

Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 31. Number 2

Moscow
2025

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 31. Номер 2

Москва
2025

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations
Scientific-Theoretical Journal
2025. Volume 31. Number 2

Editorial Board

Editor-in-Chief: *V.I. Shalack* (Moscow), Executive Editor: *N.E. Tomova* (Moscow),
V.A. Bazhanov (Ulyanovsk), *L.Yu. Devyatkin* (Moscow), *V.K. Finn* (Moscow),
I.A. Gerasimova (Moscow), *I.A. Gorbunov* (Tver), *V.I. Markin* (Moscow),
I.B. Mikirtumov (St. Peterburg), *N.N. Nepeivoda* (Pereslavl-Zalessky),
S.P. Odintsov (Novosibirsk), *M.N. Rybakov* (Tver), *V.L. Vasyukov* (Moscow),
D.V. Zaitsev (Moscow)

International Editorial Board

Diderik Batens (Belgium), *Johan van Benthem* (Netherlands, USA),
Walter Carnielli (Brazil), *Grzegorz Malinowski* (Poland),
Graham Priest (Australia, USA), *Andrew Schumann* (Poland)

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Web of Science* (*Russian Science Citation Index*), *Scopus*, *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost* (*Philosopher's Index with Full Text*)

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the catalogue of Ural-Press is 42046

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation

Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com

Website: <https://logicalinvestigations.ru>

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2025. Том 31. Номер 2

Редакционная коллегия

Гл. редактор: *В.И. Шалак* (Москва), отв. секретарь: *Н.Е. Томова* (Москва),
В.А. Бажанов (Ульяновск), *В.Л. Васюков* (Москва), *И.А. Герасимова* (Москва),
И.А. Горбунов (Тверь), *Л.Ю. Девяткин* (Москва), *Д.В. Зайцев* (Москва),
В.И. Маркин (Москва), *И.Б. Микиртумов* (Санкт-Петербург),
Н.Н. Непейвода (Переславль-Залесский), *С.П. Одинцов* (Новосибирск),
М.Н. Рыбаков (Тверь), *В.К. Финн* (Москва)

Международный редакционный совет

Дидерик Батенс (Бельгия), *Йохан ван Бентем* (Нидерланды, США),
Вальтер Карниелли (Бразилия), *Гржегорж Малиновский* (Польша),
Грехам Прист (Австралия, США), *Эндрю Шуман* (Польша)

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 3 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «5.7 – философские науки»)

Подписной индекс каталога Урал-Пресс — 42046

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 426

Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com

Сайт: <https://logicalinvestigations.ru>

TABLE OF CONTENTS

IN MEMORY OF D.P. SKVORTSOV	8
PHILOSOPHY AND LOGIC	
ELENA G. DRAGALINA-CHERNAYA	
Abstract logics as classifications of abstract structures	9
VITALY V. DOLGORUKOV, ELENA L. POPOVA	
Normative standards in logic and game theory: structural parallels . . .	31
VLADIMIR I. SHALACK	
Goal-directed semantics for dynamic logic	52
SYMBOLIC LOGIC	
VLADIMIR I. MARKIN	
Relational completeness of a set of syllogistic constants	73
IVAN YU. SLIUSAREV	
Craig's interpolation theorem for logic with the Ruet operator	94
NON-CLASSICAL LOGIC	
LEONID YU. DEVPATKIN	
Generalized paraconsistency in three-valued logics: a maximality criterion	114
IGOR V. ZAITSEV	
Labeled Fitch-style natural deduction for basic intuitionistic conditional logic	143
ARTEM S. PIMANOV	
Extensions of V.A. Smirnov's temporal logic systems in the context of determinism	169
INFORMATION FOR AUTHORS	192

В НОМЕРЕ

Памяти Д.П. Скворцова	8
---------------------------------	---

Философия и логика

Е.Г. Драгалина-Черная	
Абстрактные логики как классификации абстрактных структур . . .	9
В.В. Долгоруков, Е.Л. Попова	
Нормативные стандарты в логике и теории игр: структурные параллели	31
В.И. Шалак	
Целеориентированная семантика динамической логики	52

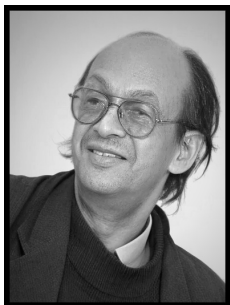
Символическая логика

В.И. Маркин	
Реляционная полнота множества силлогистических констант	73
И.Ю. Слюсарев	
Интерполяционная теорема Крейга для логики с оператором Руэта .	94

Неклассическая логика

Л.Ю. Девяткин	
Обобщенная паранепротиворечивость в трехзначных логиках: критерий максимальной	114
И.В. Зайцев	
Отмеченное субординатное натуральное исчисление для базовой интуиционистской кондициональной логики	143
А.С. Пиманов	
Расширения систем временной логики В.А. Смирнова в контексте детерминизма	169

Информация для авторов	191
----------------------------------	-----



**Дмитрий Павлович
СКВОРЦОВ**
(09.11.1952–13.09.2025)

13 сентября 2025 г. ушел из жизни Дмитрий Павлович Скворцов, кандидат физико-математических наук, выдающийся ученый, известный своими результатами в области неклассических логик, прежде всего суперинтуиционистских.

Дмитрий Павлович родился и жил в Москве, в 1975 г. окончил мехмат МГУ, а в 1978 г. — аспирантуру под руководством В.А. Успенского. Затем работал в исследовательской группе В.К. Финна — сначала в ВИНТИ РАН, а с 2016 г. в ФИЦ ИУ РАН.

Дмитрий Павлович был широко эрудированным специалистом в области математической логики и теории алгоритмов, а основные его интересы были связаны с интуиционистской логикой. Характерная особенность его работ — безупречная математическая корректность. Замечания в его рецензиях были тактичными, а тон — доброжелательным. Он легко делился научными идеями и откликался на просьбы. Выступая на конференциях, предпочитал пользоваться доской и мелом или написанными от руки слайдами для проектора, что было весьма необычно. Любил пешие прогулки, красоту природы, путешествовал по городам России и других стран. Писал стихи, короткие рассказы и повести, но не публиковал их.

Научная деятельность Дмитрия Павловича сначала была сосредоточена на вариантах логики задач Колмогорова. Он построил логику бесконечных задач по аналогии с логикой финитных задач Медведева, доказал ее перечислимость и независимость от множества потенциальных решений, а также (совместно с Л.Л. Максимовой и В.Б. Шехтманом) отсутствие конечной аксиоматизации как этой логики, так и логики Медведева. После защиты диссертации в 1980 г. его научные интересы постепенно переместились в область суперинтуиционистских и модальных логик первого порядка, где он стал одним из ведущих специалистов. Главные его результаты — построение симплициальной семантики (работа, опередившая время), нижние оценки сложности различных логик, теоремы о неполноте для семантики Крипке и ее обобщений, явная аксиоматизация большого числа логик. Он опубликовал несколько десятков научных работ. Значительная часть его результатов вошла в монографию «Quantification in nonclassical logic», написанную совместно с Д.М. Габбаем и В.Б. Шехтманом, при этом многое остается пока неопубликованным.

Дмитрий Павлович оставил о себе светлую память у всех, кто его знал.

*Л.Д. Беклемишев, А.Ю. Муравицкий, М.Н. Рыбаков, Д.И. Савельев,
А.И. Циткин, В.Б. Шехтман, Д.П. Шкатов*

Философия и логика
Philosophy and logic

Е.Г. ДРАГАЛИНА-ЧЕРНАЯ

**Абстрактные логики как классификации
абстрактных структур***

Елена Григорьевна Драгалина-Черная

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».

Российская Федерация, 105066, г. Москва, ул. Ст. Басманная, д. 21/4.

