный аналог эксплозивности следования. С другой, формула, выражающая закон Клавия, может рассматриваться в качестве формулы, эквивалентной формуле, выражающей принцип исключенного третьего [Томова, 2023, с. 110–112], и, соответственно, принципа имплозивности следования.

В качестве примера дуальных паралогик в литературе рассматриваются трехзначная сильная логика Клини $\mathbf{K}_3$ (как параполная) и трехзначная логика Приста **LP** (как паранепротиворечивая) (например, см.: [Da Ré et al., 2020, p. 219]).

Логические матрицы этих логик отличаются только классом выделенных значений.

$\mathcal{M}_{\mathbf{K}_3} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \sim, \wedge, \vee, \{1\}\rangle.$

$\mathcal{M}_{\mathbf{LP}} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \sim, \wedge, \vee, \{1, 1/2\}\rangle.$

x	$\sim x$
1	0
1/2	1/2
0	1

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\vee$	1	1	1
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

Так, отношение следования в $\mathcal{M}_{\mathbf{K}_3}$ эксплозивно, т.е. $A, \sim A \vDash_{\mathbf{K}_3} B$, но неимплозивно, т.е. $B \nvDash_{\mathbf{K}_3} A, \sim A$.

И, дуальным образом, отношение следования в $\mathcal{M}_{\mathbf{LP}}$ имплозивно, т.е. $B \vDash_{\mathbf{LP}} A, \sim A$, но неэксплозивно, т.е. $A, \sim A \nvDash_{\mathbf{LP}} B$.

Другими словами, учитывая определения, приведенные нами ранее, см. с. 54, имеет место:

$$\langle Y, X\rangle \in Cn_m(\mathcal{M}_{LP}) \iff \langle X, Y\rangle \in Cn_m(\mathcal{M}_{K_3}).$$

На синтаксическом уровне:

$$\mathcal{S} \vdash_{LP} \mathcal{T} \iff \mathcal{T}^d \vdash_{K_3} \mathcal{S}^d.$$

Все тавтологии классической логики также являются тавтологиями в $\mathcal{M}_{\mathbf{LP}}$, все тождественно-ложные формулы классической логики являются таковыми и в $\mathcal{M}_{\mathbf{K}_3}$.

Еще один известный пример дуальных логических систем, одна из которых является паранепротиворечивой, а другая параполной, — логики бессмысленностного типа: слабая логика Клини $\mathbf{K_3^w}$(параполная) [Kleene, 1952, p. 334][14] и логика **PWK**(паранепротиворечивая) [Ciuni, 2015][15]. Эти логики определяются слабыми связками Клини, их логические матрицы отличаются только классом выделенных значений.

$\mathcal{M}_{\mathbf{K_3^w}} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \sim, \cap, \cup, \{1\}\rangle.$

$\mathcal{M}_{\mathbf{PWK}} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \sim, \cap, \cup, \{1, 1/2\}\rangle.$

x	$\sim x$
1	0
1/2	1/2
0	1

$\cap$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0

$\cup$	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	0

Так же как и логики **LP** и $\mathbf{K}_3$, логики $\mathbf{K_3^w}$ и **PWK** можно рассматривать как *дуальные относительно отрицания* [Da Ré et al., 2024, p. 1243]:

$$\mathcal{S} \vdash_{K_3^w} \mathcal{T} \iff \neg\mathcal{T} \vdash_{PWK} \neg\mathcal{S}.$$

А. Капснер [Kapsner, 2014, p. 135], определяя дуальность в семантическом плане между интуиционистской и дуальной интуиционистской логикой, подчеркивает, что дуальность имеет место между классами корректных следований в интуиционистской и дуальной интуиционистской логике.

Логическое следование между посылкой и заключением имеет место в одной логике тогда и только тогда, когда логическое следование, полученное

[14]Слабая логика Клини $\mathbf{K_3^w}$ также является собственным языковым фрагментом логики Бочвара $\mathbf{B_3}$ [Бочвар, 1938].

[15]Под другим названием эта логика впервые встречается в: [Halldén, 1949].

путем: (а) перестановки посылки и заключения и (б) замены конъюнкции на дизъюнкцию, имеет место во второй логике[16].

Приводятся примеры корректных следований в интуиционистской логике и дуальной интуиционистской логике.

	ИЛ	ДИЛ
$\neg\neg A \vDash A$	$-$	$+$
$A \vDash \neg\neg A$	$+$	$-$
$B \vDash A \vee \neg A$	$-$	$+$
$A \wedge \neg A \vDash B$	$+$	$-$
$\neg(A \wedge B) \vDash \neg A \vee \neg B$	$-$	$+$
$\neg A \wedge \neg B \vDash \neg(A \vee B)$	$+$	$-$

Отдельное направление исследований в области дуальности логических систем связано с тем, что интуиционистская логика **Int** может быть построена в виде секвенциального исчисления с теми же правилами вывода, что и классическая логика, но с одним ограничением: сукцедент секвенции не может содержать более одной формулы. Система, дуальная к **Int**, может быть получена, если потребовать, чтобы в отличие от классического случая антецедент секвенции содержал не более одной формулы.

Одним из первых Дж. Чермак [Czermak, 1977] сформулировал логику, дуальную **Int**, в терминах конъюнкции, дизъюнкци и отрицания. В такой логике не имеет места секвенция вида $A \wedge \neg A \vdash B$.

В [Goodman, 1981] добавляется связка псевдоразности $\dot{-}$ и пропозициональная константа T. В [Urbas, 1996] предложены различные секвенциальные дуальные формулировки **Int**. Общим для всех дуальных к **Int** логикам является наличие закона исключенного третьего.

4.2. Дуальность на содержательном уровне

В. Карниелли и А. Родригез в своих иссследованиях, посвященных вопросам дуальности паранепротиворечивых и параполных логик[17], указывая на то, что технически дуальность между паранепротиворечивой и параполной логикой (как вариант, интуиционистской логикой) заключается в том, что в первой следование неэксплозивно, а во второй — неимплозивно, обращают внимание на дуальность между этими логическими системами с точки зрения мотивации отказа: с одной стороны, от принципа «из противоречия

[16] По сути, это описание определения дуальности логических систем, приведенное нами ранее, см. с. 54.

[17] См., например: [Carnielli, Rodrigues, 2021; Carnielli, Rodrigues, 2016].

следует все, что угодно», с другой — от принципа, что всегда выводимы формула или ее отрицание[18]. Также они при этом говорят об интуитивной мотивации для паранепротиворечивого и параполного отрицания.

Дуальность между паранепротиворечивостью и параполнотой заключается в том, что если в первом случае принимается положение дел, когда пара утверждений A и $\neg A$ вместе имеют место, то во втором — положение дел, когда ни A, ни $\neg A$ места не имеют.

Согласно В. Карниелли и А. Родригезу, на *онтологическом* уровне дуальность между паранепротиворечивой логикой и интуиционистской заключается в следующем.

Онтологически отказ от эксплозивности следования в паранепротиворечивой логике оправдывается предполагаемым существованием «истинных противоречий» (концепция *диалетеизма* [Priest et al., 2024]), и поскольку мир нетривиален, в соответствующей логике мы вынуждены отказываться от эксплозивности следования.

Отказ от принципа исключенного третьего в интуиционистской логике онтологически обосновывается *идеализмом Брауэра*. Согласно его взглядам, существование математического объекта с некоторыми свойствами можно утверждать, только если существует мысленная конструкция этого объекта и не существует математическая истина, не основанная на мысленной конструкции. Таким образом, имеет место отождествление понятия истины и конструктивного доказательства в том смысле, что утверждение истинно, е.т.е. имеется конструктивное доказательство этого утверждения. Прямым следствием такого понимания является отказ от принципа исключенного третьего, поскольку возможна ситуация, когда нет такого доказательства ни для A, ни для $\neg A$. Существуют, например, такие неразрешимые математические предложения, которые в принципе нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

Дуальность между паранепротиворечивостью и параполнотой в *эпистемическом* плане В. Карниелли и А. Родригез описывают следующим образом.

С одной стороны, они представляют эпистемическое толкование противоречий. Такие противоречия не говорят о том, что мир реально противоречив, но они возникают в контекстах рассуждений и являются эпистемическими в том смысле, что связаны с мышлением и языком, с нашим знанием о мире.

Противоречие понимается в связи с понятием противоречивых свидетельств, обоснований (conflicting evidence), как пара противоречащих друг другу свидетельств для принятия некоторого утверждения A в качестве

[18] Формализации закона исключенного третьего в терминах отношения следования.

истинного (ложного). Так, принятие и A, и $\neg A$ в некотором контексте не означает, что и A, и $\neg A$ являются истинными.

Понятие «свидетельство», определенное таким образом, слабее понятия «истина» (может существовать обоснование для A, даже если A — ложно).

Отказ от эксплозивности следования в паранепротиворечивых логиках, таким образом, может быть обоснован с эпистемической точки зрения.

С другой стороны, понятие конструктивного доказательства также может быть рассмотрено в качестве эпистемического понятия, и оно сильнее понятия истины в том смысле, что A может быть истинно, даже если нет конструктивного доказательства для A. При этом акцент делается именно на наличии самой процедуры конструктивного доказательства, как непосредственного обоснования истинности, в то время как истинность A может быть получена неконструктивным образом.

Таким образом, эпистемически дуальность между паранепротиворечивостью и параполнотой (интуиционизмом, как вариант) может быть понята на уровне дуальности между понятиями «свидетельство», «обоснование» (в паранепротиворечивой логике) и «конструктивное доказательство» (в параполной логике).

4.3. Дуальность на алгебраическом уровне

Один из подходов дуализации интуиционистской логики — дуализация ее алгебраической семантики.

Алгебраическим аналогом интуиционистской логики является алгебра Гейтинга. Алгебраическая структура, дуальная алгебре Гейтинга, называется алгебра Брауэра[19].

С алгебраической точки зрения алгебра Гейтинга и алгебра Брауэра могут быть представлены как симметричные обобщения булевой алгебры и, таким образом, могут рассматриваться как дуальные алгебраические структуры [Stopa, 2022, p. 64].

Алгебра $\mathcal{B} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$ называется булевой алгеброй, если L есть ограниченная дистрибутивная решетка и выполняются следующие тождества для операции дополнения $\sim$:

(1) $x \vee \sim x = 1$

(2) $x \wedge \sim x = 0$.

Связь между булевой алгеброй и классической логикой хорошо известна. Алгебра классических истинностных значений является простейшей моделью булевой алгебры [Карпенко, 2010, с. 102].

---

[19] Алгебра Гейтинга встречается в литературе под названием пседо-булевой алгебры, а алгебра Брауэра — под названием ко-Гейтинг алгебры (*co-Heyting algebra*). В данной работе мы будем использовать термин «алгебра Брауэра», или «брауэрова алгебра».

Если L — непустое множество и $x, y \in L$. Элемент $z \in L$ называется *псевдодополнением* элемента x *относительно* y, если z $(= x \Rightarrow y)$ — наибольший элемент со свойством $x \wedge z \leqslant y$.

Решетка с 0 есть *алгебра Гейтинга*, если для всех элементов $x, y \in L$ существует *относительное пседодополнение* $x \Rightarrow y$.

В алгебре Гейтинга $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ имеет место $\neg x = x \Rightarrow 0$, операция $\neg$ называется отрицанием Гейтинга (псевдодополнением).

Операция $\Leftarrow$ есть бинарная операция, дуальная к $\Rightarrow$, т.е. элемент z $(= x \Leftarrow y)$ является наименьшим элементом со свойством $x \vee z \geqslant y$.

Решетка с 1 есть *брауэрова алгебра*, если для всех элементов $x, y \in L$ существует *псевдоразность* $x \Leftarrow y$. Операция $\Leftarrow$ также встречается в литературе под название *ко-импликация*.

В алгебре Брауэра $\langle L, \vee, \wedge, \Leftarrow, 0, 1 \rangle$ имеет место $\ulcorner x = x \Leftarrow 1$, операция $\ulcorner$ называется дуальным псевдодополнением.

Посредством процедуры дуализации может быть получено доказательство некоторых базовых свойств для операций $\Leftarrow$ и $\ulcorner$ в алгебре Брауэра из доказательства аналогичных свойств для $\Rightarrow$ и $\neg$ в алгебре Гейтинга (см., например: [Stopa, 2022, p. 72]).

В этой же работе [Ibid., p. 52] предложен анализ логик, которые характеризуются брауэровыми алгебрами и могут рассматриваться в качестве дуальных интуиционистской логике, которая характеризуется алгеброй Гейтинга. При этом показано, что некоторые из этих логик не являются паранепротиворечивыми, другие же обладают паранепротиворечивыми свойствами.

Также в литературе встречаем понятие *паранепротиворечивой алгебры* [Mortensen, 1995, p. 103], [James, 1996, p. 69], которая определяется как ограниченная дистрибутивная решетка $\mathcal{L} = \langle L, \vee, \wedge, \ulcorner, 0, 1 \rangle$, где $\ulcorner$ удовлетворяет требованию:

$$a \vee b = 1, \text{ е.т.е. } \ulcorner a \vee b = b \text{ (или } \ulcorner a \wedge b = \ulcorner a)^{20}.$$

То есть $\ulcorner$ — дуальное псевдодополнение.

Понятие паранепротиворечивой алгебры есть не что иное, как понятие *дуальной p-алгебры* [Карпенко, 2010, с. 105].

Для того, чтобы решетка была паранепротиворечивой алгеброй, достаточно, чтобы она была алгеброй Брауэра [James, 1996, p. 70].

Заметим, что исторически брауэровы алгебры также были исследованы в связи с интуиционистской логикой. Нулевой элемент в соответствующей

[20] Отношение порядка в решетке определимо стандартным образом: $a \leqslant b =_{df} a \wedge b = a$, или, что эквивалентно, $a \vee b = b$. Тогда требование может быть записано как: $a \vee b = 1$, е.т.е. $\ulcorner a \leqslant b$.

решетке сопоставляется с классом всех теорем и, таким образом, брауэровы алгебры характеризуют интуиционистскую логику.

Существенным свойством операций брауэровой алгебры является то, что они строго дуальны операциям алгебры Гейтинга. И в этом смысле операция $\Leftarrow$ не может рассматриваться в качестве алгебраического аналога импликации с хорошими свойствами. Операции $\wedge, \vee, \ulcorner$ могут быть интерпретированы как конъюнкция, дизъюнкция и паранепротиворечивое отрицание, в качестве решения для импликации предлагается определять импликацию с базовыми свойствами и добавлять ее к исходным операциям [Ibid., p. 68].

5. Заключение

В основе понятия дуальности в логике лежит идея о противопоставлении истины и лжи (С. Клини); отрицание — то средство, через которое возможно устанавливать дуальность между истиной и ложью в логике, выявляя далее дуальность между отношениями следования и логическими системами.

Дуальность паранепротиворечивых и параполных систем является существенным свойством отношения между этими видами логик и по сути является следствием тех интуиций и идей, которые лежат в основе их построения. Об этом свидетельствует то, что эта дуальность явно прослеживается на различных уровнях. Так, феномен дуальности паралогик мы рассмотрели с точки зрения дедуктивного аппарата, теории логических матриц, алгебраических структур, а также относительно интуитивной, содержательной интерпретации паралогик.

Исследование различных аспектов дуальности между паранепротиворечивой и параполной логиками позволяет выявлять особенности этих логических систем, сравнивая и противопоставляя их свойства. В продолжение исследования отдельный интерес может предствлять изучение паранормальных логических систем, которые одновременно объединяют в себе как паранепротиворечивые, так и параполные свойства.

Литература

Бочвар, 1938 – *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 46. № 2. С. 287–308.

Гильберт, Аккерман, 1947 – *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М., 1947.

Девяткин, 2018 – *Девяткин Л.Ю.* Многозначные расширения классической логики высказываний. М.: ИФ РАН, 2018.

Карпенко, 2010 – *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: Изд-во ЛКИ, 2010.

Клини, 1957 – *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

Клини, 1973 – *Клини С.К.* Математическая логика. М.: Мир, 1973.

Марченков, 2014 – *Марченков С.С.* Основы теории булевых функций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.

Томова, 2012 – *Томова Н.Е.* Естественные трехзначные логики: функциональные свойства и отношения. М.: ИФ РАН, 2012.

Томова, 2022 – *Томова Н.Е.* К вопросу о критерии паранепротиворечивости логик // Логические исследедования / Logical Investigations. 2022. Т. 28. № 2. С. 77–95.

Томова, 2023 – *Томова Н.Е.* К вопросу о критерии параполноты логик // Логические исследедования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 2. С. 104–124.

Чёрч, 1960 – *Чёрч А.* Введение в математическую логику. Т. 1. М., 1960.

Atiyah, 2007 – *Atiyah M.* Duality in mathematics and physics. Lecture notes from the Institut de Matematica de la Universitat de Barcelona (IMUB). P. 69–91. URL: `https://fme.upc.edu/ca/arxius/butlleti-digital/riemann/071218_conferencia_atiyah-d_article.pdf` (дата обращения: 01.07.2024).

Binder et al., 2007a – *Binder D., Piecha Th., Schroeder-Heister P. (eds.)* The Logical Writings of Karl Popper. Trends in Logic. Vol. 58. Cham: Springer, 2022.

Binder et al., 2007b – *Binder D., Piecha Th., Schroeder-Heister P.* Popper's Theory of Deductive Logic // The Logical Writings of Karl Popper. Trends in Logic. Vol. 58. Cham: Springer, 2022. P. 1–79.

Brunner, Carnielli, 2005 – *Brunner A.B.M., Carnielli W.A.* Anti-intuitionism and paraconsistency // Journal of Applied Logic. 2005. Vol. 3. P. 161–184.

Carnielli et al., 2007 – *Carnielli W., Coniglio M.E., Marcos J.* Logics of Formal Inconsistency // Logics of Formal Inconsistency. In: Gabbay, D., Guenthner, F. (eds.) Handbook of Philosophical Logic. Vol. 14. Dordrecht: Springer, 2007.

Carnielli et al., 2020 – *Carnielli W.A., Coniglio M.E., Rodrigues A.* Recovery operators, paraconsistency and duality // Logic Journal of the IGPL. 2020. Vol. 28. No. 5. P. 624–656.

Carnielli, Rodrigues, 2016 – *Carnielli W., Rodrigues A.* Paraconsistency and duality: between ontological and epistemological views // The Logica Yearbook 2015. College Publications, 2016. URL: `https://everest.fapemig.br/files/arq_definitivos/364/APQ-01659-16/APQ-01659-16-Out1.pdf` (дата обращения: 01.07.2024).

Carnielli, Rodrigues, 2021 – *Carnielli W., Rodrigues A.* On epistemic and ontological interpretations of intuitionistic and paraconsistent paradigms // Logic Journal of the IGPL. 2021. Vol. 29. Iss. 4. P. 569–584.

Ciuni, 2015 – *Ciuni R.* Conjunction in paraconsistent weak Kleene logic // Logica Yearbook 2014 / Ed. by P. Arazim and M. Dancák. London: College Publications, 2015. P. 61–76.

Cobreros, 2013 – *Cobreros P.* Vagueness: Subvaluationism // Philosophy Compass. 2013. Vol. 8/5. P. 472–485.

Czermak, 1977 – *Czermak J.* A remark on Gentzen's calculus of sequents // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1977. Vol. 18. P. 471–474.

Da Costa, 1963 – *Da Costa N.C.A.* Sistemas Formais Inconsistentes. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 1963.

Da Costa, 1974 – *Da Costa N.C.A.* On the theory of inconsistent formal systems // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1974. Vol. 15. No. 4. P. 497–510.

D'Ottaviano, Gomes, 2020 – *D'Ottaviano I.M.L., Gomes E.L.* Baptizing Paraconsistent Logics: The Unique Touch of Miró Quesada // South American Journal of Logic. 2020. Vol. 6. No. 2. P. 249–269.

Da Ré et al., 2020 – *Da Ré B., Pailos F., Szmuc D., Teijeiro P.* Metainferential duality // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2020. Vol. 30. No. 4. P. 312–334.

Da Ré et al., 2024 – *Da Ré B., Szmuc D., Corbalán M.I.* Non-reflexive nonsense: proof theory of paracomplete weak Kleene logic // Studia Logica. 2024. Vol. 112. No. 6. P. 1243–1259.

Demey, Smessaert, 2016 – *Demey L., Smessaert H.* Duality in Logic and Language // Internet Encyclopedia of Philosophy. 2016. URL: `https://www.iep.utm.edu/dual-log/` (дата обращения: 01.07.2024).

Goodman, 1981 – *Goodman N.D.* The Logic of Contradiction // Mathematical Logic Quarterly. 1981. Vol. 27. No. 8–10. P. 119–126.

Halldén, 1949 – *Halldén S.* The Logic of Nonsense. Uppsala: Uppsala Universitet, 1949.

James, 1996 – *James W.* Closed Set Logic in Categories. PhD thesis, Department of Philosophy, The University of Adelaide, 1996. URL: `https://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440/18746/2/02whole.pdf` (дата обращения: 28.10.2024).

Jaśkowski, 1969 – *Jaśkowski S.* A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.

Kapsner, 2014 – *Kapsner A.* Logics and Falsifications. A New Perspective on Constructivist Semantics. Trends in Logic. Vol. 40. Cham: Springer, 2014.

Kleene, 1952 – *Kleene S.C.* Introduction to metamathematics. Groningen: Wolters–Noordhoff Publishing, 1952. 560 p.

Loparić, da Costa, 1984 – *Loparić A., da Costa N.C.A.* Paraconsistency, paracompleteness, and valuations // Logique et Analyse. 1984. Vol. 106. P. 119–131.

Macias et al., 2023 – *Macias V.B., Coniglio M.E., Hernández-Tello A.* Genuine Paracomplete Logics // Logic Journal of the IGPL. 2023. Vol. 31. No. 5. P. 961–987.

Marcos, 2005a – *Marcos J.* Nearly every normal modal logic is paranormal // Logique et Analyse. 2005. Vol. 48. No. 189/192. P. 279–300.

Marcos, 2005b – *Marcos J.* On a Problem of da Costa // Essays on the Foundations of Mathematics and Logic. Vol. 2. Monza: Polimetrica International Scientific Publisher, 2005. P. 53–69.

Middelburg, 2021 – *Middelburg C.A.* On the strongest three-valued paraconsistent logic contained in classical logic and its dual // Journal of Logic and Computation. 2021. Vol. 31. Iss. 2. P. 597–611.

Miller, 2000 – *Miller D.* Paraconsistent logic for falsificationists // Proc. 1st Workshop on Logic and Language (Universidad de Sevilla). Sevilla: Editorial Kronos s.a., 2000. P. 197–204.

Mortensen, 1995 – *Mortensen C.* Inconsistent Mathematics. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1995.

Priest, 2002 – *Priest G.* Paraconsistent Logic // Gabbay D.M., Guenthner F. (eds.) Handbook of Philosophical Logic. Dordrecht: Springer, 2002. P. 287–393.

Priest, 2007 – *Priest G.* Paraconsistency and Dialetheism // Handbook of the History of Logic. Vol. 8 / D. Gabbay and J. Woods (eds.). Amsterdam, North Holland, 2007. P. 129–204.

Priest, 2009 – *Priest G.* Dualising Intuitionictic Negation // Principia: An International Journal of Epistemology. 2009. Vol. 13. No. 2. P. 165–184.

Priest et al., 2024 – *Priest G., Berto F., Weber Z.* Dialetheism // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2024 Edition), Ed. N. Zalta & U. Nodelman (eds.). URL: `https://plato.stanford.edu/entries/dialetheism/` (дата обращения: 20.12.2024).

Troelstra, 1990 – *Troelstra A.S.* On the Early History of Intuitionistic Logic // Mathematical Logic. Petkov P.P. (ed.). Boston, MA: Springer, 1990.

Schröder, 1877 – *Schröder E.* Der Operationskreis des Logikkalküls. Leipzig: B.G. Teubner, 1877.

Sette, Carnielli, 1995 – *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal Weakly-Intuitionistic Logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 181–203.

Shoesmith, Smiley, 1978 – *Shoesmith D.J., Smiley T.J.* Multiple-Conclusion Logic. Cambridge: Cambridge University Press, 1978. 409 p.

Shramko, 2005 – *Shramko Ya.* Dual intuitionistic logic and a variety of negations: The logic of scientific research // Studia Logica. 2005. Vol. 80. No. 2–3. P. 347–367.

Stopa, 2022 – *Stopa M.* Intuitionistic logic versus paraconsistent logic. Categorical approach. A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy. Kraków: Jagiellonian University, 2022. URl: `https://philarchive.org/archive/STOILV` (дата обращения: 20.12.2024).

Sylvan, 1990 – *Sylvan R.* Variations on da Costa C Systems and dual-intuitionistic logics I. Analyses of C_ω and CC_ω // Studia Logica. 1990. Vol. 49. P. 47–65.

Urbas, 1996 – *Urbas I.* Dual-intuitionistic logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1996. Vol. 37. No. 3. P. 440–451.

Natalya E. Tomova

On duality of logical systems: paralogics

Natalya E. Tomova
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Abstract: The paper is devoted to the issues of duality of logical systems. It is customary to consider paraconsistent and paracomplete logics as dual. Since systems with paraconsistent and paracomplete properties are found in the literature under various names, the issue of terminology is investigated separately. Based on well-known research, the phenomenon of duality of paraconsistent and paracomplete systems is considered in various aspects: from the point of view of the deductive apparatus, the theory of logical matrices, algebraic structures, as well as a relatively intuitive, meaningful interpretation of paralogics.

Keywords: paraconsistent logic, paracomplete logic, intuitionistic logic, dual intuitionistic logic, duality

For citation: Tomova N.E. "O dual'nosti logicheskikh sistem: paralogiki" [On duality of logical systems: paralogics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 1, pp. 47–73. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-47-73 (In Russian)

References

Atiyah, 2007 – Atiyah, M. "Duality in mathematics and physics", *Lecture notes from the Institut de Matematica de la Universitat de Barcelona (IMUB)*, 2007, pp. 69–91. [https://fme.upc.edu/ca/arxius/butlleti-digital/riemann/071218_conferencia_atiyah-d_article.pdf, accessed on 01.07.2024].

Binder et al., 2007 – Binder, D., Piecha, Th., Schroeder-Heister, P. (eds.) *The Logical Writings of Karl Popper. Trends in Logic. Vol. 58.* Cham: Springer, 2022.

Binder et al., 2007a – Binder, D., Piecha, Th., Schroeder-Heister, P. "Popper's Theory of Deductive Logic", in: *The Logical Writings of Karl Popper. Trends in Logic. Vol. 58.* Cham: Springer, 2022, pp. 1–79.

Bochvar, 1938 – Bochvar, D.A. Ob odnom trekhznachnom ischislenii i ego primenenii k analizu paradoksov klassicheskogo rasshirennogo funkcional'nogo ischisleniya [On a three-valued logical calculus and its application to the analysis of the paradoxes of the classical extended functional calculus], *Matematicheskij sbornik* [Mathematical Collection], 1938. Vol. 4, No. 2, pp. 287–308. (In Russian)

Brunner, Carnielli, 2005 – Brunner, A.B.M., Carnielli, W.A. "Anti-intuitionism and paraconsistency", *Journal of Applied Logic*, 2005, Vol. 3, pp. 161–184.

Carnielli et al., 2007 – Carnielli, W., Coniglio, M.E., Marcos, J. "Logics of Formal Inconsistency", in: Gabbay, D., Guenthner, F. (eds.), *Handbook of Philosophical Logic. Vol. 14.* Dordrecht: Springer, 2007.

Carnielli et al., 2020 – Carnielli, W.A., Coniglio, M.E., Rodrigues, A. "Recovery operators, paraconsistency and duality", *Logic Journal of the IGPL*, 2020, Vol. 28, No. 5, pp. 624–656.

Carnielli, Rodrigues, 2016 – Carnielli, W., Rodrigues, A. "Paraconsistency and duality: between ontological and epistemological views", in: *The Logica Yearbook 2015.* College Publications, 2016. [`https://everest.fapemig.br/files/arq_definitivos/364/APQ-01659-16/APQ-01659-16-Out1.pdf`, accessed on 01.07.2024].

Carnielli, Rodrigues, 2021 – Carnielli, W., Rodrigues, A. "On epistemic and ontological interpretations of intuitionistic and paraconsistent paradigms", *Logic Journal of the IGPL*, 2021, Vol. 29, Iss. 4, pp. 569–584.

Church, 1960 – Church, A. *Vvedenie v matematicheskuyu logiku* [Introduction to mathematical logic], Vol. 1, Moscow, 1960. (In Russian)

Ciuni, 2015 – Ciuni, R. "Conjunction in paraconsistent weak Kleene logic", in: *Logica Yearbook 2014*, Ed. by P. Arazim and M. Dancák. London: College Publications, 2015, pp. 61–76.

Cobreros, 2013 – Cobreros, P. "Vagueness: Subvaluationism", *Philosophy Compass*, 2013, Vol. 8/5, pp. 472–485.

Czermak, 1977 – Czermak, J. "A remark on Gentzen's calculus of sequents", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1977, Vol. 18, pp. 471–474.

Da Costa, 1963 – Da Costa, N.C.A. *Sistemas Formais Inconsistentes.* Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 1963.

Da Costa, 1974 – Da Costa, N.C.A. "On the theory of inconsistent formal systems", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1974, Vol. 15, No. 4, pp. 497–510.

D'Ottaviano, Gomes, 2020 – D'Ottaviano, I.M.L., Gomes, E.L. "Baptizing Paraconsistent Logics: The Unique Touch of Miró Quesada", *South American Journal of Logic*, 2020, Vol. 6, No. 2, pp. 249–269.

Da Ré et al., 2020 – Da Ré, B., Pailos, F., Szmuc, D., Teijeiro, P. "Metainferential duality", *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2020, Vol. 30, No. 4, pp. 312–334.

Da Ré et al., 2024 – Da Ré, B., Szmuc, D., Corbalán, M.I. "Non-reflexive nonsense: proof theory of paracomplete weak Kleene logic", *Studia Logica*, 2024, Vol. 112, No. 6, pp. 1243–1259.

Demey, Smessaert, 2016 – Demey, L., Smessaert, H. "Duality in Logic and Language", *Internet Encyclopedia of Philosophy.* 2016. [`https://www.iep.utm.edu/dual-log/`, accessed on 01.07.2024].

Devyatkin, 2018 – Devyatkin, L.Yu. *Mnogoznachnye rasshireniya klassicheskoi logiki vyskazyvanii* [Multivalued extensions of classical propositional logic]. Moscow: IPh RAN, 2018. (In Russian)

Gilbert, Ackerman, 1947 – Gilbert, D., Ackerman, V. Osnovy teoreticheskoi logiki [Fundamentals of theoretical logic]. Moscow, 1947. (In Russian)

Goodman, 1981 – Goodman, N.D. "The Logic of Contradiction", *Mathematical Logic Quarterly*, 1981, Vol. 27, No. 8–10, pp. 119–126.

Halldén, 1949 – Halldén, S. *The Logic of Nonsense*. Uppsala: Uppsala Universitet, 1949.

James, 1996 – James, W. *Closed Set Logic in Categories*. PhD thesis, Department of Philosophy, The University of Adelaide, 1996 [https://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440/18746/2/02whole.pdf, accessed on 29.10.2024].

Jaśkowski, 1969 – Jaśkowski, S. "A propositional calculus for inconsistent deductive systems", *Studia Logica*, 1969, Vol. 24, pp. 143–157.

Kapsner, 2014 – Kapsner, A. *Logics and Falsifications. A New Perspective on Constructivist Semantics*, Trends in Logic, Vol. 40. Cham: Springer, 2014.

Karpenko, 2010 – Karpenko, A.S. *Razvitie mnogoznachnoj logiki* [The Development of Many-Valued Logics]. Moscow: LKI, 2010. 448 p. (In Russian)

Kleene, 1952 – Kleene, S.C. *Introduction to metamathematics*. Groningen: Wolters–Noordhoff Publishing, 1952.

Kleene, 1957 – Kleene, S.C. *Vvedenie v metamatematiku* [Introduction to Metamathematics]. Moscow: IL, 1957. (In Russian)

Kleene, 1973 – Kleene, S.C. *Matematicheskaya logika* [Mathematical logic]. Moscow: Mir, 1973. (In Russian)

Loparić, da Costa, 1984 – Loparić, A., da Costa, N.C.A. "Paraconsistency, paracompleteness, and valuations", *Logique et Analyse*, 1984, Vol. 106, pp. 119–131.

Macias et al., 2023 – Macias, V.B., Coniglio, M.E., Hernández-Tello, A. "Genuine Paracomplete Logics", *Logic Journal of the IGPL*, 2023, Vol. 31, No. 5, pp. 961–987.

Marchenkov, 2014 – Marchenkov, S.S. *Osnovy teorii bulevykh funktsii* [Fundamentals of the theory of Boolean functions]. Moscow: FIZMATLIT, 2014. (In Russian)

Marcos, 2005a – Marcos, J. "Nearly every normal modal logic is paranormal", *Logique et Analyse*, 2005, Vol. 48, No. 189/192, pp. 279–300.

Marcos, 2005b – Marcos, J. "On a Problem of da Costa", *Essays on the Foundations of Mathematics and Logic*. Vol. 2. Monza: Polimetrica International Scientific Publisher, 2005, pp. 53–69.

Middelburg, 2021 – Middelburg, C.A. "On the strongest three-valued paraconsistent logic contained in classical logic and its dual", *Journal of Logic and Computation*, 2021, Vol. 31, Iss. 2, pp. 597–611.

Miller, 2000 – Miller, D. "Paraconsistent logic for falsificationists", *Proc. 1st Workshop on Logic and Language (Universidad de Sevilla)*. Sevilla: Editorial Kronos s.a., 2000, pp. 197–204.

Mortensen, 1995 – Mortensen, C. *Inconsistent Mathematics*. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1995.

Priest, 2002 – Priest, G. "Paraconsistent Logic", *Handbook of Philosophical Logic*, Gabbay D.M., Guenthner F. (eds.). Dordrecht: Springer 2002, pp. 287–393.

Priest, 2007 – Priest, G. "Paraconsistency and Dialetheism", in: *Handbook of the History of Logic*, Vol. 8, D. Gabbay and J. Woods (eds.). Amsterdam, North Holland, 2007, pp. 129–204.

Priest, 2009 – Priest, G. "Dualising Intuitionictic Negation", *Principia: An International Journal of Epistemology*, 2009, Vol. 13, No. 2, pp. 165–184.

Priest et al., 2024 – Priest, G., Berto, F., Weber, Z. "Dialetheism", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2024 Edition), E.N. Zalta & U. Nodelman (eds.). [`https://plato.stanford.edu/entries/dialetheism/`, accessed on 20.12.2024].

Schröder, 1877 – Schröder, E. *Der Operationskreis des Logikkalküls.* Leipzig: B.G. Teubner, 1877.

Sette, Carnielli, 1995 – Sette, A.M., Carnielli, W.A. "Maximal Weakly-Intuitionistic Logics", *Studia Logica*, 1995, Vol. 55, pp. 181–203.

Shoesmith, Smiley, 1978 – Shoesmith, D.J., Smiley, T.J. *Multiple-Conclusion Logic.* Cambridge: Cambridge University Press, 1978. 409 p.

Shramko, 2005 – Shramko, Ya. "Dual intuitionistic logic and a variety of negations: The logic of scientific research", *Studia Logica*, 2005, Vol. 80, No. 2–3, pp. 347–367.

Stopa, 2022 – Stopa, M. *Intuitionistic logic versus paraconsistent logic. Categorical approach.*, A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy. Kraków: Jagiellonian University, 2022. [`https://philarchive.org/archive/STOILV`, accessed on 20.12.2024].