E-mail: edragalina@hse.ru

Аннотация: Абстрактные логики развиваются в рамках структуралистского подхода к предмету и дисциплинарным границам логики. Вместе с тем в алгебраической, теоретико-доказательственной и теоретико-модельных традициях возможны различные истолкования абстрактных логик. Ограничиваясь теоретико-модельной традицией, данная статья предлагает наряду со стандартной интерпретацией абстрактных логик как структур трактовку их как классификаций абстрактных структур (типов изоморфизма). Свойство инвариантности относительно изоморфизма понимается не как традиционный критерий демаркации логических и нелогических терминов, вызывающий обоснованную критику в современной философии логики, а как мета-ограничение на соответствующие классы структур. В силу этого мета-ограничения структуры, принадлежащие к одному типу изоморфизма, полагаются неразличимыми средствами абстрактной теории моделей. Выявляется вариативность мета-ограничений на классы структур в ранней и современной теории моделей. Сопоставляются онтологические подходы, предполагающие трактовку абстрактной структуры как формы, разделяемой всеми структурами в данном типе изоморфизма, либо как типа изоморфизма, который может быть представлен любой произвольной структурой этого типа. Демонстрируется роль понятий дефинитного многообразия Эдмунда Гуссерля и модельной структуры Рудольфа Карнапа в становлении метатеоретического аппарата теории моделей. Приводятся аргументы в пользу трактовки дефинитных многообразий как типов изоморфизма, а также ограничивающие ее контраргументы. Рассматривается металогическая трихотомия мономорфности, дедуктивной полноты и неразветвляемости в ранней теории моделей. Намечаются перспективы обобщения предложенной интерпретации абстрактных логик как классификаций абстрактных структур, обусловленные многообразием критериев сходства структур в современной теории моделей.

Ключевые слова: абстрактная логика, классификация, абстрактная структура, изоморфизм, дефинитное многообразие, модельная структура, категоричность

* Статья подготовлена в результате проведения исследования в рамках проекта «Международное академическое сотрудничество» НИУ ВШЭ.

Для цитирования: Драгалина-Черная Е.Г. Абстрактные логики как классификации абстрактных структур // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 2. С. 9–30. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-9-30

Введение

Различные истолкования абстрактных логик объединяет структуралистский подход к пониманию их предмета и задач. Обычно абстрактная логика L определяется как структура¹:

Определение 1. Абстрактной логикой называется структура вида $L = (F, \models)$, где

1. F — множество объектов, называемых формулами (множество формул называется теорией),
2. $\models$ — отношение логического следования между множествами формул (теориями) и формулами, т.е. $\models \subseteq \mathbb{P}(F) \times F$, где $\mathbb{P}(F)$ есть множество всех подмножеств множества F [Béziau, 2020].

Отношение логического следования в абстрактных логических структурах может быть заменено отношением выводимости. В том случае, если оно дополняется отношением выводимости, абстрактная логика представляется как тройка $L = (F, \models, \vdash)$, где $\vdash$ — отношение выводимости [Manzano, Alonso, 2013].

В абстрактных алгебраических логиках отношение логического следования заменяется оператором присоединения следствий². С наиболее общей алгебраической точки зрения «логики характеризуются как пары, состоящие из произвольного множества (без обычного требования рассматривать формулы некоего формального языка) и оператора следования» [Carnielli et al., 2009, p. 4].

В абстрактной (обобщенной) теории моделей абстрактная теоретико-модельная логика понимается иначе:

Определение 2. Абстрактная логика является тройкой $L = (S, F, \models)$, где $\models \subseteq S \times F$,

¹Структура S стандартно понимается как пара, состоящая из непустого множества U объектов, называемого доменом (или универсумом) структуры, и индексированного множества (упорядоченного списка) R отношений на U [Frigg, 2022, p. 56]. Абстрактные логики, определяемые как структуры, часто называются просто логиками.

²О стандартных ограничениях Тарского на операцию присоединения следствий и их возможных обобщениях см., например, [Font et al., 2003; Карпенко, 2004].

- 1) элементы класса S называются структурами L ;
- 2) элементы класса F называются предложениями L ;
- 3) $\models$ называется отношением выполнимости между S и F в L [Garcia-Matos, Väänänen, 2005, p. 21].

Задача данной статьи — предложить истолкование абстрактных теоретико-модельных логик не как структур, но как классификаций абстрактных структур. Это истолкование использует аппарат абстрактной теории моделей и логики распределенных систем, разделяя ряд ключевых металогических установок ранней теории моделей в отношении онтологического и эпистемологического статуса абстрактных структур.

1. Теоретико-модельные логики как классификации типов изоморфизма

В теории моделей основной логической операцией со структурами является процедура интерпретации: «В самом широком смысле теория моделей — это изучение интерпретации формальных языков в терминах структур» [Frigg, 2022, p. 54].

Хотя выражение *истинность в структуре* впервые встречается у Торальфа Скулема уже в 1933 г. [Hodges, 1986], Альфред Тарский долгое время воздерживается от его использования, декларируя общую стратегию элиминации неформальных семантических понятий: «я не буду использовать никакие семантические понятия, если не смогу предварительно редуцировать их к другим понятиям» [Tarski, 1956, p. 152–153]. Математическое определение истинности в структуре он дает только в 1957 г. в совместной работе с Робертом Воотом [Tarski, Vaught, 1957]. В 1960–1970-х гг. под влиянием теоретико-модельных идей Тарского формируется абстрактная теория моделей, задача которой состоит в исследовании теоретико-модельных свойств различных расширений логики первого порядка:

Основная идея теории моделей — от первого порядка и далее — состоит в том, что полезно обратить внимание на взаимосвязь между определенными *математическими структурами* и наборами выражений языка, используемого для описания свойств таких структур [Barwise, 1985, p. 4].

Абстрактная теоретико-модельная логика понимается как совокупность, состоящая из множества математических структур, множества формул и отношения выполнимости между ними. Общим для всех абстрактных

логик является свойство *изоморфизма*: при наличии изоморфизма между структурами M и N каждая формула φ , выполняемая в M , выполняется также в N , т.е. если $M \models L\varphi$ и $M \cong N$, то $N \models L\varphi$. Инвариантность относительно изоморфизма естественно рассматривать здесь не как критерий демаркации логических и нелогических терминов³, а как мета-ограничение на соответствующие классы структур: структуры, принадлежащие к одному типу (классу) изоморфизма, полагаются неразличимыми средствами абстрактной теории моделей⁴.

Трактовка свойства изоморфизма как мета-ограничения, разбивающего множество структур на типы изоморфизма, влечет интерпретацию абстрактных теоретико-модельных логик как классификаций типов изоморфизма. Предлагаая данную интерпретацию, я исхожу из определения классификации в логике распределенных систем⁵:

Определение 3. Классификация $A = \langle \text{tok}(A), \text{typ}(A), \models_A \rangle$ состоит из:

- 1) множества $\text{tok}(A)$ объектов, подлежащих классификации, называемых *токенами* A ,
- 2) множества $\text{typ}(A)$ объектов, используемых для классификации токенов, называемых *типами* A ,
- 3) бинарного отношения $\models_A$ между $\text{tok}(A)$ и $\text{typ}(A)$. Если a — токен и α — тип, то $a \models_A \alpha$ означает, что a имеет тип α в классификации A .

Для каждого токена $a \in \text{tok}(A)$ его типовое множество определяется как множество $\text{typ}(a) = \{\alpha \in \text{typ}(A) \mid a \models_A \alpha\}$. Для каждого типа $\alpha \in \text{typ}(A)$ его множество токенов определяется, в свою очередь, как множество $\text{tok}(\alpha) = \{a \in \text{tok}(A) \mid a \models_A \alpha\}$. Токены a_1 и a_2 неразличимы в A ,

³О критике критерия Тарского-Шер, предполагающего инвариантность логических терминов относительно изоморфизма, см., например, [Feferman, 1999; Bonnay, 2008; Dragalina-Chernaya, 2024].

⁴Типами или классами изоморфизма называются классы структур, замкнутые относительно изоморфизма. Поскольку типы изоморфизма являются экстенционалами обобщенных кванторов (в другой терминологии — просто обобщенными кванторами), абстрактные теоретико-модельные логики также характеризуются как логики с обобщенными кванторами. О критериях инвариантности как мета-ограничениях см. подробнее [Sagi, 2022].

⁵Исходя из задач, поставленных ими перед логикой распределенных систем, Джон Барвайс и Джерри Селигман исследуют не абстрактные, а локальные логики: «Локальная логика системы — это модель закономерностей, поддерживающих поток информации внутри системы, а также исключений из этих закономерностей» [Barwise, Seligman, 1997, p. 26].