Sylvan, 1990 – Sylvan, R. "Variations on da Costa C Systems and dual-intuitionistic logics I. Analyses of C_ω and CC_ω", *Studia Logica*, 1990, Vol. 49, pp. 47–65.

Tomova, 2012 – Tomova, N.E. *Estestvennye trekhznachnye logiki: funktsional'nye svoistva i otnosheniya* [Natural three-valued logics: functional properties and relationships]. Moscow: IPh RAN, 2012. (In Russian)

Tomova, 2022 – Tomova, N.E. "K voprosu o kriterii paraneprotivorechivosti logik" [On the question of the criteria for the paraconsistency of logics], *Logical Investigations*, 2022, Vol. 28, No. 2, pp. 77–95. (In Russian)

Tomova, 2023 – Tomova, N.E. "K voprosu o kriterii parapolnoty logik" [On the question of the criteria for the paracompleteness of logics], *Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 104–124. (In Russian)

Troelstra, 1990 – Troelstra, A.S. "On the Early History of Intuitionistic Logic", in: *Mathematical Logic.* Petkov P.P. (ed.). Boston, MA: Springer, 1990.

Urbas, 1996 – Urbas, I. "Dual-intuitionistic logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1996, Vol. 37, No. 3, pp. 440–451.

Логические исследования
2025. Т. 31. № 1. С. 74–96
УДК 16

Logical Investigations
2025, Vol. 31, No. 1, pp. 74–96
DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-74-96

Evgeny V. Borisov

A tableau proof theory for CWPL

Evgeny V. Borisov
The Institute of Philosophy and Law,
the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
8 Nikolaeva Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.
E-mail: borisov.evgeny@gmail.com

Abstract: In a recent paper, I presented a logic accommodating crossworld predication (crossworld predication logic, CWPL). Crossworld predication is the ascription of relations to objects, each of which is associated with a possible world (intuitively, an object associated with a possible world is the object as it is in the possible world). CWPL is a first-order modal logic with equality and λ-operator. Its advantage over other logics for crossworld predication I am familiar with (in particular, the ones elaborated by Butterfield and Stirling, Wehmeier, and Kocurek) is that it is based on the standard first-order modal vocabulary. Semantically, it is based on crossworld interpretation of predicates that assigns extensions to each n-ary predicate with respect to n-tuples of possible worlds rather than single possible worlds. To be able to employ crossworld interpretation of predicates when evaluating formulae, truth values are relativized to partial functions from variables to possible worlds. In the article mentioned above, I described the syntax and semantics of CWPL; the aim of the present paper is elaborating a tableau proof theory for CWPL and establishing its weak soundness and completeness.

Keywords: First-order modal logic, possible world semantics, crossworld predication, tableau proof theory

For citation: Borisov E.V. "A tableau proof theory for CWPL", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 1, pp. 74–96. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-74-96

1. Introduction

This paper is a continuation of [Borisov, 2023] where I elaborated a logic (crossworld predication logic, CWPL) accommodating crossworld predication.[1] Crossworld predication is the ascription of relations to objects each of which is associated with a possible world (intuitively, an object associated with a possible world is the object as it is in the possible world). *E.g.,* the sentence "John

[1] An early version of CWPL was presented in [Borisov, 2020].

might have been taller than Mary is" involves crossworld predication, for it compares Mary, associated with the actual world, and John, associated with an alternative of the actual world. It is well known that crossworld predication cannot be reflected by means of standard possible world semantics, so some nonstandard logics were proposed to reflect this phenomenon ([Butterfield, Stirling, 1987; Wehmeier, 2012; Kocurek, 2016; Wehmeier, Rückert, 2019]). All of them are based on languages containing nonstandard symbols demanding nonstandard interpretation. The advantage of CWPL is that it is based on standard modal logic vocabulary. In [Borisov, 2023], I described CWPL's syntax and semantics, provided its translation into a two-sorted first-order logic, and compared its expressive power with that of Kocurek's hybrid logic. In the present paper, I provide a tableau proof theory for CWPL and show its (weak) soundness and completeness. The paper is outlined as follows. In section 2, I briefly describe CWPL's syntax and semantics;[2] then I present the CWPL tableau proof theory (section 3), and establish its soundness and completeness (section 4).

2. Syntax and semantics of CWPL

CWPL is based on the language $\mathcal{L}$, whose vocabulary includes a denumerable set VAR of individual variables $x, y, \dots$; a denumerable set CON of individual constants $a, b, \dots$; a set $PRED^n$ of n-ary predicate letters (P, Q, ...) for each positive natural number, in particular, the binary predicate symbol $=$ (it will be written in infix position); logical operators $\neg, \&, \Diamond, \exists, \lambda$ ($\vee, \rightarrow, \Box, \forall$ can be defined in the usual way); brackets; and a comma. All the above sets of symbols are pairwise disjoint.

The set $TERM$ of $\mathcal{L}$ terms is $VAR \cup CON$. The set FOR of $\mathcal{L}$ formulae is defined by the grammar

$$\varphi ::= P(x_1, \dots, x_n) \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \,\&\, \varphi_2) \mid \Diamond\varphi \mid \exists x\varphi \mid (\lambda x.\varphi)(t),$$

where $P \in PRED^n$, $x, x_1, \dots, x_n \in VAR$, and $t \in TERM$. Formulae of the form $P(x_1, \dots, x_n)$ are called atomic. Note that individual constants cannot occur in atomic formulae; they can only be combined with predicate letters using predicate abstraction. Free and bound occurrences of variables are defined as usual. In particular, free variable occurrences in $(\lambda x.\varphi)(t)$ are those in φ except for all occurrences of x, plus the displayed occurrence of t if t is a variable. *E.g.,* in $(\lambda x.P(x, y))(y)$ both occurrences of x are bound, and both occurrences of y are free.[3]

[2] In [Borisov, 2023], syntactic and semantic features of CWPL are discussed in detail.

[3] I use λ-operator in the spirit of [Stalnaker, Thomason, 1968], where it was shown that adding λ-operator to the language of first-order modal logic increases its expressivity. For more details see: [Fitting, Mendelsohn, 2023, Part V].

Convention. I will write $(\lambda x.\varphi)(t)$ as $(t/x)\varphi$ and omit outermost brackets in formulae of the form $(\varphi \,\&\, \psi)$.

Definition 1 (CWPL Model)**.** A CWPL model (model) $\mathcal{M}$ is a quadruple $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$, where:

- $\mathcal{G}$ is a nonempty set of possible worlds.
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G}^2$ is the accessibility relation.
- $(\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}$ is a family of nonempty sets — domains of possible worlds. The domain of the model, $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, is set to be $\bigcup_{w\in\mathcal{G}} \mathcal{D}_w$.
- $\mathcal{I}$ is the interpretation of individual constants and predicate letters with the following properties:
  - For each $a \in CON$, $\mathcal{I}(a) : \mathcal{G} \to \mathcal{D}(\mathcal{M})$.
  - For each $P \in PRED^n$, $\mathcal{I}(P) : \mathcal{G}^n \to \mathcal{P}(\mathcal{D}(\mathcal{M})^n)$.[4]
  - For all $w, u \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(=)(\langle w, u\rangle) = \{(e, e) : e \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\}$.

Definition 2 (Variable Valuation)**.** Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ be a model for $\mathcal{L}$. A variable valuation in $\mathcal{M}$ is a function from VAR to $\mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Definition 3 (Variant of a Variable Valuation)**.** Let v be a variable valuation in $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$, $e \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, $w \in \mathcal{G}$. Then v^e_x is a variable valuation in $\mathcal{M}$ such that $v^e_x(y) = \begin{cases} v(y) & \text{if } y \neq x, \\ e & \text{if } y = x. \end{cases}$

An important feature of CWPL semantics consists in relativizing truth not only to models, possible worlds, and variable valuations, as in standard semantics, but also to what I call VP-functions (V for “variable”, P for “possible world”).

Definition 4 (VP-Function)**.** Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ be a model. A VP-function in $\mathcal{M}$ is a partial function from VAR to $\mathcal{G}$.

Definition 5 (Variant of a VP-Function)**.** Let f be a VP-function in $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$, $w \in \mathcal{G}$, $x \in VAR$. Then f^w_x is the VP-function in $\mathcal{M}$, such that $f^w_x(y) = \begin{cases} w & \text{if } y = x, \\ f(y) & \text{if } y \neq x \;\&\; y \in dom(f), \\ \text{undefined} & \text{if } y \neq x \;\&\; y \notin dom(f), \end{cases}$
where $dom(f)$ is the domain of f.

[4] Note that $\mathcal{I}$ assigns P an extension for each n-tuple of possible worlds rather than for each single possible world. This distinguishes crossworld interpretation of predicates from standard (intraworld) interpretation.

Definition 6 (Grounded VP-Function)**.** Let f be a VP-function in $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ and $w \in \mathcal{G}$. Then $\overline{fw}$ is a total function from VAR to $\mathcal{G}$ such that $\overline{fw}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in dom(f), \\ w & \text{if } x \notin dom(f). \end{cases}$

Now we are in a position to define denotation, truth (satisfaction), and validity.

Definition 7 (Denotation)**.** Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ be a model, and v a variable valuation in $\mathcal{M}$. Then $v\mathcal{I}$ is a function of the type $TERM \to (\mathcal{G} \to \mathcal{D}(\mathcal{M}))$, such that for every $t \in TERM$ and $w \in \mathcal{G}$,
$v\mathcal{I}(t)(w) = \begin{cases} v(t) & \text{if } t \in VAR, \\ \mathcal{I}(t)(w) & \text{if } t \in CON. \end{cases}$

Definition 8 (Truth)**.** Truth ($\vDash$) is a relation between models, possible worlds, variable valuations, VP-functions, and $\mathcal{L}$ formulae. Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ be a model for $\mathcal{L}$; $w \in \mathcal{G}$; v a variable valuation in $\mathcal{M}$; f a VP-function in $\mathcal{M}$; $P \in PRED^n$, $x, x_1, \ldots, x_n$ variables; φ and ψ formulae; and t a term. Then:

- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash P(x_1, \ldots, x_n) \iff$
  $\iff \langle v(x_1), \ldots, v(x_n)\rangle \in \mathcal{I}(P)\big(\langle \overline{fw}(x_1), \ldots, \overline{fw}(x_n)\rangle\big)$.[5]
- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash \neg\varphi \iff \mathcal{M}, w, v, f \nvDash \varphi$.
- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash \varphi \,\&\, \psi \iff \mathcal{M}, w, v, f \vDash \varphi$ and $\mathcal{M}, w, v, f \vDash \psi$.
- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash \Diamond\varphi \iff (\exists u \in \mathcal{R}[w])\, \mathcal{M}, u, v, f \vDash \varphi$,
  where $\mathcal{R}[w] := \{u : w\mathcal{R}u\}$.
- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash \exists x\, \varphi \iff (\exists e \in \mathcal{D}_w)\, \mathcal{M}, w, v^e_x, f^w_x \vDash \varphi$.
- $\mathcal{M}, w, v, f \vDash (t/x)\varphi \iff \mathcal{M}, w, v_x^{v\mathcal{I}(t)(w)}, f^w_x \vDash \varphi$.[6]

When evaluating formulae, we operate with VP-functions as follows:

1) At the start of evaluation, we always take $\varnothing$ as a VP-function. (This motivates the definition of validity below.)
2) When processing an operator binding x ($\exists x$ or (t/x)) with respect to a possible world w and a VP-function f, we move from f to f^w_x.

[5]If $x_1, \ldots, x_n \in dom(f)$, the truth value of $P(x_1, \ldots, x_n)$ does not depend on the world of evaluation: For all $w, w' \in \mathcal{G}$, $\mathcal{M}, w, v, f \vDash P(x_1, \ldots, x_n)$ iff $\mathcal{M}, w', v, f \vDash P(x_1, \ldots, x_n)$. We will make use of this observation later.

[6]Recall, $(t/x)\varphi$ abbreviates $(\lambda x.\varphi)(t)$.

3) When processing an atomic formula with respect to a possible world w and a VP-function f, we move from f to $\overline{fw}$. This takes care of variables that are not in f's domain.

Definition 9 (CWPL-Validity)**.** A formula φ of $\mathcal{L}$ is CWPL-valid, $\vDash \varphi$, if for every model $\mathcal{M}$, every possible world w in $\mathcal{M}$, and every variable valuation v in $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash \varphi$.[7]

Remark 1. All semantic notions above are defined for $\mathcal{L}$ but they can easily be adapted to other formal languages. Below I will introduce another language $\mathcal{L}^+$ and apply semantic notions (that of variable valuation, VP-function, truth, etc.) to it, having in mind appropriately modified definitions.

Remark 2. In [Borisov, 2023] it is shown that the standard lemma of renaming bound variables holds for CWPL. That is, in CWPL $\exists x\varphi$ is equivalent to $\exists y\varphi^y_x$, and $(t/x)\varphi$ is equivalent to $(t/y)\varphi^y_x$, provided no free occurrence of x lies in the scope of $\exists y$ or (u/y) in φ, where φ^y_x is the result of substituting y for all free occurrences of x in φ.

Example 1. This example demonstrates CWPL's capability of formalizing crossworld predication in natural language. Let us evaluate the formula $(j/x)\Diamond(x/y)T(y,x)$[8] with respect to a model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$, a possible world $w \in \mathcal{G}$, a variable valuation v in $\mathcal{M}$, and the empty VP-function. With j standing for John and T for the relation of being taller, this formula represents the sentence *John might have been taller [than he is]*. Intuitively, the sentence is true with respect to $\mathcal{M}$, w, v, and $\varnothing$ iff John as he is in an alternative of w is taller than he is in w. We can check that our semantics provides these truth conditions:

$\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash (j/x)\Diamond(x/y)T(y,x)$
iff $\mathcal{M}, w, v^J_x, \varnothing^w_x \vDash \Diamond(x/y)T(y,x) \quad [J = \mathcal{I}(j)(w)]$
iff $(\exists u \in \mathcal{R}[w])\ \mathcal{M}, u, v^J_x, \varnothing^w_x \vDash (x/y)T(y,x)$
iff $(\exists u \in \mathcal{R}[w])\ \mathcal{M}, u, v^{JJ}_{xy}, \varnothing^{wu}_{xy} \vDash T(y,x)$
iff $(\exists u \in \mathcal{R}[w])\ \langle v^{JJ}_{xy}(y), v^{JJ}_{xy}(x)\rangle \in \mathcal{I}(T)\big(\langle \overline{\varnothing^{wu}_{xy}u}(y), \overline{\varnothing^{wu}_{xy}u}(x)\rangle\big)$
iff $(\exists u \in \mathcal{R}[w])\ \langle J, J\rangle \in \mathcal{I}(T)(\langle u, w\rangle)$, as desired.

[7] In [Borisov, 2023], I also considered another notion of validity: A formula is valid if it is true with respect to every model $\mathcal{M}$, every possible world of $\mathcal{M}$, every variable valuation in $\mathcal{M}$, and *every VP-function in* $\mathcal{M}$. Taking into account the special role of the empty VP-function in evaluating formulae, the notion in Definition 9 is preferable.

[8] In standard notation, $\big(\lambda x.\Diamond(\lambda y.T(y,x))(x)\big)(j)$.

Example 2. This example shows the specificity of CWPL semantics as compared with that of standard first-order modal logics. The formula

$$P(x) \,\&\, \exists y\, y = x \to \exists x \Box P(x) \tag{1}$$

is not valid in standard semantics, but it turns out to be CWPL-valid. Indeed, $\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash P(x) \,\&\, \exists y\, y = x$ iff

$$v(x) \in \mathcal{D}_w \cap \mathcal{I}(P)(w). \tag{2}$$

On the other hand, $\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash \exists x \Box P(x)$ iff

$$(\exists e \in \mathcal{D}_w)(\forall u \in \mathcal{R}[w])\; e \in \mathcal{I}(P)(w). \tag{3}$$

Clearly (2) implies (3), hence $\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash P(x) \,\&\, \exists y\, y = x \to \exists x \Box P(x)$. In section 3.2, (1) will be proved using CWPL tableau system.

3. CWPL Tableau System

In this section, I describe a CWPL tableau proof system and show its weak soundness and completeness. The system is based on the tableau system for first-order modal logic from [Fitting, Mendelsohn, 2023].

3.1. Preliminaries

In CWPL tableaus, formulae are supplied with prefixes. A prefix is a finite sequence of natural numbers separated by dots (*e.g.,* 1, 1.3, 1.3.2, 1.3.15). We can think of prefixes occurring on a tableau branch as possible worlds in a model. Thinking of them so, we assume that, for each prefix σ and each natural number n, $\sigma.n$ is accessible from σ. For instance, 1.3.2 and 1.3.15 are both accessible from 1.3.

In CWPL tableaus, formulae are written in an extension $\mathcal{L}^+$ of $\mathcal{L}$ (the definition of $\mathcal{L}^+$ formula is analogous to that of $\mathcal{L}$ formula). $\mathcal{L}^+$ contains, in addition to symbols of $\mathcal{L}$, symbols of the following shapes: x^τ, x^τ_σ, a^τ_σ, where $x \in VAR$, $a \in CON$, σ and τ are prefixes (recall, VAR is the set of $\mathcal{L}$'s variables, and CON is the set of $\mathcal{L}$'s individual constants). For instance, $\mathcal{L}^+$ contains the following expressions: $x^{1.7}$, $y^1_{1.3.2}$, $a^{1.7}_{1.3.2}$. Expressions of these types are variables, but they are never quantified in tableaus. The semantic meaning of subscripts and superscripts is this: Given a model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w \in \mathcal{G}}, \mathcal{I} \rangle$ whose possible worlds are prefixes, we have in mind a variable valuation v and a VP-function f in $\mathcal{M}$ such that $v(x^\tau_\sigma) \in \mathcal{D}_\sigma$, $f(x^\tau_\sigma) = f(x^\tau) = \tau$, $v(a^\tau_\sigma) = \mathcal{I}(a)(\sigma)$, and $f(a^\tau_\sigma) = \tau$. As we see, subscripts of variables under consideration characterize v and superscripts characterize f. Notice that the semantic meaning of subscripts of variables differs from that of subscripts of constants, whereas the semantic meaning of superscripts is the same for symbols of both types.

In CWPL tableaus, prefixed formulae are marked with $+$ or $-$, so the nodes of a CWPL tableau are of the form $\sigma\ \varphi +$ or $\sigma\ \varphi -$. The semantic meaning of $+$ and $-$ is very simple: Given $\mathcal{M}$, v and f from the previous paragraph, we can read $\sigma\ \varphi +$ as $\mathcal{M}, \sigma, v, f \vDash \varphi$, and $\sigma\ \varphi -$ as $\mathcal{M}, \sigma, v, f \nvDash \varphi$.

Convention. Let us call a free occurrence of a variable in a formula nonmodal if it does not lie in the scope of a modal operator. *E.g.*, in $\forall x R(x, y) \to \Diamond P(y)$ only the first occurrence of y is a nonmodal free occurrence. If φ is a formula, φ^σ is the result of substituting each nonmodal free occurrence of x in φ with x^σ, for each $x \in VAR$. *E.g.*, $\big(\forall x R(x, y) \to \Diamond P(y)\big)^{1.2} = \forall x R(x, y^{1.2}) \to \Diamond P(y)$.

If φ is an $\mathcal{L}$ formula, a tableau starting with $1\ \varphi^1\ -$ and growing according to the rules listed in section 3.2 is called a tableau for φ. (Note that φ^1 is an $\mathcal{L}^+$ formula.) A tableau branch is said to be closed if it contains either $\sigma\,\varphi +$ and $\sigma\,\varphi -$ for some φ and σ, or $\sigma\,\varphi +$ and $\tau\,\varphi -$ for some *atomic* φ and some σ and τ.[9] Otherwise it is said to be open. A tableau is closed if all its branches are closed. A CWPL tableau proof of an $\mathcal{L}$ formula φ is a closed tableau for φ.

Convention. $\vdash \varphi$ says that φ has a CWPL tableau proof.

3.2. CWPL Tableau Rules

CWPL tableau rules include rules for propositional connectives, modal operators, quantifiers, λ-abstraction, and equality. In the rules below, φ and ψ stand for formulae; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \sigma$ and τ for prefixes; and n for natural numbers. I give rules not only for primitive operators, but also for $\vee, \to, \Box$, and $\forall$.

Propositional Rules

Conjunctive Rules:

$$\frac{\sigma\ \varphi \,\&\, \psi\ +}{\sigma\ \varphi\, +,\ \sigma\ \psi\ +} \qquad \frac{\sigma\ \varphi \vee \psi\ -}{\sigma\ \varphi\, -,\ \sigma\ \psi\ -} \qquad \frac{\sigma\ \varphi \to \psi\ -}{\sigma\ \varphi\, +,\ \sigma\ \psi\ -}$$

Disjunctive Rules:

$$\frac{\sigma\ \varphi \,\&\, \psi\ -}{\sigma\ \varphi\, -\ \mid\ \sigma\ \psi\ -} \qquad \frac{\sigma\ \varphi \vee \psi\ +}{\sigma\ \varphi\, +\ \mid\ \sigma\ \psi\ +} \qquad \frac{\sigma\ \varphi \to \psi\ +}{\sigma\ \varphi\, -\ \mid\ \sigma\ \psi\ +}$$

| between prefixed formulae below the line indicates branching.

Negation Rules:

$$\frac{\sigma\ \neg\varphi\ +}{\sigma\ \varphi\ -} \qquad \frac{\sigma\ \neg\varphi\ -}{\sigma\ \varphi\ +}$$

[9] The second type of closure is motivated by the observation in footnote 5.

Modal Rules

Possibility Rules:

$$\frac{\sigma\ \Diamond\varphi\ +}{\sigma.n\ \varphi^{\sigma.n}\ +} \qquad \frac{\sigma\ \Box\varphi\ -}{\sigma.n\ \varphi^{\sigma.n}\ -}$$

$\sigma.n$ should be new to the branch.

Necessity Rules:

$$\frac{\sigma\ \Box\varphi\ +}{\sigma.n\ \varphi^{\sigma.n}\ +} \qquad \frac{\sigma\ \Diamond\varphi\ -}{\sigma.n\ \varphi^{\sigma.n}\ -}$$

$\sigma.n$ should already occur on the branch. The rule may be applied to $\sigma\ \Box\varphi\ +$ ($\sigma\ \Diamond\varphi\ -$) many times — once for each prefix $\sigma.n$ occurring on the branch.

CWPL Rules for Quantifiers

Convention. We can write a formula φ as $\varphi(x)$, whether or not x occurs in φ. If we do so, $\varphi(t)$ is the result of substituting each free occurrence of x in φ with an occurrence of the term t.

Existential Quantification Rules:

$$\frac{\sigma\ \exists x\ \varphi(x)\ +}{\sigma\ \varphi(y^\sigma_\sigma)\ +} \qquad \frac{\sigma\ \forall x\ \varphi(x)\ -}{\sigma\ \varphi(y^\sigma_\sigma)\ -}$$

y^τ_σ does not occur on the branch with any τ.

Universal Quantification Rules:

$$\frac{\sigma\ \forall x\ \varphi(x)\ +}{\sigma\ \varphi(y^\sigma_\sigma)\ +} \qquad \frac{\sigma\ \exists x\ \varphi(x)\ -}{\sigma\ \varphi(y^\sigma_\sigma)\ -}$$

y^τ_σ can already occur on the branch for some τ or be new to the branch for any τ. The rule can be applied many times — once for each y^τ_σ, no matter whether it occurs on the branch.

Observe that if we apply this rule, *e.g.*, to $\sigma\ \forall x\ P(x)\ +$ using y^τ_σ, we obtain $\sigma\ P(y^\sigma_\sigma)\ +$, not $\sigma\ P(y^\tau_\sigma)\ +$, and analogously for other quantifier rules. This is semantically motivated by the fact that when we evaluate $\forall x\ \varphi$ or $\exists x\ \varphi$ with respect to (the possible world) σ, we associate x with σ, no matter with what prefix (if any) x was associated previously.

Convention. Let $*$ be a variable ranging over $\{+,-\}$.

Abstraction Rules

$$\frac{\sigma\ (a/x)\varphi(x)\ *}{\sigma\ \varphi(a^{\sigma}_{\sigma})\ *} \qquad \frac{\sigma\ (t^{\rho}_{\tau}/x)\varphi(x)\ *}{\sigma\ \varphi(t^{\sigma}_{\tau})\ *} \qquad \frac{\sigma\ (y^{\tau}/x)\varphi(x)\ *}{\sigma\ \varphi(y^{\sigma})\ *}$$

where $a \in CON$, $t \in CON \cup VAR$, $y \in VAR$.

Note that in the first rule, a in (a/x) has neither a subscript nor a superscript, in the second rule, t in (t^{ρ}_{τ}/x) has both a subscript and a superscript, and in the third rule, y in (y^{τ}/x) has a subscript but no superscript. Thus, these rules are for disjoint types of formulae. Note also that the superscripts of t or y above the line do not matter. For instance, applying this rule to $\sigma\ (t^{\rho}_{\tau}/x)\varphi(x)\ +$, we obtain $\sigma\ \varphi(t^{\sigma}_{\tau})\ +$, not $\sigma\ \varphi(t^{\rho}_{\tau})\ +$ (see the comment on Universal Quantification Rules). Finally, note that we do not need abstraction rules for $(y/x)\varphi$, where $y \in VAR$ because formulae of this shape cannot occur in CWPL tableaus. This is so because in CWPL tableaus, variables without superscripts cannot have free nonmodal occurrences.

Equality Rules

Convention. If $t \in VAR \cup CON$, the expression $t^{\beta}_{(\alpha)}$ can stand both for t^{β} and t^{β}_{α}: placing the subscript in parentheses indicates that it can be absent.

Reflexivity Rule
If the term $t^{\beta}_{(\alpha)}$ and the prefixes γ, δ, and σ occur on a branch, we can add $\sigma\ t^{\gamma}_{(\alpha)} = t^{\delta}_{(\alpha)}\ +$ to the branch.
Substitution Rule
If α, β, γ, δ, ε are prefixes occurring on the branch, and $\varphi(x)$ is a formula in $\mathcal{L}^{+}$ where x occurs free, $t, u \in VAR \cup CON$,

$$\frac{\sigma\ t^{\beta}_{(\alpha)} = u^{\delta}_{(\gamma)}\ + \qquad \tau\ \varphi(t^{\varepsilon}_{(\alpha)})\ *}{\tau\ \varphi(u^{\varepsilon}_{(\gamma)})\ *}.$$

Observe that u retains its subscript, if it has it above the line, and inherits the superscript from t. Here is an example of application of the rule:

$$\frac{\sigma\ a^{\beta}_{\alpha} = x^{\delta}_{\gamma}\ + \qquad \tau\ P(a^{\varepsilon}_{\alpha})\ +}{\tau\ \varphi(x^{\varepsilon}_{\gamma})\ +}.$$

Remark 3. In a tableau for a formula φ, $\mathcal{L}$'s variables cannot have free nonmodal occurrences, only variables with superscripts and possible subscripts can have them. In particular, variables do not occur without superscripts in atomic formulae. This is because: 1) In the root of the tree, we have φ^{1}, not φ. 2) When applying a modal rule to $\sigma\ \Diamond\psi$ or $\sigma\ \Box\psi$, we obtain $\sigma.n\ \psi^{\sigma.n}$, not $\sigma.n\ \psi$.

Remark 4. Since $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ and $\Box$ are not primitive, the admissibility of rules for these operators should be established. This is straightforward. Let us check, *e.g.*, the admissibility of the rules for $\Box$.

1) Suppose we have $\sigma\ \Box\varphi\ +$, *i.e.* $\sigma\ \neg\Diamond\neg\varphi\ +$, on a tableau branch. Applying the appropriate rule for $\neg$, we obtain $\sigma\ \Diamond\neg\varphi\ -$. Then, by the appropriate Necessity Rule, we obtain $\sigma.n\ \neg\varphi^{\sigma.n}\ -$ with $\sigma.n$ already occurring on the branch, and finally, by the appropriate rule for $\neg$, $\sigma.n\ \varphi^{\sigma.n}\ +$, as it should be.

2) Suppose we have $\sigma\ \Box\varphi\ -$, *i.e.* $\sigma\ \neg\Diamond\neg\varphi\ -$, on a tableau branch. Successively applying the appropriate rules for $\neg$, $\Diamond$ and $\neg$, we obtain $\sigma\ \Diamond\neg\varphi\ +$, $\sigma.n\ \neg\varphi^{\sigma.n}\ +$ with $\sigma.n$ being new on the branch, and finally $\sigma.n\ \varphi^{\sigma.n}\ -$, as it should be.

The admissibility of the rules for $\vee$, $\rightarrow$, and $\forall$ can be checked in the same way.

Example 3. Here is a CWPL tableau proof of

$$\forall x\Diamond(x/y)R(y,x) \rightarrow \big(\exists x(a/y)x = y \rightarrow (a/x)\Diamond(x/y)R(y,x)\big). \tag{4}$$

The formula can express, for instance, the following idea: If everyone might have been richer than they are, and if Jim Morrison were alive, he might have been richer than he is.

(1)	$1\ (4)\ -$	
(2)	$1\ \forall x\Diamond(x/y)R(y,x)\ +$	(1, &)
(3)	$1\ \big(\exists x(a/y)x = y \rightarrow (a/x)\Diamond(x/y)R(y,x)\big)\ -$	(1, &)
(4)	$1\ \exists x(a/y)x = y\ +$	(3, &)
(5)	$1\ (a/x)\Diamond(x/y)R(y,x)\ -$	(3, &)
(6)	$1\ (a/y)x_1^1 = y\ +$	(4, $\exists$)
(7)	$1\ x_1^1 = a_1^1\ +$	(6, λ)
(8)	$1\ \Diamond(a_1^1/y)R(y,a_1^1)\ -$	(5, λ)
(9)	$1\ \Diamond(x_1^1/y)R(y,x_1^1)\ +$	(2, $\forall$)
(10)	$1.1\ (x_1^1/y)R(y,x_1^1)\ +$	(9, $\Diamond$)
(11)	$1.1\ R(x_1^{1.1},x_1^1)\ +$	(10, λ)
(12)	$1.1\ (a_1^1/y)R(y,a_1^1)\ -$	(8, $\Box$)
(13)	$1.1\ R(a_1^{1.1},a_1^1)\ -$	(12, λ)
(14)	$1.1\ R(a_1^{1.1},a_1^1)\ +$	(7, 11, $=$)

Closure: 13, 14.

In the left column, the lines are enumerated. In the right column, for each line except (1), it is specified from which line(s) and by which type of rule it is obtained. Here, & refers to Conjunctive Rules, $\Diamond$ refers to Possibility Rules, and so on. For example, "(5, λ)" in (8) says that the line is obtained from (5) by one of Abstraction Rules.

Example 4. This is the proof of (1).

(1)	$1\ P(x^1)\,\&\,\exists y\, y = x^1 \to \exists x \Box P(x)\ -$	
(2)	$1\ P(x^1)\,\&\,\exists y\, y = x^1\ +$	(1, &)
(3)	$1\ \exists x \Box P(x)\ -$	(1, &)
(4)	$1\ P(x^1)\ +$	(2, &)
(5)	$1\ \exists y\, y = x^1\ +$	(2, &)
(6)	$1\ y_1^1 = x^1\ +$	(5, $\exists$)
(7)	$1\ \Box P(y_1^1)\ -$	(3, $\forall$)
(8)	$1\ \Box P(x^1)\ -$	(6, 7, =)
(9)	$1.1\ P(x^1)\ -$	(8, $\Diamond$)

Closure: 4, 9.

Note that we have $(1)^1$ instead of (1) in the first line. Note also that in this proof we have the second type of closure.

4. Soundness and Completeness of the CWPL Proof System

In this section, I show that for all $\mathcal{L}$ formulae φ, $\vDash \varphi$ iff $\vdash \varphi$.

4.1. Preliminaries

Convention. Let f and g be VP-functions in a model, and $x \in VAR$. Then $f \overset{x}{=} g$ says that f and g behave similarly with respect to x, *i.e.* $x \notin dom(f) \cup dom(g)$ or $f(x) = g(x)$.

We will need the following three lemmas.

Lemma 1. *Let $\varphi(x)$ be a formula; $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ a model; v and u variable valuations in $\mathcal{M}$; f and g VP-functions in $\mathcal{M}$; $w \in \mathcal{G}$; and let the following hold:*

- *y is free for x in $\varphi(x)$;*
- $\big(\forall z \in FV(\varphi(x)) \setminus \{x\}\big)\ v(z) = u(z)$;
- $v(x) = u(y)$;
- $\big(\forall z \in FV(\varphi(x)) \setminus \{x\}\big) f \overset{z}{=} g$;
- $(x \notin dom(f)\ \&\ y \notin dom(g))$ *or* $f(x) = g(y)$.

Then

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash \varphi(x) \iff \mathcal{M}, w, u, g \vDash \varphi(y).$$

Proof. By induction on the complexity of φ. ■

Corollary 1. Let φ be a formula; $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ a model; v and u variable valuations in $\mathcal{M}$; f and g VP-functions in $\mathcal{M}$; $w \in \mathcal{G}$; and suppose $(\forall x \in FV(\varphi))\,(v(x) = u(x)\,\&\, f \overset{x}{=} g)$. Then

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash \varphi \iff \mathcal{M}, w, u, g \vDash \varphi.$$

Proof. In conditions of Lemma 1, set $x = y$. ■

Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ be a model; $w \in \mathcal{G}$, v a variable valuation in $\mathcal{M}$; and f and g VP-functions in $\mathcal{M}$, such that f is not defined for x, and $g(x) = w$. It is easy to see that the following holds:

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash P(x) \iff \mathcal{M}, w, v, g \vDash P(x).$$

The difference between f and g does not affect the truth value of $P(x)$, because $\overline{fw}(x) = \overline{gw}(x)$. On the other hand, the following can fail:

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash \Diamond P(x) \iff \mathcal{M}, w, v, g \vDash \Diamond P(x),$$

because $\overline{fw'}(x)$ may differ from $\overline{gw'}(x)$, where w' is the possible world where we arrive after processing $\Diamond$. Combining these two observations yields this:

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash P(x)\,\&\,\Diamond P(x) \iff \mathcal{M}, w, u, g \vDash P(y)\,\&\,\Diamond P(x),$$

provided $v(x) = u(x) = u(y)$, $x \notin dom(f) \cup dom(g)$, and $g(y) = w$. The following lemma generalizes this observation.

Lemma 2. *Let φ be a formula, $x_1, \ldots, x_n$ ($n \geq 0$) be some (not necessarily all) of variables having free nonmodal occurrences in φ, and $x'_1, \ldots, x'_n$ not occur in φ ($x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$ are pairwise distinct). Let φ' be the result of substituting x'_i for all free nonmodal occurrences of x_i in φ, for all $i \leq n$.*[10] *Finally, let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ be a model; v and u variable valuations in $\mathcal{M}$; f and g VP-functions in $\mathcal{M}$; and $w \in \mathcal{G}$; and let the following hold:*

- $(\forall x \in FV(\varphi))\; v(x) = u(x)$.
- $(\forall i \leq n)\; v(x_i) = u(x'_i)$.
- $(\forall i \leq n)\; (x_i \notin dom(f)\,\&\, g(x'_i) = w)$.
- $\big(\forall z \in FV(\varphi) \setminus \{x_1, \ldots x_n\}\big)\, f \overset{z}{=} g$.

[10]Here is an example: $\varphi = Q(x, y) \to \Diamond Q(x, y)$, $\varphi' = Q(x', y) \to \Diamond Q(x, y)$.

Then

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash \varphi \iff \mathcal{M}, w, u, g \vDash \varphi'.$$

Proof. By induction on the complexity of φ. The base case immediately follows from Definition 8. The only interesting inductive case is when $\varphi = \exists x\psi$. In this case, φ' is $\exists x\psi'$, where ψ' is the result of substituting x'_i for all nonmodal occurrences of x_i in ψ for each $i \leq n$. By Definition 8,

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash \varphi \iff (\exists e \in \mathcal{D}_w)\, \mathcal{M}, w, v^e_x, f^w_x \vDash \psi \tag{5}$$

and

$$\mathcal{M}, w, u, g \vDash \varphi' \iff (\exists e \in \mathcal{D}_w)\, \mathcal{M}, w, u^e_x, g^w_x \vDash \psi'. \tag{6}$$

We must show that the conditions of the lemma hold for $\psi, \psi', \mathcal{M}, w, v^e_x, u^e_x, f^w_x$, and g^w_x (*). Having shown this, we then apply the inductive hypothesis to $\psi, \psi', \mathcal{M}, w, v^e_x, u^e_x, f^w_x$, and g^w_x, which, together with (5) and (6), yields the desired biconditional:

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash \exists x\psi \iff \mathcal{M}, w, u, g \vDash \exists x\psi'.$$

If $x \notin FV(\psi)$, (*) is trivial. If $x \in FV(\psi)$, (*) follows from the facts that $v^e_x(x) = u^e_x(x)$ and $f^w_x(x) = f^w_x(x)$. ■

Lemma 3. *Let $\mathcal{L}^*$ be a language resulting from $\mathcal{L}$ by adding to VAR infinitely many new variables. Let $\mathcal{M}$ be a model, v a valuation of $\mathcal{L}$'s variables in $\mathcal{M}$, and v^* a valuation of $\mathcal{L}^*$'s variables such that for every $x \in VAR$, $v^*(x) = v(x)$. Finally, let w be a possible world in $\mathcal{M}$, and φ an $\mathcal{L}$ formula (of course, φ is also an $\mathcal{L}^*$ formula). Then*

$$\mathcal{M}, w, v, \varnothing \vDash \varphi \iff \mathcal{M}, w, v^*, \varnothing \vDash \varphi.$$

Proof. By straightforward induction on the structure of φ. ■

Now we are in a position to establish $CWPL$'s soundness.

4.2. Soundness

Definition 10 (Satisfiable Set of Marked Prefixed $\mathcal{L}^+$ formulae)**.** Let S be a set of marked prefixed $\mathcal{L}^+$ formulae and $PREF$ the set of prefixes occurring in S. Recall, $\mathcal{L}^+$ contains variables with subscripts and superscripts; let the subscripts and superscripts of variables occurring in S belong to $PREF$. S is said to be satisfiable if there are a model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w \in \mathcal{G}}, \mathcal{I} \rangle$, a variable valuation v in $\mathcal{M}$, a VP-function f in $\mathcal{M}$, and a mapping $\theta : PREF \to \mathcal{G}$ such that:

1. $\sigma, \sigma.n \in PREF \implies \theta(\sigma)\mathcal{R}\theta(\sigma.n)$.

2. For all $x \in VAR$ and $\sigma, \alpha, \beta \in PREF$, $v(x^{\sigma}) = v(x)$ and $v(x^{\alpha}_{\sigma}) = v(x^{\beta}_{\sigma})$.

3. If $x \in VAR$ and x^{τ}_{σ} occurs in S for some τ, $v(x^{\tau}_{\sigma}) \in \mathcal{D}_{\theta(\sigma)}$ for any τ.

4. If $a \in CON$ and a^{τ}_{σ} occurs in S, $v(a^{\tau}_{\sigma}) = \mathcal{I}(a)(\theta(\sigma))$.

5. If $t^{\tau}_{(\sigma)}$ occurs in S, $f(t^{\tau}_{(\sigma)}) = \theta(\tau)$.

6. If $t^{\tau}_{(\sigma)}$ does not occur in S, $t^{\tau}_{(\sigma)} \notin dom(f)$.

7. $VAR \cap dom(f) = \varnothing$.

8. $\sigma\ \varphi + \in S \implies \mathcal{M}, \theta(\sigma), v, f \vDash \varphi$.

9. $\sigma\ \varphi - \in S \implies \mathcal{M}, \theta(\sigma), v, f \nvDash \varphi$.

Let us call a branch B of a tree satisfiable if the set of marked prefixed formulae occurring on B is satisfiable.

Lemma 4. *Let B be a satisfiable branch of a tableau for a formula. Then if we apply a nondisjunctive rule on B, the resulting branch is satisfiable, and if we apply a disjunctive rule on B, at least one of the resulting branches is satisfiable.*

Proof. To establish the lemma, we have to consider the application of each CWPL tableau rule. I confine myself to the case of Possibility Rules and the case of Existential Rules. Let S be the set of marked prefixed formulae occurring on B, $PREF$ the set of prefixes occurring on B, and for each case to be considered, let α be the marked prefixed formula in S to which the rule under consideration is applied, and α' the marked prefixed formula added to B as the result of the application of the rule. Finally, let S' be $S \cup \{\alpha'\}$. For each case to be considered, we must show that S' is satisfiable.

1. *The case of Possibility Rules.* Let α be $\sigma\ \Diamond\varphi\ +$. Then $\alpha' = \sigma.n\ \varphi^{\sigma.n}\ +$ with $\sigma.n \notin PREF$. Since $\sigma\ \Diamond\varphi + \in S$, we have $\mathcal{M}, \theta(\sigma), v, f \vDash \Diamond\varphi$, hence there is a possible world $w \in \mathcal{G}$ such that $\theta(\sigma)\mathcal{R}w$ and

$$\mathcal{M}, w, v, f \vDash \varphi. \tag{7}$$

Choose such a world w. Let $\{x_1, \ldots, x_n\}$ be the set of $\mathcal{L}$'s variables having free nonmodal occurrences in φ.[11] Then $\varphi^{\sigma.n}$ is the result of substituting $x_i^{\sigma.n}$ for all free nonmodal occurrences of x_i in φ $(1 \leq i \leq n)$. Define v' as follows:

[11]The expressions "x_1", ..., "x_n" are metalinguistic variables for $\mathcal{L}$'s variables. Note that $\mathcal{L}$'s variables do not have subscripts despite the fact that these metalinguistic expressions do.

$$v'(y) = \begin{cases} v(x_i) & \text{if } y = x_i^{\sigma.n}\ (1 \leq i \leq n), \\ v(y) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Note that f is undefined for $x_1, \ldots, x_n, x_1^{\sigma.n}, \ldots, x_n^{\sigma.n}$ because $x_1, \ldots, x_n \in VAR$ and $x_1^{\sigma.n}, \ldots, x_n^{\sigma.n}$ are new to S. Define f' as $f \cup \{\langle x_1^{\sigma.n}, w\rangle, \ldots, \langle x_n^{\sigma.n}, w\rangle\}$. It follows from (7) and lemma 2 that

$$\mathcal{M}, w, v', f' \vDash \varphi^{\sigma.n}. \tag{8}$$

Define θ' as $\theta \cup \{\langle \sigma.n, w\rangle\}$. Now I claim that S' is satisfiable using $\mathcal{M}$, v', f' and θ'. Let us make sure that conditions 7 and 8 of Definition 10 are met. For each variable x occurring free in any member of S, $v(x) = v'(x)$ and $f \overset{x}{=} f'$. Hence, by Corollary 1,

$$\mathcal{M}, s, v, f \vDash \psi \iff \mathcal{M}, s, v', f' \vDash \psi$$

for all formulae ψ occurring in S and all $s \in \mathcal{G}$. This, together with the fact that S is satisfiable using $\mathcal{M}$, v, f, and θ, and the fact that θ and θ' agree on all prefixes occurring in S, entails that for any formula ψ and any prefix τ,

$$\tau\,\psi + \in S \implies \mathcal{M}, \theta'(\tau), v', f' \vDash \psi \tag{9}$$

and

$$\tau\,\psi - \in S \implies \mathcal{M}, \theta'(\tau), v', f' \nvDash \psi. \tag{10}$$

We also have $\theta'(\sigma.n) = w$, which, together with (8), yields

$$\mathcal{M}, \theta'(\sigma.n), v', f' \vDash \varphi^{\sigma.n}. \tag{11}$$

(9), (10), and (11) show that conditions 8 and 9 of Definition 10 are met with respect to S', $\mathcal{M}$, v', f' and θ'. It can readily be checked that other conditions of Definition 10 are met as well.

The case when α is $\sigma\,\Box\varphi\,-$ is analogous.

2. *The case of Existential Quantification Rules.* Let α be $\sigma\,\exists x\varphi(x)\,+$. Then $\alpha' = \sigma\ \varphi(y_\sigma^\sigma)+$ with y_σ^τ not occurring in S for any τ. Since $\sigma\,\exists x\varphi(x) \in S$, $\mathcal{M}, \theta(\sigma), v, f \vDash \exists x\varphi(x)$. Hence there is a member e of $\mathcal{D}_{\theta(\sigma)}$ such that $\mathcal{M}, \theta(\sigma), v_x^e, f_x^{\theta(\sigma)} \vDash \varphi(x)$. By Lemma 1, this is equivalent to

$$\mathcal{M}, \theta(\sigma), v_{y_\sigma^\sigma}^e, f_{y_\sigma^\sigma}^{\theta(\sigma)} \vDash \varphi(y_\sigma^\sigma). \tag{12}$$

It remains to check that S' is satisfiable using $\mathcal{M}$, $v_{y_\sigma^\sigma}^e$, $f_{y_\sigma^\sigma}^{\theta(\sigma)}$ and θ. Since $v_{y_\sigma^\sigma}^e(y_\sigma^\sigma) = e \in \mathcal{D}_{\theta(\sigma)}$ and $f_{y_\sigma^\sigma}^{\theta(\sigma)}(y_\sigma^\sigma) = \theta(\sigma)$, conditions 2 and 4 of Definition 10 are met. The fulfillment of conditions 8 and 9 follows from Lemma 1, (12) and the fact that y^σ_σ is new to B, hence for each variable x occurring free in any member of S, $v(x) = v^e_{y^\sigma_\sigma}(x)$, and $f \overset{x}{=} f^{\theta(\sigma)}_{y^\sigma_\sigma}$. The fulfillment of other conditions can readily be checked.

The case when α is $\sigma\ \forall x\varphi(x)-$ is analogous. ■

Now we are in a position to establish the soundness of the CWPL tableau proof theory.

Theorem. *For all formulae φ in $\mathcal{L}$, $\vdash \varphi \implies \vDash \varphi$.*

Proof. We proceed contrapositively. Suppose φ is a nonvalid $\mathcal{L}$ formula. Then

$$\mathcal{M}, w, v, \varnothing \nvDash \varphi$$

for some $\mathcal{M}$, w, and v, where v is a valuation of $\mathcal{L}$ variables in $\mathcal{M}$. Then, by Lemma 3,

$$\mathcal{M}, w, v', \varnothing \nvDash \varphi \tag{13}$$

with v' being any valuation of $\mathcal{L}^+$ variables that agrees with v on all $\mathcal{L}$ variables. Let X be the set of variables having free nonmodal occurrences in φ. (Since φ is an $\mathcal{L}$ formula, $X \subset VAR$.) Then φ^1 is an $\mathcal{L}^+$ formula that results from substituting x^1 for all free nonmodal occurrences of x in φ for all $x \in X$. Define v'' as follows:

$$v''(y) = \begin{cases} v(x) & \text{if } y = x^1 \text{ and } x \in X, \\ v'(y) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Finally, define f as $\{\langle x^1, w\rangle : x \in X\}$. By Lemma 2, (13) entails

$$\mathcal{M}, w, v'', f \nvDash \varphi^1.$$

Now $\{1\ \varphi^1 -\}$ is satisfiable using $\mathcal{M}$, v'', f, and $\theta = \{\langle 1, w\rangle\}$. It follows by Lemma 4 that every tableau starting with $1\ \varphi^1 -$ has a satisfiable branch. But a satisfiable branch cannot be closed, so every tableau starting with $1\ \varphi^1 -$ has an open branch, hence $\nvdash \varphi$.

■

4.3. Completeness

Let us call a tableau saturated if on each of its open branches every tableau rule is applied wherever it can be applied. This informal notion can be made precise by defining saturated tableaus as tableaus generated by systematic tableau construction. In [Fitting, Mendelsohn, 2023, pp. 206–208] systematic tableau construction is defined for standard first-order modal logic; below I adapt their definition to CWPL.

The CWPL systematic tableau construction for a formula φ goes in stages. At stage 1 write down 1 φ^1 $-$. If stage n has been completed and the construction has not terminated, start stage $n+1$. At stage $n+1$ each open branch is processed from left to right. To process an open branch, do two things: (i) For all terms $t^{\beta}_{(\alpha)}$ and prefixes σ, γ, δ occurring on the branch, add σ $t^{\gamma}_{(\alpha)} = t^{\delta}_{(\alpha)}$ $+$ to the branch end, unless this prefixed marked formula already occurs there. (ii) Go through the branch from bottom to top and process all occurrences of prefixed marked formulae that lie on it. When processing an occurrence of a prefixed marked formula on a branch B, we sometimes add a formula to the end of B, and sometimes we split the end of B and add a formula to the end of each of the resulting branches. In any case, we add a prefixed marked formula to a branch only if it does not already occur there. This proviso holds for all items in the list below. For items 7 and 8 we use an (any) enumeration of $\mathcal{L}$ variables and write them as $x_1, x_2, \ldots$ To process an occurrence of a prefixed marked formula χ, do the following for each open branch on which that occurrence of χ lies.

1. If χ is σ $\neg\varphi$ $+$, add σ φ $-$ to the branch end.

2. If χ is σ $\neg\varphi$ $-$, add σ φ $+$ to the branch end.

3. If χ is σ φ & ψ $+$, add σ φ $+$ and σ ψ $+$ to the branch end.

4. If χ is σ φ & ψ $-$ and neither σ φ $-$ nor σ ψ $-$, occurs on the branch, split the branch and add σ φ $-$ to the left fork and σ ψ $-$ to the right one.

5. If χ is σ $\Diamond\varphi$ $+$, and $\sigma.n$ φ $+$ does not occur on the branch for any n, add $\sigma.n$ φ $+$ with n being the smallest natural number such that $\sigma.n$ is new to the branch.

6. If χ is σ $\Diamond\varphi$ $-$, add $\sigma.n$ φ $-$ to the branch end for each n such that $\sigma.n$ occurs on the branch.

7. If χ is σ $\exists x\varphi(x)$ $+$, and σ $\varphi(y^{\tau}_{\sigma})$ $+$ does not occur on the branch for any y and τ, add σ $\varphi(y^{\sigma}_{\sigma})$ $+$ to the branch end, where y is the alphabetically first $\mathcal{L}$ variable such that y^{τ}_{σ} does not occur on the branch for any τ.

8. If χ is $\sigma\ \exists x\varphi(x)\ -$, then for each $y \in \{x_1, ..., x_{n+1}\}$, add $\sigma\ \varphi(y^\sigma_\sigma)\ -$ to the branch end.

9. If χ is $\sigma\ (a/x)\varphi(x) *$ with $a \in CON$, add $\sigma\ \varphi(a^\sigma_\sigma) *$ to the branch end. (Recall, $* \in \{+, -\}$.)

10. If χ is $\sigma\ (t^\rho_\tau/x)\varphi(x) *$ with $t \in CON \cup VAR$, add $\sigma\ \varphi(t^\sigma_\tau) *$ to the branch end.

11. If χ is $\sigma\ (y^\tau/x)\varphi(x) *$ with $y \in VAR$, add $\sigma\ \varphi(y^\sigma) *$ to the branch end.

12. For all prefixes α, β, γ, δ, ε, σ, τ, all $t \in VAR \cup CON$, and all $\mathcal{L}^+$ formulae $\varphi(x)$ with $x \in FV(\varphi(x))$, if $\sigma\ t^\beta_{(\alpha)} = u^\delta_{(\gamma)}\ +$ and $\tau\ \varphi(t^\varepsilon_{(\alpha)}) *$ occur on the branch, add $\tau\ \varphi(u^\varepsilon_{(\gamma)}) *$ to the branch end.

The systematic tableau construction terminates after stage k if one of the following holds: 1) the tableau is closed; 2) no formula has been added to the tableau at stage k.

Remark 5. The procedure described is not deterministic, but it can be made so using enumerations variables, constants, prefixes, and formulae. Return, *e.g.*, to (i). Suppose we have to add $1\ x^1 = x^1\ +$ and $1\ y^1 = y^1\ +$ to the branch. It is not specified in (i) what formula goes first but we can determine it by saying that $1\ x^1 = x^1\ +$ goes first just in case x precedes y in the enumeration of $\mathcal{L}$ variables.

Remark 6. Saturated trees can be infinite. So is, *e.g.*, the tree for $\exists x P(x)$.

Let B be an open branch of a saturated tableau, S the set of marked prefixed formulae on B, and $PREF$ the set of prefixes occurring on B. Due to the saturatedness of the tableau under consideration, S has some properties generated by the CWPL tableau rules. For instance, this one is generated by one of Existential Quantification Rules:

$$\sigma\ \exists x\varphi(x) + \in S \implies (\exists y \in VAR)\, \sigma\ \varphi(y^\sigma_\sigma) + \in S. \tag{14}$$

To establish CWPL's completeness, we proceed as follows. Suppose φ is a nontheorem in $\mathcal{L}$. Then the saturated tree starting with $1\ \varphi^1\ -$ contains an open branch B. Let S be the set of prefixed formulae occurring on B. We use S to construct a model $\mathcal{M}$ (in this sense, $\mathcal{M}$ is based on S) and a variable valuation v in $\mathcal{M}$ such that for some possible world w in $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}, w, v, \varnothing \nvDash \varphi,$$

which shows that φ is not valid. In this way we demonstrate that every nontheorem is not valid, hence every valid formula is provable.

Let B be an open branch of a saturated tree; S the set of marked prefixed formulae occurring on B; $PREF$ the set of prefixes occurring on B; $TERM^+$ the set of variables of the shape a^τ_σ, x^τ_σ or x^τ occurring in S ($a \in CON$, $x \in VAR$, $\sigma, \tau \in PREF$).

Define the binary relation $\sim$ on $TERM^+$ as follows: $t \sim u$ iff $\sigma\ t = u + \in S$ for some σ. It is not hard to see that $\sim$ is an equivalence relation. Let us write $\{u : t \sim u\}$ as $[t]$, and $\{[t] : t \in TERM^+\}$ as $TERM^+/\sim$.

Now we can define the model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, (\mathcal{D}_w)_{w\in\mathcal{G}}, \mathcal{I}\rangle$ based on S:

1) $\mathcal{G} = PREF \cup \{2\}$. Note that, since all prefixes on B begin with 1, $2 \notin PREF$.

2) $\mathcal{R} = \{\langle \sigma, \sigma.n\rangle : \sigma, \sigma.n \in PREF\}$. Observe that 2 is isolated, that is, there is no σ with $2\mathcal{R}\sigma$ or $\sigma\mathcal{R}2$.

3) Let us choose an object r foreign to $TERM^+/\sim$. Now we define the domains of $\mathcal{G}$'s members:

- for all $\sigma \in PREF$,
$$\mathcal{D}_\sigma = \begin{cases} \{[x^\sigma_\sigma] : x \in VAR \,\&\, x^\sigma_\sigma \in TERM^+\} & \text{if this set is nonempty,} \\ \{r\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- $\mathcal{D}_2 = (TERM^+/\sim) \cup \{r\}$.

It follows that $\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \bigcup_{w\in\mathcal{G}} \mathcal{D}_w$, as it should be.

4) Finally, we define $\mathcal{I}$:

- $a^\sigma_\sigma \in TERM^+ \implies \mathcal{I}(a)(\sigma) = [a^\sigma_\sigma]$. If $a^\sigma_\sigma \notin TERM^+$, the denotation of a at σ does not matter, nor does the denotation of any constant at 2.

- If P is an n-ary predicate other than $=$, $\mathcal{I}(P)(\langle \tau_1, \ldots, \tau_n\rangle) = \big\{\big\langle [t_1{}^{\sigma_1}_{(\sigma_1)}], \ldots, [t_n{}^{\sigma_n}_{(\sigma_n)}]\big\rangle : (\exists\alpha \in PREF)\, \alpha\, P(t_1{}^{\tau_1}_{(\sigma_1)}, \ldots, t_n{}^{\tau_n}_{(\sigma_n)}) + \in S\big\}$.[12]

- $(\forall \sigma, \tau \in \mathcal{G})\, \mathcal{I}(=)(\langle \sigma, \tau\rangle) = \{\langle e, e\rangle : e \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\}$.

Let us make sure that $\mathcal{I}$ is well defined for predicates. I show this for a unary predicate P. Suppose $[t^\beta_{(\alpha)}] = [u^\delta_{(\gamma)}]$ and $[t^\beta_{(\alpha)}] \in \mathcal{I}(P)(\varepsilon)$. We must establish that $[u^\delta_{(\gamma)}] \in \mathcal{I}(P)(\varepsilon)$. Our assumptions entail that $\sigma\ t^\beta_{(\alpha)} = u^\delta_{(\gamma)} + \in S$ for some σ, and $\tau\ P(t^\varepsilon_{(\alpha)}) + \in S$ for some τ. Since the tree under consideration is saturated, the appropriate Substitution Rule is applied to these formulae on B, so $\tau\ P(u^\varepsilon_{(\gamma)}) + \in S$, hence $[u^\delta_{(\gamma)}] \in \mathcal{I}(P)(\varepsilon)$. Thus, whether or not an equivalence class is in $\mathcal{I}(P)(\tau)$ does not depend on the choice of its representative. The argument can readily be generalized to predicates of arbitrary arity.

[12] Note that in atomic formulae occurring on B, all variables are of the shape $t^\tau_{(\sigma)}$.

A note on the role of r and 2 in this construction is in order. 1) If $\sigma \in PREF$ but no variable of the shape x^{τ}_{σ} ($x \in VAR$) is in $TERM^{+}$, we have no $[x^{\tau}_{\sigma}]$ to settle in $\mathcal{D}_{\sigma}$ (*e.g.*, consider the tableau for $P(x)$). But domains of possible worlds cannot be empty. That is why we need r: We settle r in the domains of those possible worlds where we cannot settle anything else. 2) If $a^{\sigma}_{\sigma} \in PREF^{+}$, $\mathcal{I}(a)(\sigma) = [a^{\sigma}_{\sigma}]$ is in $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, hence in the domain of a possible world. Which one? For any $\tau \in PREF$ we have no reason to settle $\mathcal{I}(a)(\sigma)$ in $\mathcal{D}_{\tau}$. That is why we need a possible world foreign to $PREF$, namely 2: We settle in $\mathcal{D}_2$ all objects that we cannot settle in $\mathcal{D}_{\tau}$ for any $\tau \in PREF$.

Lemma 5. *Let B, S, $PREF$, $TERM^{+}$ be as above, and $\mathcal{M}$ be the model based on S. Let us choose a variable valuation v and a VP-function f in $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}^{+}$ with the following properties:*

- *If x^{τ} occurs on B, $v(x^{\tau}) = v(x) = [x^{\tau}]$.*
- *If t^{τ}_{σ} occurs on B, $v(t^{\tau}_{\sigma}) = [t^{\tau}_{\sigma}]$.*[13]
- *$dom(f) = TERM^{+}$.*
- *If $t^{\tau}_{(\sigma)}$ occurs on B, $f(t^{\tau}_{(\sigma)}) = \tau$.*

Then for every formula φ in $\mathcal{L}^{+}$ and for every $\sigma \in PREF$, the following holds:

$$\sigma\ \varphi + \in S \implies \mathcal{M}, \sigma, v, f \vDash \varphi$$

$$\sigma\ \varphi - \in S \implies \mathcal{M}, \sigma, v, f \nvDash \varphi.$$

Proof. By induction on the structure of φ. I confine myself to the base case and the cases of existential quantification.

1. The base case

(i) Suppose $\sigma\ P(t_1{}^{\tau_1}_{(\sigma_1)}, \ldots, t_n{}^{\tau_n}_{(\sigma_n)}) + \in S$. Then, by definition of $\mathcal{M}$, $\langle [t_1{}^{\tau_1}_{(\sigma_1)}], \ldots, [t_n{}^{\tau_n}_{(\sigma_n)}] \rangle \in \mathcal{I}(P)(\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle)$, whence, by properties of v and f,

$$\mathcal{M}, \sigma, v, f \vDash P(t_1{}^{\tau_1}_{(\sigma_1)}, \ldots, t_n{}^{\tau_n}_{(\sigma_n)}).$$

(ii) Suppose $\sigma\ P(t_1{}^{\tau_1}_{(\sigma_1)}, \ldots, t_n{}^{\tau_n}_{(\sigma_n)}) - \in S$. Since B is open, $\tau\ P(t_1{}^{\tau_1}_{(\sigma_1)}, \ldots, t_n{}^{\tau_n}_{(\sigma_n)}) + \notin S$ for any τ, hence, by definition of $\mathcal{M}$, $\langle [t_1{}^{\tau_1}_{(\sigma_1)}], \ldots, [t_n{}^{\tau_n}_{(\sigma_n)}] \rangle \notin \mathcal{I}(P)(\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle)$ and, by definition of v and f,

$$\mathcal{M}, \sigma, v, f \nvDash P(t_1{}^{\tau_1}_{(\sigma_1)}, \ldots, t_n{}^{\tau_n}_{(\sigma_n)}).$$

[13]Note that for all t^{α}_{σ} and t^{β}_{σ} occurring on B, $t^{\alpha}_{\sigma} \sim t^{\beta}_{\sigma}$, hence $v(t^{\alpha}_{\sigma}) = v(t^{\beta}_{\sigma})$.

2. The existential case

Suppose $\sigma\ \exists x\varphi(x) + \in S$. By (14), $\sigma\ \varphi(y^{\sigma}_{\sigma}) + \in S$ for some $y \in VAR$. By the induction hypothesis,

$$\mathcal{M}, \sigma, v, f \vDash \varphi(y^{\sigma}_{\sigma}).$$

From this, by Lemma 1,

$$\mathcal{M}, \sigma, v^{[y^{\sigma}_{\sigma}]}_{x}, f^{\sigma}_{x} \vDash \varphi(x).$$

Since $[y^{\sigma}_{\sigma}] \in \mathcal{D}_{\sigma}$, we obtain

$$(\exists e \in \mathcal{D}_{\sigma})\ \mathcal{M}, \sigma, v^{e}_{x}, f^{\sigma}_{x} \vDash \varphi(x),$$

which, by Definition 8, yields

$$\mathcal{M}, \sigma, v, f \vDash \exists x\varphi(x).$$

The case in which $\sigma\ \exists x\varphi(x) - \in S$ is analogous. ∎

Now we are in a position to establish the completeness of the CWPL tableau proof method with respect to CWPL semantics.

Theorem. *For all formulae φ in $\mathcal{L}$, $\vDash \varphi \implies \vdash \varphi$.*

Proof. Let us check the contrapositive. Suppose $\nvdash \varphi$. Then each saturated tableau starting with $1\ \varphi^1 -$ contains an open branch. Let S be the set of marked prefixed formulae occurring on such a branch and construct the model $\mathcal{M}$ based on S. Choose a variable valuation v and a VP-function f in $\mathcal{M}$ as in Lemma 5. Since $1\ \varphi^1 - \in S$, by Lemma 5, $\mathcal{M}, 1, v, f \nvDash \varphi^1$. Hence, by Lemma 3, $\mathcal{M}, 1, v, \varnothing \nvDash \varphi$ and, by Lemma 4, $\mathcal{M}, 1, v', \varnothing \nvDash \varphi$, where v' is the restriction of v to VAR. It follows that $\nvDash \varphi$. ∎

5. Conclusion and Further Work

The CWPL tableau proof theory presented in this paper is sound and complete with respect to CWPL semantics presented in [Borisov, 2023]. A task for further work is elaborating a Hilbert-style proof theory for CWPL. Another task is elaborating modifications of CWPL based on propositional modal logics other than K (T, D, S4, S5, etc.): they will allow reflecting crossworld predication in various (alethic, deontic, epistemic, etc.) contexts.

Acknowledgements. The research was supported by Russian Science Foundation, project 23-28-01465, `https://rscf.ru/project/23-28-01465`. I am indebted to an anonymous reviewer for helpful comments and to Jean Kollantai for assistance with stylistic editing.

References

Borisov, 2020 – Borisov, E.V. "Logika dlya kross-mirovoy predikatsii" [A logic for crossworld predication], *Nauka kak obshchestvennoye blago [Science as a public good]*, Vol. 4, ed. by I.T. Kasavin and L.V. Shipovalova. Moscow: Russian Society for History and Philosophy of Science, 2020, pp. 205–209. (In Russian)

Borisov, 2023 – Borisov, E.V. "A Nonhybrid Logic for Crossworld Predication", *Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 125–147.

Butterfield, Stirling, 1987 – Butterfield, J., Stirling, C. "Predicate modifiers in tense logic", *Logique et Analyse*, 1987, Vol. 30, pp 31–50.

Fitting, Mendelsohn, 2023 – Fitting, M.C., Mendelsohn, R. *First-Order Modal Logic*. Second edition. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2023. 460 pp.

Kocurek, 2016 – Kocurek, A.W. "The problem of cross-world predication", *Journal of Philosophical Logic*, 2016, Vol. 45, pp. 697–742.

Stalnaker, Thomason, 1968 – Stalnaker, R.C., Thomason, R.H. "Abstraction in First-Order Modal Logic", *Theoria*, 1968, Vol. 34, pp. 203–207.

Wehmeier, 2012 – Wehmeier, K. F. "Subjunctivity and cross-world predication", *Philosophical Studies*, 2012, Vol. 159, pp. 107–122.

Wehmeier, Rückert, 2019 – Wehmeier, K., Rückert, H. "Still in the Mood: The Versatility of Subjunctive Markers in Modal Logic", *Topoi*, 2019, Vol. 38, pp. 361–377.

Е.В. Борисов

Табличная теория доказательств для CWPL

Евгений Васильевич Борисов
Институт философии и права Сибирского отделения РАН.
Российская Федерация, 630090, г. Новосибирск, ул. Николаева, д. 8.
E-mail: borisov.evgeny@gmail.com

Аннотация: В одной из недавних статей я представил логику для кросс-мировой предикации (CWPL, crossworld predication logic). Кросс-мировая предикация — это атрибуция отношений объектам, каждый из которых ассоциирован с некоторым возможным миром. (Интуитивно, объект, ассоциированный с возможным миром — это объект, каков он в этом мире). CWPL — это модальная логика первого порядка с равенством и λ-оператором. Ее преимущество перед другими известными мне логиками для кросс-мировой предикации (в частности, перед логиками, разработанными Баттерфилдом и Стерлингом, Вемайером и Коцуреком) состоит в том, что она базируется на стандартном языке модальной логики первого порядка. В семантическом плане CWPL основана на кросс-мировой интерпретации предикатов, при которой n-местный предикат получает экстенсионал для каждой упорядоченной n-ки возможных миров, а не для каждого отдельного возможного мира. Использование кросс-мировой интерпретации предикатов при оценке формулы в семантике CWPL оказывается возможным благодаря тому, что истинностное значение формул релятивизировано к частичным функциям от предметных переменных к возможным мирам. В упомянутой выше статье описаны синтаксис и семантика CWPL; в настоящей статье разработана табличная теория доказательств для CWPL и показана ее слабая корректность и полнота.

Ключевые слова: модальная логика первого порядка, семантика возможных миров, кросс-мировая предикация, табличная теория доказательств

Логические исследования
2025. Т. 31. № 1. С. 97–109
УДК 16

Logical Investigations
2025, Vol. 31, No. 1, pp. 97–109
DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-97-109

Giorgi Japaridze

Thoughts on sub-Turing interactive computability

Giorgi Japaridze
Department of Computing Sciences, Villanova University,
800 Lancaster Avenue, Villanova, PA 19085, USA.
E-mail: giorgi.japaridze@villanova.edu

Abstract: The article contains an outline of a possible new direction for Computability Logic, focused on computability without infinite memory or other impossible-to-possess computational resources. The new approach would see such resources as external rather than internal to computing devices. They could or should be accounted for explicitly in the antecedents of logical formulas expressing computational problems.

Keywords: computability logic, interactive computation, game semantics

For citation: Japaridze G. "Thoughts on sub-Turing interactive computability", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 1, pp. 97–109. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-97-109

This contribution is dedicated to my dear old friend and colleague, Vladimir Shalack, in celebration of his 70th birthday. His wisdom and optimism have always been an inspiration to all around him. I wish they continue to be so for many years to come.

1. Introduction

The present article lies within the framework of *computability logic* (CoL) — an ambitious long-term research project with a beginning but no end, initiated by the author in [Japaridze, 2003] and actively pursued since then [Japaridze, 2020; Bauer, 2014; Kwon, 2014; Mezhirov, Vereshchagin, 2010; Qu et al., 2013; Xu, Liu, 2012]. Among many characterizations of CoL's formalism would be impotant to say that it potentially provides a medium for communication between humans and computers, something inbetween programming languages, on one hand, and the language used by humans in their intellectual activities, on the other hand. Just like the former, the language of CoL is formal and thus well understood by machines; and, just like the latter, it can be relatively easily "spoken" by humans without any special expertise and training generally required for programmers.

The question 'what can be computed?' is fundamental to computer science. CoL is about answering this question in a systematic way using logical formalism, with formulas understood as computational problems and logical operators as operations on them. The first basic issue to be clarified here is what a *computational problem* means. With a few exceptions in the literature, starting from Turing [Turing, 1936], this term usually refers to an entity that is modeled by a very simple interface between a computing agent and its environment, consisting in asking a question (input) and generating an answer (output). In other words, computational problems are understood as functions. This understanding, however, captures only a small part of our broader intuition and the reality of computational problems. Most tasks that real computers perform are *interactive* and not reducible to simple pairs of input/output events. In such tasks, input/output events, also called *observable actions* [Goldin et al., 2006] by the computing agent and its environment, can be multiple and interspersed, perhaps taking place throughout the entire process of computation rather than just at the beginning (input) and the end (output) of it. Computability that CoL deals with is interactive computability, and throughout this article by a "(computational) problem" we always mean an interactive computational problem. This concept is formalized in Section 2 below. Section 3 provides a brief informal overview of operations generating complex computational problems from simpler ones, and Section 4 discusses the basic model of interactive computation used in CoL. These sections serve the purpose of establishing a background necessary for understanding the final Section 5, where the reader will find a discussion of a possible new direction into which CoL may branch: a direction that switches the attention of CoL from computability-in-principle (Turing computability) to sub-Turing computability, where the latter does not assume the presence of (in fact) supernatural resources, such as the infinite-capacity tape memory.

2. Computational problems as games

CoL starts by formalizing our broadest intuition of (interactive) computational problems. Technically this is done in terms of games. Namely, computational problems are understood as games between two agents: the *machine* and the *environment*, symbolically named as $\top$ and $\bot$, respectively. Machine, as its name suggests, is a mechanical device with fully determined, algorithmic behavior, while the behavior of the environment, that represents a capricious user or the blind forces of nature, is allowed to be arbitrary. Observable actions by these two agents translate into game-theoretic terms as their *moves*, and interaction histories as *runs*.

Formally, a **move** can be understood as any finite string over the standard keyboard alphabet. A move prefixed with $\top$ or $\bot$ is called a **labeled move** (with its label indicating who has made the move). A **run** is a (finite or infinite) sequence of labeled moves, and a **position** is a finite run.

A **game** is defined as a pair $A = (\mathbf{Lr}^A, \mathbf{Wn}^A)$, where:

- $\mathbf{Lr}^A$ is a set of runs such that $\Gamma \in \mathbf{Lr}^A$ iff all nonempty initial segments of Γ are in $\mathbf{Lr}^A$;
- $\mathbf{Wn}^A$ is a function of the type $\mathbf{Lr}^A \to \{\top, \bot\}$.