если $\text{typ}(a_1) = \text{typ}(a_2)$. Примером классификации для данного языка L может служить тройка, в которой токены являются L -структурами, типы — предложениями языка L , а $M \models \varphi$ тогда и только тогда, когда φ истинно в структуре M [Barwise, Seligman, 1997, pp. 69–71].

Таким образом, абстрактная логика может быть представлена, на мой взгляд, как теоретико-модельная классификация типов изоморфизма:

Определение 4. Абстрактная логика является классификацией $A = \langle \text{tok}(A), \text{typ}(A), \models_A \rangle$, где

- 1) множество токенов $\text{tok}(A)$ является множеством структур, образующих типы изоморфизма,
- 2) множество типов $\text{typ}(A)$ является множеством предложений языка,
- 3) $\models_A$ является отношением выполнимости между ними ($a \models_A \alpha$ понимается как « a имеет тип α в A »).

Типовым множеством для каждого токена в теоретико-модельной классификации является множество предложений языка L , истинных в структурах, принадлежащих соответствующему типу изоморфизма. Это множество может также рассматриваться как теория данного типа изоморфизма. Структуры, принадлежащие к одному типу изоморфизма, являются неразличимыми в теоретико-модельной классификации.

Понимание классификации как одной из ключевых задач логики имеет давнюю историю. Согласно Анри Пуанкаре, иерархической классификацией является, например, силлогистика:

Формальная логика есть не что иное, как изучение свойств, общих для всех классификаций; она учит нас, что два солдата, являющиеся членами одного полка, принадлежат тем самым к одной бригаде, а следовательно, и к одной дивизии; и вся теория силлогизма сводится к этому [Poincaré, 1963, p. 45].

Связь теории моделей с классификацией структур также очевидна, хотя может характеризоваться как косвенная:

Теория моделей занимается классификацией математических структур, отображений и множеств с помощью логических формул. Можно классифицировать структуры в соответствии с тем, какие логические предложения в них истинны; на самом деле термин «модель» происходит от выражения «структура A является моделью предложения φ », означающего, что φ истинно в A . Теоретики моделей ищут способы построения моделей

данных предложений; и поэтому большая часть теории моделей непосредственно посвящена конструкциям и только косвенно — классификации [Hodges, 1997, p. vii].

Впрочем, такой важный раздел современной теории моделей, как теория классификации, восходящая к работам Майкла Морли и Сахарона Шелаха, делает классификацию своим непосредственным предметом:

Вообще говоря, математические структуры подчиняются некоторым аксиоматическим правилам и, как таковые, могут быть описаны как логические теории. Теория моделей — а в теории моделей, в особенности так называемая «теория классификации» — пытается классифицировать эти абстрактные логические теории, изучая отношения, существующие между ними и их математическими интерпретациями (или моделями) [Parrochia, Neuville, 2013, p. 20].

Истолкование теоретико-модельных логик как классификаций типов изоморфизма смещает фокус внимания с абстрактных теорий на абстрактные структуры. В противоположность конкретным структурам, таким как «груда кирпичей, досок и шифера, которые затем “собираются вместе”, чтобы построить дом, или мазки кисти, которые “соотносятся”, чтобы сформировать картину, или слова, которые связываются в осмысленные предложения» [Redhead, 2001, p. 74], абстрактные структуры возникают как результат операции абстракции над типами изоморфизма. С онтологической точки зрения абстрактная структура может рассматриваться двойственно: как форма, разделяемая всеми структурами в данном типе изоморфизма, либо просто как тип изоморфизма, который может быть представлен любой произвольной структурой этого типа (см., например, [Dummett, 1991; Redhead, 2001]). Эту дихотомию можно проследить, начиная с ранней теории моделей, обращение к которой полезно для прояснения предпосылок истолкования абстрактных логик как классификаций абстрактных структур.

2. У истоков теории моделей: абстрактные структуры как типы изоморфизма

Теоретико-модельный стиль мышления, формирующийся в логике начала XX в., испытал мощное воздействие аксиоматического метода, кульминацией которого стала публикация в 1899 г. «Оснований геометрии» Давида Гильберта. Как замечает Яаакко Хинтика, система аксиом элементарной геометрии была задумана Гильбертом в теоретико-модельных терминах:

Гильберт не только ясно дает понять, что он не делает никаких предположений относительно того, что представляют собой сущности, которые он называет «точками», «линиями» и «плоскостями». Он ясно дает понять, что любая структура объектов, удовлетворяющая аксиомам, будет считаться геометрией, независимо от того, имеют ли они какое-либо сходство с тем, что в обычном дискурсе называлось бы «точкой», «линией» или «между», «конгруэнтным» и т.д. С самого начала Гильберт фактически использовал соответствующие нестандартные интерпретации некоторых подмножеств аксиом, чтобы установить независимость от них еще одной аксиомы [Hintikka, 1988, p. 6].

После негативного отклика Готлоба Фреге на «Основания геометрии», у него завязалась переписка с Гильбертом, которую Хинтикка характеризует как *великие дебаты*. Возражая Фреге, Гильберт формулирует центральный пункт их разногласий следующим образом:

Меня очень заинтересовало Ваше утверждение: «Из истинности аксиом следует, что они не противоречат друг другу», потому что всегда, когда я размышлял, писал, читал лекции об этих вещах, я говорил в точности обратное: если произвольно данные аксиомы не противоречат друг другу, они истинны, и вещи, определяемые аксиомами, существуют [Frege, 1980, p. 42].

Явным или неявным образом к *великим дебатам* подключаются многие логики и философы начала XX в., среди которых особое место занимает Эдмунд Гуссерль, коллега Гильберта по Геттингенскому университету, получавший его неизменную академическую поддержку. В «Двойной лекции» (*Doppelvortrag*), прочитанной Гуссерлем по приглашению Гильберта в Математическом обществе Геттингена в 1901 г., он, следуя за Гильбертом, уточняет его подход к соотношению истинности и непротиворечивости постановкой вопроса о том, «как мы узнаем, что то, что свободно от противоречий, также является истинным» [Husserl, 2003, p. 419]. Отвечая на этот вопрос, Гуссерль настаивает на необходимости так задать область предметов, чтобы формы их отношений полностью определялись системой аксиом. Решение этой задачи ведет его к трактовке логики как универсальной науки о дефинитных многообразиях, связь которой с гильбертовской идеей полноты специально отмечается Гуссерлем (см., например, [Husserl, 1969, pp. 96–97]).

Полемизируя с Георгом Кантором, он понимает многообразия (*Mannigfaltigkeit*) как совокупности элементов, находящихся в определенных отношениях. Именно наличие отношений отличает многообразия в

трактовке Гуссерля от множеств как простых агрегатов [Hill, 2002]. Он различает относительную и абсолютную дефинитность многообразий:

Если многообразие относительно дефинитно, то для его объектов нет другой аксиомы, которую можно было бы добавить к определяющим аксиомам. Если многообразие абсолютно дефинитно, то в общем случае нет другой аксиомы, которую можно было бы добавить к этим аксиомам [Husserl, 2003, p. 427].

Гуссерль характеризует как дефинитные не только многообразия, но и системы аксиом:

Система аксиом является относительно дефинитной, если для своей области существования она не допускает никаких дополнительных аксиом, но допускает, что для более широкой области те же самые, а затем, конечно, и новые аксиомы являются валидными. . . Я называю многообразие абсолютно дефинитным, если нет другого многообразия, которое имеет те же аксиомы (совокупно), что и оно [Ibid., p. 426].

Иначе говоря, относительно дефинитной считается система аксиом, к которой нельзя добавить никаких новых аксиом, не определив некую новую область. Абсолютно дефинитной полагается система аксиом, которая имеет максимальный набор аксиом, то есть не может быть расширена непротиворечивым образом.

Вопрос о том, какие термины современной теории моделей наиболее релевантны для интерпретации учения Гуссерля о дефинитных многообразиях, является дискуссионным. Дефинитность интерпретируется как категоричность, синтаксическая либо семантическая полнота, а также как некая промежуточная характеристика, которую невозможно однозначно представить в точных металоогических терминах (см. [Centrone, 2010; Hartimo, 2017; Hartimo, 2018; Da Silva, 2016; Hartimo, 2020; Aranda, 2022]). Согласно авторитетной интерпретации Мирьи Хартимо, под дефинитным многообразием Гуссерль понимал то, что в современной терминологии лучше всего интерпретировать как область категоричной теории⁶: если абсолютно дефинитная система аксиом не допускает непротиворечивого расширения, то относительно дефинитная система аксиом не допускает нестандартные интерпретации [Hartimo, 2017, pp. 251–252]. Как замечает Хартимо:

⁶Теория считается категоричной, если изоморфна любая пара ее моделей M и N , или, говоря иначе, категоричная теория имеет одну модель (с точностью до изоморфизма).

Математическая реальность для Гуссерля состоит из чистых структур. Мы постигаем математическую реальность посредством идеации основных понятий, затем мы строим вокруг них теорию. Через «формализацию», то есть рассматривая теории с точностью до изоморфизма, можно постичь их общую, чисто формальную и уникальную структуру [Hartimo, 2018, p. 1515].

Проблематичным для интерпретации дефинитности как категоричности является, однако, то, что Гуссерль, говоря о дефинитных многообразиях в «Двойной лекции» 1901 г., не только не пользуется термином *категоричность*, но даже не упоминает изоморфизм⁷. Позже Гуссерль все же использует термин *изоморфизм*, но не в точном его смысле, а скорее для характеристики широко понимаемой формальной эквивалентности (*эквиформности*), обеспечивающей единообразие логических операций:

Как и основные принципы, все выводы, все заключения, доказательства, теории изоморфны. В таком случае естественно, что не нужно осуществлять выводы дважды. Как только обнаружен изоморфизм основных принципов, априори известно, что все должно происходить совершенно единообразным способом [Husserl, 2008, p. 82].

Естественно, все материально конкретные многообразия, подчиненные системам аксиом, которые при формализации оказываются эквиформными, являются многообразиями, имеющими общую дедуктивную научную форму; в своем отношении к ней эти многообразия сами являются эквиформными [Husserl, 1969, p. 95].

В отличие от Гуссерля, неформальным образом апеллировавшего к изоморфизму (эквиформности) дефинитных многообразий⁸, Рудольф Карнап дает эксплицитное определение структур как классов изоморфизма.

⁷Термины *изоморфизм* и *категоричность* появляются в начале XX в. Однако уже в 1897 г. Гильберт, говоря об однозначном определении системы объектов, демонстрирует понимание идеи изоморфизма как взаимно-однозначного отображения [Aranda, 2022, pp. 62–63]. Термин *категоричность* введен Освальдом Вебленом в 1904 г. со ссылкой на Джона Дьюи, порекомендовавшего ему это название, и Эдварда Хангтингтона, содержательно предвосхитившего связанные с ним ключевые идеи [Mancosu, 2010, pp. 13–14].

⁸О возможности трактовки дефинитных многообразий Гуссерля как типов изоморфизма, а также о других аспектах теоретико-модельных реконструкций его идеи формальной онтологии см., например, [Null, Simons, 1982; Васюков, 1999; Smith, 2002; Banick, 2020; Драгалина-Черная, 2024].

Его структуралистский подход к формальным аксиоматикам, развиваемый в 20-х гг. прошлого века, во многом предвосхищает теорию моделей. Согласно неоднозначной оценке Стива Эводи, Карнап «был пионером понятия “модель” формального языка в своей неудачной работе *Исследования по общей аксиоматике*, написанной в период между 1927 и 1930 годами, еще до того, как он переключился на синтаксис после 1931 года» [Awodey, 2007, p. 238].

В зимнем семестре 1923–1924 учебного года Карнап посещал продвинутые семинары Гуссерля по феноменологии и участвовал в заседаниях неформального феноменологического кружка. Однако если эволюция Гуссерля связана с постепенным вытеснением структуралистского подхода к построению формальной онтологии трансцендентальным анализом конституирующих ее интенциональных актов (см. [Hartimo, 2020]), то Карнапа феноменологическое эпохе ведет не к чистой субъективности, а к чистой структуре:

... наука по сути является изучением структур и, следовательно, существует путь, по которому, исходя из индивидуального потока опыта, можно конституировать нечто объективное [Карнап, 1928, p. 91].

В своем понимании структуры он следует не столько за Гуссерлем⁹, сколько за Берtrandом Расселом. Во «Введении в математическую философию» 1920 г. Рассел, развивая идеи *Principia Mathematica*, говорит об отношениях, обладающих общей структурой, которая определяется через *реляционное число* (класс отношений, подобных данному):

... то, что мы определили как «реляционное число», есть то же самое, что имеют в виду под неясным словом «структура» — слово, несмотря на его важность, никогда не бывшее (насколько мы знаем) определенным точным термином для тех, кто использовал это слово [Рассел, 2007, с. 13–14].

В «Исследованиях по общей аксиоматике» Карнап предлагает классифицировать аксиоматические теории на основе их *структурного числа* — числа соответствующих им *модельных структур*. Он понимает модельные структуры как классы изоморфизма, задаваемые с помощью определения через абстракцию. Мономорфные, по Карнапу, теории обладают

⁹Подробнее о влиянии Гуссерля на раннего Карнапа см., например, [Roy, 2004; Rosado Haddock, 2008; Carus, 2016].

единственной моделью (с точностью до изоморфизма) и имеют структурное число 1, полиморфные теории обладают неизоморфными моделями и имеют структурные числа, большие чем 1.

Если понятие мономорфности предвосхищает идею категоричности теории, то введенное Карнапом понятие неразветвляемости (*Nichtgabelbarkeit*, *non-forkability*) является предшественником понятия семантической полноты (хотя и не тождественно ему): теория Γ в языке L является неразветвляемой, если в L не существует предложения φ , для которого выполняется как $\{\Gamma \cup \varphi\}$, так и $\{\Gamma \cup \neg\varphi\}$ [Aranda, 2022, p. 22]. В противном случае теория разветвляется на φ в том же смысле, в котором разветвляется дорога на перекрестке. Так, например, евклидова геометрия без аксиомы параллельности не является неразветвляемой, поскольку может быть расширена способами, несовместимыми друг с другом (аксиомой параллельности или аксиомой Лобачевского) [Awodey, Carus, 2001, p. 147].

Абрахам Френкель в третьем расширенном издании 1928 г. своего «Введения в теорию множеств», впервые опубликованного в 1919 г., ввел по сути идентичное карнаповской неразветвляемости понятие полноты:

Система называется полной, если вне зависимости от того, удалось нам доказать истинность или ложность A в системе, либо мы способны обеспечить эту доказуемость теоретически, только истинность или ложность A — но не обе возможности одновременно — совместимы с системой (цит. по: [Awodey, Reck, 2002, p. 23]).

Исходя из намеченной Френкелем трихотомии категоричности (мономорфности), дедуктивной полноты как разрешимости и полноты как неразветвляемости, Карнап пытался доказать эквивалентность этих металогических свойств. Однако его доказательство ключевой теоремы о том, что неразветвляемость влечет мономорфность, оказалось ошибочным¹⁰. Осознание Карнапом этой ошибки оказало решающее влияние на его отказ от раннего метатеоретического проекта в начале 30-х гг.¹¹

¹⁰См. подробнее [Awodey, Carus, 2001; Awodey, Reck, 2002; Mancosu, 2010]. В совместной с Линденбаумом статье 1936 г. Тарский показал, что каждая категоричная (мономорфная) система аксиом является неразветвляемой (*non-ramifiable*), что не гарантирует, однако, ни ее дедуктивную полноту, ни справедливость обратного отношения [Tarski, 1956, p. 390].

¹¹Этот проект оказал, однако, стимулирующее воздействие на его студента Курта Геделя, который пользовался терминологией Карнапа и исходил из поставленных им металогических вопросов в собственном исследовании полноты формальных систем, в частности, при первом публичном представлении теоремы о неполноте на конференции 1930 г. в Кенигсберге (см. [Awodey, Carus, 2001, p. 155]). Об особенностях терми-

Строгое различие категоричности и семантической полноты было проведено в лекции Тарского «О полноте и категоричности дедуктивных систем» 1940 г.¹² Характеризуя семантическую полноту как обобщение понятия относительной полноты (или неразветвляемости¹³), он определяет ее следующим образом:

Система предложений данной дедуктивной теории называется семантически полной, если каждое предложение, которое может быть сформулировано в данной теории, таково, что либо оно, либо его отрицание является логическим следствием рассматриваемого множества предложений [Mancosu, 2010, p. 490].