The intuitive meaning of the **Lr** component is that it tells us what the **legal runs** of the game are. Extending the meaning of the term "legal" to (labeled) moves, a move α is considered legal by a given player $\wp$ in a given position iff adding $\wp\alpha$ to that position results in a legal position. The meaning of the **Wn** component is that it tells us who has won a given legal run. This function is usually extended to all runs by stipulating that an illegal run is always lost by the player who made the first illegal move.

One of the main novel and distinguishing features of CoL's games among the other concepts of games studied in the logical literature is the absence of *procedural rules*, i.e., rules strictly regulating who and when can or should move, the most standard procedural rule being the one according to which the players should take turns in alternating order. Procedural rules usually yield the sort of games that CoL calls **strict** — games where in each position the player who has to move is strictly determined. CoL's games are not strict: it is possible that in a given position both players have legal moves; furthermore, having legal moves does not obligate the player to move, and in many cases it may have to decide not only *which* of the available moves to make, but also *whether* to make a move at all or rather wait to see how the adversary acts; watching the adversary's behavior while simultaneously thinking on its own decisions is also among the possible scenarios. How, exactly, runs are generated will be seen in Section 4. For now, we can adopt an informal yet perfectly accurate explanation, according to which either player is free to make any move at any time. Based on this, our games can be called **free**. Strict games are not powerful enough to adequately capture all reasonable interactive tasks. Most of such tasks that we perform in everyday life are free rather than strict, and so are the majority of computer communication/interaction protocols. CoL's free games are most general of all (two-player, two-outcome) games, which makes them most natural, as well as powerful, modeling tools for interactive tasks. Strict games can be thought of as a special case of CoL's free games where the **Lr** component is such that, in every position, at most one of the two players has legal moves.

The class of free games in the above-defined sense is, however, too general. There are games where the chances of the machine to succeed may essentially depend on the relative speed at which its adversary responds, and we do not want to consider that sort of games as meaningful computational problems. A simple example would be the game where all moves are legal and that is won by the player who moves first. This is merely a contest of speed. Furthermore, if the interaction happens by exchanging message through a (typically asynchronous) network, it can also be a contest of luck, where success may as well depend on whose message was delivered to the arbiter sooner. Below we define a subclass of games called *static games*. Intuitively, static games are games where speed is irrelevant: in order to succeed, it only matters *what* to do (strategy) rather than *how fast* to do (speed). One of the main theses on which the philosophy of CoL relies is that the concept of static games is an adequate formal counterpart of our intuitive notion of "pure", speed-independent computational problems. [Japaridze, 2003] contains a detailed discussion in support of this thesis. Here we only give a formal definition.

For $\wp \in \{\top, \bot\}$, we say that a run Ω is a **$\wp$-delay** of a run Γ iff the following two conditions are satisfied:

- For each player $\wp'$, the subsequence of $\wp'$-labeled moves of Ω is the same as that of Γ;

- For any n, k, if the nth $\wp$-labeled move is made later than (is to the right of) the kth non-$\wp$-labeled move in Γ, then so is it in Ω.

Intuitively this means that in Ω each player has made the same sequence of moves as in Γ, only, in Ω, $\wp$ might have been acting with some delay.

Now, we say that a game A is **static** iff, whenever $\mathbf{Wn}^A(\Gamma) = \wp$ and Ω is a $\wp$-delay of Γ, we have $\mathbf{Wn}^A(\Omega) = \wp$.

At this point we are ready to formally answer the question regarding what CoL exactly means by computational problems: *an* **interactive computational problem (ICP)** *is a static game.*

3. Game operations

The logical connectives and quantifiers of CoL represent operations on ICPs, some of which take inspiration in game operations studied by Lorenzen [Lorenzen, 1961; Felscher, 1985], Hintikka [Hintikka, 1973] and (especially) Blass [Blass, 1972; Blass, 1992], and resembling certain operators of linear logic [Girard, 1987]. Over three dozen ICP operations have been officially defined and studied so far, and more are probably yet to come due to the open-ended character of the formalism of CoL. The operations include several natural sorts of negation, disjunction/conjunction, implication, quantifiers. There are also several sorts of unary operations, called *recurrences*, with no analogs in classical logic. Below we briefly and informally survey only a few inhabitants of the operation zoo of CoL to get some intuitive feel for the approach. See [Japaridze, 2020] for a comprehensive account and formal definitions.

The (basic) **negation** $\neg A$ of a game A is defined as A with the roles of the two players switched: $\top$'s legal moves and wins become $\bot$'s legal moves and wins, and vice versa. E.g., if *Chess* is the game of chess from the point of view of the white player, then $\neg$*Chess* will be the same game from the point of view of the black player.

The operations $\sqcap$ (**chand**, abbreviting "choice AND"), $\sqcup$ (**chor**), $\bigsqcap$ (**chall**) and $\bigsqcup$ (**chexists**) can be seen as "constructive" versions of conjunction, disjunction, universal quantifier and existential quantifier, respectively. $\bigsqcap x A(x)$ is the game where, in the initial position, only $\bot$ has legal moves. Such a move consists in a choice of one of the elements c of the universe of discourse. After $\bot$ makes such a move c, the game continues (and the winner is determined) according to the rules of $A(c)$. If there was no initial move, $\top$ is considered the winner as there was no particular instance of the problem specified by $\bot$ that $\top$ failed to solve. $A \sqcap B$ is similar, only here the choice is just made between "0" (*left*) and "1" (*right*). $\bigsqcup$ and $\sqcup$ are symmetric to $\bigsqcap$ and $\sqcap$, with the only difference that now it is $\top$ rather than $\bot$ who makes the initial move/choice. An example would help. The problem of computing function g can be specified as $\bigsqcap x \bigsqcup y \big(g(x) = y\big)$. This is a two-move-deep game where the first legal move — selecting a particular value k for x — is by $\bot$, which brings the game down to $\bigsqcup y(g(k) = y)$. The second move — selecting a value m for y — is by $\top$, after which the game continues (or rather ends) as $g(k) = m$. Such a run $\langle \bot k, \top m \rangle$ is then considered won by $\top$ iff m really equals $g(k)$. Obviously g is computable in the standard sense iff there is a machine that wins $\bigsqcap x \bigsqcup y \big(g(x) = y\big)$ against any possible (behavior of the) environment.

The operations $\wedge$ (**pand**, abbreviating "parallel and") and $\vee$ (**por**) generate parallel combinations of games. Playing $A_0 \wedge A_1$ or $A_0 \vee A_1$ means playing the two games A_0 and A_1 concurrently. Every legal run of such a game will thus consist of two — arbitrarily interspersed — subruns, with one subrun being a legal run of A_0, and the other subrun a legal run of A_1. Both $A_0 \wedge A_1$ and $A_0 \vee A_1$ thus have exactly the same **Lr** component. Only their **Wn** components are different: in order for $\top$ to win, in $A_0 \wedge A_1$ it needs to win in both components, while in the case of $A_0 \vee A_1$ winning in one of the components is sufficient. To appreciate the difference between the choice and the parallel sorts of operations, compare the games *Chess*$\vee\neg$*Chess* and *Chess*$\sqcup\neg$*Chess*. The former is a play on two boards, which is very easy for an agent to win even against Kasparov himself:

all that would suffice to do is to copy in one conjunct the moves made by the adversary in the other conjunct, and vice versa. On the other hand, winning $Chess \sqcup \neg Chess$ against Kasparov, where from the very beginning the agent has to select one of the disjuncts and then successfully play the chosen one-board game, is not easy at all.

Among the most important operations is **pimplication** (parallel implication) $\rightarrow$. $A \rightarrow B$ is formally defined as $\neg A \vee B$. Intuitively, this is the problem of **reducing** B to A: solving $A \rightarrow B$ means solving B having A as an (external) *computational resource*. Generally, computational resources are symmetric to computational tasks/problems: what is a problem for one player to solve, is a resource for the other player to use, and vice versa. Since in the antecedent of $A \rightarrow B$ the roles are switched, A becomes a problem for $\bot$ to solve, and hence a resource that $\top$ can use. Thus, CoL's semantics of computational problems is, at the same time, a semantics of computational resources, which offers a materialization of the (so far rather abstract) resource philosophy associated with linear logic. To get a feel of $\rightarrow$ as a problem reduction operation, let us consider reduction of the acceptance problem to the halting problem. The halting problem can be expressed by $\sqcap x \sqcap y\big(Halts(x,y) \sqcup \neg Halts(x,y)\big)$, where $Halts(x,y)$ is the predicate "Turing machine x halts on input y". Similarly, the acceptance problem (in the sense of [Sipser, 2013]) can be expressed by $\sqcap x \sqcap y\big(Accepts(x,y) \sqcup \neg Accepts(x,y)\big)$. While the acceptance problem is not decidable, it is algorithmically reducible to the halting problem. In our terms this means nothing but that there is a machine that always wins

$$\sqcap x \sqcap y\big(Halts(x,y) \sqcup \neg Halts(x,y)\big) \rightarrow \sqcap x \sqcap y\big(Accepts(x,y) \sqcup \neg Accepts(x,y)\big).$$

A strategy for solving this problem is to wait till the environment specifies values k and n for x and y in the consequent, then select the same values k and n for x and y in the antecedent (where the roles of the machine and the environment are switched), and see whether $\bot$ responds by *left* or *right* there. If the response is *left*, simulate machine k on input n until it halts, and select, in the consequent, *left* or *right* depending on whether the simulation is accepted or rejected. And if $\bot$'s response in the antecedent is *right*, then select *right* in the consequent. We can see that what the machine did in the above strategy indeed was reduction: it used an (external) solution to the halting problem to solve the acceptance problem.

The next operation on our list is **precurrence** (parallel recurrence) $\curlywedge$. Intuitively, $\curlywedge A$ is nothing but the infinite $\wedge$-conjunction $A \wedge A \wedge A \wedge A \wedge \ldots$ That is, as a resource, $\curlywedge A$ is A that can be used and reused arbitrarily many times. In terms of $\curlywedge$ we can define the **primplication** (**p**arrallel-**r**ecurrence-based **implication**) $\succ\!\!-$ by $A \succ\!\!- B \ = \ \curlywedge A \rightarrow B$. The difference between $A \rightarrow B$ and

$A \succ\!\!- B$ is that while in the former every act of resource (A) consumption is strictly accounted for, $A \succ\!\!- B$ allows unlimited usage of resources. This makes computability of $A \succ\!\!- B$ a generalization of Turing reducibility from simple, two-step problems to all ICPs. To get a feel of $\succ\!\!-$, remember the Kolmogorov complexity problem. It can be expressed by $\bigsqcap t \bigsqcup z\, K(z,t)$, where $K(z,t)$ is the predicate "z is the smallest (code of a) Turing machine that returns t on input 0". Having no algorithmic solution, the Kolmogorov complexity problem, however, is Turing-reducible to the halting problem. In our terms, this means nothing but that there is a machine that always wins the game

$$\bigsqcap x \bigsqcap y \big(\mathrm{Halts}(x,y) \sqcup \neg Halts(x,y)\big) \ \succ\!\!- \ \bigsqcap t \bigsqcup z\, \mathrm{K}\,(z,t).$$

Here is a strategy for such a machine: Wait till the environment selects a particular value m for t in the consequent. Then, starting from $i = 0$, do the following. Make a move by specifying x and y as i and 0, respectively, in the ith copy ($\wedge$-conjunct) of the antecedent. If the environment responds by *right* there, increment i by one and repeat the step; if the environment responds by *left*, simulate machine i on input 0 until it halts; if you see that machine i returned m, make a move in the consequent by specifying z as i; otherwise, increment i by one and repeat the step. We have just seen an example of a weak ($\succ\!\!-$) reduction to the halting problem, which cannot be replaced with the strong ($\rightarrow$) reduction.

Here comes the third, sequential, sort of conjunction $\triangle$ (**sand**) and disjunction $\bigtriangledown$ (**sor**). The latter can be defined in terms of the former by $A \bigtriangledown B = \neg(\neg A \triangle \neg B)$. The meaning of the game $A \triangle B$ is similar to that of $A \sqcap B$, with the difference that while in the latter $\perp$ has to choose one of the two conjuncts at the very beginning of the play, in the former this choice can be made at any later time: a legal run of $A \triangle B$ starts and proceeds in its default A component. If at some point $\perp$ decides to switch components, A will be abandoned without the possibility to come back to it later, and the (rest of the) play will restart and continue as a play of B. Let us take a look at an example. Obviously decidability of a predicate $A(x)$ means nothing but computability of $\bigsqcap x(\neg A(x) \sqcup A(x))$. Replacing $\sqcup$ by $\bigtriangledown$ in this formula makes it express recursive enumerability of $A(x)$. Indeed, when $A(x)$ is r.e., the following strategy is obviously successful for $\bigsqcap x(\neg A(x) \bigtriangledown A(x))$: after $\perp$ specifies a value m for x, start looking for a witness for $A(m)$; make a component-switch move if and when such a witness is found. On the other hand, with some additional thought, it would not be hard to see that no machine can win $\bigsqcap x(\neg A(x) \bigtriangledown A(x))$ when $A(x)$ is not r.e.

Finally, the sequential recurrence (**srecurrence**) $\curlywedge A$ of A is nothing but the infinite conjunction $A \triangle A \triangle A \triangle \ldots$ (one technical detail that needs to be clarified here: if a switching move is made infinitely many times in a legal run of $\triangle A$, $\top$ is considered the winner).

4. Interactive machines

Now that we know what interactive computational problems are, it is time to explain what their computability means. As we remember, the central point of CoL's philosophy is to require that agent $\top$ be implementable as a computer program, with effective and fully determined behavior. On the other hand, the behavior (including speed) of agent $\bot$ can be arbitrary. This intuition is captured by the model of interactive computation, where $\top$ is formalized as what CoL, for historical reasons, calls **HPM** (Hard-Play Machine). Below is only an informal description of this model. The omitted and not very interesting technical details can be very easily restored by anyone familiar with Turing machines. And, just like Turing machines, our play machines are highly robust with respect of all sorts of reasonable variations of those details.

An HPM is a Turing machine (TM) $\mathcal{M}$ with the capability of making moves. Along with the ordinary read/write *work tape*, such a machine has an additional read-only tape called the *run tape*. The latter serves as a dynamic input, spelling, at any time, the current position of the game. Every time one of the players makes a move, that move (with the corresponding label) is automatically appended to the contents of the run tape. There are no limitations to the frequency at which the environment can make moves, so on every transition from one computation step to another, any finite number of new $\bot$-labeled moves may appear on the run tape. The technical details about how exactly $\mathcal{M}$ makes moves are not interesting and can be specified in various equivalent ways. For clarity let us say that this happens by writing the move in a certain special segment of the work tape and then entering one of the specially designated states called *move states*.

The sequence of computation steps (configurations) obtained this way forms what we call a *computation branch* of $\mathcal{M}$. The latter incrementally spells a run on the run tape in the obvious sense. We call such a run a *run generated by* $\mathcal{M}$. The set of all such runs corresponds to the set of all possible behaviors by the environment. Then, for an ICP A, we say that $\mathcal{M}$ **computes (solves, wins)** A iff, for every run Γ generated by $\mathcal{M}$, $\mathbf{Wn}^A(\Gamma) = \top$. Finally, we say that A is **computable (solvable, winnable)** iff there is an HPM that computes A.

Validity in CoL can now be defined by saying that a formula F is valid iff there is an HPM $\mathcal{M}$ such that $\mathcal{M}$ wins F no matter what particular ICPs its atoms stand for. $P \vee \neg P$ is an example of a valid formula, and $P \sqcup \neg P$ an example of an invalid formula.

Philosophically, CoL is based on the following two major theses:

Thesis 1. Our intuitive concept of "pure", speed-independent interactive computational problems is adequately captured by the formal concept of static games (see page 100).

Thesis 2. Our intuitive concept of computability of such problems is adequately captured by the above formal concept of computability (by HPMs).

Thesis 2 is thus a generalization of the Church-Turing thesis [Church, 1936] to interactive computability. Anyone critical or skeptical about CoL's approach, would have to either argue that interactive computability is not worth studying, or argue that the approach is not really about interactive computability. In the latter case, as a minimum, the skeptic would be expected to make a good case against Theses 1 and 2.

5. From Turing to sub-Turing computability

According to the Church-Turing thesis and the above more general Thesis 2, TMs and HPMs present adequate universal models of mechanical computing. Both of these models, however, assume the presence of an infinite work tape — an abstraction whose legitimacy might be philosophically questioned. Neither TMs nor HPMs can physically exist for the simple reason that no real mechanical device will ever have an infinite (even if only potentially so) internal memory. The reason why such an abstraction still does not cause frustration is that the tape can be easily thought of as an *external resource*, and TMs or HPMs identified only with their finite control part; then and only then, they indeed become implementable devices. Yet, the formal treatment of TMs or HPMs does not account for this implicit intuition, and views the infinite work tape as a part of the machine — after all, having such a tape is basically what distinguishes TMs from finite automata (DFAs) only capable of handling regular languages/problems.

The idea that one can pursue is: *Deprive HPMs of the (infinite) internal work tape and make them truly finite devices.* Let us call the resulting machine model **HPM***. Replacing HPM by HPM* yields new versions of some of CoL's old basic concepts; we will be using the same superscript * — as in "CoL*", "computability*", "reducibility*", etc. — to differentiate those new concepts from their old counterparts. The above idea would not be very appealing within the framework of traditional approaches, for we would end up with the class of computable* problems narrowed down to regular or, at best (with multiple, bidirectional input read heads), logarithmic-space computable ones. In our case, however, such a step is perfectly meaningful and even imperative. The unlimited computational power/resource that TMs or HPMs posses — which lies in their infinite memory — can be formalized as a certain game T such that computability of a problem A in the old sense now will mean nothing but its reducibility* to T, i.e. computability* of the problem $T \rightarrow A$. Thus, our step from CoL to CoL* signifies no longer taking for granted the unlimited power of TMs, and explicitly turning that power (if and when its presence needs to be assumed) into an external computational resource, moving it from the work tape to the run (input) tape.

Imagining how to formalize T as an ICP would not be hard. One of the ways is to express it in terms of the simpler game BIT that represents a one-bit, write-once storage device. BIT, which can be treated as a logical constant in the language of CoL*, is the finite game where the first legal move — 0 or 1 — is by $\bot$. The meaning of such a move is writing (to be remembered) the corresponding bit. The second — empty — move is also by $\bot$, and it means requesting a read. The final move is by $\top$, who should return the very bit that was written. To turn BIT into rewritable one-bit memory, we prefix it with the operator ⅄̲. Finally, to obtain infinite (in particular, random-access) memory, we further prefix all that by ⅄. Thus, T can be defined as ⅄⅄̲BIT. Considering this resource in the context of CoL's old approach would not make any sense because obviously T, just like all computable problems, is equivalent to $\top$. In the new context of CoL* this equivalence, however, obviously ends: T is computable but (unlike $\top$) not computable*.

Computing* A and computing* $T \rightarrow A$ correspond to the intuitions of computing A in the strongest and the weakest sense, respectively, based on which we get interactive generalizations of the concepts of regular and decidable languages. Between these two extremes is a whole spectrum of intermediate versions of limited-resource (*sub-Turing*) computabilities, that can be expressed by replacing T with weaker* ICPs. For instance, $STACK(BIT) \rightarrow A$ expresses computability of A by interactive pushdown automata, where $STACK$ is a (yet another new) recurrence operator that allows stack-style activation/usage of (multiple copies of) its argument. In order to capture space complexity and similar concepts, we would need to introduce *bounded versions* of our recurrence operations — versions that take a variable as an additional argument and thus are, in a sense, quantifiers. E.g., ⅄xA would be the version of ⅄A where only x parallel copies of A can be used. Then ⅄x⅄̲$BIT \rightarrow A$ expresses a natural interactive generalization of the concept of computing A in space x. One of the ways to capture time complexity is through the new sort of quantifier-style operation τ. Roughly, τxA is the version of A where at most x moves are allowed to be made. One could make a case that then $\tau xT \rightarrow A$ expresses what is an adequate interactive counterpart of the concept of computing A in time x.

The above discussion is just an abstract outline of the idea of CoL*, serving the purpose of giving the reader some feel of its potential. Materializing this halfbaked idea requires working out many technical details (e.g., what an HPM* exactly is and how it accesses its run tape or an equivalent dynamic-input device — details that were irrelevant in the context of CoL but begin to matter in CoL*). This will be nontrivial yet apparently doable work. The interest toward this approach, which gives computability logic new dimensions and takes it to a new level of intellectual interest, is in its potential to mature into a comprehensive logical theory of computational resources. The old CoL already *is* such a theory, but it uses a very high level of abstraction in understanding computability and hence refuses to distinguish between different sub-Turing computable resources. CoL*, on the other hand, should provide systematic means for studying computational resources/problems at the finest level of abstraction, based on just one single model HPM* of computation as opposed to the confusing variety of models that the traditional automata theory and complexity theory have to deal with.

References

Bauer, 2014 – Bauer, M. "A PSPACE-complete first order fragment of computability logic", *ACM Transactions on Computational Logic*, 2014, Vol. 15, No. 1, pp. 1–12.

Blass, 1972 – Blass, A. "Degrees of indeterminacy of games", *Fundamenta Mathematicae*, 1972, Vol. 77, No. 2, pp. 151–166.

Blass, 1992 – Blass, A. "A game semantics for linear logic", *Annals of Pure and Applied Logic*, 1992, Vol. 56, No. 1–3, pp. 183–220.

Church, 1936 – Church, A. "An unsolvable problem of elementary number theory", *American Journal of Mathematics*, 1936, Vol. 58, No. 2, pp. 345–363.

Felscher, 1985 – Felscher, W. "Dialogues, strategies and intuitionistic provability", *Annals of Pure and Applied Logic*, 1985, Vol. 28, No. 3, pp. 217–254.

Girard, 1987 – Girard, J.-Y. "Linear logic", *Theoretical Computer Science*, 1987, Vol. 50, No. 1, pp. 1–102.

Goldin et al., 2006 – Goldin, D., Smolka, S., Wegner, P. (eds.), *Interactive Computation: The New Paradigm*. Springer, Berlin, 2006.

Hintikka, 1973 – J. *Logic, Language-Games and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic*. Clarendon Press, Oxford, 1973.

Japaridze, 2003 – Japaridze, G. "Introduction to computability logic", *Annals of Pure and Applied Logic*, 2003, Vol. 123, No. 1–3, pp. 1–99.

Japaridze, 2020 – Japaridze, G. "Fundamentals of computability logic 2020", *Journal of Applied Logics – IfCoLoG Journal of Logics and their Applications*, 2020, Vol. 7, pp. 1115–1177.

Kwon, 2014 – K. "Expressing algorithms as concise as possible via computability logic", *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, E97-A 2014*, pp. 1385–1387.

Lorenzen, 1961 – Lorenzen, P. "Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium", in: *Infinitistic Methods* (Proc. Sympos. Foundations of Math., Warsaw 1959). Oxford: Pergamon Press, 1961, pp. 193–200.

Mezhirov, Vereshchagin, 2010 – Mezhirov, I., Vereshchagin, N. "On abstract resource semantics and computability logic", *Journal of Computer and Systems Sciences*, 2010, Vol. 76, No. 5, pp. 356–372.

Sipser, 2013 – Sipser, M. *Introduction to the Theory of Computation.* Boston: Cengage Learning, 2013.

Qu et al., 2013 – Qu, M., Luan, J., Zhu, D., Du, M. "On the toggling-branching recurrence of computability logic", *Journal of Computer Science and Technology*, 2013, Vol. 28, No. 2, pp. 278–284.

Turing, 1936 – Turing, A. "On Computable numbers with an application to the entsheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1936, Series 2, Vol. 42, No. 3, pp. 230–265.

Xu, Liu, 2012 – Xu, W., Liu, S. "Soundness and completeness of the cirquent calculus system CL6 for computability logic", *Logic Journal of the IGPL*, 2012, Vol. 20, No. 1, pp. 317–330.

Г. Джапаридзе

Размышления о суб-Тьюринговой интерактивной вычислимости

Георгий Джапаридзе
Department of Computing Sciences, Villanova University.
800 Lancaster Avenue, Villanova, PA 19085, USA.
E-mail: giorgi.japaridze@villanova.edu

Аннотация: В статье содержится описание возможного нового направления для логики вычислимости, сосредоточенного на вычислимости без бесконечной памяти или других невозможных для обладания вычислительных ресурсов. Новый подход рассматривает такие ресурсы как внешние, а не внутренние для вычислительных устройств. Они могут и должны быть учтены явно в антецедентах логических формул, выражающих вычислительные задачи.

Ключевые слова: логика вычыслимости, интерактивное вычисление, игровая семантика

Логические исследования
2025. Т. 31. № 1. С. 110–129
УДК 162

Logical Investigations
2025, Vol. 31, No. 1, pp. 110–129
DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-110-129

Теория и практика аргументации
Theory and Practice of Argumentation

Д.В. Зайцев

Аргументативное следование, немонотонность и релевантность*

Дмитрий Владимирович Зайцев
МГУ им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: zaitsev@philos.msu.ru

Аннотация: В статье исследуется специфика аргументативного следования. В числе важных его характеристик выделяются требование истинности аргументов (или, по крайней мере, их непротиворечивости) и модифицируемость, предполагающая потенциальную опровержимость аргументативных рассуждений в свете критики и/или новой информации. На основании этих соображений предлагается семантическая трактовка аргументативного следования как некоторого ограничения классического: к стандартному определению следования добавляется условие, обеспечивающее непротиворечивость исходных аргументов — наличие приписывания значений переменным, при котором множество формул, составляющих посылки аргументативного рассуждения, совместимо по истинности. Это неформально обосновываемое условие приводит к модифицируемости следования. Добавление к исходному множеству посылок произвольной информации (возможно, противоречивой или противоречащей принятым ранее посылкам) становится недопустимым. Далее в статье строится исчисление выводимостей, формализующее введенное понятие аргументативного следования, и доказывается его семантическая адекватность. Построенная логика служит основой для релевантизированного варианта формализации аргументативного следования, к определению которого добавляется условие не-тавтологичности заключения.

Ключевые слова: логика аргументации, аргументативные рассуждения, аргументативное следование, немонотонность, релевантность

Для цитирования: *Зайцев Д.В.* Аргументативное следование, немонотонность и релевантность // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 1. С. 110–129. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-110-129

* Автор благодарен рецензенту за внимательное прочтение работы и полезные советы.

1. Введение

Аргументативные рассуждения представляют собой уникальный, очень непростой объект исследований. Это своеобразный кентавр, соединяющий в себе формальные черты рассуждений, как они изучаются логикой, и неформальную, содержательную сторону естественных рассуждений, используемых в процессе коммуникации. Дополнительную сложность исследованию аргументации придает тот факт, что в различных ситуациях, в зависимости от контекста, темы и аудитории, каждая из этих сторон проявляется по-разному. Отмеченная двусторонность находит свое выражение и в двухкомпонентной оценке аргументативных рассуждений, включающей комплексный учет корректности рассуждения (как соответствия некоторым более или менее формализованным критериям) и истинности посылок-аргументов[1] (более точно следовало бы говорить не об истинности аргументов, по крайней мере, в корреспондентском смысле, а об их приемлемости для сторон аргументации; впрочем, приемлемость можно трактовать как соответствие субъективной реальности). Такой подход к оценке аргументации очень близок к стандартной интерпретации энтимемы, что неудивительно, если вспомнить, что Аристотель в своей «Риторике» называл энтимему одним из способов убеждения. Как известно, для установления корректности энтимемы мало восстановить ее в правильный силлогизм, необходимо дополнительно убедиться в том, что пропущенная посылка — истинное высказывание.

Естественно, проверка на истинность (или приемлемость) использованных аргументов выходит за рамки логических требований. Однако в отношении аргументации двухфакторную оценку рассуждений можно уточнить, по возможности минимизировав экстралогическую составляющую. Дело в том, что применительно к аргументативным рассуждениям важно не только установить истинность аргументов, но и быть уверенным в их непротиворечивости. Это более слабое требование обычно не формулируется как критерий оценки рассуждений, но встречается в формулировках правил аргументации в виде запрета противоречий или необоснованных (ложных) аргументов.

В классической логике, напротив, действует известный принцип ex falso quodlibet (далее — EFQ), позволяющий выводить из противоречия любые высказывания, в том числе и сами члены противоречия. Считать аргументативное рассуждение, проведенное по схеме EFQ, правильным было бы неверно. Можно, конечно, рассматривать противоречие в аргументах как

[1]Здесь и далее я использую термин «аргумент» в привычном для российской традиции понимании, как обозначающий посылки аргументативного рассуждения, а не сами рассуждения, что больше бы соответствовало англоязычной традиции.

своеобразный маркер ошибки, проявляющийся в возможности вывести из них любое заключение, но, на мой взгляд, естественнее было бы заблокировать противоречия так, чтобы из них нельзя было вывести ничего, даже их члены. Это в большей степени соответствует интуитивному представлению о естественных аргументативных рассуждениях, направленных на изменение позиции оппонента. Как следствие сказанного выше возникает возможность уточнить оценку рассуждения как «аргументативно приемлемого» — это означает, что рассуждение является правильным (например, в классическом смысле) и его посылки непротиворечивы. То есть не существует такой интерпретации нелогических параметров, при которой посылки истинны, а заключение ложно, и существует интерпретация, при которой посылки истинны. Для удобства назову отношение между посылками и заключением, которое удовлетворяет этому условию, «аргументативным следованием».

Неожиданным образом предложенная трактовка аргументативного следования обеспечивает наличие очень важного свойства аргументативных рассуждений — их модифицируемости, или опровержимости (defeasibility). Согласно Стенфордской энциклопедии, «рассуждение опровержимо, когда оно является рационально убедительным, но не является дедуктивно валидным. Истинность посылок хорошего опровержимого рассуждения обеспечивает поддержку вывода, даже если возможны ситуации, когда посылки истинны, а заключение ложно. Другими словами, отношение поддержки [подтверждения] между посылками и заключением является предположительным и потенциально может быть опровергнуто дополнительной информацией» [Koons, 2022]. Применительно к аргументации такую дополнительную информацию естественно понимать как контраргументы противоположной стороны в процессе критики.

Как известно, критика может быть направлена на аргументы, тезис и форму — т.е. на отношение между ними. Если для удобства условиться не релятивизировать аргументы относительно выдвинувших их сторон и рассматривать их в совокупности, а стадии аргументативного процесса упорядочить во времени и различать на основании аргументативных действий (таких, например, как выдвижение новых аргументов или контраргументов), то становится понятно, что все три вида критики связаны с выдвижением дополнительных аргументов, а именно с расширением множества посылок. Эти аргументы могут быть использованы для критики тезиса (обоснования антитезиса), для критики аргументов (обоснования отрицания аргумента) или для критики формы. В случае критики тезиса принятие контраргументов делает совокупное множество аргументов противоречивым, поскольку из него выводятся тезис и антитезис. При этом требование аргументативной приемлемости заставляет отказаться от одного из конкурирующих обоснований. Примерно та же картина получается при критике аргументов, в этом случае совокупное множество аргументов также становится противоречивым и для продолжения рациональной аргументации необходимо либо не принять контраргумент, либо отказаться от предыдущего вывода. Эффективная критика формы непосредственно ведет к опровержению предыдущего обоснования. Таким образом, условие аргументативной приемлемости, заложенное в трактовке аргументативного следования, фактически делает аргументативные рассуждения опровержимыми.

На такую особенность отношения следования, связанную с особой трактовкой отрицания, еще в 1985 г. обратили внимание Р. и В. Раутли [Routley, Routley, 1985] в связи с рассмотрением различной роли отрицаний в составе противоречий. В частности, они выделяли так называемое «отрицание как отмена» (negation as cancellation). В отличие от классического (противоречие влечет что угодно) и релевантного (противоречие не влечет любую формулу, но из него выводимы члены противоречия и оно само) случаев, противоречие, образованное с помощью отрицания как отмены, не имеет никаких следствий, оно их «отменяет». Краткая история мотивации и эволюции такой трактовки отрицания может быть найдена в статье Г. Приста [Priest, 1999]. В той же работе Прист приводит определение следования, весьма близкое к тому, которое обсуждалось выше в аргументативном контексте и более строго будет представлено ниже, также обращая внимание на его немонотонность. Однако основной интерес и Раутли, и Приста был сосредоточен на коннексивной логике и связи отрицания как отмены с коннексивной импликацией. В результате система первоуровневых выводимостей оставалась в стороне, в то время как в аргументативной перспективе в центре внимания оказываются как раз отношения следования и выводимости как модели аргументативных рассуждений.

Приведенные выше соображения определили дальнейший порядок изложения. В следующем параграфе я рассмотрю аргументативное следование и его свойства в связи с модифицируемостью рассуждений. В 3-м разделе будет представлена аксиоматизация получающейся паранепротиворечивой логики, а в 4-м доказана ее семантическая адекватность. 5-й и 6-й разделы посвящены, соответственно, семантическому и синтаксическому рассмотрению логики, формализующей аргументативное следование, удовлетворяющее не только условию непротиворечивости посылок, но и нетавтологичности заключения.

2. Аргументативное следование и немонотонность

Предварительно охарактеризованное выше отношение аргументативного следования может быть строго задано следующим образом.

Определение 1. $\Gamma \approx\!\!\!| A \Leftrightarrow \forall v(\forall C \in \Gamma.v(C) = \textbf{и} \Rightarrow v(A) = \textbf{и})$ *и* $\exists v.\forall C \in \Gamma.v(C) = \textbf{и}$.

Последующее рассмотрение будет ограничено пропозициональной логикой над языком с тремя базовыми связками.

Определение 2. $A ::= p|\neg A|A \wedge A|A \vee A$.

Предполагается стандартная семантика формул этого языка, которую можно представить в привычном табличном виде, очевидным образом удовлетворяющая следующему определению.

Определение 3.

(1) $v(A \wedge B) = \textbf{и} \Leftrightarrow v(A) = v(B) = \textbf{и}$,
$v(A \wedge B) = \textbf{л} \Leftrightarrow v(A) = \textbf{л}$ *или* $v(B) = \textbf{л}$;

(2) $v(A \vee B) = \textbf{и} \Leftrightarrow v(A) = \textbf{и}$ *или* $v(B) = \textbf{и}$,
$v(A \vee B) = \textbf{л} \Leftrightarrow v(A) = v(B) = \textbf{л}$;

(3) $v(\neg A) = \textbf{и} \Leftrightarrow v(A) = \textbf{л}$,
$v(\neg A) = \textbf{л} \Leftrightarrow v(A) = \textbf{и}$.

Понятие модифицируемого (опровержимого) рассуждения является достаточно широким и допускает различные интерпретации и подходы к его экспликации. Считается, что логический подход к модифицируемым рассуждениям предполагает введение немонотонного отношения следования и ассоциированного с ним отношения выводимости. В свою очередь немонотонность следования означает, что в чистом виде свойство монотонности не выполняется, но при определенных условиях добавление посылок возможно. В литературе существует несколько вариантов задания такой ограниченной монотонности. Наиболее известные из них: Cautious Monotony — умеренная (или осторожная) монотонность и Rational Monotony — рациональная монотонность.

Умеренная Монотонность $\quad \Gamma \approx\!\!\!| A \quad \Gamma \approx\!\!\!| B \;/\; \Gamma, B \approx\!\!\!| A$
Рациональная Монотонность $\quad \Gamma \approx\!\!\!| A \quad \Gamma \not\approx\!\!\!| \neg B \;/\; \Gamma, B \approx\!\!\!| A$

Рассмотрим последовательно, выполняются ли эти свойства для аргументативного следования. Предположим, что посылки Умеренной монотонности верны, т.е. из множества Γ аргументативно следуют A и B. Это означает, что при условии истинности формул из Γ, формулы A и B будут истинны (остальные случаи противоречат определению аргументативного следования). Таким образом, заключение Умеренной монотонности также будет верно: не существует приписывания, при котором все формулы из Γ истинны, формула B истинна, а A ложна, и найдется приписывание, при котором формулы из Γ и формула B совместимы по истинности.