Несмотря на прогресс, достигнутый современной теорией моделей в исследовании соотношения категоричности и семантической полноты различных формальных теорий, методологическая дискуссия о важности этих свойств для выполнения логикой своих дисциплинарных задач далека от завершения. Известно, например, что полная логика первого порядка не контролирует мощность своих бесконечных моделей и может быть категоричной, только если не имеет бесконечных моделей¹⁴. Отдавая приоритет дескриптивно полным теориям, обладающим свойством категоричности, Хинтиikka не видит большой угрозы для логики в семантической неполноте:

Отказываясь от семантической полноты нашей логики, мы устраняем препятствия к формулировке дескриптивно полных математических теорий [Хинтиikka, 2014, с. 67].

С другой стороны, отсутствие категоричности у логики первого порядка, допускающей бесконечные модели, может пониматься как естественное следствие ее абсолютности (независимости от теории множеств), которая, в свою очередь, служит проявлением ожидаемой от нее онтологической нейтральности:

нологии в металогики раннего Карнапа см. также [Awodey, Reck, 2002; Schiemer et al., 2017; Schiemer, 2020]. О возможности интерпретации абсолютной дефинитности Гуссерля как неразветвляемости см. [Aranda, 2022].

¹²Рукопись этой лекции хранилась в архиве Беркли и была впервые опубликована Паоло Манкоси только в 2010 г. (см. [Mancosu, 2010]).

¹³В письме Уилларду Куайну Тарский отмечает, что относительная полнота эквивалентна неразветвляемости (*non-ramifiability*) в том смысле, в котором этот термин использовался в его совместной статье с Линденбаумом 1936 г. (см. [Mancosu, 2010, p. 475]).

¹⁴Согласно теореме Левенгейма-Скулема, теория первого порядка, допускающая бесконечные модели, имеет модели различной мощности и, следовательно, не является категоричной.

Сейчас, спустя сто лет после открытия Скулема, индифферентность логики первого порядка по отношению к бесконечной мощности ее моделей часто рассматривается как позитивная, а не негативная характеристика. Индифферентность к мощности тесно связана, конечно, с теоретико-множественной абсолютностью и, следовательно, с желательным для логического свойством [Kennedy, Väänänen, 2021, p. 19].

Таким образом, в современной теории моделей полнота и категоричность не рассматриваются более как вариации некоей унифицирующей мета-характеристики идеальной логической теории, суть которой ранняя теория моделей пыталась концептуализировать как дефинитность, мономорфность или неразветвляемость. Более того, вопрос о приоритете в отношении этих металогических свойств остается и сейчас областью, открытой для методологических дискуссий.

Заключение

Трактовка абстрактных структур как типов изоморфизма, восходящая к предыстории теории моделей, закрепляется в обобщенной теории моделей свойством инвариантности относительно изоморфизма. Это свойство предстает здесь как мета-ограничение на классы структур, обуславливающее неразличимость структур, принадлежащих к одному типу изоморфизма. Таким образом, отношение выполнимости между множеством формул и множеством структур в абстрактных логиках интерпретируется как отношение классификации, в которой типовые множества формул не различают структуры-токены в пределах одного типа изоморфизма.

Предложенная интерпретация абстрактных логик как теоретико-модельных классификаций типов изоморфизма ограничена, конечно, традиционной трактовкой сходства структур как инвариантности относительно изоморфизма. Возможны иные критерии сходства структур, такие как гомоморфизм [Feferman, 1999], потенциальный изоморфизм [Bonnapay, 2008], бисимуляция [Van Benthem, Bonnapay, 2008] или неформальный изоморфизм [Baldwin, 2018]. Многообразие критериев структурного сходства влечет, в свою очередь, вариативность мета-ограничений на классы структур (см. [Kennedy, Väänänen, 2021; Sagi, 2022]). Более того, эти мета-ограничения могут пониматься не только как онтологические инварианты, но и как инварианты структурированных взаимодействий рациональных агентов [Van Benthem, 2021]. Изучение таких инвариантов открывает новые перспективы для теории моделей, дополняя ее теоретико-игровыми методами демаркации дисциплинарных границ логики.

Литература

- Васюков, 1999 – *Васюков В.Л.* Формальная феноменология. М.: Наука, 1999. 223 с.
- Драгалина-Черная, 2024 – *Драгалина-Черная Е.Г.* Варианты инвариантности в формальных и региональных онтологиях // *HORIZON. Феноменологические исследования*. 2024. Т. 13. № 1. С. 15–32.
- Карпенко, 2004 – *Карпенко А.С.* Предмет логики в свете основных тенденций ее развития // *Логические исследования*. 2004. Т. 11. С. 149–171.
- Рассел, 2007 – *Рассел Б.* Введение в математическую философию. Избранные работы. Новосибирск: Изд-во Сиб. ун-та, 2007. 272 с.
- Хинтиikka, 2014 – *Хинтиikka Я.* О Геделе. М.: Канон, 2014. 256 с.
- Aranda, 2022 – *Aranda V.* Completeness: From Husserl to Carnap // *Logica Universalis*. 2022. Vol. 6. No. 1–2. P. 57–83.
- Awodey, Carus, 2001 – *Awodey S., Carus A.W.* Carnap, Completeness, and Categoricity: The “Gabelbarkeitssatz” of 1928 // *Erkenntnis*. 2001. Vol. 54. No. 2. P. 145–172.
- Awodey, Reck, 2002 – *Awodey S., Reck E.* Completeness and Categoricity. Part 1: Nineteenth-Century Axiomatics to Twentieth-Century Metalogic // *Hist. Philos. Logic*. 2002. Vol. 23. No. 1. P. 1–30.
- Awodey, 2007 – *Awodey S.* Carnap’s Quest for Analyticity: The Studies in Semantics // *The Cambridge Companion to Carnap* / Ed. by M. Friedman and R. Creath. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. P. 226–247.
- Baldwin, 2018 – *Baldwin J.* Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice. Formalization without Foundationalism. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 362 p.
- Banick, 2020 – *Banick K.* Husserl, Model Theory, and Formal Essences // *Husserl Studies*. 2020. Vol. 37. No. 2. P. 103–125.
- Barwise, 1985 – *Barwise J.* Model-Theoretic Logics: Background and Aims // *Model-theoretic logics* / Ed. by J. Barwise and S. Feferman. New York: Springer-Verlag, 1985. P. 3–23.
- Barwise, Seligman, 1997 – *Barwise J., Seligman J.* Information Flow: The Logic of Distributed Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 274 p.
- Béziau, 2020 – *Béziau J. Y.* Logical Structures from a Model-Theoretical Viewpoint // *Abstract Consequence and Logics: Essays in Honor of Edelcio G. de Souza* / Ed. by A. Costa-Leite. College Publications, 2020. P. 21–34.
- Bonnay, 2008 – *Bonnay D.* Logicity and Invariance // *Bulletin of Symbolic Logic*. 2008. Vol. 14. P. 29–68.
- Carnap, 1928 – *Carnap R.* Der logische Aufbau der Welt. Berlin: Weltkreis, 1928. 109 p.
- Carnielli et al., 2009 – *Carnielli W.A., Coniglio M.E., D’Ottaviano I.M.L.* New Dimensions on Translations Between Logics // *Logica Universalis*. 2009. Vol. 3. P. 1–18.

- Carus, 2016 – *Carus A.W.* Carnap and Phenomenology: What Happened in 1924? // Influences on the Aufbau / Ed. by C. Damböck. Cham: Birkhäuser, 2016. P. 137–162.
- Centrone, 2010 – *Centrone S.* Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl. Dordrecht: Springer, 2010. 232 p.
- Da Silva, 2016 – *Da Silva J.* Husserl and Hilbert on Completeness, Still // Synthese. 2016. Vol. 193. P. 1925–1947.
- Dragalina-Chernaya, 2024 – *Dragalina-Chernaya E.* Logical Hylomorphism Revisited: Aristotle, Tarski, and Corcoran // Universal Logic, Ethics, and Truth. Studies in Universal Logic / Ed. by T.L. Madigan and J.-Y. Béziau. Cham: Birkhäuser, 2024. P. 109–118.
- Dummett, 1991 – *Dummett M.* Frege: Philosophy of Mathematics. Cambridge: Harvard University Press, 1991. 331 p.
- Feferman, 1999 – *Feferman S.* Logic, Logics, and Logicism // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1999. Vol. 40. P. 31–54.
- Font et al., 2003 – *Font J.M., R. Jansana R., Pigozzi D.* A Survey of Abstract Algebraic Logic // Studia Logica. 2003. Vol. 74. P. 13–97.
- Frege, 1980 – *Frege G.* Gottlob Frege: Philosophical and Mathematical Correspondence / Ed. by G. Gabriel et al. Oxford: Basil Blackwell, 1980. 214 p.
- Frigg, 2022 – *Frigg R.* Models and Theories. A Philosophical Inquiry. Routledge, 2022. 495 p.
- Garcia-Matos, Väänänen, 2005 – *Garcia-Matos M., Väänänen J.* Abstract Model Theory as a Framework for Universal Logic // Logica Universalis: Towards a General Theory of Logic / Ed. by J.Y. Béziau. Basel: Birkhäuser, 2005. P. 19–33.
- Hartimo, 2017 – *Hartimo M.* Husserl and Hilbert // Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics / Ed. by S. Centrone. Dordrecht, Netherland: Springer Verlag, 2017. P. 245–262.
- Hartimo, 2018 – *Hartimo M.* Husserl on Completeness, Definitely // Synthese. 2018. Vol. 195. P. 1509–1527.
- Hartimo, 2020 – *Hartimo M.* Husserl on “Besinnung” and Formal Ontology // Metametaphysics and the Sciences: Historical and Philosophical perspectives / Ed. by F. Kjosavik and C. Serck-Hanssen. New York: Routledge, 2020. P. 200–215.
- Hill, 2002 – *Hill O.* Tackling Three of Frege's Problems: Edmund Husserl on Sets and Manifolds // Axiomathes. 2002. Vol. 13. P. 79–104.
- Hintikka, 1988 – *Hintikka J.* On the Development of the Model-Theoretic Viewpoint in Logical Theory // Synthese. 1988. Vol. 77. P. 1–36.
- Husserl, 1969 – *Husserl E.* Formal and Transcendental Logic. The Hague: Martinus Nijhoff, 1969. 340 p.
- Husserl, 2003 – *Husserl E.* Philosophy of Arithmetic: Psychological and Logical Investigations with Supplementary Texts from 1887–1901. Dordrecht: Kluwer, 2003. 579 p.

- Husserl, 2008 – *Husserl E.* Introduction to Logic and Theory of Knowledge: Lectures 1906/07 (Hua XIII). Dordrecht: Springer, 2008. 508 p.
- Hodges, 1986 – *Hodges W.* Truth in a Structure // Proceedings of the Aristotelian Society. 1986. Vol. 86. P. 135–151.
- Hodges, 1997 – *Hodges W.* A Shorter Model Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 324 p.
- Kennedy, Väänänen, 2021 – *Kennedy J., Väänänen J.* Logicality and Model Classes // Bulletin of Symbolic Logic. 2021. Vol. 27. No. 4. P. 385–414.
- Mancosu, 2010 – *Mancosu P.* The Adventure of Reason. Interplay between Mathematical Logic and Philosophy of Mathematics: 1900–1940. Oxford: Oxford University Press, 2010. 618 p.
- Manzano, Alonso, 2013 – *Manzano M., Alonso E.* Completeness: from Gödel to Henkin // History and Philosophy of Logic, 2013. Vol. 35. No. 1. P. 50–75.
- Null, Simons, 1982 – *Null G., Simons R.* Manifolds, Concepts and Moment Abstracta // Parts and Moments: Studies in Logic and Formal Ontology / Ed. by B. Smith. München, 1982. P. 439–480.
- Parrochia, Neuville, 2013 – *Parrochia D., Neuville P.* Towards a General Theory of Classifications. Basel: Springer, 2013. 304 p.
- Poincaré, 1963 – *Poincaré H.* Mathematics and Science: Last Essays. Dover Publications, 1963. 128 p.
- Redhead, 2001 – *Redhead M.* The Intelligibility of the Universe // Royal Institute of Philosophy Supplement. 2001. Vol. 48. P. 73–90.
- Rosado Haddock, 2008 – *Rosado Haddock G.* The Young Carnap's Unknown Master: Husserl's Influence on *Der Raum* and *Der logische Aufbau der Welt*. Hampshire: Ashgate Publishing Company, 2008. 150 p.
- Roy, 2004 – *Roy J.-M.* Carnap's Husserlian Reading of the Aufbau // Carnap Brought Home: The View from Jena / Ed. by S. Awodey, C. Klein. Chicago: Open Court, 2004. P. 41–62.
- Sagi, 2022 – *Sagi G.* Invariance Criteria as Meta-Constraints // Bulletin of Symbolic Logic. 2022. Vol. 28. No. 1. P. 104–132.
- Schiemer et al., 2017 – *Schiemer G., Zach R., Reck E.* Carnap's Early Metatheory: Scope and Limits // Synthese. 2017. Vol. 194. No. 1. P. 33–65.
- Schiemer, 2020 – *Schiemer G.* Carnap's Structuralist Thesis // The Prehistory of Mathematical Structuralism / Ed. by E.H. Reck and G. Schiemer. Oxford: Oxford University Press, 2020. P. 383–420.
- Smith, 2002 – *Smith D.* Mathematical Form in the World // Philosophia Mathematica. 2002. Vol. 10. No. 2. P. 102–129.
- Tarski, 1956 – *Tarski A.* Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938 / Ed. by J. Corcoran. Oxford: Clarendon Press, 1956. 536 p.
- Tarski, Vaught, 1957 – *Tarski A., Vaught R. L.* Arithmetical extensions of relational systems // Compositio Mathematica. 1957. Vol. 13. P. 81–102.

- Van Benthem, Bonnay, 2008 – *Van Benthem J., Bonnay D.* Modal Logic and Invariance // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2008. Vol. 18. No. 2–3. P. 153–173.
- Van Benthem, 2021 – *Van Benthem J.* Semantic Perspectives in Logic // The Semantic Conception of Logic: Essays on Consequence, Invariance, and Meaning / Ed. by G. Sagi and J. Woods. New York: Cambridge University Press, 2021. P. 117–141.

ELENA G. DRAGALINA-CHERNAYA

Abstract logics as classifications of abstract structures

Elena G. Dragalina-Chernaya

National Research University Higher School of Economics,
21/4 Staraya Basmannaya St., 105066, Moscow, Russian Federation.
International Laboratory for Logic, Linguistics and Formal Philosophy,
21/4 Staraya Basmannaya St., 105066, Moscow, Russian Federation.
E-mail: edragalina@hse.ru

Abstract: Abstract logics are developed within a structuralist approach to the subject and disciplinary boundaries of logic. Nevertheless, within algebraic, proof-theoretic, and model-theoretic traditions, diverse interpretations of abstract logics are possible. Focusing on the model-theoretic tradition, this paper presents an alternative viewpoint that challenges the standard conception of abstract logics as structures. Instead, it argues for interpreting abstract logics as classifications of abstract structures (i.e., isomorphism types). From this perspective, the property of invariance under isomorphism ceases to function as a traditional criterion for distinguishing logical from non-logical terms—a criterion that has faced legitimate criticism in contemporary philosophy of logic. Invariance is rather treated as meta-constraints imposed on classes of structures, rendering it impossible to distinguish among structures belonging to the same isomorphism type using the tools of abstract model theory. The variability of such meta-constraints in early and modern model theories is examined. Two distinct ontological perspectives are compared: one perspective regards an abstract structure as a form that is common to all members of an isomorphism type, while the other perspective sees it as the isomorphism type itself, which can be represented by any of its tokens. The roles played by Edmund Husserl’s concept of definite manifold and Rudolf Carnap’s notion of model structure in shaping the metatheoretical apparatus of model theory are elucidated. Supporting evidence for interpreting definitive manifolds as isomorphism types is presented, alongside counterarguments highlighting specific shortcomings. Furthermore, the paper investigates a trichotomy within early model theory involving monomorphicity, deductive completeness, and non-forkability. Finally, prospects for advancing the proposed interpretation of abstract logics are explored, motivated by the diversity of criteria for structural similarity currently employed in model-theoretic research.