Предположение о том, что выполняются посылки Рациональной монотонности, распадается на два случая. Во-первых, может быть так, что из Γ не следует аргументативно $\neg B$, поскольку между ними нет отношения классического следования, иными словами существует приписывание, при котором формулы из Γ истинны, а $\neg B$ ложна, и, следовательно, B истинна. Но это в точности соответствует части условия аргументативного следования A из Γ и B (классическая часть определения выполняется благодаря первой посылке). Во-вторых, в принципе возможно, что из Γ не следует аргументативно $\neg B$, так как формулы Γ не совместимы по истинности, но это противоречит первой посылке. Итак, свойство Рациональной монотонности так же, как и Умеренная монотонность, выполняется для аргументативного следования.

Вследствие принятого определения аргументативного следования принцип упрощения (удаление конъюнкции) в общем виде не является верным. Дело в том, что из противоречивой конъюнкции не следует не только произвольная формула, но и члены этой конъюнкции. Из противоречия теперь не следует ничего — ex falso nihil (EFN). Другими словами, в развиваемой логике противоречивая информация оказывается заблокирована и локализована — из противоречия нельзя получить никаких следствий и противоречия нельзя добавлять в качестве новых посылок.

В результате не только исключение конъюнкции, но и некоторые другие традиционные дедуктивные постулаты в общем виде не проходят. Так, например, схема закона тождества больше не является валидной, в то же время из любой непротиворечивой формулы следует она сама. Схема закона тождества в предлагаемом формализме вообще играет очень важную роль. По сути дела, она служит индексом непротиворечивости: если формула непротиворечива, то она следует из самой себя. Также в общем виде не проходит контрапозиция и утверждения о следовании, соответствующие законам ДеМоргана. Но те же следования из выполнимых посылок валидны.

Наиболее любопытная и неожиданная ситуация складывается с принципом EFQ. В большинстве известных исчислений, и, в частности, в классической и релевантной логиках, принцип ex falso quodlibet и прямое удаление дизъюнкции $\neg A \wedge (A \vee B) \vdash B$, известное также как дизъюнктивный силлогизм (DS), взаимозаменимы. В принципе это не выглядит естественным: мы с равной степенью интуитивной уверенности полагаемся в обыденных рассуждениях на DS и отвергаем EFQ. Рассмотрим обоснование утверждения об их равносильности. В присутствии транзитивности, используя дизъюнктивный силлогизм для обоснования EFQ, к посылке $A \wedge \neg A$ последовательно применяются исключение конъюнкции, введение дизъюнкции, введение конъюнкции и, на последнем шаге, — прямое исключение дизъюнкции (DS). В обратную сторону к посылкам DS сначала применяется дистрибутивность, потом исключение конъюнкции и EFQ, и, наконец, непрямое исключение дизъюнкции. И в том и в другом случае задействован принцип исключения конъюнкции, который для аргументативного следования не проходит, что и разрушает взаимозаменимость этих принципов.

В результате дизъюнктивный силлогизм в виде правила оказывается допустимым способом рассуждений, но его принятие не ведет к оправданию EFQ. Насколько мне известно, это первый случай логической теории, в которой удается оправдать интуитивно приемлемый дизъюнктивный силлогизм и при этом отбросить парадоксальный EFQ!

3. Исчисление ANML

Все предшествующее семантическое рассмотрение логики аргументации приводит к важному заключению: построить ее как систему схем выводимостей не удастся. Придется принимать какие-то дедуктивные постулаты в качестве аксиом выводимости и добавлять к ним множество правил, и в том числе — правило подстановки. Для удобства построения этой системы приведем сначала вариант классической системы выводимостей.

В качестве образца (исходного материала) для построения была выбрана система, построенная в работе [Shramko et al., 2017] под названием **VCL**. Ниже приводится ее аксиоматизация в нотации данной работы с измененной в естественном порядке нумерацией дедуктивных постулатов (авторы [Shramko et al., 2017] сформировали целый корпус аксиом и правил, из которых затем конструировали различные логики).

VCL

$(c1)\ A \wedge B \vdash A$ $(c2)\ A \wedge B \vdash B$

$(c3)\ A \vdash A \vee B$ $(c4)\ B \vdash A \vee B$

$(c5)\ A, B \vdash A \wedge B$ $(c6)\ A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$(c7)\ A \vdash \neg\neg A$ $(c8)\ \neg\neg A \vdash A$

$(c9)\ \neg A \wedge (A \vee B) \vdash B$

$(cr1)\ A \vdash C;\ B \vdash C\ /\ A \vee B \vdash C$ $(cr2)\ A \vdash B\ /\ \neg B \vdash \neg A$

$(cr3)\ \Gamma \vdash A\,;\ \Delta, A \vdash B\ /\ \Gamma, \Delta \vdash B$ $(cr4)\ \Gamma \vdash A\ /\ \Gamma, B \vdash A$

$(cr5)\ \Gamma, A, A \vdash B\ /\ \Gamma, A \vdash B$ $(cr6)\ \Gamma, A, B \vdash C\ /\ \Gamma, B, A \vdash C$

Поскольку, как отмечалось выше, в контексте классической логики принципы EFQ и DS ($c9$) взаимозаменимы, а в развиваемой логике **ANML** принятие второго не делает первый выводимым, можно безболезненно сохранить соответствующий вариант DS в новой логике. Таким образом, явно неприемлемыми являются только правило ($cr4$), выражающее свойство монотонности, и контрапозиция ($cr2$).

Построим вариант системы **ANML** с одной единственной аксиомой, представляющей собой выводимость, соответствующую закону тождества. Правило подстановки достаточно сформулировать только для схемы выводимости вида $A \mathrel{|\!\!\sim} A$, разрешив подстановку только выполнимых формул. Остальные выводимости будут единообразно преобразованы в правила.

ANML

($a1$) $p \mathrel{|\!\!\sim} p$

($ar1$) $A \wedge B \mathrel{|\!\!\sim} A \wedge B \,/\, A \wedge B \mathrel{|\!\!\sim} A$

($ar2$) $A \wedge B \mathrel{|\!\!\sim} A \wedge B \,/\, A \wedge B \mathrel{|\!\!\sim} B$

($ar3$) $A \mathrel{|\!\!\sim} A \,/\, A \mathrel{|\!\!\sim} A \vee B$

($ar4$) $B \mathrel{|\!\!\sim} B \,/\, B \mathrel{|\!\!\sim} A \vee B$

($ar5$) $A \mathrel{|\!\!\sim} A;\ B \mathrel{|\!\!\sim} B \,/\, A, B \mathrel{|\!\!\sim} A \wedge B$

($ar6$) $A \vee (B \wedge C) \mathrel{|\!\!\sim} A \vee (B \wedge C) \;/\; A \vee (B \wedge C) \mathrel{|\!\!\sim} (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

($ar7$) $A \mathrel{|\!\!\sim} A \,/\, A \mathrel{|\!\!\sim} \neg\neg A$

($ar8$) $\neg\neg A \mathrel{|\!\!\sim} \neg\neg A \,/\, \neg\neg A \mathrel{|\!\!\sim} A$

($ar9$) $\neg A \wedge (A \vee B) \mathrel{|\!\!\sim} \neg A \wedge (A \vee B) \,/\, \neg A \wedge (A \vee B) \mathrel{|\!\!\sim} B$

($ar10$) $\neg(A \wedge B) \mathrel{|\!\!\sim} \neg(A \wedge B) \,/\, \neg(A \wedge B) \mathrel{|\!\!\sim} \neg A \vee \neg B$

($ar11$) $\neg A \wedge \neg B \mathrel{|\!\!\sim} \neg A \wedge \neg B \,/\, \neg A \wedge \neg B \mathrel{|\!\!\sim} \neg(A \vee B)$

($ar12$) $\neg(A \vee B) \mathrel{|\!\!\sim} \neg(A \vee B) \,/\, \neg(A \vee B) \mathrel{|\!\!\sim} \neg A \wedge \neg B$

($ar13$) $\neg A \vee \neg B \mathrel{|\!\!\sim} \neg A \vee \neg B \,/\, \neg A \vee \neg B \mathrel{|\!\!\sim} \neg(A \wedge B)$

($ar14$) $A \mathrel{|\!\!\sim} A \,/\, A \mathrel{|\!\!\sim} B \vee \neg B$

($ar15$) $A \mathrel{|\!\!\sim} C;\ B \mathrel{|\!\!\sim} C \,/\, A \vee B \mathrel{|\!\!\sim} C$ ($ar16$) $\Gamma, A, A \mathrel{|\!\!\sim} B \,/\, \Gamma, A \mathrel{|\!\!\sim} B$

($ar17$) $\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} A\,;\ \Delta, A \mathrel{|\!\!\sim} B \,/\, \Gamma, \Delta \mathrel{|\!\!\sim} B$ ($ar18$) $\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} A;\ \Gamma, B \mathrel{|\!\!\sim} B / \,\Gamma, B \mathrel{|\!\!\sim} A$

($ar19$) $\Gamma, A, B \mathrel{|\!\!\sim} C \,/\, \Gamma, B, A \mathrel{|\!\!\sim} C$ ($ar20$) $A \mathrel{|\!\!\sim} A \,/\, A^* \mathrel{|\!\!\sim} A^*$,

где A^*– результат правильной подстановки.

Определение 4.
Подстановка формулы B вместо всех вхождений переменной p в формулу A называется правильной, если формула A^* (результат подстановки) приводима к СДНФ[2].

Понятие вывода и доказательства стандартные для исчислений выводимостей. Смысл введенных ограничений на применение правила подстановки очевиден — обеспечить невыводимость заключений из противоречивых посылок. В правиле ограниченной монотонности ($ar18$) ключевую роль играет вторая посылка. Добавление формулы B в антецедентную и консеквентную части этой посылки гарантирует непротиворечивость расширения соответствующего множества.

Работу системы иллюстрируют следующие примеры.
Пример 1. $p \mid\!\sim p \wedge (q \vee \neg q)$

1.	$p \mid\!\sim p$	$(a1)$
2.	$p \mid\!\sim q \vee \neg q$	$(ar14)$:1
3.	$q \vee \neg q \mid\!\sim q \vee \neg q$	$(ar20)$:1
4.	$p,\, q \vee \neg q \mid\!\sim p \wedge (q \vee \neg q)$	$(ar5)$:1, 3
5.	$p,\, p \mid\!\sim p \wedge (q \vee \neg q)$	$(ar17)$:2, 4
6.	$p \mid\!\sim p \wedge (q \vee \neg q)$	$(ar16)$:5

$(ar17)$ $\Gamma \mid\!\sim A;\, \Delta, A \mid\!\sim B \,/\, \Gamma, \Delta \mid\!\sim B$ в случае, когда Δ пусто или состоит из одной формулы A, обеспечивает транзитивность:
(Trs) $\Gamma \mid\!\sim A;\;\; A \mid\!\sim B \,/\, \Gamma \mid\!\sim B$.

Однако ситуация с добавлением к постулатам системы правила ограниченной монотонности ($ar18$) не так очевидна. Рассмотрим еще один пример.
Пример 2. $p \wedge q,\; r \mid\!\sim q$

1.	$p \mid\!\sim p$	$(a1)$
2.	$r \mid\!\sim r$	$(ar20)$:1
3.	$p \wedge q \mid\!\sim p \wedge q$	$(ar20)$:1
4.	$p \wedge q,\; r \mid\!\sim (p \wedge q) \wedge r$	$(ar5)$:2, 3
5.	$(p \wedge q) \wedge r \mid\!\sim (p \wedge q) \wedge r$	$(ar20)$:1
6.	$(p \wedge q) \wedge r \mid\!\sim p \wedge q$	$(ar1)$:5
7.	$p \wedge q \mid\!\sim q$	$(ar2)$:3
8.	$p \wedge q,\; r \mid\!\sim q$	(Trs):4, 6, 7

[2]Формулировка дедуктивных постулатов **ANML** обеспечивает наличие отношения выводимости только между выполнимыми формулами. Соответственно, тождества классической логики высказываний, используемые для приведения формул к СДНФ, доказуемы в системе в форме утверждений о выводимости.

В данном случае расширение множества посылок было обосновано без применения ($ar18$). В то же время на данный момент я не вижу возможности доказать производность этого правила.

4. Семантическая адекватность

Демонстрация семантической непротиворечивости (корректности) достаточно очевидна. Рассмотрим несколько примеров.

$\Rightarrow$ ($a1$) Как и в случае других дедуктивных постулатов, из p классически следует p. По определению оценки существует приписывание, при котором p истинна. Таким образом, $p \mid\approx p$.

$\Rightarrow$ ($ar1$)

1.	$A \wedge B \mid\approx A \wedge B$	
2.	$\exists v.v(A \wedge B) =$ **и**	из 1, по Определению 1
3.	Из $A \wedge B$ классически следует A	
6.	$A \wedge B \mid\approx A$	из 2, 3 по Определению 1

$\Rightarrow$ ($ar18$)

1.	$\Gamma \mid\approx A$	
2.	$\Gamma, B \mid\approx B$	
3.	Из Γ, B классически следует A	из 1
4.	$\exists v.\forall C \in \Gamma.v(C) =$ **и** и $v(B) =$ **и**	из 2, по Определению 1
6.	$\Gamma, B \mid\approx A$	из 3, 4 по Определению 1

$\Rightarrow$ ($ar20$)

1.	$A \mid\approx A$	
2.	Из A^* классически следует A^*	
3.	A^* приводима к СДНФ	по опр. правильной подстановки
4.	$\exists v.v(A^*) =$ **и**	из 3, по определению СДНФ
5.	$A^* \mid\approx A^*$	из 2 и 4 по Определению 1

Доказательство полноты основано на модификации метода Генкина.

Пусть теория α — это множество формул, удовлетворяющее стандартным свойствам:
(1) нормальности — $\neg A \in \alpha \Leftrightarrow A \notin \alpha$;
(2) замкнутости относительно выводимости — $(\Gamma \mid\sim A$ *и* $\Gamma \subseteq \alpha) \Rightarrow A \in \alpha$,
а также дополнительному свойству
(3) непустоты — $A \mid\not\approx A \Rightarrow A \notin \alpha$.

Лемма 1. *Пусть α — теория, удовлетворяющая свойствам (1),(2) и (3), и пусть каноническая оценка v_c задана следующим образом:*

$v_c(p) =$ ***и*** $\Leftrightarrow p \in \alpha$;
$v_c(p) =$ ***л*** $\Leftrightarrow \neg p \in \alpha$.
Тогда каноническая оценка удовлетворяет условиям Определения 3 для произвольной формулы.

Доказательство. Доказательство вполне стандартно. Рассмотрим несколько примеров.

$A ::= \neg B$
Рассмотрим случай ложности.

1.	$v_c(\neg B) =$ **л** $\Leftrightarrow v_c(B) =$ **и**	по Определению 3
2.	$v_c(B) =$ **и** $\Leftrightarrow B \in \alpha$	по индуктивному допущению
3.	$B \in \alpha \Leftrightarrow \neg B \notin \alpha$	по свойству (1) теории
4.	$\neg B \notin \alpha \Leftrightarrow \neg\neg B \in \alpha$	по свойству (1) теории

$A ::= B \wedge C$
Рассмотрим случай истинности.

$\Rightarrow$

1.	$v_c(B \wedge C) =$ **и** $\Leftrightarrow v_c(B) = v_c(C) =$ **и**	по Определению 3
2.	$B \in \alpha$ и $C \in \alpha$	по индуктивному допущению
3.	$\{B, C\} \subseteq \alpha$	по определению множества из 2
4.	$B \mid\!\sim B$	по свойству (3) теории из 2
5.	$C \mid\!\sim C$	по свойству (3) теории из 2
6.	$B, C \mid\!\sim B \wedge C$	по $ar5$ из 4, 5
7.	$B \wedge C \subseteq \alpha$	по свойству (1) теории из 3, 6

$\Leftarrow$

1.	$B \wedge C \in \alpha$	допущение
2.	$B \wedge C \mid\!\sim B \wedge C$	по свойству (3) теории из 1
3.	$B \wedge C \mid\!\sim B$	по $ar1$ из 2
4.	$B \wedge C \mid\!\sim C$	по $ar2$ из 2
5.	$B \in \alpha$	по свойству (1) теории из 1, 3
6.	$C \in \alpha$	по свойству (1) теории из 1, 4
7.	$v_c(B) =$ **и**	по инд. допущению из 5
8.	$v_c(C) =$ **и**	по инд. допущению из 6
9.	$v_c(B \wedge C) =$ **и**	по Определению 3 из 7, 8

Доказательство строится для произвольных выполнимых формул B и C. Случаи, когда B и/или C — противоречивые формулы, противоречат определениям 3 или 1, соответственно. ■

Следующий шаг в подготовке доказательства семантической полноты состоит в доказательстве леммы Линденбаума, в данном случае — обобщенной леммы Линденбаума.

Лемма 2 (GLL). *Пусть* $\Gamma \not\mid\!\approx A$*, тогда существует множество* $\mathcal{X}$*, обладающее свойствами (1), (2) и (3), такое, что* $\Gamma \subseteq \mathcal{X}$ *и* $A \notin \mathcal{X}$*, или для всякой теории* α *верно, что* $\Gamma \nsubseteq \alpha$.

Доказательство. Далее важно различать (дедуктивное) замыкание некоторого множества Δ (обозначение $Cn(\Delta)$) и множество следствий некоторого множества Δ^+. Дедуктивное замыкание представляет собой пример более общего топологического понятия замыкания относительно некоторой операции (в данном случае — выводимости). Множество считается дедуктивно замкнутым, если ему принадлежит любое следствие некоторого подмножества этого множества. Для того чтобы формула принадлежала множеству следствий данного множества, необходимо, чтобы она была выводима из данного множества, взятого в качестве посылок. В случае монотонной логики очевидно, что второе свойтво является следствием первого: если формула выводима из некоторого подмножества данного множества, то она выводима и из данного множества. Если же отношение выводимости явлется немонотонным, то возможна ситуация, когда формула выводима из некоторого подмножества, но не выводима из всего множества, взятого как целое. Применительно к исследуемой логике это различение становится важным, когда множество является противоречивым, но входящие в него формулы выполнимы, например, $\Delta = \{p, \neg p\}$. Замыкание Δ будет включать Δ, но при этом Δ^+ будет пустым.

Пусть, далее, $\mathcal{X} + C$ означает $Cn(\mathcal{X} \bigcup \{C\})$.

Рассмотрим Γ^+: если $\Gamma \subseteq \Gamma^+$, то покажем, что существует множество $\mathcal{X}$, обладающее свойствами (1), (2) и (3), такое, что $\Gamma \subseteq \mathcal{X}$ и $A \notin \mathcal{X}$; в противном случае покажем, что для всякой теории α верно, что $\Gamma \nsubseteq \alpha$.

I. Пусть $\Gamma \subseteq \Gamma^+$. Тогда $\mathcal{X}_0 = \Gamma + \neg A$. Далее зададим пересчет формул $F_1, F_2, ...$ и следующим образом построим серию множеств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2...$

Пусть имеется $\mathcal{X}_n$. Если (a) $F_n \in \{F_n\}^+$ и (b) $\neg F_n \notin \mathcal{X}_n$ и (c) $\mathcal{X}_n \subseteq (\mathcal{X}_n \bigcup \{F_n\})^+$, то $\mathcal{X}_{n+1} = \mathcal{X}_n + F_n$. В противном случае $\mathcal{X}_{n+1} = \mathcal{X}_n + \neg F_n$. Условие (a) обеспечивает непротиворечивость F_n, условие (b) нужно для демонстрации непротиворечивости результирующего множества $\mathcal{X}$, условие (c) одновременно гарантирует непротиворечивость расширения теории и невыводимость формулы A.

Результирующая теория $\mathcal{X}$ задается через бесконечное объединение множеств $\mathcal{X}_i$. Остается показать, что это множество обладает всеми свойствами теории.

Свойство (1) — нормальность — обеспечивается построением $\mathcal{X}$. Условие (b) обеспечивает невозможность наличия F_i и $\neg F_i$ для всякого i в $\mathcal{X}$. Если F_i не принадлежит $\mathcal{X}$, значит, на каком-то этапе построения серии множеств не было выполнено хотя бы одно из условий (a)-(b), но тогда на этом же этапе множество было расширено за счет $\neg F_i$. Следовательно, обязательно $F_i \in \alpha$ или $\neg F_i \in \alpha$.

Свойство (2) — замкнутость относительно выводимости — обеспечивается построением серии множеств через последовательное замыкание.

Свойство (3) — непустота — также обеспечивается построением. Благодаря условию (a) для каждой формулы F из $\mathcal{X}$ верно, что $F \mid\!\sim F$. Отсюда по контрапозиции получаем свойство (3).

Таким образом, построено множество $\mathcal{X}$, обладающее свойствами (1), (2) и (3), такое, что $\Gamma \subseteq \mathcal{X}$ и $A \notin \mathcal{X}$, что завершает рассмотрение случая **I**.

II. Пусть теперь $\Gamma \nsubseteq \Gamma^{+}$. Это означает, что в составе Γ имеется формула C, такая, что $C \mid\!\not\sim C$, или такой формулой будет конъюнкция всех формул из Γ. По свойству (3) непустоты $\forall\alpha.C \notin \alpha$. Следовательно, на основании Леммы 1, $\forall\alpha.\Gamma \nsubseteq \alpha$. ■

Теорема 1 (Семантическая полнота). *Для любых* $\Gamma, A \in \mathcal{L} : \Gamma \mid\!\approx A \Rightarrow \Gamma \mid\!\sim A$.

Доказательство. Пусть имеет место (1) $\Gamma \mid\!\approx A$ и в то же время допустим (2) $\Gamma \mid\!\not\sim A$. По Определению 1 допущение (1) означает, что (3) $\forall v(\forall C \in \Gamma.v(C) = \textbf{и} \Rightarrow v(A) = \textbf{и})$ *и* $\exists v.\forall C \in \Gamma.v(C) = \textbf{и}$. Возьмем первую часть этого утверждения и, удалив квантор общности, перейдем к канонической оценке: $\forall C \in \Gamma.v_c(C) = \textbf{и} \Rightarrow v_c(A) = \textbf{и})$. Последнее утверждение по Лемме 1 может быть записано как (4) $\Gamma \subseteq \alpha \Rightarrow A \in \alpha$.

В свою очередь допущение (2) на основании Леммы 2 равносильно $\exists\mathcal{X}.\Gamma \subseteq \mathcal{X}$ и $A \notin \mathcal{X}$ или $\forall\alpha.\Gamma \nsubseteq \alpha$. Дальнейшее рассуждение строится разбором случаев. Пусть $\exists\mathcal{X}.\Gamma \subseteq \mathcal{X}$ и $A \notin \mathcal{X}$, что ведет к противоречию с (4). Допустив $\forall\alpha.\Gamma \nsubseteq \alpha$, и используя вторую часть утверждения (3), на основании Леммы 1 еще раз приходим к противоречию — $\Gamma \subseteq \alpha$.

Таким образом, исходное допущение (2) неверно, значит, $\Gamma \mid\!\sim A$. ■

5. Аргументативное следование и релевантность

Итак, построена модифицируемая логика аргументации в виде системы выводимостей, до определенной степени формализующих понятие аргументативного следования. Получившаяся логика является немонотонной, противоречие в ней локализовано, но остается возможность получения парадоксальных следствий — классическая тавтология по-прежнему выводима из любой формулы. В связи с этим привлекательной выглядит перспектива построения логики, в которой отношение следования (и выводимости) удовлетворяло бы комбинированному трехкомпонентному условию непротиворечивости и нетавтологичности.

Определение 5. $\Gamma \models\!\!\approx_r A \Leftrightarrow \forall v(\forall C \in \Gamma.v(C) = \textbf{и} \Rightarrow v(A) = \textbf{и})$ *и* $\exists v.\forall C \in \Gamma.v(C) = \textbf{и}$ *и* $\exists v.v(A) = \textbf{л}$.

Такая формулировка определения аргументативного следования сразу же напоминает известный из истории релевантной логики синтаксический WGS-критерий релевантности, использовавшийся при попытках выделить из множества классически общезначимых импликативных формул непарадоксальные. Для начала уместно кратко напомнить суть дела.

WGS-критерий назван так по первым буквам фамилий логиков, его предлагавших. Это фонВригт (W), Гич (G) и Смайли (S), в период с 1957 по 1959 г. предложившие и уточнившие формулировку синтаксического критерия релевантности. В формулировке фон Вригта этот критерий выглядел несколько расплывчато: «A влечет B, если и только если средствами логики можно установить истинность $A \supset B$, не устанавливая ложность A или истинность B» [Anderson, Belnap, 1975, p. 152]. Окончательный вид критерию придал Смайли, указав, что импликативная формула должна быть таким подстановочным случаем классической тавтологии, что ни ее консеквент, ни отрицание антецедента не являются доказуемыми. Подробно WGS критерий анализируется в: [Ibid., §§ 15.1; 20.1]. Для дальнейшего изложения важно указать, что при наличии транзитивности WGS-критерий не спасает от парадоксов релевантности. Именно поэтому Смайли предложил свою систему, основанную на этом критерии, без свойства транзитивности и даже нашел определенные философские обоснования для нее [Smiley, 1959]. При демонстрации этого используется еще одно достаточно очевидное свойство следования и импликации, которое проходит практически по умолчанию, — «упрощение», или удаление коньюнкции: $p \wedge q \mid\!\sim p$.

Принципиально важным представляется тот факт, что для аргументативного следования (и ассоциированного с ним отношения выводимости, о котором речь пойдет в следующем разделе) в общем виде это свойство не выполняется. Точнее говоря, оно выполняется для любой непротиворечивой конъюнкции. Если же конъюнктивная формула содержит противоречие, из нее нельзя получить даже один из конъюнктов. Это наводит на идею по аналогии с введенной блокировкой противоречия в посылках заблокировать закон (классической логики высказываний) в заключении. Дополненное определение аргументативного следования становится уже трехкомпонентным и принимает указанный выше вид.

В результате для первоуровневого аргументативного следования контрпримеры для WGS-критерия проваливаются. В частности, утверждения о следовании (1) и (2) верны, а (3) — нет.

(1) $(p \wedge \neg p) \vee q \models_{\approx} q$ (2) $p \models_{\approx} p \wedge (q \vee \neg q)$ (3) $p \wedge (q \vee \neg q) \models_{\approx} q \vee \neg q$

Как следствие такого усиленного критерия непарадоксального следования не только исключение конъюнкции, но и некоторые другие традиционные дедуктивные постулаты в общем виде не проходят. Благодаря этому аргументативное следование приобретает новые, как мне представляется, непарадоксальные черты: из противоречия больше не следует ничего — ex falso nihil (EFN), и тавтология не следует ни из чего — verum ex nihil (VEN).

Является ли получившаяся логика в полном смысле релевантной? С одной стороны, в ней неверны утверждения о следовании, соответствующие стандартным парадоксам следования. Более того, за счет введенных ограничений ряд непарадоксальных следований логики **FDE** также не верифицируется, как, например, утверждение о следовании (3). В этом отношении построенная семантически логика оказывается слабее **FDE**. С другой стороны, приведенные выше утверждения о следовании (1) и (2) не являются валидными в **FDE**. Чтобы убедиться в этом, достаточно приписать переменной p значение **B**, а q — **N**.

Таким образом, вопрос о релевантности построенной логики сводится к вопросу, считать ли утверждения типа (1) и (2) парадоксальными (нерелевантными)? Очевидно, они не удовлетворяют критерию тавтологического следования, но, как известно, этот критерий был предложен как формальная экспликация требования наличия связи по содержанию между посылками и заключением. Нарушают ли (1) и (2) это неформальное требование? Как мне представляется, дать определенный ответ на этот последний вопрос затруднительно, поскольку соответствие неформальному требованию в значительной мере зависит от интуиции, скрывающейся за ним. Так или иначе, считать получившуюся логику в полном смысле релевантной было бы неправильно. Скорее, можно говорить о релевантизированном варианте логики **ANML**.

6. Логика ANMRL

Определение 5 гарантирует не только непротиворечивость посылок, но и нетавтологичность заключения. Обеспечивающий нетавтологичность последний член конъюнкции в этом определении, имеющий вид $\exists v.v(A) = $ **л**, может быть эквивалентным образом представлен как $\exists v.v(\neg A) = $ **и**, что позволяет существенно упростить определение.

Задача формализации логики **ANMRL** (т.е. аргументативной немонотонной релевантной логики) может решаться напрямую, через формулировку дедуктивных постулатов для выводимости $\mid\!\sim_r$, ассоциированной с отношением следования $\mid\!\approx_r$. Такой путь предполагает следующие шаги.

- Постулат $ar14$ отбрасывается и его заменяет контрапозиция.
- Это делает лишними постулаты $ar10 - ar13$.
- В постулаты $ar1 - ar9$ к посылке правила, выражающей самотождественность антецедента заключения, добавится посылка, выражающая самотождественность отрицания консеквента заключения. Например, правило $ar2$ трансформируется в правило $A \wedge B \mid\!\sim_r A \wedge B; \neg B \mid\!\sim_r \neg B \,/\, A \wedge B \mid\!\sim_r B$.

Возможная проблема в реализации этого плана связана с переформулировкой правила ограниченной выводимости ($ar18$) $\Gamma \mid\!\sim A; \Gamma, B \mid\!\sim B / \Gamma, B \mid\!\sim A$. При замене отношения $\mid\!\sim$ на $\mid\!\sim_r$ оно оказывается слишком сильным, запрещая расширение множества посылок тавтологичной формулой. В свою очередь это затруднение возникает из-за того, что сложно инференциально различить тавтологии и противоречия. И те и другие оказываются локализованы и «отменены»: в равной степени они не выводимы ни из чего, и из них нельзя получить никакого следствия. Единственное значимое различие как раз связано с правилом ограниченной выводимости: противоречивая информация разрушает предыдущую выводимость, в то время как добавление классических тавтологий не ведет к новым выводимостям, но и не отменяет имеющихся.

Вопрос о допустимости расширения множества посылок истинностно-функциональными тавтологиями не является принципиальным. Вполне можно оставить правило ($ar18$) в стандартной формулировке и просто считать, что такое добавление не оправдано. Если же все-таки считать правило ($ar18$) слишком сильным, то можно рассмотреть два варианта его изменения.

Можно переформулировать вторую посылку, и тогда правило ограниченной монотонности примет следующий вид:

$$\Gamma \mid\!\sim_r A; \quad \Gamma, B \mid\!\sim_r A \vee \neg B \;/\; \Gamma, B \mid\!\sim_r A.$$

Новая редакция второй посылки чем-то напоминает идею абдукции. Чтобы получить из $\Gamma, B \mid\!\sim_r A \vee \neg B$, нужно, чтобы $\Gamma, B \mid\!\sim_r A$, что и требуется получить.

Другой вариант формализации немонотонного релевантного аргументативного следствия основывается на выражении следования $\mid\!\approx_r$ через $\mid\!\approx$. Рассмотрим следующее утверждение:

Утверждение 1. $\Gamma \mid\!\approx\ _r A \Leftrightarrow \Gamma \mid\!\approx\ A$ и $\neg A \mid\!\approx\ \neg A$.

Доказательство.

$\Rightarrow$

(1) Пусть имеет место $\Gamma \mid\!\approx\ _r A$.

(2) По Определению 5 это эквивалентно

$\forall v(\forall C \in \Gamma . v(C) =$ **и** $\Rightarrow v(A) =$ **и**) *и* $\exists v . \forall C \in \Gamma . v(C) =$ **и** *и* $\exists v . v(A) =$ **л**.

(3) Таким образом имеет место $\Gamma \mid\!\approx\ A$ и $\exists v . v(A) =$ **л**.

(4) По Определению 3 это равносильно $\Gamma \mid\!\approx\ A$ и $\exists v . v(\neg A) =$ **и**.

(5) Очевидным образом $\forall v . v(\neg A) =$ **и** $\Rightarrow v(\neg A) =$ **и**.

(6) Итак, $\Gamma \mid\!\approx\ A$ и $\neg A \mid\!\approx\ \neg A$.

$\Leftarrow$

(1) Пусть имеет место $\Gamma \mid\!\approx\ A$ и $\neg A \mid\!\approx\ \neg A$.

(2) По определению 1 $\Gamma \mid\!\approx\ A$ и $\forall v . v(\neg A) =$ **и** $\Rightarrow v(\neg A) =$ **и** и $\exists v . v(\neg A) =$ **и**.

(3) Отсюда $\Gamma \mid\!\approx\ A$ и $\exists v . v(\neg A) =$ **и**.

(4) Следовательно, имеет место $\Gamma \mid\!\approx\ A$ и $\exists v . v(A) =$ **л**.

(5) Последнее означает, что $\Gamma \mid\!\approx\ _r A$. ■

С учетом доказанного утверждения появляется возможность полноценно выразить выводимость $\mid\!\sim\ _r$ через $\mid\!\sim$.

Определение 6. $\Gamma \mid\!\sim\ _r A \Leftrightarrow \Gamma \mid\!\sim\ A$ и $\neg A \mid\!\sim\ \neg A$.

Это позволяет найти подходящую формулировку правила ограниченной монотонности.

$\Gamma \mid\!\sim\ _r A; \Gamma, B \mid\!\sim\ B / \Gamma, B \mid\!\sim\ _r A$.

По определению первая посылка означает, что (1) $\Gamma \mid\!\sim\ A$ и (2) $\neg A \mid\!\sim\ \neg A$. Из (1) и второй посылки по ($ar18$) получаем $\Gamma, B \mid\!\sim\ A$, что в свою очередь вместе с (2) позволяет получить $\Gamma, B \mid\!\sim\ _r A$.

7. Заключение

В работе последовательно строится немонотонная логика аргументации **ANML** и описывается ее релевантизированный вариант **ANMRL**. Избегание парадоксов в последнем случае обеспечивается инференциальной блокировкой и локализацией противоречий и тавтологий. Такой подход в принципе согласуется с аргументативной интерпретацией рассуждений, предполагающей их модифицируемость и потенциальную отменяемость. Однако с чисто логической точки зрения плата за такую релевантную модифицируемость может оказаться слишком жесткой.

Во-первых, в построенной логике нет связки для выражения условной связи. Привычная трактовка импликации как сокращения для отрицания и дизъюнкции возможна, но ее принятие сразу же ведет к парадоксам следования, возникающим на основе принципов введения дизъюнкции: $\neg p \mid\!\sim_r p \supset q$ и $q \mid\!\sim_r p \supset q$. Это значит, что актуальной перспективной задачей является поиск подходящей импликации для выражения логической формы условных высказываний в посылках и заключении аргументативных рассуждений.

Во-вторых, насильственная «релевантизация» через предложенное ограничение классической трактовки следования может показаться чересчур радикальной. Отказ от принципов исключения конъюнкции и введения дизъюнкции для произвольных формул существенным образом трансформирует инференциальные свойства системы. В связи с этим еще одно возможное направление исследований может быть связано с выбором в качестве базовой неклассической логики, например, первоуровневой релевантной, с последующей ее модификацией так, чтобы она стала немонотонной.

Литература

Anderson, Belnap, 1975 – *Anderson A.R., Belnap N.D.* Entailment. The Logic of Relevance and Necessity. Vol. 1. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1975. 543 p.

Koons, 2022 – *Koons R.* Defeasible Reasoning // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2022 Edition) / E.N. Zalta (ed.). URL: `https://plato.stanford.edu/archives/sum2022/entries/reasoning-defeasible/` (дата обращения: 17.02.2025).

Priest, 1999 – *Priest G.* Negation as cancellation, and connexive logic // Topoi. 1999. Vol. 18. No. 6. P. 141–148.

Routley, Routley, 1985 – *Routley R., Routley V.* Negation and Contradiction // Rivista Columbiana de Matemáticas. 1985. Vol. 19. P. 201–231.

Shramko et al., 2017 – *Shramko Ya., Zaitsev D., Belikov A.* First-degree entailment and its relatives // Studia Logica. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1291–1317.

Smiley, 1959 – *Smiley T.J.* Entailment and Deducibility // Proceedings of the Aristotelian Society. 1959. Vol. 59. P. 233–254.

Dmitry V. Zaitsev

Argumentative consequence, non-monotony, and relevance

Dmitry V. Zaitsev
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: zaitsev@philos.msu.ru

Abstract: The paper explores the particularities of argumentative consequence relation. Among its important characteristics are soundness (where sound argument is an argument that is both valid and has true premises) and defeasibility. The latter property suggests the possibility for argumentative reasoning to be defeated in the light of potential of criticism and/or additional information. Based on these considerations, a semantic interpretation of argumentative consequence relation is proposed as a kind of restriction of the classical one by the additional requirement for the set of premises to be satisfiable, which presupposes the existense of a truth-value assignment for the variables that makes all the premises true. This informally generated condition leads to defeasibility of the consequence relation. Adding arbitrary information to the original set of premises (either self-contradictory, or contradicting previously accepted premises) becomes prohibited. Hereinafter I propose a consequence system formalizing the introduced above concept of argumentative (semantic) consequence, and prove its semantic adequacy. This system in turn serves as a basis for further relevantization of the first degree semantic consequence relation enriched with an extra requirement for a conclusion to be non-tautological.

Keywords: logic of argumentation, argumentative reasoning, argumentative consequence relation, non-monotony, relevance

For citation: Zaitsev D.V. "Argumentativnoe sledovanie, nemonotonnost' i relevantnost'" [Argumentative consequence, non-monotony, and relevance], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 1, pp. 110–129. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-110-129 (In Russian)

Acknowledgements. The author thanks the reviewer for the careful reading of the paper and useful advice.

References

Anderson, Belnap, 1975 – Anderson, A.R., Belnap, N.D. *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity.* Vol. 1. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1975. 543 p.

Koons, 2022 – Koons, R. "Defeasible Reasoning", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2022 Edition) / E.N. Zalta (ed.) [https://plato.stanford.edu/archives/sum2022/entries/reasoning-defeasible/, accessed on 17.02.2025].

Priest, 1999 – Priest, G. "Negation as cancellation, and connexive logic", *Topoi*, 1999, Vol. 18, No. 6, pp. 141–148.

Routley and Routley, 1985 – Routley, R., Routley, V. "Negation and Contradiction", *Rivista Columbiana de Matemáticas*, 1985, Vol. 19, pp. 201–231.

Shramko et al., 2017 – Shramko, Ya., Zaitsev, D., Belikov, A. "First-degree entailment and its relatives", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1291–1317.

Smiley, 1959 – Smiley, T.J. "Entailment and Deducibility", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 1959, Vol. 59, pp. 233–254.

Логические исследования
2025. Т. 31. № 1. С. 130–150
УДК 16

Logical Investigations
2025, Vol. 31, No. 1, pp. 130–150
DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-130-150

История логики
History of Logic

В.А. Бажанов

Ньютон К.А. да Коста и его связи с советскими/российскими коллегами (1986–2021)*

Валентин Александрович Бажанов
Ульяновский государственный университет.
Россия, 432000, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42.
E-mail: vbazhanov@yandex.ru

Аннотация: Статья посвящена переписке выдающегося бразильского логика и философа Ньютона да Косты (16.09.1929 Куритиба, Бразилия – 16.04.2024, Флорианаполис, Бразилия), который внес значительный вклад в создание и развитие паранепротиворечивой логики, с В.А. Бажановым, а также отношениям да Косты с советскими/российскими логиками и философами. Публикуемые письма Ньютона да Косты автору данной статьи были частью регулярной переписки, которая продолжалась с 1986 по 2021 г. Они раскрывают его взгляды на развитие логики в России, а также обстоятельства его контактов с советскими и российскими логиками. В своих письмах да Коста отдает должное заслугам Н.А. Васильева, который в своей «воображаемой логике» первым предложил создать логику, свободную от законов (не)противоречия и исключенного третьего, и поэтому считается фактическим предтечей современной неклассической логики в целом и паранепротиворечивой логики в частности. Да Коста выражал глубокое уважение к российской культуре и науке, подчеркивал необходимость тесного сотрудничества между учеными разных стран, делился своими впечатлениями от посещения (вместе с дочерью) конгресса по логике, методологии и философии науки в Москве летом 1987 г.

Ключевые слова: Ньютон да Коста, неклассическая логика, Н.А. Васильев, воображаемая логика, паранепротиворечивая логика, многозначная логика

Для цитирования: *Бажанов В.А.* Ньютон К.А. да Коста и его связи с советскими/российскими коллегами (1986–2021) // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 1. С. 130–150. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-130-150

Ньютон К.А. да Коста (16.09.1929 Куритиба, Бразилия – 16.04.2024, Флорианаполис, Бразилия) — выдающийся логик, детально разработавший такой раздел неклассической логики, как паранепротиворечивая логика,

* Искренне благодарю Наталью Олеговну Седову за помощь в оформлении текста статьи в LaTeX.

и исследовавший ее приложения к математике, физике, динамическим системам и др. Он внес значительный вклад в аналитическую философию науки. Фактически он заложил основания бразильской школы неклассической логики и философии науки.

Да Коста закончил университет Параны (Бразилия) по специальности «Гражданское строительство» (1952). Там же стал бакалавром математики (1955), а в 1961 г. ему была присуждена степень доктора философии. С 1953 по 1956 г. он работал инженером, одновременно получая математическое образование. На его становление как исследователя большое влияние оказали математик и статистик Рене Фрейре (Университет Параны), Эдисон Фара (Университет Сан-Паулу) и Марсель Гийом (Университет Клермон-Феррана, Франция). Тем не менее Н. да Коста считал, что во многом добился всего сам благодаря постоянным самостоятельным занятиям [Da Costa, 1985, p. 4].

До 1970 г. он был профессором математики в университете Параны, с 1970 по 1982 г. — профессором математики, а с 1982 по 1999 г. — профессором логики и теории науки в университетах Сан-Паулу и Кампинаса, Бразилия. Да Коста читал лекции по приглашению многих университетов Аргентины, Австралии, Италии, Испании, Франции, Германии, Мексики, Польши, США и других стран. Являлся членом ряда национальных академий наук.

Н. да Коста — автор нескольких сотен статей, опубликованных в ведущих мировых журналах, и нескольких книг.

Несколько работ Н. да Косты были опубликованы в СССР (на русском языке) [Да Коста, 1982; Да Коста, Пюга, 1988; Да Коста, Маркони, 1989].

Письма Валентину Александровичу Бажанову[1]

22 сентября 1986 г.

Уважаемый доктор Бажанов,

Доктор Элиас Алвес[2] показал мне письмо, которое Вы ему адресовали. Я был научным руководителем диссертаций Арруды и Алвеса. Доктор Арруда была одним из моих ближайших сотрудников до своей безвременной кончины, а доктор Алвес в настоящее время является одним из моих наиболее перспективных сотрудников. Все мы, члены бразильской группы логиков, очень интересуемся работой и жизнью Н.А. Васильева. (Уместно

[1]За 1986–2021 гг. я получил от да Косты более 80 писем на английском языке, большая часть которых (до 2010 г., когда да Коста стал пользоваться электронной почтой) написана от руки. Наиболее значимые фрагменты писем приведены в переводе В.А. Бажанова. Ряд писем частного порядка опущен.

[2]Насколько я помню, я попросил Э. Алвеса прислать оттиск его статьи [Alves, 1984].

заметить, что именно я предложил доктору Арруда[3] изучить логические работы Васильева, прочитав его заметку, представленную на Международном философском конгрессе; в то время я находился в США, в Калифорнийском университете в Беркли, и был очень удивлен, узнав, что русский логик за несколько лет до этого высказывал идеи, сходные с моими. Но я был и доволен, тем более что являюсь одним из самых больших поклонников вашей страны и ее культуры. В своих логических исследованиях я также вдохновлялся работами Лобачевского). Так что мне очень интересно получить все, что у Вас есть о творчестве и жизни Васильева.

С другой стороны, у меня есть некоторые идеи по поводу силлогистики Васильева. Возможно, мы могли бы провести совместную работу по этой теме. Что Вы думаете о моем предложении?

Замечание по поводу Вашего письма: Я не уверен, что Васильева можно считать предшественником современной многозначной логики. Его идеи о tertium non datur, кажется, показывают, что воображаемая логика может рассматриваться как вид общей паранепротиворечивой логики, но не как вид многозначной логики в строгом смысле. Возможно, мы могли бы обсудить эти вопросы в будущей переписке.

Я хотел бы знать, каковы Ваши основные логические и философские интересы, чтобы послать Вам некоторые из моих работ. А также хотел бы получить ваши.

Я не знаю русского языка, но некоторые мои сотрудники и студенты знают.

Мой домашний адрес следующий: ****

Сердечно Ваш, Ньютон да Коста

20 ноября 1986 г.

Большое спасибо за Ваше любезное и интересное письмо от 29 октября, которое я только что получил.

Я забыл сказать, что это доктор Алвес попросил меня ответить на ваше письмо ему, поскольку он болен. Таким образом, мое последнее письмо, как и это, также являются его письмами…

Отдельным письмом я пошлю вам несколько своих работ и работ моих сотрудников. Надеюсь, они будут вам полезны.

Поскольку я являюсь поклонником творчества Васильева, прошу вас прислать мне любые имеющиеся у Вас копии документов, связанных с ним и с его творчеством. Судя по Вашему письму, Вы получили много новых материалов о нем: меня интересуют все такие материалы[4].

[3] Aida Arruda (1936–1983).

[4] В 1984 г. профессор В.А. Смирнов (1931–1996) попросил меня посмотреть, не сохранилось ли что-то от Н.А. Васильева в Казани, где я тогда жил и работал. Я нашел в отделе

****5

Я буду очень рад (и очень польщен), если мы сможем завершить какое-нибудь совместное исследование. В будущей переписке мы сможем обсудить детали такого возможного сотрудничества.

Я заканчиваю работу над статьей о жизни и творчестве доктора А.И. Арруда (частичный перевод моей статьи только что вышел на болгарском языке); как только она будет готова, я пошлю Вам копию.

28 ноября 1986 г.

Уважаемый доктор Бажанов,

Большое спасибо за перепечатку Вашей статьи о жизни и творчестве Васильева, а также за Ваше письмо. **** Я счастлив, когда вы пишете, что меня знают и ценят в Вашей стране, в частности потому, что я один из самых больших поклонников Советского Союза.

12 января 1987 г.

****

Я только что закончил статью, посвященную логике Васильева. Через несколько дней я пошлю Вам ее препринт (я хотел бы знать, можно ли опубликовать там русский перевод моей статьи, возможно ли это?).

19 февраля 1987 г.

Вид на Казанский университет прекрасен. Кстати, я с детства слышал о Казани и ее университете, потому что являюсь поклонником Лобачевского.

****

Я также с нетерпением жду встречи с Вами и профессорами Смирновым и Нарским в Москве, а также с некоторыми другими моими друзьями по переписке[6], которые живут в Советском Союзе и которых я не знаю лично.

9 марта 1987 г.

Большое спасибо за Ваше любезное письмо от 12 февраля 1987 г. Я очень рад, что Вы готовы перевести мою статью о Васильеве на русский язык и

редких рукописей и книг библиотеки Казанского университета два ранее неизвестных объемных отчета Н.А. Васильева, которые мне позволили сфотографировать. Я поделился фотографиями рукописей с В.А. Смирновым, который предпринял издание избранных логических и философских трудов Н.А. Васильева (М.: Наука, 1989), включая найденные отчеты. Еще в 1988 г. мне удалось опубликовать научную биографию Н.А. Васильева [Бажанов, 1988], рецензии на которую появились едва ли не во всех мировых журналах, посвященных истории логики. Самым сложным оказалось отыскать фотографии Н.А. Васильева. До моей находки этих фотографий в личных архивах родственников Васильева не было известно, как выглядит ученый.

[5] Так в статье будут обозначаться универсальные для переписки и повторяющиеся фрагменты (типа приветствий и благодарностей за полученные письма).

[6] Да Коста ни разу не назвал, кого он имел в виду. Я сомневаюсь, что с кем-то он общался помимо имен, которые в явном виде упоминал в письмах.

опубликовать ее в книге «Основания математики: методологические проблемы»... Это будет большой честью для меня. ...В приложении Вы найдете мой документ об авторском праве, о котором Вы меня просили.

13 апреля 1987 г.

Хочу затронуть несколько тем:

1) Большое спасибо за документы по моей статье о воображаемой логике Васильева. Как я пытался прояснить в своей работе, я не предлагал свою логическую систему в качестве формализации взглядов Васильева. И это является следствием нескольких причин: 1.1) идеи Васильева кажутся несколько расплывчатыми; по крайней мере, он не использовал технику, которая принята в символической логике; 1.2) у меня нет хороших переводов его работ; 1.3) я не знаю ни одной еще не опубликованной его работы, которая помогла бы мне составить лучшее представление о его концепции. Поэтому, если моя работа будет переведена на русский язык, вы могли бы добавить свой анализ взглядов Васильева. ...

2) Параполная логика, грубо говоря, это логика, в которой закон tertium non datur в общем случае не выполняется. Другими словами, высказывание и его отрицание могут быть одновременно ложными. Большинство многозначных логик являются параполными, но обратное в общем случае неверно...

3) Моя работа в сотрудничестве с доктором Лейлой Пюга о воображаемой логике Васильева была принята к публикации в Zeitschrift fur Mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik в Восточной Германии.

4) Как я уже говорил, в августе я буду в Москве. Мое пребывание там продлится около недели.

11 мая 1987 г.

Я очень рад тому, что Вы переводите мою работу по логике Васильева и намерены добавить к ней «предисловие» или заключение. ****

15 мая 1987 г.

Посылаю вам краткое изложение (резюме) теории оценок. В ней я даю определение параполной логике, которое я сформулировал в нашей работе с Л. Пюга. В этом резюме есть все, что вы можете найти в моей работе, опубликованной в журнале «Logique et Analyse», но в данном случае текст дополнен некоторыми деталями. Возможно, вы включите это резюме в свое введение к моей работе.

Вместе с этим я посылаю вам еще одну свою работу, в которой я ссылаюсь на теорию оценок.

Мои оценки двузначны, и я могу доказать, что любая логика имеет двузначную семантику оценок (даже многозначные логики). Однако моя семантика не является истинностно-функциональной: значение формулы не определяется значениями ее подформул. В любом случае, моя семантика способствует систематизации различных категорий логики, классической или неклассической, и в некоторых случаях придает примитивным связкам операциональные значения, а в других случаях предоставляет нам новые методы решения. В случае классической логики моя семантика совпадает со стандартной.

17 июня 1987 г.

Я думаю, что ваши замечания по моей работе можно включить в нее в качестве приложения. Они действительно весьма интересны, и вы правы, когда интерпретируете мою работу как своего рода «вариации» на «тему» Васильева.

Мне бы очень хотелось, чтобы после Московского конгресса я смог провести хотя бы неделю в Советском Союзе, чтобы поговорить с Вами о паранепротиворечивой логике, работах Васильева и других проблемах. Однако есть одна трудность: я могу остаться в Советском Союзе на дополнительную неделю только в том случае, если получу какую-то финансовую помощь из советского источника. У меня нет средств для оплаты дополнительной недели пребывания в СССР. Если я не смогу получить такую помощь, то мне придется покинуть Советский Союз сразу после конгресса или после короткой поездки в Ленинград, которая состоится после конгресса.

Отдельным письмом я посылаю вам препринт моей статьи о развитии паранепротиворечивой логики в 1980-х гг. Надеюсь, вы получите удовольствие от ее прочтения. В этой работе, среди прочего, я излагаю свои идеи о развитии паранепротиворечивой логики после Васильева.

Я собираюсь в Советский Союз вместе с моей дочерью Сильвией-Лючией. Мы с нетерпением ждем встречи с вами и профессорами [И.С.] Нарским, [В.А.] Смирновым и [А.И.] Уемовым[7] в Москве[8].

25 июня 1987 г.

Я получил ваше письмо от 10 июня с вашей статьей о значении работ Васильева для современной логики. Спасибо.

С некоторыми трудностями мой студент пытался перевести для меня вашу статью. Я думаю, что вы должны опубликовать все результаты вашего исследования жизни и творчества Васильева в виде книги. Кстати, я хотел бы опубликовать вашу статью о работе Васильева в «Journal of Non-Classical Logic». Возможно ли это?

[7] А.И. Уемов (1928–2012).

[8] И.С. Нарский и В.А. Смирнов приняли участие в Московском конгрессе, но я не помню, присутствовал ли А.И. Уемов.

13 июля 1987 г.

По предложению доктора Савы Петрова[9] из Болгарии обращаюсь к вам. Мы с доктором Петровым хотели бы организовать небольшую встречу, связанную с идеей паранепротиворечивости и диалектики во время Московского конгресса. Возможно ли это? Если ответ будет утвердительным, не могли бы Вы быть столь любезны попытаться организовать ее? Прилагаю список возможных участников, составленный доктором Петровым[10].

...Большой и замечательной новостью является то, что наконец-то паранепротиворечивая логика была применена к вычислениям, точнее, к экспертным системам, Субраманианом и Блэром из Сиракузского университета, США. Отныне этот вид логики будет важен не только с теоретической, но и с практической точки зрения. Удивительно, что иногда отвлеченные теоретические исследования находят весьма важные приложения...

5 октября 1987 г.

Дорогой Валентин,

Я прибыл в Сан-Паулу несколько дней назад после долгого путешествия. После пребывания в Европе я провел три дня в Бразилии и сразу же отправился в Аргентину для участия в Международном философском конгрессе. Именно по этой причине я не ответил на Ваше письмо от 26 августа раньше. Хочу сказать вам несколько вещей:

1. **** Мы надеемся, что наша дружба будет долгой.

2. Конечно, я согласен с вами, что в сильном смысле только Васильев может считаться предтечей паранепротиворечивой логики. Тем не менее Лукасевич также заслуживает того, чтобы считаться предтечей, скорее всего, в слабом смысле, принимая во внимание его неопубликованные идеи, по крайней мере, если учитывать мнение Яськовского.

3. Когда я говорю, что Васильев *почти*[11] ничего не знал о современной логике, то я хочу сказать, что в его опубликованных работах нет ни малейшего намека на то, что он действительно знал современную математическую логику. Например, его воображаемая логика начинается с классической,

[9]С.Д. Петров (1934–1989) известен своими трудами по философии науки. В начале 1980-х гг. круг его интересов сместился в область диалектики и паранепротиворечивой логики (в моем архиве хранятся несколько его писем).

[10]Такую встречу удалось организовать мне и профессору А.Г. Барабашеву. В оживленной дискуссии приняло участие около 30 участников конгресса. Мы с А.Г. выступали в качестве переводчиков.

[11]На самом деле Н.А. Васильев в своих работах упоминал некоторых представителей, имевших отношение к математической логике (Дж. Буля, Ч. Пирса, О. де Моргана, У. Джевонса, Дж Венна, П.С. Порецкого, Л. Кутюра, Б. Рассела, Д. Гильберта), но аппаратом математической логики не владел.

аристотелевской логики, когда явно уместнее было бы начать с современной ему математической логики.

4. Замечания, которые вы предложили мне добавить к моей работе, действительно очень важны. Но моя статья уже напечатана. Тогда я делаю Вам следующее предложение: профессор Нарский попросил меня написать еще одну работу для перевода на русский язык. Я предложу ему перевести мою работу с Маркони, а вас попрошу написать длинное примечание к переводу (в том числе со ссылкой на вашу работу о Васильеве). Что вы думаете об этом?

5. Я хотел бы получить копии и точные данные, касающиеся всех работ, на которые вы ссылались в своем письме. Возможно ли это?

****

26 октября 1987 г.

В этом письме вы найдете окончательный вариант статьи о силлогизме Васильева, которую мы с А.И. Аррудой планировали написать несколько лет назад. Хотелось бы узнать ваше мнение о ней, в частности, заслуживает ли она завершения и публикации. Если ваш ответ будет положительным, я мог бы закончить работу и опубликовать ее от имени Арруды и от своего имени; или, возможно, если вы захотите внести свой вклад, мы могли бы расширить примечания и опубликовать работу в соавторстве трех человек. Что вы думаете об этом предложении? Возможно, стоит также спросить мнение Смирнова. Пожалуйста, пишите мне в связи со всеми этими проблемами.

5 ноября 1987 г.

****

Большое спасибо за новый список советских публикаций по паранепротиворечивости. Не могли бы Вы быть столь любезны и достать для меня копии этих работ...

5 февраля 1988 г.

Профессор [И.С.] Нарский сказал мне, что он хотел бы опубликовать перевод моей статьи с Маркони в журнале «Философские науки», в котором я опубликовал свою работу «О философском значении паранепротиворечивой логики». Я думаю, что это хороший журнал, хорошо известный в социалистических странах. Но действительно очень важно то, что я хотел бы, чтобы вы добавили к нему приложение или предисловие с замечаниями, новыми библиографическими статьями (особенно связанными с Васильевым) и т.д. Мне бы также очень хотелось, чтобы вы убедили профессора Нарского добавить несколько своих замечаний, особенно по диалектике.

26 февраля 1988 г.

Вы вольны вносить в мою статью любые изменения, которые сочтете нужными. С другой стороны, мне будет очень приятно, если вы добавите не только введение, но и дополнительную библиографию, включая все ссылки, о которых вы упомянули в своем письме.

Я уверен, что ваша книга будет превосходной. Как только она будет опубликована, пожалуйста, пришлите мне экземпляр. И спасибо за ссылки на меня в вашей книге.

P.S. В течение марта меня не будет в Сан-Паулу.

13 апреля 1988 г.

Я очень польщен возможностью включения моего имени в «Философский словарь». Я также очень благодарен Вам за то, что Вы предложили включить мое имя в это издание. Я очень горд, особенно потому, что оно выйдет на русском языке[12].

12 июня 1988 г.

Я не знал, что все логические работы, написанные Васильевым, планируется выпустить в 1989 г. Конечно, я был бы очень признателен получить экземпляр.

На Западе мы слышим о социальных и политических изменениях, которые происходят в Советском Союзе. Я надеюсь, что все это будет способствовать гармоничному развитию вашей страны и улучшению отношений между Востоком и Западом. Я очень люблю вашу страну и всю свою жизнь делаю все возможное для лучшего взаимопонимания между нашими народами.

****

18 апреля 1988 г.

Ниже вы найдете краткое изложение моей биографии в соответствии с вашей просьбой. Я также включил копию моей биографии в том виде, в каком она была опубликована несколько лет назад в посвященной мне книге.

16 августа 1988 г.

Большое спасибо за Ваше письмо от 4 июля, которое я получил сегодня, поскольку бразильская почта бастует уже около двух месяцев. Я даже не знаю, дойдет ли это письмо до Вас без длительной задержки.

****

[12] По неизвестной мне причине краткая статья о да Косте в «Философский словарь» (М.: 1989) не вошла.

Я надеюсь, что нам удастся сделать кое-что, связанное с силлогистикой Васильева, и опубликовать результаты на русском языке. Это была бы моя первая работа, опубликованная на этом языке[13].

30 августа 1988 г.

Это единственные дополнения к библиографии моей статьи (с Маркони): (список пяти недавно опубликованных работ да Коста с Р.Г. Вольфом, Д. Маркони, А. Лопаричем, В. Карниелли).

****

27 сентября 1988 г.

Большое, большое спасибо за два экземпляра Вашей книги о Васильеве. Мой друг и бывший студент владеет русским языком и помогает мне читать Вашу книгу.

Она действительно превосходна и заслуживает английского издания. Я надеюсь, что в будущем вы сможете опубликовать книгу на этом языке, чтобы западные логики могли ее прочитать.

Васильев действительно был очень интересным человеком. Удивительно, что он был еще и поэтом... Я тоже поэт!!! ... (*примечание да Косты внизу письма — В.Б.*).

13 ноября 1988 г.

****

Спасибо за перевод моей статьи с Маркони.

Что касается статьи о силлогистике Васильева, то я предлагаю вам следующее: мы могли бы озаглавить ее так: «Введение в силлогистику Васильева». Вы напишете историческое введение, сделаете краткий обзор идей Васильева, а рукопись, которую вы получили от меня, могла бы составить третью часть. Поскольку статья задумана только как своего рода введение, то она может быть представлена для публикации в советском журнале. Вы также могли бы перевести на русский язык и материалы Арруда. Я бы очень хотел получить четыре или пять дополнительных экземпляров вашей книги. Кроме того, если вы пришлете мне двухстраничное резюме (на английском языке) вашей книги, я или кто-то из моих коллег опубликует рецензию на вашу книгу в бразильском журнале. Согласны ли вы?

13 декабря 1988 г.

****

3) Советское издательство «Мир» обычно публикует английские, испанские, французские... переводы книг, выпущенных на русском. Вы могли

[13] Да Коста, видимо, забыл о том, что его статья уже была опубликована на русском в 1982 г. в журнале «Философские науки».

бы попытаться связаться с этим издательством и рассказать о своей книге, которая, несомненно, заслуживает английского перевода.

4) В будущем я пришлю Вам несколько своих работ по основаниям физики. Хотелось бы узнать Ваше мнение о них (если возможно, то и других специалистов из Советского Союза).

14 февраля 1989 г.

С кратким изложением Вашей книги я смогу сделать рецензию на нее для бразильского журнала. Но я хотел бы также включить в нее что-нибудь о Вас, авторе (не могли бы Вы быть любезны и прислать мне 10–20 строк о Вашей жизни, интересах и т.д.).

15 марта я отправлюсь в Италию, в качестве приглашенного профессора университета в Сиене. Мои поздравления с получением должности полного профессора[14]. Вы, безусловно, заслуживаете этого.

11 июня 1989 г.

До сих пор я не получил книгу, в которой была опубликована моя статья с Л. Пюгой; если Вы послали только один экземпляр, нельзя ли послать еще один экземпляр для нее? Я не получил «Воображаемую логику», содержащую избранные работы Н.А. Васильева, но думаю, что поскольку Вы отправили ее месяц назад, я получу ее через несколько дней. Проблема с первой книгой: если вы отправили ее два месяца назад, я думаю, что она уже должна была прийти. В любом случае, как только я их получу, я сообщу Вам.

18 августа 1989 г.

Большое спасибо за Вашу открытку с поздравлениями по поводу моего «юбилея». Я счастлив тем, что моя статья появится в «Философских науках» уже в сентябре, а также заметкой редакторов по поводу моего дня рождения. Для меня это имеет большое значение, поскольку в течение последних 30 лет я был пропагандистом и старался распространять информацию о советской философии. Кроме того, я всегда делал все возможное, чтобы сблизить культуры Востока и Запада. Поэтому я очень рад узнать новость, которая содержалась в вашей открытке.

****

1 сентября 1989 г.

Посылаю рецензию на вашу книгу о Васильеве, написанную моей младшей коллегой и бывшей аспиранткой, доктором Л. Пюга. Я показал ей все ваши письма, связанные с вашей книгой. Рецензия будет опубликована

[14] Да Коста имел в виду защиту мною докторской диссертации в Институте философии АН СССР в декабре 1988 г.

в бюллетене Sociedade Paranaense de Matematica. Через несколько дней я уезжаю в Португалию.

16 октября 1989 г.

Несколько дней назад я получил второй экземпляр книги, в которой опубликована моя статья с доктором Пюгой, которую вы прислали мне через вашего американского друга. Но до сих пор я не получил книгу Васильева.

Некоторое время назад я послал Вам свою рецензию на книгу Приста. Получили ли Вы ее?

****

Единственная новость — меня избрали членом «Международного института философии». Институт — это своего рода Международная академия философов (в нее входят, например, Рут Баркан Маркус, Куайн, Суппес, Дэвидсон, Хабермас, Гадамер и Аппель).

11 ноября 1989 г.

Наконец я получил книгу с произведениями Васильева. Она действительно прекрасна. Большое спасибо.

2 декабря 1989 г.

Большое спасибо за перевод моей статьи на русский язык. Надеюсь, что скоро получу номер журнала, в котором она была опубликована. Кстати, не забудьте также послать копию этого номера моему сотруднику, доктору Диего Маркони, адрес которого указан ниже: ****

12 января 1990 г.

****

Мои поздравления с полученной вами премией[15]. Вы, несомненно, заслужили ее!

1 марта 1990 г.

Я бы очень хотел получить еще 5 или 10 оттисков, если это возможно (*имеется в виду статья с Маркони; журнал «Философские науки» выплатил авторам небольшой гонорар. — В.Б.*).

****

У нас нет подписки на «History and Philosophy of Logic», но если мне попадется номер, в котором появилась рецензия на Вашу книгу, я вышлю Вам экземпляр.

[15] Речь идет о премии Казанского университета за лучшую книгу, изданную сотрудниками в 1988 г. Премию я получил за книгу: [Бажанов, 1988]. Второе, расширенное издание этой книги увидело свет в 2009 г. [Бажанов, 2009].

2 мая 1990 г.

Знаете ли Вы (хотя бы по имени) профессора Александру Гетманову? Она написала хорошее введение в логику, португальский перевод которого я читал некоторое время назад. Пожалуйста, пришлите ей оттиск моей статьи.

****

И наконец, вопрос: я готовлю длинную статью о работе Васильева. Вы писали мне, что в Казанском университете хотят учредить премию (или награду), связанную с именем Васильева. Что нужно сделать, чтобы стать кандидатом на такую премию? Мне очень интересна такая награда не только с научной точки зрения, но особенно потому, что это советская премия[16].

28 июня 1990 г.

Вы правы в отношении книги Гетмановой: действительно, я взял книгу в португальском переводе и нашел несколько ошибок и неточностей. Один из ее американских коллег пришлет мне также испанский перевод.

Урбас[17] использует термин «взрывная логика (explosive logic)» для обозначения логики, которая может быть сделана тривиальной путем введения некоторго предложения. Например, классическая логика тривиализуется любым предложением вида $A\&\neg A$. Я использую понятие «конечно-тривиализуемая». Я бы сказал, что классическая логика конечно тривиализуема (а классическая позитивная логика — нет). У вас есть адрес Приста? Я хотел бы послать ему копию моей работы с Маркони.

11 октября 1990 г.

Я был в Испании. Там я встретил профессора А. Драго[18], итальянского физика и историка, который переписывается с вами.

****

Конечно, в будущем мы могли бы написать нашу работу о силлогистике Васильева. Как только у меня появится время, я пришлю Вам несколько заметок на эту тему.

20 февраля 1991 г.

Я читал лекции во Франции в качестве приглашенного профессора Парижского университета. Кстати, там много людей, очень заинтересованных в идеях паранепротиворечивой логики, особенно в приложениях этой логики к информатике. Два молодых блестящих французских студента-выпускника

---

[16]Эта премия так и не была учреждена Казанским университетом.

[17]Igor Urbas — австралийский логик.

[18]Профессор философии университета в Неаполе, а затем в Пизе. Мы написали с ним статью о Н.И. Лобачевском, которая была напечатана в одном из итальянских журналов.

собираются работать со мной в Бразилии, когда получат французские стипендии... Я надеюсь, что общая ситуация в Советском Союзе в ближайшем будущем улучшится.

5 мая 1991 г.

Надеюсь, вам понравится моя статья на французском языке. Она в определенном смысле связана с паранепротиворечивой логикой. Пожалуйста, сообщите мне ваше мнение о ней.

Я принимаю, что Васильев был предтечей многозначной логики только в том смысле, в каком, например, Кавальери был предтечей исчисления. Или в том смысле, в каком Саккери был предшественником Лобачевского. Или, если использовать сравнение из области физики, в том смысле, в котором Фарадей был предшественником Максвелла.

Теперь несколько замечаний о паранепротиворечивости и истинности. 1) Прежде всего, семантическая концепция истины Тарского может быть распространена на большое семейство паранепротиворечивых логик... Таким образом, к различным логическим системам, которые являются паранепротиворечивыми, применима семантика в соответствии с корреспондентской теорией истины. По сути, паранепротиворечивая теория соответствия является обобщением классической. В частности, несколько модельных теорий (как, например, теорема Тарского об истинности) могут быть расширены до паранепротиворечивых. 2) В ряде работ я формализовал прагматическую теорию истины, особенно в версии Пирса, и показал, что лежащая в ее основе логика действительно паранепротиворечивая (дискуссивная логика Яськовского). Это неудивительно, поскольку несколько несовместимых теорий могут быть прагматически истинными в одной и той же области (сохраняя значение в этой области). Таким образом, мы видим, что паранепротиворечивость и истинность тесно связаны.

2 декабря 1991 г.

Сегодняшние преобразования Советского Союза почти невероятны, и я уверен, что вы испытали на себе влияние нового «образа жизни». Когда у вас будет время, пожалуйста, расскажите мне, каково ваше мнение по поводу текущей ситуации в вашей стране.

Я также надеюсь, что вы продолжаете свою работу и реализуете свои исследовательские планы.

5 мая 1993 г.

Удивительно, но всего два дня назад я получил ваше письмо от 16 декабря 1992 г.

****

Наша экономическая ситуация также невеселая. По этой причине я регулярно провожу несколько месяцев за границей каждый год. В 1992 г. я читал лекции в Парижском университете, а в этом году провел один месяц в Калифорнийском университете в Лос-Анджелесе. Эти поездки помогают мне вести здесь вполне комфортную жизнь. С другой стороны, мою научную переписку оплачивает университет Сан-Паулу. Кажется, что экономическая ситуация в Бразилии лучше, чем в России...

Еще один важный момент: здесь у нас почти нет расовых проблем. Для европейца этот факт кажется невероятным.

В последние месяцы я решил очень важную проблему, сформулированную в 1974 г. В. Арнольдом.

17 сентября 1993 г.

Надеюсь, что Вы будете очень счастливы в своей новой должности[19].

Отдельным письмом я вышлю Вам некоторые из моих последних работ.

7 марта 1994 г.

Мне бы очень хотелось иметь копии вашей книги по истории логики в России и вашей статьи о Лобачевском и Васильеве.

****

В своей диссертации я впервые разрабатываю паранепротиворечивую логику не только на пропозициональном и первопорядковом уровнях, но и на уровне теории множеств (и логик высших порядков). После этого я занялся паранепротиворечивой математикой, начав с геометрии. Некоторые из моих работ, к сожалению, на португальском языке.

19 июня 1994 г.

В этом письме отвечаю на ваши вопросы:

1. Нечеткая логика связана с тем, что стандартные логические формализмы не подходят для работы с неформальными аргументами, особенно если в них используются нечеткие или размытые термины. Нечеткая логика восходит к двум уровням «размывания»: 1) введение нечетких предикатов в объектный язык; например, в теории нечетких множеств предикат $\in$ имеет индекс p, такой, что $x \in_p X$ означает, что x принадлежит X с вероятностью p. Этот шаг порождает некоторый особый вид многозначной логики, с истинностными значениями в $[0, 1]$; 2) на втором уровне нечеткая логика рассматривает металингвистические предикаты true и false как нечеткие или расплывчатые. Согласно Л. Заде, форма «фаззификации» на этом

[19] С сентября 1993 г. по октябрь 1995 г. я занимал должность декана гуманитарного факультета филиала Московского университета в Ульяновске, а затем заведующего кафедрой философии.

уровне зависит от того, с какими файлами знаний мы работаем. В принципе, на этом уровне «фаззификации» второго порядка не существует формальной системы нечеткой логики, но есть неопределенное количество специальных систем.

Таким образом, нечеткая логика — это своего рода логика «размытости». Поскольку нечеткость обычно порождает противоречие, нечеткая логика и паранепротиворечивая логика являются родственными, хотя и различаются по методам и своим целям.