Keywords: abstract logic, classification, abstract structure, isomorphism, definite manifold, model structure, categoricity

For citation: Dragalina-Chernaya E.G. “Abstraktnye logiki kak klassifikatsii abstraktnykh struktur” [Abstract logics as classifications of abstract structures], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 2, pp. 9–30. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-9-30. (In Russian)

Acknowledgements. The article was prepared within the framework of the project “International academic cooperation” HSE University.

References

- Aranda, 2022 – Aranda, V. “Completeness: From Husserl to Carnap”, *Logica Universalis*, 2022, Vol. 6, No. 1–2, pp. 57–83.
- Awodey, Carus, 2001 – Awodey, S., Carus, A. W. “Carnap, Completeness, and Categoricity: The “Gabelbarkeitssatz” of 1928”, *Erkenntnis*, 2001, Vol. 54, No. 2, pp. 145–172.
- Awodey, Reck, 2002 – Awodey, S., Reck, E. “Completeness and Categoricity. Part 1: Nineteenth-Century Axiomatics to Twentieth-Century Metalogic”, *Hist. Philos. Logic*, 2002, Vol. 23, No. 1, pp. 1–30.
- Awodey, 2007 – Awodey S. “Carnap’s Quest for Analyticity: The Studies in Semantics”, *The Cambridge Companion to Carnap*, ed. by M. Friedman and R. Creath. Cambridge: Cambridge University Press, 2007, pp. 226–247.
- Baldwin, 2018 – Baldwin, J. “*Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice. Formalization without Foundationalism*”. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 362 pp.
- Banick, 2020 – Banick, K. “Husserl, Model Theory, and Formal Essences”, *Husserl Studies*, 2020, Vol. 37, No. 2, pp. 103–125.
- Barwise, 1985 – Barwise, J. “*Model-Theoretic Logics: Background and Aims*”, *Model-theoretic logics*, ed. by J. Barwise and S. Feferman. New York: Springer-Verlag, 1985, pp. 3–23.
- Barwise, Seligman, 1997 – Barwise, J., Seligman, J. “*Information Flow: The Logic of Distributed Systems*”. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 274 pp.
- Béziau, 2020 – Béziau, J.-Y. “Logical Structures from a Model-Theoretical Viewpoint”, *Abstract Consequence and Logics: Essays in Honor of Edelcio G. de Souza*, ed. by A. Costa-Leite. College Publications, 2020, pp. 21–34.
- Bonnay, 2008 – Bonnay, D. “Logicality and Invariance”, *Bulletin of Symbolic Logic*, 2008, Vol. 14, pp. 29–68.
- Carnap, 1928 – Carnap, R. *Der logische Aufbau der Welt*. Berlin: Weltkreis, 1928. 109 pp.
- Carnielli et al., 2009 – Carnielli, W.A., Coniglio, M.E., D’Ottaviano, I.M.L. “New Dimensions on Translations Between Logics”, *Logica Universalis*, 2009, Vol. 3, pp. 1–18.
- Carus, 2016 – Carus, A.W. “Carnap and Phenomenology: What Happened in 1924?”, *Influences on the Aufbau*, ed. by C. Damböck. Cham, 2016, pp. 137–162.
- Centrone, 2010 – Centrone, S. *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl*. Dordrecht: Springer, 2010. 232 pp.
- Da Silva, 2016 – Da Silva, J. “Husserl and Hilbert on Completeness, Still”, *Synthese*, 2016, Vol. 193, pp. 1925–1947.
- Dragalina-Chernaya, 2024 – Dragalina-Chernaya, E. “Logical Hylomorphism Revisited: Aristotle, Tarski, and Corcoran”, *Universal Logic, Ethics, and Truth. Studies in Universal Logic*, ed. by T.L. Madigan and J.-Y. Béziau. Cham: Birkhäuser, 2024, pp. 109–118.

- Dragalina-Chernaya, 2024 – Dragalina-Chernaya, E. “Varianty invariantnosti v formal’nykh i regional’nykh ontologiyakh” [Variants of Invariance in Formal and Regional Ontologies] / *HORIZON. Fenomenologicheskie issledovaniya*. [HORIZON. Phenomenological Research], 2024, Vol. 13, No. 1, pp. 15–32. (In Russian)
- Dummett, 1991 – Dummett, M. *Frege: Philosophy of Mathematics*. Cambridge: Harvard University Press, 1991. 331 pp.
- Feferman, 1999 – Feferman, S. “Logic, Logics, and Logicism”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1999, Vol. 40, pp. 31–54.
- Font et al., 2003 – Font, J.M., R. Jansana, R., Pigozzi, D. “A Survey of Abstract Algebraic Logic”, *Studia Logica*, 2003, Vol. 74, pp. 13–97.
- Frege, 1980 – Frege, G. *Gottlob Frege: Philosophical and Mathematical Correspondence*, ed. by G. Gabriel et al. Oxford: Basil Blackwell, 1980. 214 pp.
- Frigg, 2022 – Frigg, R. *Models and Theories. A Philosophical Inquiry*. Routledge: 2022. 495 pp.
- Garcia-Matos, Väänänen, 2005 – Garcia-Matos, M., Väänänen J. “Abstract Model Theory as a Framework for Universal Logic”, *Logica Universalis: Towards a General Theory of Logic*, ed. by J.Y. Beziau. Basel: Birkhäuser, 2005, pp. 19–33.
- Hartimo, 2017 – Hartimo, M. “Husserl and Hilbert”, *Essays on Husserl’s Logic and Philosophy of Mathematics*, ed. by S. Centrone. Dordrecht, Netherland: Springer Verlag, 2017, pp. 245–262.
- Hartimo, 2018 – Hartimo, M. “Husserl on Completeness, Definitely”, *Synthese*, 2018, Vol. 195, pp. 1509–1527.
- Hartimo, 2020 – Hartimo, M. “Husserl on “Besinnung” and Formal Ontology”, *Metametaphysics and the Sciences: Historical and Philosophical perspectives*, ed. by F. Kjosavik and C. Serck-Hanssen. New York: Routledge, 2020, pp. 200–215.
- Hill, 2002 – Hill, O. “Tackling Three of Frege’s Problems: Edmund Husserl on Sets and Manifolds”, *Axiomathes*, 2002, Vol. 13, pp. 79–104.
- Hintikka, 1988 – Hintikka, J. “On the Development of the Model-Theoretic Viewpoint in Logical Theory”, *Synthese*, 1988, Vol. 77, pp. 1–36.
- Hintikka, 2014 – Hintikka, J. *O Gedele*. [On Gödel]. Moscow: Kanon, 2014. 256 pp. (In Russian)
- Husserl, 1969 – Husserl, E. *Formal and Transcendental Logic*. The Hague: Martinus Nijhoff, 1969. 340 pp.
- Husserl, 1969 – Husserl, E. *Philosophy of Arithmetic: Psychological and Logical Investigations with Supplementary Texts from 1887–1901*. Dordrecht: Kluwer, 2003. 579 pp.
- Husserl, 2008 – Husserl, E. *Introduction to Logic and Theory of Knowledge: Lectures 1906/07* (Hua XIII). Springer, Dordrecht, 2008. 508 pp.
- Hodges, 1986 – Hodges, W. “Truth in a Structure”, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 1986, Vol. 86, pp. 135–151.
- Hodges, 1997 – Hodges, W. *A Shorter Model Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 324 pp.