2. Согласно предыдущим рассуждениям, нечеткая логика, на первом уровне «фаззификации», является разновидностью многозначной логики (бесконечно многозначной). Но это не так в связи со вторым уровнем. Поэтому нечеткая логика и многозначная логика имеют непустое пересечение, но они различны.

Аналогично, вероятностная логика имеет много общего с нечеткой логикой, хотя их методы и цели совершенно разные.

3. На мой взгляд, основной характеристикой нечеткой логики, отличающей ее от всех других логик, является «фаззификация» истинностных значений. Это самая оригинальная идея Заде.

Конечно, сформулированные вами вопросы являются очень важными и существенными проблемами в области философии логики. Кстати, до сих пор у нас нет хорошей классификации неклассических логик.

9 марта 1999 г.

Прилагаю фотографию Софии, очаровательной дамы, о которой я Вам говорил (она шлет Вам поцелуй)[20].

5 августа 2003 г.

При этом я посылаю Вам несколько моих новых работ: три заметки о теории решеток, мотивированной паранепротиворечивой логикой; статью о логике Васильева, которую, я полагаю, вы уже знаете: рецензию из «Mathematical Reviews», написанную В.А.Т. Люксембургом о моей работе с французскими математиками... Эта рецензия покажет Вам, что я очень интересуюсь чистой математикой и ее связью с идеей паранепротиворечивости.

9 июля 2006 г.

Эти документы помогут вам (+ цветная фотография от 10 июля 2003).

Есть одна важная вещь, касающаяся паранепротиворечивой логики: она нашла применение в технике, включая робототехнику, искусственный

[20]Да Коста имеет в виду робота, названного Софией, в основе работы которого лежала паранепротиворечивая логика.

интеллект, машиностроение, управление воздушным движением, управление движением в крупных городах, медицину и т.д. и т.п. Без значимых приложений паранепротиворечивая логика была бы просто диковинкой (на мой взгляд, только философских аргументов в ее пользу недостаточно).

Переписка по электронной почте

31 мая 2011 г.

Тема: Лекция лауреата медали Филдса — возможная противоречивость арифметики.

Большое спасибо за ваше письмо. Очень интересный вопрос поднимает Воеводский, действительно важный. Как поживаете? Какие новости?

Здесь все идет довольно хорошо.

22 сентября 2012 г.

Большое спасибо за ваше письмо. Несмотря на мой возраст, 83 года, я и моя семья до сих пор отмечаем мой день рождения, в нынешнем году коротким визитом на остров Парадайз рядом с местом, где я живу. Приятно получать новости от вас, никогда вас не забываю. Сайт замечательный. Я считаю, что Васильев действительно заслужил такую честь[21]. Я также желаю Вам здоровья, удачи и процветания.

С уважением, Ньютон.

14 декабря 2013 г.

Тема: Новогодние приветствия. ****

В приложении две мои работы, которые, возможно, заинтересуют вас; одна из них посвящена вопросу о противоречивости и суперпозиции в квантовой механике и была опубликована в журнале Foundations of Physics. Вторая статья излагает мои взгляды на основания логики и будет опубликована после небольших исправлений в журнале по онтологии в США.

9 января 2015 г.

Большое спасибо за то, что прислали мне вашу книгу. Как только я получу ее, я сообщу вам.

В двух письмах, которые я отправлю вам сегодня или завтра, вы найдете две мои недавние работы. Они не имеют отношения к паранепротиворечивости, но дело в том, что я никогда не отказываюсь от своей первой любви (формальной логики как таковой)...

[21] Имеется в виду сайт, на котором анонсировались условия получения премии имени Н.А. Васильева молодыми российскими учеными (`https://philos.msu.ru/node/3961`).

12 февраля 2015 г.

Я только что получил вашу книгу. Она показалась мне прекрасным произведением. Через несколько дней я напишу вам снова.

Большое спасибо за вашу доброту.

14 февраля 2015 г.

Тема: Ваша книга.

С помощью моего друга я только что начал читать вашу книгу. Она кажется мне превосходной работой, которая будет иметь большое значение для истории логики, в частности паранепротиворечивой логики. Необходима ее английская версия с тем, чтобы она стала известной на Западе.

В приложении первая версия моей статьи с К. де Ронде; она связана с некоторыми паранепротиворечивыми аспектами квантовой механики.

19 февраля 2015 г.

Я хотел бы попросить вас о двух одолжениях: 1. Не могли бы Вы быть столь любезны и прислать мне по электронной почте копию вашей статьи «Imaginary Geometry of N.I. Lobachevsky and the Imaginary Logic of N.A. Vasiliev», которая была опубликована в журнале Modern Logic в 1994 г.?

2. Статья, которую я отправил Вам несколько дней назад, — это только первая версия готовящейся работы, которая содержит некоторые ошибки и огрехи. Пожалуйста, пока не ссылайтесь на нее. Через несколько дней я пришлю вам ее окончательный вариант.

Большое спасибо за все, Ньютон.

10 сентября 2017 г.

Тема: Международный консультативный совет

Большое спасибо за ваше сообщение. Конечно, для меня будет большой честью согласиться в ответ на приглашение главного редактора стать членом редакционного совета журнала «Эпистемология и философия науки». Вы прекрасно знаете, что я восхищаюсь Россией, ее философией и наукой, поэтому я очень рад приглашению. Через несколько дней я напишу вам снова.

16 сентября, 2021 г. *Valentin A. Bazhanov*:

Дорогой Ньютон,

Мне было очень приятно слушать вашу с Жаном-Ивом[22] *презентацию для 110 коллег!*

******

Во вложении я поместил фото участников этого вебинара.

[22]Имеется в виду бразильско-швейцарский логик Jean-Yves Beziau.

Да Коста ответил в тот же день:
Большое спасибо. Очень красивая фотография участников вебинара.
С наилучшими пожеланиями, Ньютон.

Это было последнее письмо от Ньютона да Косты...

Литература

Бажанов, 1988 – *Бажанов В.А.* Николай Александрович Васильев (1880–1940). М.: Наука, 1988. 144 с.

Бажанов, 2009 – *Бажанов В.А.* Н.А. Васильев и его воображаемая логика. Воскрешение одной забытой идеи. М.: Канон+, 2009. 240 с.

Да Коста, 1982 – *Да Коста Н.* Философское значение паранепротиворечивой логики // Философские науки. 1982. № 4. С. 114–125 (перевод И.С. Нарского).

Да Коста, Пюга, 1988 – *Да Коста Н., Пюга Л.* О воображаемой логике Н.А. Васильева // Методологический анализ оснований математики. М.: Наука, 1988. С. 135–142. (Перевод и примечания к статье: Бажанов В.А. О попытках формального представления воображаемой логики Н.А. Васильева (некоторые соображения по поводу статьи Н. да Коста и Л. Пюга) // Методологический анализ оснований математики. М.: Наука, 1988. С. 142–147).

Да Коста, Маркони, 1989 – *Да Коста Н., Маркони Д.* Развитие параконсистентной логики в 80-е годы двадцатого века // Философские науки. 1989. № 9. С. 54–62. (Перевод и примечания к статье: Бажанов В.А. К вопросу о развитии параконсистентной логики. Общие соображения по поводу статьи Н. да Коста и Д. Маркони // Философские науки. 1989. № 9. С. 63–64).

Alves, 1984 – *Alves E.* Paraconsistent logic and model theory // Studia Logica. 1984. Vol. 43. P. 17–32.

Da Costa, 1985 – *Da Costa, N.C.A.* Scientific Curriculum Vitae // Mathematical Logic and Formal Systems. A collection of papers in honor of Professor Newton C.A. da Costa / Ed. L.P. de Alcantara. Marcel Dekker Inc. N.Y., Basel, 1985. P. 1–16.

Valentin A. Bazhanov

Newton C.A. da Costa and his relationships with some Soviet/Russian colleagues (1986–2021)

Valentin A. Bazhanov
Ulyanovsk State University,
42 L. Tolstoy str., Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.
E-mail: vbazhanov@yandex.ru

Abstract: The article is dedicated to the eminent Brazilian logician and philosopher Newton da Costa (16.09.1929 Curitiba, Brazil – 16.04.2024, Florianapolis, Brazil), who made a significant contribution to the creation of the paraconsistent logic, as well as his relationship with the Soviet/Russian logicians and philosophers. Particular attention is paid to da Costa's correspondence with the author of this article, which was regular and continued from 1986 to 2021. In his letters, da Costa pays tribute to the merits of N.A. Vasiliev, who in his «imaginary logic» was the first to propose a logic free from the laws of (non-)contradiction and the excluded third, and is therefore considered to be the actual forerunner of modern non-classical logic in general and para-contradictory logic in particular. Da Costa constantly expressed his deep respect for Russian culture and science, emphasized the necessity of close cooperation with the Russian Federation colleagues, emphasized the need for close cooperation between scientists from different countries, shared his impressions of Russian culture and science. He reminds his impressions from his visit (together with his daughter) to the congress on logic, methodology and philosophy of science in Moscow in the summer of 1987.

Keywords: Newton da Costa, non-classical logic, N.A. Vasiliev, imaginary logic, paraconsistent logic, multivalued logic

For citation: Bazhanov V.A. "N'yuton K.A. da Kosta i ego svyazi s sovetskimi/rossiiskimi kollegami (1986–2021)" [Newton C.A. da Costa and his relationships with some Soviet/Russian colleagues (1986–2021)], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 1, pp. 130–150. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-130-150 (In Russian)

Acknowledgements. I sincerely thank Natalia Sedova for her help in formatting the text of the paper in LaTeX.

References

Alves, 1984 – Alves, E. "Paraconsistent logic and model theory", *Studia Logica*, 1984, Vol. 43, pp. 17–32.

Bazhanov, 1988 – Bazhanov, V.A. *Nicolai Alexandrovich Vasiliev (1880–1990)*. Moscow: Nauka, 1988, 144 pp. (In Russian)

Bazhanov, 2009 – Bazhanov, V.A. *N.A. Vasiliev i ego voobrazhaemaya logika. Voskreshenie odnoi zabytoi idei* [N.A. Vasiliev and his Imaginary Logic. The Revival of One Forgotten Idea]. Moscow: Canon+, 2009. 256 pp. (In Russian)

Da Costa, 1982 – Da Costa, N. "Filosofskoe znachenie paraneprotivorechivoy logiki" [The philosophical significance of paraconsistent logic], *Filosofskie nauki* [Philosophical Sciences], 1982, No. 4, pp. 114–125 (translated by I.S. Narski). (In Russian)

Da Costa, 1985 – Da Costa, N.C.A. "Scientific Curriculum Vitae", *Mathematical Logic and Formal Systems. A collection of papers in honor of Professor Newton C.A. da Costa*, ed. by L.P. de Alcantara. N.Y.; Basel: Marcel Dekker Inc., 1985, pp. 1–16.

Da Costa, Puga, 1988 – Da Costa N., Puga, L. "O voobrazhaemoy logike N.A. Vasilieva" [On the imaginary logic of N.A. Vasiliev], *Metodologicheskii analiz osnovanii matematiki* [Methodological Analysis of the Foundations of Mathematics]. Moscow: Nauka, pp. 135–142. (Translation and notes to this article by Bazhanov, V.A. "O popytkakh formal'nogo predstavlenia voobrazhaemoy logiki N.A. Vasilieva" [On Attempts of Formal Representation of N.A. Vasiliev's Imaginary Logic] (some considerations on the article by N. da Costa and L. Puga), Ibid., 1988, pp. 142–147). (In Russian)

Da Costa, Marconi, 1989 – Da Costa, N., Marconi, D. "Razvitie paraneprotivorechivykh logik v 80-h godakh dvadzatogo veka" [Development of paraconsistent logic in 80s years of the twentieth century]. *Filosofskie nauki* [Philosophical Sciences], No. 9, pp. 54–62. (Translation and notes to this article by Bazhanov, V.A. "Toward the Question of the Development of Paraconsistent Logic. General considerations on the article by N. da Costa and D. Marconi". *Filosofskie nauki* [Philosophical Sciences], 1989, No. 9, pp. 63–64). (In Russian)

Логические исследования
2025. Т. 31. № 1. С. 151–175
УДК 16

Logical Investigations
2025, Vol. 31, No. 1, pp. 151–175
DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-151-175

Обзоры
Reviews

А.А. Ермаков, Г.В. Карпов, Е.Н. Лисанюк, Л.Г. Тоноян, О.В. Черкашина

Обзор XVI Всероссийской научной конференции «Современная логика: проблемы и перспективы»*

Андрей Алексеевич Ермаков
Санкт-Петербургский Политехнический университет им. Петра Великого.
Российская Федерация, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29 литера Б.
E-mail: ermakov_aa@spbstu.ru

Глеб Викторович Карпов
Санкт-Петербургский государственный университет.
Российская Федерация, 199034, г. Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 5.
E-mail: glebsight@gmail.com

Елена Николаевна Лисанюк
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Российская Федерация, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20.
E-mail: elisanyuk@hse.ru

Лариса Грачиковна Тоноян
Санкт-Петербургский государственный университет.
Российская Федерация, 199034, г. Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 5.
E-mail: tonoyan2003@list.ru

Оксана Викторовна Черкашина
МГУ им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: Ch.O.Logic@zohomail.com

* Авторы благодарны рецензентам за ценные замечания, способствовавшие улучшению рукописи и переосмыслению итогов конференции «Современная логика 2024».

Аннотация: В статье кратко освещается работа XVI Всероссийской научной конференции «Современная логика: проблемы и перспективы», которая проходила 27–29 июня 2024 г. в Институте философии Санкт-Петербургского государственного университета, даются аннотации сделанных докладов, описываются другие события в рамках этого научного мероприятия.

Ключевые слова: Современная логика, история логики, символическая логика, философская логика, теория аргументации, обзор

Для цитирования: *Ермаков А.А., Карпов Г.В., Лисанюк Е.Н., Тоноян Л.Г., Черкашина О.В.* Обзор XVI Всероссийской научной конференции «Современная логика: проблемы и перспективы» // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 1. С. 151–175. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-151-175

Каждый четный год в Санкт-Петербургском государственном университете начиная с 1990 г. проходит конференция «Современная логика». После перерыва 2020 и 2022 гг., вызванного пандемией COVID-19, в 2024 г. в работе конференции снова принимали участие научные сотрудники, преподаватели, аспиранты и студенты из различных городов России, а также из стран ближнего зарубежья. Они представили широкий спектр регионов России, а кроме того, Азербайджан, Армению и ряд других стран.

Основным регионом, откуда прибывали участники конференции, ожидаемо стала Москва. Делегаты из столицы представляли такие ведущие учреждения, как МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Институт философии РАН, Московский физико-технический институт. Вторым по числу участников регионом стал Санкт-Петербург, представленный, помимо вуза-организатора, Российским государственным педагогическим университетом им. А.И. Герцена, НИУ ВШЭ — Санкт-Петербург, Санкт-Петербургским институтом истории РАН. Также «Современная логика» встречала гостей из Волгоградского государственного университета, Томского государственного университета и Института философии и права Сибирского отделения РАН, Саратовской государственной юридической академии.

Ближнее зарубежье было представлено такими странами, как Армения (Российско-Армянский университет, Ереван), Азербайджан (Институт математики и механики, Баку), Белоруссия (Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск) и Узбекистан (Национальный Университет Узбекистана, Ташкент).

Основными научно-образовательными учреждениями, из которых прибыли участники, стали ведущие университеты России: МГУ им. М.В. Ломоносова, СПбГУ, НИУ ВШЭ (Москва и Санкт-Петербург), Томский государственный университет и Волгоградский государственный университет. Среди научных институтов и международных университетов — Институт философии РАН, Санкт-Петербургский институт истории РАН, Институт философии и права СО РАН, Российско-Армянский университет, а также университет Азербайджанской Республики.

Значительный процент участников «Современной логики» составили доктора наук — профессора и ведущие научные сотрудники университетов и научных учреждений; основная масса была представлена кандидатами наук — доцентами и старшими научными сотрудниками; в работе конференции участвовали также немногочисленные магистранты и аспиранты. Темы выступлений охватили широкий спектр вопросов, включающий символическую и философскую логику, теорию аргументации и основания математики, историю логики и вопросы, касающиеся преподавания логических дисциплин в высшей школе.

Большинство участников конференции, имеющие ученые степени, являются философами, а представленные труды охватывают широкий спектр вопросов современной логики. Вместе с тем некоторые из докладчиков — это доктора или кандидаты наук в других, нефилософских сферах. Один доклад принадлежит доктору технических наук, и в одном принял участие в качестве соавтора кандидат технических наук (на пленарном заседании и на секции теории аргументации, соответственно). Доклады были посвящены: первый — истории и современному положению дел в сфере искусственного интеллекта, второй — автоматизированному поиску и отбору решений спора. Один доклад, на секции символической логики, посвященный инфинитарному гиперсеквенциальному исчислению, принадлежит кандидату физико-математических наук. Один доклад, на секции философской логики, посвященный графическому представлению совместимости по истинности и по ложности множества высказываний об отношениях, принадлежит кандидату юридических наук. Один из докладов на секции теории аргументации, посвященный установлению тождества смысла слов, сделан кандидатом педагогических наук.

Следует отметить присутствие на конференции докладчиков из числа сотрудников юридических вузов — в том числе двоих участников из Московского государственного юридического университета им. О.Е. Кутафина — на секциях истории логики и аргументации, каждый из которых обращался к вопросам использования логики для анализа высказываний в естественном языке, а также заведующего кафедрой в Саратовской государственной юридической академии — на секции философии логики, рассмотревшего вопрос, связанный с диалектикой познания.

Российская академия народного хозяйства и государственной службы в Санкт-Петербурге была представлена на конференции одним докладом на секции теории аргументации, который касался аргументативного поведения в политическом дискурсе.

Интересно рассмотреть специфику тем докладов представителей технических вузов. Докладчик из Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники посвятила свой доклад на секции истории логики работе своего учителя, профессора ЛГУ И.Н. Бродского. Кафедра философии МГТУ им. Н.Э. Баумана (НИУ) представлена докладом, также на секции истории логики, посвященным концептуализации противоречия у Аристотеля, Парменида и Гераклита. Докладчик, представляющий кафедру философии Московского авиационного института (НИУ), обратился в своем выступлении на секции истории логики к формированию логико-гносеологического направления в русской философии XX в. (трудам П.С. Попова и М.И. Каринского). Санкт-Петербургский политехнический университет им. Петра Великого представлен докладом на секции символической логики «О полноте инфинитарного гиперсеквенциального исчисления для первопорядковой бесконечнозначной логики Лукасевича».

Краткая справка по аффилиациям исследователей: всего перечислено исследователей в статье — 45. Исследователи с тремя аффилиациями — 1, двумя — 6. Названными аффилиациями обладают, согласно данным в статье: СПбГУ — 12 упомянутых исследователей, НИУ ВШЭ — 8, Институт философии РАН — 6, МГУ — 4, независимый исследователь — 3, Томский государственный университет — 3, МГЮА им. О.Е. Кутафина — 2, Санкт-Петербургский политехнический университет им. Петра Великого — 2. По одному исследователю из следующих высших учебных заведений: Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, МГТУ им. Н.Э. Баумана (НИУ), Московский авиационный институт (НИУ), Национальный Университет Узбекистана, Новосибирский государственный университет, Российская академия народного хозяйства и государственной службы в Санкт-Петербурге, Российско-Армянский университет, Саратовская государственная юридическая академия, Университет им. Лейбница в Ганновере.

1. Пленарные заседания

Пленарные заседания[1] заняли первый и второй дни работы конференции, когда доклады на исторические темы, приуроченные к 300-летнему юбилею

[1]С материалами пленарных заседаний и заседаний секций можно ознакомиться, обратившись к журналу «Логико-философские штудии», Т. 21, № 1–4 (2024), с. 5–202. Кроме того, слайды некоторых выступлений доступны на официальной странице мероприятия в разделе «Материалы пленарных докладов»: `https://events.spbu.ru/events/anons/logic-2024/plenar.html`. Раздел нашего обзора, озаглавленный «Пленарные заседания», включает описание тех докладов, которые не были опубликованы в соответствующем выпуске «Логико-философских штудий».

СПбГУ, представили Л.Г. Тоноян и А.И. Бродский[2]; Т.А. Гаврилова[3] и Д.В. Зайцев[4] в своих пленарных выступлениях говорили о логически новом в исследованиях ИИ, а С.Т. Золян[5] — об актуальных проблемах логической прагматики.

Л.Г. Тоноян[6] в своем докладе «Логика в трехсотлетней истории Санкт-Петербургского университета» рассказала о том, кем и как преподавалась наука о законах и формах мысли в петербургском университете, начиная с первых немецких профессоров-вольфианцев, приглашенных Петром I для работы в Академии и Университете, и заканчивая специалистами позднего советского периода — членами кафедры логики института философии, трудившимися на ниве логической науки и логического образования. В докладе убедительно показано наличие той преемственности, неразрывной связи поколений исследователей и преподавателей, которая характеризует историю логики в Санкт-Петербургском университете и которая существует благодаря искреннему и деятельному служению этой науке ее «апостолов» вопреки всем историческим перипетиям и бурям. Особое внимание было уделено логическим сочинениям, издававшимся в XIX в., собрание которых включает в себя в том числе работы оригинального свойства — как в научном, так и в педагогическом и методическом аспектах. Помимо этого, значительные подробности содержал рассказ о работе кафедры логики в 50–80 гг. XX в., когда при непосредственном участии ученых — сотрудников кафедры в нашей стране происходило становление математической логики как научного направления и как дисциплины.

2. История логики

Тематика истории логики в работе всех 16 конференций с 1990 по 2024 г. является ведущим и широко представленным направлением в выступлениях ученых из разных стран и городов нашей страны. Родилась традиция проведения секции по истории логики, в которой многие из них стали постоянными участниками: Г.И. Малыхина (Минск), И.Л. Тульчинский (Санкт-Петербург), Д.И. Файзиходжаева (Ташкент), А.В. Шевцов (Москва).

[2] Александр Иосифович Бродский — д.филос.н., профессор кафедры этики СПбГУ.

[3] Татьяна Альбертовна Гаврилова — д.т.н., профессор кафедры информационных технологий в менеджменте СПбГУ.

[4] Дмитрий Владимирович Зайцев — д.филос.н., профессор кафедры логики МГУ им. М.В. Ломоносова.

[5] Сурен Тигранович Золян — д.ф.н., профессор Балтийского федерального университета им. И. Канта и Российско-Армянского университета.

[6] Лариса Грачиковна Тоноян — к.филос.н., доцент кафедры логики Санкт-Петербургского государственного университета.

В 2024 г. нашу страну представляли известные профессора-логики, аналитические философы и новые лица — молодые ученые из Москвы, Петербурга, Томска, Новосибирска и других городов. Представленные на секции доклады охватывали историю логики всех периодов: от Античности (доклад Е.А. Маковецкого о категориях Аристотеля) до логиков наших дней (доклад Г.И. Малыхиной о проф. И.Н. Бродском), включая средневековый период истории логики на Востоке (доклад Д.И. Файзиходжаевой). Работа секции «История логики» заняла два дня — 27 и 28 июня, под председательством Л.Г. Тоноян. Были заслушаны 11 докладов.

Открыл работу секции **А.В. Шевцов**[7] с докладом «П.С. Попов и М.И. Каринский: о формировании логико-гносеологического направления в русской философии XX века», в котором отметил заслугу Павла Сергеевича Попова (1892–1964) в восстановлении концепции выдающегося русского логика дореволюционного времени М.И. Каринского (1840–1917). В дискуссии обсуждалась связь времен в преподавании логики и непрерывность традиции логико-гносеологического направления в русской философии XX в.

Л.Г. Тоноян в своем докладе «Логика в Санкт-Петербургском университете: век восемнадцатый» рассмотрела начальный этап университетского преподавания логики и подчеркнула, что к концу XVIII в. в России вышло больше десяти учебников по логике, как переводных, так и оригинальных. При обсуждении в ответ на вопрос о языке преподавания логики в университете Л.Г. Тоноян рассказала, как постепенно и с большими препятствиями основной язык преподавания, латинский, замещался русским языком. В докладе был представлен подготовленный Л.Г. Тоноян к изданию один из первых учебников по логике на русском языке — учебник Е.Б. Сырейщикова (1757–1791), созданный им в 1788 г. специально для Учительской семинарии, в дальнейшем преобразованной в Педагогический институт, на основе которого в 1819 г. был воссоздан Санкт-Петербургский университет.

С интересом было выслушано выступление «Логико-философские проблемы в творчестве И.Н. Бродского (к 100-летию со дня рождения)» ученицы И.Н. Бродского **Г.И. Малыхиной**[8]. При обсуждении доклада некоторые из присутствующих, тоже ученики И.Н. Бродского, поделились своими воспоминаниями и рассуждениями о его научных и методических идеях.

Памяти И.Н. Бродского и развитию идей его монографии «Отрицательные высказывания» был посвящен доклад **Г.Л. Тульчинского**[9] «Отрица-

[7]Александр Викторович Шевцов — к.филос.н., доцент кафедры философии Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

[8]Галина Ивановна Малыхина — к.филос.н., доцент Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

[9]Григорий Львович Тульчинский — д.филос.н., профессор Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» — Санкт-Петербург.

тельные высказывания и апофатическая семантика». В ответ на вопросы о логико-семантическом потенциале апофатической установки докладчик акцентировал ценность не бытия, а небытия, и подчеркнул, что с апофатической точки зрения логика изучает не реальное, а мыслимо возможное положение дел, и апофатический нонсенс оказывается необходимым условием истины.

О.И. Невдобенко[10] в своем докладе «Концептуализация противоречия у Аристотеля, Парменида и Гераклита» представила два способа концептуализации противоречия в греческой философии. Первый связан с трактовкой изменения как логически противоречивого и представлен Парменидом и Гераклитом. Второй представлен Аристотелем с его известной формулировкой принципа непротиворечия в «Метафизике». Для анализа концепций О.И. Невдобенко использовала аппарат логики предикатов.

Е.А. Маковецкий[11] посвятил свой доклад «Может ли "белый" сказываться об ином подлежащем, кроме собственного? (Комментарий Иоанна Филопона на вторую главу "Категорий" Аристотеля)» связи логики и онтологии в аристотелевском делении категории сущего. Суммируя воображаемые квадраты разрядов сущего, принадлежащие Аристотелю и Филопону, докладчик заключил, что введением двойного признака деления сущих по отношению к подлежащему Аристотелю удалось выразить наличие онтологической связи между сущими.

Д.И. Файзиходжаева[12] в докладе «"Isaghuji" Асириддина аль-Абхари — учебник по логике» на примере этого трактата отвергла предположение французского философа А. Койре о том, что развитие философии, в том числе науки логики, остановилось в исламском мире с XIII в. В дискуссии Д.И. Файзиходжаева цитировала «Isaghuji» Аль-Абхари (1200–1265), чтобы продемонстрировать, что его трактат — это не повторение «Исагоге» Порфирия, а самостоятельный труд ученого, развивающего греко-римское классическое наследие, которое было принято и развито арабо-мусульманскими перипатетиками.

В.А. Суровцев[13] в докладе «К. Прантль, Г. Фреге и номинативная теория предложений» рассмотрел вопрос о влиянии логики стоиков на логико-семантическую теорию Г. Фреге. В дискуссии В.А. Суровцев настаивал, что

[10] Оксана Ивановна Невдобенко — к.филос.н., доцент кафедры философии МГТУ им. Н.Э. Баумана.

[11] Евгений Анатольевич Маковецкий — д.филос.н., профессор кафедры русской философии и культуры Санкт-Петербургского государственного университета.

[12] Дилбархон Иргашевна Файзиходжаева — д.филос.н., доцент кафедры философии и логики Национального Университета Узбекистана.

[13] Валерий Александрович Суровцев — д.филос.н., профессор кафедры истории философии и логики Томского государственного университета.

такие примеры изучения влияния учения стоиков на логико-семантическую теорию Г. Фреге, как статья Г. Габриэля, К. Хюльзера, С. Шлоттера (2009), в которой утверждается, что концепции стоиков, особенно в области логической семантики, могли быть известны Г. Фреге через посредство коллеги по университету профессора Р. Гирцеля, и статья С. Бобзиен (2021), которая посчитала, что идеи Г. Фреге представляют собой не просто рецепцию, но даже плагиат, быть может, и невольный, связаны с неверным пониманием логики стоиков К. Прантлем, сомнительная интерпретация которого сказалась на формировании номинативной теории предложений Г. Фреге. Свои дополнения к решению этой важной историко-логической проблемы внесли Ю.Ю. Черноскутов и Л.Г. Тоноян.

К.А. Габрусенко[14] в докладе «Значение и смысл в “Учении о науке” Б. Больцано» рассмотрел концепцию знака Больцано и провел сравнительный анализ употребления понятий смысла и значения у Б. Больцано и Г. Фреге, на основании которого продемонстрировал принципиальное различие концепций авторов. К.А. Габрусенко подверг критике гипотезу Э. Казари (E. Casari), изложенную в его книге «Bolzano’s Logical System» (2016) и предлагающую альтернативный способ сопоставления концепций Б. Больцано и Г. Фреге. Отвечая на вопросы, докладчик настаивал, что введенные Э. Казари пресуппозиции, существенные для его гипотезы, не характерны для Б. Больцано.

А.Д. Вольский[15] в докладе «Удивительная история таблиц истинности» проанализировал историю возникновения таблиц истинности через призму взглядов логиков и историков XX в., а также мнения современных исследователей по данному вопросу с целью установления точек и причин их несогласия друг с другом. Докладчик настаивал, что первооткрывателем аппарата таблиц истинности является Ч. Пирс, а в работах Б. Рассела использовался как метод, так и аппарат таблиц истинности, причем аппарат таблиц истинности появляется во фрагменте, написанным совместно с Л. Витгенштейном, а потому получить ответ, кому из них можно однозначно приписать авторство аппарата таблиц истинности, не представляется возможным. В ответах на вопросы А.Д. Вольский сообщил, что нет подтверждений знакомства Б. Рассела и Л. Витгенштейна с работами Ч. Пирса, в которых последний вводит аппарат таблиц истинности, поэтому вопрос об их наличии остается открытым.

[14]Кирилл Александрович Габрусенко — старший преподаватель кафедры истории философии и логики Томского государственного университета.

[15]Арсен Дмитриевич Вольский — студент механико-математического факультета Новосибирского государственного университета.

О.В. Малюкова[16] в докладе «История логики и современные юридические исследования» отметила, что в современных юридических исследованиях, в диссертационных и монографических работах, а также при их публичном обсуждении активно используется логическая информация, усвоенная авторами еще в ходе получения высшего образования. Чаще всего применяются знания из области учения о понятиях и о рассуждениях в формате силлогизма, а современные логические теории вроде логики предикатов не оказали никакого влияния на гуманитарные практики с использованием понятий. Участники дискуссии согласились с О.В. Малюковой в необходимости обновления учения о понятиях-предикатах в преподавании логики.

3. Символическая логика

Секция «Символическая логика» начала свою работу 27 июня под председательством Д.Б. Тискина и открылась докладом **В.Л. Васюкова**[17] «Anti-Diodorean Quantum Logic of Observables», в котором была представлена временная логика как квантовая логика наблюдаемых величин. Был выдвинут тезис о возможности индуцирования пространственно-временной структуры в квантовый мир, распространяя, таким образом, временную логику на более сложные системы квантовой логики. Дискуссия развернулась по вопросу полезности и практико-применимости антидиодоровой квантовой логики в современных физических моделях естествознания.

Е.В. Борисов[18] и **И.И. Мухаметшина**[19] выступили с докладом «Аксиоматическая теория доказательства для модальной логики с поссибилистскими кванторами и равенством». Авторы представили аксиоматическую теорию доказательства для разработанной ими модальной логики первого порядка с равенством, в рамках которой могут быть доказаны полнота и непротиворечивость. Отмечены более сильные выразительные особенности системы $MLPQ$ (modal logic with possibilist quantifiers) в сравнении с модальной логикой первого порядка Фиттинга и Мендельсона. Докладчики убедительно показали, что с проблемой формализации выражений de re может справиться язык первопорядковой модальной логики без λ-оператора, но с двумя видами кванторов (квантор $\forall$ и поссибилистский квантор $\prod$)

[16] Ольга Владимировна Малюкова — д.филос.н, профессор кафедры философии и социологии Университета им. О.Е. Кутафина (МГЮА).

[17] Владимир Леонидович Васюков — д.филос.н., ведущий научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.

[18] Евгений Васильевич Борисов — д.филос.н., главный научный сотрудник Института философии и права СО РАН.

[19] Индира Искандаровна Мухаметшина — студентка кафедры истории философии и логики Томского государственного университета.

и предикатом равенства. Особое внимание во время обсуждения доклада вызвало утверждение, что язык первопорядковой модальной логики с двумя видами кванторов и предикатом равенства превосходит по выразительной силе язык первопорядковой модальной логики с λ-оператором.

А.С. Герасимов[20] в докладе «О полноте инфинитарного гиперсеквенциального исчисления для первопорядковой бесконечнозначной логики Лукасевича» вступил в полемику с австрийскими и американскими логиками М. Баазом и Дж. Меткалфом и представил первое верное доказательство полноты инфинитарного гиперсеквенциального исчисления, основанного на первопорядковой бесконечнозначной логике Лукасевича. Для последней зарубежными коллегами были предложены аналитическое гиперсеквенциальное исчисление GŁ∀ и инфинитарное исчисление GŁ∀+(∞), расширенное правилом, имеющим бесконечное число посылок. В отношении инфинитарного исчисления GŁ∀+(∞) была сформулирована теорема о полноте, в доказательстве которой М. Бааз и Дж. Меткалф совершили ошибку и признали это. Основной идеей доказательства полноты, проведенного А.С. Герасимовым, оказалась редукция общезначимых Ł∀-предложений к пренексной (предваренной) форме и введение им нового исчисления GŁ∀c, где GŁ∀c — консервативное расширение исчисления GŁ∀. Е.В. Борисов во время дискуссии после доклада поинтересовался определением пренексного предложения и отметил перспективность развития темы гиперсеквенциального исчисления.

Л.Ю. Девяткин[21] в докладе «О трехзначных логиках, сохраняющих промежуточное значение» осветил класс трехзначных логик, которые сохраняют как классическое, так и промежуточное значение. Особый интерес в нем представляет собой логика *Pac* с двумя выделенными значениями, которая обладает языком с наибольшей выразительной силой. Автор убедительно показывает, что возможно построить трехзначную логику с одним выделенным значением, совпадающую по выразительным возможностям с *Pac*. В этом отношении она будет составлять пару *Pac* и отличаться лишь набором выделенных значений. В перспективе также можно построить языковой вариант *Pac* без импликации, который будет иметь тот же язык, что и построенная трехзначная логика с одним выделенным значением, совпадающая по выразительным возможностям с *Pac*. Таким образом, был получен парный элемент *Pac* с одним выделенным значением и симметричный ему вариант *Pac* с идентичным набором связок. В дискуссии по докладу

[20] Александр Сергеевич Герасимов — к.ф.-м.н., доцент Санкт-Петербургского политехнического университета им. Петра Великого.

[21] Леонид Юрьевич Девяткин — к.филос.н., старший научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.

приняли участие Н.Е. Томова, Д.Б. Тискин, Е.В. Борисов, А.А. Ермаков. Н.Е. Томова выразила особый интерес к смежным темам паранепротиворечивых логик и способов их построения на основе многозначных логик. Д.Б. Тискин и Е.В. Борисов обсудили возможность применения парной логики Pac в естественных и компьютерных рассуждениях. А.А. Ермаков уделил внимание принципам построения поля истинностного значения таблиц пропозициональных связок.

Завершая работу секции 27 июня, **Н.Е. Томова**[22] в докладе «О законе непротиворечия и эксплозивности следования в логиках» рассмотрела отношение эксплозивности следования и закона непротиворечия в паранепротиворечивых логиках. Подробное исследование данного вопроса показало, что понятие паранепротиворечивости, лежащее в основе паранепротиворечивых логик, требует уточнения. Часть современных авторов склоняется к определению паранепротиворечивой логики через закон непротиворечия, однако существенной чертой паранепротиворечивости логических систем является скорее принцип эксплозивности. Данный факт выражается в том, что закон непротиворечия и принцип «из противоречия следует все, что угодно» не эквиваленты. Наталья Евгеньевна рассказала, какие паранепротиворечивые системы позволяют продемонстрировать это убедительным образом. Во время дискуссии после доклада активно были включены в беседу руководитель секции Д.Б. Тискин, уточнивший различные трактовки закона Д. Скотта и возможности приложения его в различных семантиках, и А.С. Герасимов, поинтересовавшийся прикладным значением озвученных Н.Е. Томовой паранепротиворечивых систем. Во время дискуссии выяснилось, что применение паранепротиворечивых логик для анализа ситуаций, связанных с противоречием, на самом деле апеллирует в большей степени не к пониманию отношения противоречия, но противоположности.

Заседание секции 28 июня вела Н.Е. Томова. Его открыл **Д.Б. Тискин**[23] критическим докладом «Deriving De Re: In Favour of Moderate Uniformity» по проекту РНФ 22-18-00591, посвященным модальностям de dicto и de re. На примерах «propositional attitude reports» (личностные установки, убеждения) Д.Б. Тискин продемонстрировал разницу между знанием факта и верой в факт, эквивалентную силу которых обеспечивает механизм замещения. Однако не всегда возможна чисто синтаксическая подстановка свободной переменной, т.е. грамматическое изменение предложения. Даниил Борисович

[22] Наталья Евгеньевна Томова — к.филос.н., старший научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.

[23] Даниил Борисович Тискин — к.филос.н., доцент Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» — Санкт-Петербург, старший преподаватель кафедры математической лингвистики СПбГУ.

выделил два метода трактовки модальностей de dicto и de re и отметил, что сужение разнообразия интерпретаций в наше время не представляется возможным. В дискуссии после доклада участвовали Е.В. Борисов, И.И. Мухаметшина, Н.Е. Томова, в ходе которой докладчики предыдущих дней обсудили проблему пропозициональных установок в семантике возможных миров.

А.А. Ермаков[24] выступил с докладом «Энтимематичность логического следования: альтернативный подход к решению парадокса материальной импликации», посвященным рассмотрению отношения логического следования в семантике классической логики. Докладчик выдвинул идею рассматривать истинностные высказывания на микроуровне субъект-предикатной структуры, чтобы представить импликативное отношение как отношение выводимости сокращенного категорического силлогизма. Дискуссия сконцентрировалась вокруг оправданности трактовки логического следования как парадоксального и необходимости перевода его на язык аристотелевой силлогистики. А.А. Ермаков выразил признательность за сделанные замечания и отметил, что учтет их в будущей работе.

А.С. Полушин[25] изложил результаты исследований по теме «Метод решения обратных задач Смаллиана», рассказав о прямых и обратных задачах Р. Смаллиана, для которых нашелся эффективный алгоритм их решения. Главным отличием обратных задач от прямых является наличие в исследуемой формуле неизвестного высказывания, для которого необходимо найти конкретное значение. Докладчиком был предложен общий метод решения обратных задач Р. Смаллиана путем сведения формализованной части к СДНФ, а также отмечено, что рассмотренные им методы решения задач можно заменить на нестандартное построение таблиц истинности, где неизвестная формула будет находиться по истинностным значениям результирующих связок. Семантический метод поиска формулы обратной задачи Р. Смаллиана немедленно применил выступавший в предыдущий день Л.Ю. Девяткин, наглядно продемонстрировав эффективность данной процедуры.

Всего на секции «Символическая логика» было заслушано 8 докладов. В работе секции приняло участие более 20 ученых из Москвы, Санкт-Петербурга, Новосибирска, Томска и Калининграда, включая молодых ученых, аспирантов и студентов.

[24]Андрей Алексеевич Ермаков — специалист, Санкт-Петербургский Политехнический университет им. Петра Великого.

[25]Антон Сергеевич Полушин — независимый исследователь, Санкт-Петербург.

4. Теория аргументации

Секция «Теория аргументации» работала 27 и 28 июня под председательством А.С. Бобровой и Е.Н. Лисанюк. На секции было заслушано 10 докладов, из них в 6 были доложены результаты исследований по проекту РНФ 20-18-00158 «Формальная философия аргументации и комплексная методология поиска и отбора решений спора», который реализовывался в Санкт-Петербургском государственном университете в течение 5 лет в 2020–2022 и 2023–2024 гг. Всего в работе секции приняли участие более 30 ученых из Москвы, Санкт-Петербурга, Новосибирска и Калининграда, включая молодых ученых, аспирантов и студентов. Доклады на секции «Теория аргументации» были посвящены трем направлениям в исследованиях аргументации: репрезентация аргументации, особенности аргументирования — предъявления и оценки аргументации в диалоге, прикладные вопросы изучения аргументации.

Репрезентации аргументации как набора рассуждений, предъявляемого сторонами в диалоге, были посвящены доклады «Обзор теоретико-типового подхода для построения диалоговых систем» **Г.Ю. Лобанова**[26] и «Поиск и отбор решений спора и его автоматизация на примере научного рецензирования» **Е.Н. Лисанюк**[27]. Г.Ю. Лобанов представил способ конструирования диалоговой системы средствами грамматических фреймворков и теоретико-типового подхода и предложил примеры ее работы. В дискуссии по докладу выяснилось, что уже имеются рабочие версии подобных систем, однако пока не было попыток выделить или внедрить в них использование аргументов как специальных ходов, помимо вопросов и утверждений.

Е.Н. Лисанюк доложила результаты исследований, полученные совместно с **Д.Е. Прокудиным**[28] и **И.Р. Баймуратовым**[29]. Предлагаемая автоматизация поиска и отбора решений спора основана на методе OWL DL — генерации представлений размеченных научных рецензий в качестве абстрактных аргументационных фреймворков и обеспечивает установление решений одного из видов спора — единичного смешанного, с помощью автоматического логического вывода, что было продемонстрировано на примере диалога между авторами и рецензентами рукописи, направляемой для

[26]Глеб Юрьевич Лобанов — независимый исследователь, Калининград.

[27]Елена Николаевна Лисанюк — д.филос.н., ведущий научный сотрудник сектора логики Института философии РАН, старший научный сотрудник Санкт-Петербургского государственного университета.

[28]Дмитрий Евгеньевич Прокудин — д.филос.н., доцент Санкт-Петербургского государственного университета.

[29]Ильдар Раисович Баймуратов — к.т.н., Университет им. Лейбница в Ганновере.

публикации в научный журнал или для выступления в оргкомитет конференции. В дискуссии Г.В. Карпов, К.Г. Фролов, А.И. Мигунов и А.С. Боброва интересовались особенностями единичных смешанных споров, использованных для моделирования научного рецензирования, и применением метода автоматизации в отношении формальных и содержательных замечаний рецензентов. Е.Н. Лисанюк выделила два ключевых свойства единичных смешанных споров, позволившие научное рецензирование моделировать с их помощью: пропонент, т.е. автор рукописи, защищает свое мнение, а оппоненты, т.е. рецензенты, критикуют его, но не выдвигают и не защищают противоположного мнения; пропозициональное содержание мнений сторон состоит из одной пропозиции. Автоматизированная репрезентация формальных замечаний может быть включена в шаблон рецензирования, а содержательные замечания можно группировать по раундам. Дифференциация замечаний по важности потребует усиления выразительных возможностей формализма.

Репрезентации и оценке отдельных аргументов были посвящены 3 доклада: «Двухсторонняя логика подтверждения и опровержения» **А.А. Беликова**[30], «Схемы аргументации: «Риторика, выручай!» **Г.В. Карпова**[31] и «Обоснованность аргументов на базе modus ponens и условная посылка» **А.С. Бобровой**[32]. А.А. Беликов предложил логическую теорию, оперирующую не одним, а двумя отношениями типа следования — отношением подтверждения и отклонения. В дискуссии обсуждались логические особенности отношения отклонения, позволяющие переходить от отклонения дизъюнкции к отклонению одного из дизъюнктов и от отклонения утверждения к отклонению конъюнкции утверждений. Г.В. Карпов призвал вернуться к изучению риторических фигур и рассмотреть их как убеждающие модели вместо получивших распространение в последнее время презумптивных схем аргументации Уолтона—Маканьо, по сравнению с которыми риторические фигуры являются более универсальным и надежным инструментом анализа аргументации, что было продемонстрировано на примерах аргументации из известных кинолент. В ответ на вопросы А.С. Бобровой и Е.Н. Лисанюк о разграничении риторических фигур, пригодных и непригодных для реконструкции аргументов, Г.В. Карпов указал на схожесть некоторых риторических фигур с презумптивными схемами, подчеркнув

[30] Александр Александрович Беликов — к.филос.н., старший преподаватель Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, старший научный сотрудник Санкт-Петербургского государственного университета.

[31] Глеб Викторович Карпов — к.филос.н., доцент Санкт-Петербургского государственного университета.

[32] Ангелина Сергеевна Боброва — к.филос.н., доцент, старший научный сотрудник Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

отсутствие параллелизма между ними. Дискуссия о месте риторических вопросов аргументации в курсах по критическому мышлению перетекла в обмен опытом в преподавании аргументации. А.С. Боброва связала оценку обоснованности заключения с различиями в понимании условной посылки, чтобы отстоять идею о том, что такая оценка больше зависит от понимания содержания условной связи, чем от реконструкции рассуждения по правилу modus ponens. Дискуссия развернулась по вопросам интерпретации следования как формального отношения, логической формы импликации и условных предложений в контексте исследований в области психологии и лингвистики; влияния этих интерпретаций на логические исследования кондиционалов. Обсуждение перспектив двух концепций интерпретации условных рассуждений — ментальных моделей и вероятностной, завершилось призывом к дальнейшим эмпирическим исследованиям условных рассуждений и к соблюдению границы между психологией рассуждений и их логическим анализом.

Исследованиям предъявления и оценки аргументации в диалоге было посвящено 3 доклада: «Об условиях рациональности вступления в спор» **К.Г. Фролова**[33], «Аффективные основания вступления в спор» **И.Б. Микиртумова**[34] и «Аргументативное поведение в современном политическом дискурсе: нормы и девиации» **О.А. Шапиро**[35].

Основываясь на идеях Ч. Дарвина и результатах исследований в области психологии животных, И.Б. Микиртумов предложил считать эмоции не заменой, а предъявлением когнитивных состояний в споре, позволяющим рассматривать аффективные основания вступления в спор, различия между которыми он связал с двумя видами споров — о путях к общему благу и о его содержании. Прозвучавшие сомнения в продуктивности предложенного подхода и в целом такой классификации споров, а также в действенности использования понятия института представительства в споре, И.Б. Микиртумов отклонил при помощи примеров резонансных политических споров, вокруг особенностей которых развернулась дискуссия.

На примере публичных выступлений В. Жириновского, Х. Милея и Д. Трампа, часто называемых «политическими шутами», О.А. Шапиро

[33]Константин Геннадьевич Фролов — к.филос.н., старший научный сотрудник Института философии РАН и старший научный сотрудник Санкт-Петербургского государственного университета.

[34]Иван Борисович Микиртумов — д.филос.н., профессор Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» — Санкт-Петербург, старший научный сотрудник Санкт-Петербургского государственного университета.

[35]Ольга Александровна Шапиро — к.филос.н., доцент Российской академии народного хозяйства и государственной службы в Санкт-Петербурге.

отстаивала идею о том, что их склонность к нарушению норм коммуникации, использованию иронии и смеховой культуры, продиктована целями завладеть и удержать внимание аудитории, рассматриваемой ими в качестве конвенциональной, а не универсальной. В дискуссии А.С. Боброва, Г.В. Карпов, Е.Н. Лисанюк, А.И. Мигунов и К.Г. Фролов обсудили вопросы влияния образа и внешнего вида оратора на убедительность его речи, а также особенности оценки эпатажного поведения в терминах теории аргументации и эффективности достижения целей речи. Используя таксономию споров, предложенную И.Б. Микиртумовым, К.Г. Фролов выделил пять условий вступления в спор и настаивал, что рациональность вступления агента прямо зависит от соотношения прямых и косвенных целей, потенциально преследуемых агентом в споре. Иллюстрацией этой идеи был пример ученика, раздумывающего о вступлении в спор с членами педсовета школы. В дискуссии обсуждались преимущества и ограничения изложенной концепции по сравнению с риторико-диалектической классификацией диалогов и прагма-диалектическими подходами к анализу условий вступления в спор.

А.Н. Журавлев[36] в докладе «О доказательстве лемматических силлогизмов» поделился опытом в области методики изучения разделов общего курса логики, посвященных условным силлогизмам, и обратил внимание на то, что студенты лучше усваивают лемматические силлогизмы, если связать их с условно-категорическими силлогизмами и визуализировать их логические формы при помощи специальных схем. В дискуссии по докладу приняли участие А.С. Боброва, Д.Б. Тискин, Е.Н. Лисанюк, А.Д. Вольский. Ее общий вывод был созвучен идеям докладчика и состоял в том, что в обучении схематическая или диаграмматическая визуализация лемматических силлогизмов во многих случаях показывает себя не хуже, а лучше привычного использования таблиц истинности, в особенности в условиях ограниченного объема часов, отводимого на изучение этого раздела логики.

М.И. Васильева[37] в докладе «Тождество слова как аргументационная проблема» предложила синтаксические, морфологические и семантические критерии для установления смыслового тождества слов и представила примеры их применения в контексте анализа аргументации. В дискуссии, развернувшейся по вопросу разграничения омонимов и синонимов, коллеги из сообщества логиков настаивали на незначительности этой проблемы в свете формального анализа аргументов, в то время как коллеги из сообщества лингвистов указывали на контекстуальный характер выявления

[36] Александр Николаевич Журавлев — независимый исследователь, Санкт-Петербург.

[37] Маргарита Ильинична Васильева — к.пед.н., преподаватель Московского государственного юридического университета им. О.Е. Кутафина.

логической формы, в свете чего установление подобных критериев первично по отношению к конвенциям по поводу их использования, на которые ссылаются логики.

5. Философия логики и философские основания математики

Заседания секции «Философия логики и философские основания математики» 27 июня проходили под председательством Ивана Борисовича Микиртумова, 28 июня — Елены Григорьевны Драгалиной-Черной, 29 июня — Юрия Юрьевича Черноскутова. Всего было заслушано 9 докладов. В работе секции приняли участие около 20 ученых из Санкт-Петербурга, Москвы, Саратова, включая молодых ученых, аспирантов и студентов.

В своем докладе «Власть логики и логики власти» **И.Д. Невважай**[38] рассмотрел различные виды принуждения и власти и провел границу между властью, построенной на принуждении, направленной на достижение интересов подчиняющего и обозначаемой термином «кратос», и властью, построенной на доверии и координации интересов подчиняющего и подчиненного и обозначаемой термином «архе», и предложил отличать и «кратос-логику», где лишь одна сторона является носителем истины, от «логики доверительного общения», где «право на существование каждой из противоположностей оправдано существованием другой противоположности». В дискуссии внимание было уделено проблеме соотношения этических и эпистемических критериев, их совместимости или несовместимости. Откликаясь на скорее диалектический, чем формально-логический характер доклада, аудитория задавала выступающему вопросы о благе и истине.

В.И. Шалак[39] в докладе «Загадка и статус алгоритмов в научном познании» подчеркнул законоподобность алгоритмов, исследовал их структурные и функциональные особенности и отметил необходимость адекватного осмысления действительного научного статуса понятия алгоритма. В дискуссии особенное внимание было уделено нескольким сходным вопросам, связанным с пониманием причинности и цели. В частности, «цель G в формуле $(C \to d : G)$ стоит на месте консеквента, однако цель рассматривается как детерминирующая действия агента d при наличии условий C. Но если цель детерминирует, то разве она не антецедент»? В ответ В.И. Шалак подчеркнул, что «стрелка “$\to$” — это не импликация, так как слева от нее стоит предложение, а справа — императив, предписывающий выполнить действие d для достижения цели G. Императив не имеет истинностного

[38] Игорь Дмитриевич Невважай — д.филос.н., профессор, заведующий кафедрой философии Саратовской государственной юридической академии.

[39] Владимир Иванович Шалак — д.филос.н., руководитель сектора логики, ведущий научный сотрудник Института философии РАН.

значения. До сих пор при записи императивов упускалось из вида, что люди выполняют действия всегда с некоторой целью. Цель не является антецедентом, так как она еще не достигнута, а возможно, и вообще достигнута не будет, если действие неадекватно ей или что-то помешает». Другие вопросы были посвящены рассмотрению докладчиком законов природы как частного случая алгоритмов. При этом обозначение результата G как «цели» сохраняется (действие при этом — пустое). Но ведь закон природы имеет место и при отсутствии агентов и целей. Не будет ли такое словоупотребление излишне расширять значение термина «цель»? На это В.И. Шалак ответил, что природа в его понимании является глобальным агентом, действия которого как раз и описываются ее законами. Пустота действия в предложенной записи означает, что действия выполняет сама природа. В этом случае как раз и получается, что цель G превращается в следствие условия C согласно законам природы.

З.А. Сокулер[40] в докладе «Людвиг Витгенштейн — критик логицизма» исследовала взгляды Л. Витгенштейна на математику и ее отношение к логике, а также его критику расселовского логицизма. Вопросы к докладу касались уточнения исторических подробностей: в каких своих работах и какие взгляды Б. Рассела критиковал Л. Витгенштейн? Рассматривались вопросы датировки отдельных взглядов Л. Витгенштейна. Некоторые вопросы были посвящены тому, как соотносятся современные взгляды на обоснование математики со взглядами Б. Рассела.

Е.Г. Драгалина-Черная[41] в докладе «Теоретико-модельные логики как классификации дефинитных многообразий» предложила истолкование теоретико-модельных (абстрактных) логик как классификаций дефинитных многообразий, которые представляют собой предмет логики как формальной онтологии в интерпретации Гуссерля. В качестве предмета логики можно рассматривать типы изоморфизма. «При наличии изоморфизма между структурами M и N каждая формула ϕ, выполнимая в M, выполняется также в N». Истолкование типов изоморфизма как предмета логики «можно обнаружить уже в ее трактовке Э. Гуссерлем как универсальной науки о дефинитных многообразиях». «Несмотря на отсутствие консенсуса в спецификации адекватного теоретико-модельного аналога феноменологического понятия дефинитного многообразия», оно является важным для

[40] Зинаида Александровна Сокулер — д.филос.н., профессор кафедры онтологии и теории познания Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

[41] Елена Григорьевна Драгалина-Черная — д.филос.н., заведующая Международной лабораторией логики, лингвистики и формальной философии Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

реконструкции истории различных истолкований логики. Вопрос к докладу касался возможных истолкований понятия дефинитного многообразия.

Доклад **В.Г. Денисовой**[42] «Онтологическое измерение обыденных рассуждений» был посвящен взглядам У.В.О. Куайна, его критике бихевиоризма и вопросам онтологических обязательств. Докладчик не согласилась с Куайном в том, что определять, что реально, должна наука, и предложила вместо этого использовать в качестве критерия использование естественного языка в обыденной жизни. Вопрос к докладу касался того, почему докладчик в рамках заявленной широкой темы обращается преимущественно к философии Куайна, оставляя в стороне более поздние исследования по данной теме. Докладчик отметила это положение как возможность улучшить работу.

В докладе **А.Ю. Моисеевой**[43] «Соотношение логического следования и импликации в релевантной логике» были рассмотрены мотивы создания первых релевантных логик; принятые в релевантной логике подходы к пониманию логического следования и импликации; возможности применения в релевантной логике теоремы дедукции; исследованы разные способы адаптации теоремы дедукции к требованиям релевантной логики и следствия такой адаптации. Основными тезисами доклада[44] являются следующие: «В релевантной логике параллельно существуют две теории релевантности: семантическая (теория релевантного следования) и синтаксическая (теория релевантного вывода). Трактовка релевантной импликации как формализации естественного понятия следования (entailment) приводит к тому, что синтаксические свойства, приписываемые импликации в конкретном варианте релевантной логики, переносятся на уровень семантики. Средство переноса — это “релевантный” принцип дедукции, который в том или ином виде обязателен в каждой из логик, поскольку является единственным интуитивно приемлемым вариантом обоснования предлагаемой этой логикой формализации условной связки. Будучи синтаксическим по форме, “релевантный” принцип дедукции на деле несет в себе существенную семантическую информацию, а именно информацию о модели, которая определяет то, как связаны между собой смыслы предложений, образующих

[42]Виктория Геннадьевна Денисова — аспирант и стажер-исследователь Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

[43]Анна Юрьевна Моисеева — к.филос.н., научный сотрудник Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

[44]Мы позволили себе при составлении обзора подробнее остановиться на тезисах этого доклада, поскольку он лишь частично совпадает с работой, опубликованной в «Логико-философских штудиях». Мы приводим здесь тезисы в соответствии с любезно предоставленной нам докладчиком копией презентации.

антецедент и консеквент релевантной импликации. Эта связь фиксируется в понятии релевантного вывода, который фигурирует в определении “релевантного” принципа дедукции». Докладчик пришла к выводам о существовании некоего напряжения между понятиями релевантной импликации и релевантного следования. Они и тяготеют друг к другу, будучи оба основаны на рассуждениях о природе условно-гипотетических рассуждений, — и, с учетом взаимосвязи между импликацией и принципом дедукции, — «определяются и формально функционируют совершенно по-разному». «Характер этого напряжения невозможно прояснить, пока не будет определено, как именно должен моделироваться собственно смысл», а это зависит от подхода к построению семантики. Докладчик считает, что надлежит исследовать ряд основных подходов и сопоставить полученные результаты. В числе вопросов к докладу был посвященный тому, корректно ли говорить про интенсиональный смысл следования у Е.К. Войшвилло. Докладчик сочла это корректным. «Сам Е.К. Войшвилло говорит об информационном следовании, но определяет его в терминах обобщенных описаний состояния так, что это вполне можно назвать интенсиональным его пониманием».

Доклад **О.В. Черкашиной**[45] «Некоторые вопросы построения для высказываний о двухместных отношениях аналога шестиугольника Бланше. Схема логических отношений подчинения и контрадикторности» был посвящен проблеме построения графического представления, выражающего логические отношения между сопоставимыми высказываниями об отношениях между субъектами. Работа О.В. Черкашиной продолжает исследования Ю.В. Ивлева, посвященные аналогу силлогистики для высказываний об отношениях. Вопросы к докладу относились по большей части к сферам возможного применения полученных схем. Сейчас вопрос их построения испытывает интерес со стороны исследователей, намеренных использовать подобные схемы для «компьютерной обработки естественного языка для создания основанных на содержании поисковых систем». Практическое применение этих схем включает и обнаружение закономерностей, которые становятся особенно заметны именно благодаря графической форме представления; использование для целей аргументации и критики (использование таких фигур представляет собой следование алгоритму, который, будучи однажды сформулирован, в дальнейшем позволяет обращаться к этому инструменту не только специалистам в области логики), а также для обучения студентов.

[45]Оксана Викторовна Черкашина — к.ю.н., аффилированный исследователь Московского центра исследования сознания при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова.

В докладе[46] **М.А. Смирнова**[47] «Twardowskian Semantics for Performative Utterances» была использована семантика в духе К. Твардовского в ее современной версии, предложенной Ф. Молтман для разрешения некоторых проблем теории речевых актов — для выявления того, что представляют собой перформативные высказывания. Перформативные высказывания, такие как обещание, рассматриваются исследователями по-разному. Докладчик выделил теории, которые признают такие высказывания действиями, но не утверждениями; и действиями, и утверждениями; не действиями, но утверждениями. Идеи К. Твардовского можно рассматривать как альтернативу теории Г. Фреге. Если для Фреге мысль, т.е. смысл предложения, существует вне времени, не зависит от субъекта и только открывается людьми, то для Твардовского мысль как результат психической деятельности конкретна, исходит от данного субъекта и недолговечна. Кроме того, для Твардовского значимо разграничение мысли как акта мышления и мысли как результата такого акта. Докладчик предложил интерпретировать некоторые перформативные акты как обычные высказывания, описывающие результат действия. В то же время само действие, например, обещание, является психофизическим актом, т.е. психическим актом, который намеренно соединен определенным образом со своим внешним результатом. Даже существование понятия искренности, по словам докладчика, свидетельствует в пользу такого подхода — как у Еврипида: поклялся, но «уста клялись, не сердце». Такой подход позволяет сблизить теорию Фреге и теорию речевых актов. Вопросы к докладу включали следующие: Что говорит такой подход о ситуациях, когда обещания никто не услышал или субъект был ненадлежащим — есть ли в этом случае перформативный акт? Докладчик ответил, что возможно обещание самому себе, а недолжный субъект или совершает перформативный акт (хотя бы для себя), или говорит ложь. Клянется ли тот, кто клянется ложно? Сама концепция искренности предполагает соответствие или несоответствие чему-то. Вместе с тем существуют социальные практики, требующие выполнять сказанное (обещанное вслух) — но это другой аспект проблемы. Как следует рассматривать создание определения, насколько оно близко к перформативным актам? Создание определения скорее относится к созданию языка, чем к его использованию.

[46] Материалы данного доклада опубликованы в «Логико-философских штудиях» на английском языке, и здесь мы приводим их (на русском) несколько подробнее, чем большинства других докладов.

[47] Михаил Алексеевич Смирнов — к.филос.н., научный сотрудник Международной лаборатории логики, лингвистики и формальной философии Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

В докладе **Ю.Ю. Черноскутова**[48] «И.Н. Бродский и символическая логика в ЛГУ. Начало» были рассмотрены[49] события научной жизни, связанные с первыми работами отечественных (в основном ленинградских) философов по символической логике. Впервые курс математической логики на философском факультете ЛГУ читался в 1949–1950 гг. и связан с именами А.А. Маркова и Н.А. Шанина, однако дипломные работы в этой сфере не защищались до конца 1950-х гг. В 1956 г. на кафедре логики был утвержден план курса по символической логике, подготовленный И.Н. Бродским. В том же году аспирант 2-го года обучения А.Н. Книгин меняет утвержденную тему диссертации на новую: «О соотношении традиционной и математической логики». Опубликованная в 1957 г. статья А.Н. Книгина «О многозначных исчислениях и законе исключенного третьего» стала «фактически первой» посвященной символической логике публикацией сотрудника философского факультета ЛГУ и, возможно, вообще первой публикацией на эту тему «советского не математика, но философа». Докладчик перечислил сборники статей и посвященные исследованиям Г. Фреге монографии логиков-философов, вышедшие в конце 50-х – начале 60-х гг., и отметил, что учебные пособия логиков-философов появились позже. Делались попытки включения отдельных тем в традиционные учебники формальной логики. «В 1963 году первым таким опытом стало учебное пособие Д.П. Горского "Логика" для педагогических институтов». «Первым изложением символической логики, написанным... философом для философов», стала вышедшая в 1964 г. работа И.Н. Бродского с подзаголовком «Пособие для студентов заочного отделения философского факультета по разделу "Символическая логика" из курса формальной логики». Эти два пособия надолго «определили различие между Московским и Ленинградским/Петербургским подходами к адаптации материала математической логики к общему курсу формальной логики» — во всяком случае, в том, что ленинградский подход предполагает «резкое разделение» традиционной и символической (математической) логики, а московский их сочетает. Так исторически сложилось. Вопросы к докладчику включали следующие — Известно ли что-то о взаимодействии учеников Н.А. Шанина с И.Н. Бродским и его окружением? — Да, контакты были, но докладчик изучал архивы, и доступ к ним ограничен для защиты личной информации. Чтобы выяснить, нужно искать и расспрашивать очевидцев. — Какова роль

[48] Юрий Юрьевич Черноскутов — к.филос.н., доцент Санкт-Петербургского государственного университета.

[49] Мы приводим здесь краткое содержание доклада, поскольку он не был опубликован в посвященном конференции номере «Логико-философских штудий», и благодарим автора за любезно предоставленные материалы.

статьи Сталина «Марксизм и вопросы языкознания» в ослаблении идеологического давления на логику? — Да, аргументы такого рода использовали — что Гегель заблуждался по поводу формальной логики, «товарищ Сталин нам объяснил». — Было ли взаимодействие с московскими коллегами? — Да, было. В частности, В.Ф. Асмус приезжал, его хорошо принимали. — Влияет ли разделение преподавания традиционной и символической логики на рассмотрение логиками философских вопросов? — Это предмет для отдельного исследования, навскидку сказать нельзя.

На секции выступили четыре доктора наук, четыре кандидата наук и один аспирант. С точки зрения аффилиации наиболее широко был представлен Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (4 доклада), двумя докладами — Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. По одному докладу сделали представители Института философии Российской академии наук, принимающей стороны — Санкт-Петербургского государственного университета, Саратовской государственной юридической академии.

Рассмотренные на секции проблемы включали общие вопросы диалектики познания, а также сущности и статуса алгоритмов в научном познании. Были доклады, посвященные отдельным логическим системам (теоретико-модельным логикам, релевантным логикам, расширению силлогистики на высказывания об отношениях согласно идеям Ю.В. Ивлева); реконструкции исторических событий, в частности, посвященный И.Н. Бродскому доклад; интерпретациям взглядов отдельных философов (Л. Витгенштейна, Э. Гуссерля, У. Куайна, К. Твардовского).

6. Круглый стол «Проблемы преподавания логики и логических дисциплин»

В работе круглого стола приняли участие 15 специалистов из вузов и исследовательских центров нашей страны, включая такие ведущие центры подготовки по логике, как Петербург, Москва, Томск, Новосибирск. Основной темой встречи стало обсуждение тех задач, которые ставит перед современным преподавателем логики текущая ситуация: особенности нового поколения студентов, головокружительный прогресс в области информационных технологий, структура трудовых функций научно-педагогических работников.

Выступающие (В.А. Суровцев, Л.Г. Тоноян, К.А. Габрусенко, А.С. Боброва, В.Г. Денисова, Д.Б. Тискин, А.А. Ермаков, А.Ю. Моисеева, Г.В. Карпов, Е.Н. Лисанюк, А.Д. Вольский, О.В. Черкашина) делились своим педагогическим опытом в части подготовки занятий по логике для студентов разных направлений и специальностей, оценки их знаний, работы с традиционной учебной литературой (книгами, напечатанными на бумаге), регулирования учебного процесса с помощью специальных правил, конкретизирующих требования уставов вузов, правил обучения, рабочих программ учебных дисциплин. Особого обсуждения и критики удостоилась накопительная система оценки студенческой работы, принятая в целом ряде вузов как базовая, и вопрос, касающийся психологического (само-)сопровождения педагогической работы в условиях повышенной нагрузки и ее монотонного характера.

Помимо этого, параллельно с обсуждением указанных вопросов, участники встречи проходили онлайн-опрос, целью которого было выяснение отличительных черт и предпочтений представителей российского логического сообщества. В частности, были получены результаты, составившие портрет специалиста по логике и смежным дисциплинам: его любимым чтением являются труды Я. Хинтикки и Й. ван Бентама, классические вузовские учебники (В.А. Бочарова и В.И. Маркина; Ю.В. Ивлева; И.Я. Чупахина и И.Н. Бродского) и Стенфордская философская энциклопедия; его любимым логическим законом выступает закон исключенного третьего; он предпочитает философию математике, практике теорию, модернизм классике, рабочий кабинет аудитории и письмо чтению; на полезность закона тождества и модальной логики он смотрит скептически; и, наконец, в преподавании логики он видит (из всех возможных вариантов) сочетание приятного и полезного.

Последняя «Современная логика», долгожданный очный саммит, собравший логиков со всей России, показала, что отечественное логическое сообщество по-прежнему есть, что оно активно и что в будущее оно смотрит с оптимизмом, и не без основания.

Andrei A. Ermakov, Gleb V. Karpov, Elena N. Lisanyuk,
Larisa G. Tonoyan, Oksana V. Cherkashina

Review of the 16th All-Russian scientific conference "Logic Today: developments and perspectives"

Andrei A. Ermakov
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
29 B Polytechnicheskaya Str., St. Petersburg, 195251, Russian Federation.
E-mail: ermakov_aa@spbstu.ru

Gleb V. Karpov
Saint-Petersburg State University,
5 Mendeleevskaya Liniya, St. Petersburg, 199034, Russian Federation.
E-mail: glebsight@gmail.com

Elena N. Lisanyuk
Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
National Research University Higher Scool of Economics,
20 Myasnitskaya str., 101000, Moscow, Russian Federation.
E-mail: elisanyuk@hse.ru

Larisa G. Tonoyan
Department of Logic, Institute of Philosophy, Saint-Petersburg State University,
5 Mendeleevskaya Liniya, St. Petersburg, 199034, Russian Federation.
E-mail: tonoyan2003@list.ru

Oksana V. Cherkashina
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: Ch.O.Logic@zohomail.com

Abstract: This article briefly covers the work of the 16th All-Russian scientific conference "Logic Today: developments and perspectives", which took place on June 27–29, 2024 at the Institute of Philosophy of St.-Petersburg State University, gives abstracts of the reports made, and describes other events within the boundaries of this academic event.

Keywords: contemporary logic, history of logic, symbolic logic, philosophical logic, theory of argumentation, review

For citation: Ermakov A.A., Karpov G.V., Lisanyuk E.N., Tonoyan L.G., Cherkashina O.V. "Obzor XVI vserossiiskoi nauchnoi konferentsii «Sovremennaya logika: problemy i perspektivy»" [Review of the 16th All-Russian scientific conference "Logic Today: developments and perspectives"], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 1, pp. 151–175. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-1-151-175 (In Russian)

Информация для авторов

• Журнал «Логические исследования» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики см. на сайте журнала `http://logicalinvestigations.ru`)

• Все статьи, планируемые к публикации в журнале «Логические исследования», проходят процедуру анонимного рецензирования.

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате LaTeX 2_ε

• При подготовке рукописи в LaTeX 2_ε необходимо использовать стилевой класс `LIarticle.cls` и шаблон `LI_template.tex` (если рукопись на русском языке) или `LI_template_eng.tex` (если рукопись на английском языке), которые размещены в правилах предоставления рукописей на сайте `http://logicalinvestigations.ru`. Здесь же размещены подробные рекомендации по подготовке рукописи.

• Объем рукописи не должен превышать 25 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, списки литературы, аннотации (на русском и английском языках).

Статьи следует направлять в электронном виде в редакцию через сайт `http://logicalinvestigations.ru`

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: `http://logicalinvestigations.ru`)

• All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process.

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the $\LaTeX\,2_\varepsilon$ format.

• While typesetting a paper, the class file `LIarticle.cls` and the template `LI_template_eng.tex` should be used; both files can be accessed at `http://logicalinvestigations.ru`. Here you can also find detailed guidelines for preparing your paper.

• Papers should not exceed 25 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

Submissions should be sent in electronic form through the website:
`http://logicalinvestigations.ru`

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2025. Том 31. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: *ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015*

Главный редактор: *В.И. Шалак*

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технический редактор: *Е.А. Морозова*

Корректор: *Е.М. Пушкина*

Художники: *Н.Н. Попов*, *С.Ю. Растегина*

Подписано в печать с оригинал-макета 15.05.2025.
Формат 70 x 100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Для набора греческого текста использован пакет Teubner.
Усл. печ. л. 14,51. Уч.-изд. л. 9,2. Тираж 1000 экз. Заказ № 13.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Разработка LaTeX-класса стилевого оформления оригинал-макета: *А.Е. Коньков*

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
`http://logicalinvestigations.ru`