- Karpenko, 2004 – Karpenko, A.S. “Predmet logiki v svete osnovnykh tendentsij ee razvitiya” [The Subject of Logic in Light of Its Main Development Trends], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], 2004, Vol. 11, pp. 149–171. (In Russian)
- Kennedy, Väänänen, 2021 – Kennedy, J., Väänänen, J. “Logicality and Model Classes”, *Bulletin of Symbolic Logic*, 2021, Vol. 27, No. 4, pp. 385–414.
- Mancosu, 2010 – Mancosu, P. *The Adventure of Reason. Interplay between Mathematical Logic and Philosophy of Mathematics: 1900–1940*. Oxford: Oxford University Press, 2010. 618 pp.
- Manzano, Alonso, 2013 – Manzano, M., Alonso, E. “Completeness: from Gödel to Henkin”, *History and Philosophy of Logic*, 2013, Vol. 35, No. 1, pp. 50–75.
- Null, Simons, 1982 – Null, G., Simons, R. “Manifolds, Concepts and Moment Abstracta”, *Parts and Moments: Studies in Logic and Formal Ontology*, ed. by B. Smith. München, 1982, pp. 439–480.
- Parrochia, Neuville, 2013 – Parrochia, D., Neuville, P. *Towards a General Theory of Classifications*. Basel: Springer, 2013. 304 pp.
- Poincaré, 1963 – Poincaré, H. *Mathematics and Science: Last Essays*. Dover Publications, 128 pp.
- Russell, 2007 – Russell, B. *Vvedenie v matematicheskuyu filosofiyu. Izbrannye raboty* [Mathematical Philosophy. Selected Works]. Novosibirsk: Sib. univ. izd-vo, 2007. 272 pp. (In Russian)
- Redhead, 2001 – Redhead, M. “The Intelligibility of the Universe”, *Royal Institute of Philosophy Supplement*, 2001, Vol. 48, pp. 73–90.
- Rosado Haddock, 2008 – Rosado Haddock, G. *The Young Carnap’s Unknown Master: Husserl’s Influence on Der Raum and Der logische Aufbau der Welt*. Hampshire: Ashgate Publishing Company, 2008. 150 pp.
- Roy, 2004 – Roy, J.-M. “Carnap’s Husserlian Reading of the Aufbau”, *Carnap Brought Home: The View from Jena*, ed. by S. Awodey, C. Klein. Open Court, Chicago, 2004, pp. 41–62.
- Sagi, 2022 – Sagi, G. “Invariance Criteria as Meta-Constraints”, *Bulletin of Symbolic Logic*, 2022, Vol. 28, No. 1, pp. 104–132.
- Schiemer et al., 2017 – Schiemer, G., Zach, R., Reck, E. “Carnap’s Early Metatheory: Scope and Limits”, *Synthese*, 2017, Vol. 194, No. 1, pp. 33–65.
- Schiemer et al., 2020 – Schiemer, G. “Carnap’s Structuralist Thesis”, *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, ed. by E.H. Reck and G. Schiemer. Oxford: Oxford University Press, 2020, pp. 383–420.
- Smith, 2002 – Smith, D. “Mathematical Form in the World”, *Philosophia Mathematica*, 2002, Vol. 10, No. 2, pp. 102–129.
- Tarski, 1956 – Tarski, A. *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, ed. by J. Corcoran. Oxford: Clarendon Press, 1956. 536 p.
- Tarski, Vaught, 1957 – Tarski, A., Vaught, R. L. “Arithmetical extensions of relational systems”, *Compositio Mathematica*, 1957, Vol. 13, pp. 81–102.

-
- Van Benthem, Bonnay, 2008 – Van Benthem, J., Bonnay, D. “Modal Logic and Invariance”, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2008, Vol. 18, No. 2–3, pp. 153–173.
- Van Benthem, 2021 – Van Benthem, J. “Semantic Perspectives in Logic”, *The Semantic Conception of Logic: Essays on Consequence, Invariance, and Meaning*, ed. by G. Sagi and J. Woods. New York: Cambridge University Press, 2021, pp. 117–141.
- Vasyukov, 1999 – Vasyukov, V.L. *Formal'naya fenomenologiya* [Formal Phenomenology]. M.: Nauka, 1999. 223 p. (In Russian)

В.В. Долгоруков, Е.Л. Попова

Нормативные стандарты в логике и теории игр: структурные параллели*

Виталий Владимирович Долгоруков

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Российская Федерация, 105066, г. Москва, ул. Ст. Басманная, д. 21/4.
E-mail: vdolgorukov@hse.ru

Елена Леонидовна Попова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Российская Федерация, 105066, г. Москва, ул. Ст. Басманная, д. 21/4.
E-mail: elpopova@hse.ru

Аннотация: Статья посвящена исследованию структурных параллелей между нормативными стандартами в логике и теории игр. С одной стороны, стандартная точка зрения утверждает, что и логика, и теория игр являются нормативными дисциплинами. С другой стороны, их нормативный статус является предметом дискуссий. Демонстрируется, что внутри логики и теории игр возникают параллельные исследовательские программы, связанные с различными стратегиями ответа на вопрос об их нормативном статусе. Во-первых, и в логике, и в теории игр сложился «парадоксальный консенсус» относительно стандартного варианта нормы — законов классической логики высказываний (в случае логики) и равновесия Нэша (в случае теории игр). Консенсус является парадоксальным, поскольку одновременно с признанием наличия стандартного варианта нормы признаются и его недостатки: затруднения законов классической логики высказываний и затруднения равновесия Нэша. В ответ на решение этих затруднений сформировались программы альтернативных логик и очищения равновесия. Во-вторых, конфликт с данными смежных эмпирических дисциплин (психологии рассуждений и поведенческой экономики) привел к появлению программы поиска компромиссного варианта нормы — логических моделей рассуждений и поведенческой теории игр. В-третьих, и в логике, и в теории игр сложилась программа «смены перспективы», которая отличается как от стратегии усиления нормы, так и от ее ослабления, она требует расширения контекста для определения нормы. Программами смены перспективы следует считать программы логической динамики и эпистемическую теорию игр. Также демонстрируется, что программа «смены перспективы» позволяет сделать вывод о тенденции сближения логики и теории игр в рамках общей теории рациональной агентности. Более того, программа поиска компромиссного варианта нормы также может считаться разделом общей теории рациональной агентности, моделирующей в том числе и взаимодействие агентов с ресурсными ограничениями разного типа.

* Статья подготовлена при поддержке РНФ, проект № 23–18–00695 «Логико-когнитивные модели рассуждений: принципы демаркации нормативного и дескриптивного».

Ключевые слова: нормативность, теория игр, философия логики, агентность, рациональность, эпистемическая теория игр, логическая динамика, модели рассуждений

Для цитирования: Долгоруков В.В., Попова Е.Л. Нормативные стандарты в логике и теории игр: структурные параллели // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 2. С. 31–51. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-31-51

Введение

Структурные параллели между логикой и теорией игр отмечаются многими исследователями. Так, экономист А. Рубинштейн замечает: «Тогда как логика является наукой об истине и следовании, теория игр является наукой о стратегических рассуждениях. Логика мотивирована тем, как мы используем понятия истины и следования в повседневной жизни, тогда как теория игр мотивирована стратегическими рассуждениями, которые мы используем в повседневной жизни» [Rubinstein, Ariel, 2007].

С одной стороны, хрестоматийная «школьная» позиция состоит в том, что и логика, и теория игр являются нормативными дисциплинами, моделирующими соответственно правильные (рациональные) рассуждения и правильные (рациональные) стратегии поведения в ситуациях стратегического взаимодействия. Мы столкнемся с этой позицией, если откроем практически любой вводный учебник по логике или теории игр¹. С другой стороны, при более пристальном рассмотрении (и не в учебной литературе для начинающих) нормативный статус как логики, так и теории игр остается предметом дискуссий².

Оставляя за скобками вопрос о нормативном статусе этих дисциплин, в настоящей статье мы бы хотели сосредоточиться на ряде структурных параллелей, которые возникают между логикой и теорией игр относительно формулировки нормативного стандарта. А именно, мы бы хотели обратить внимание на следующие структурные сходства.

Во-первых, и в логике, и в теории игр сложился *парадоксальный консенсус* относительно стандартного варианта нормы (стандартного в «социологическом» смысле: именно этот вариант излагается первым в учебниках, является наиболее частотным в публикациях, с ним сравниваются другие варианты нормы и пр.). Но одновременно с этим в обеих дисциплинах

¹Для примера приведем цитату из одного из учебников по логике: «Логика — это *нормативная наука* о формах, законах и приемах интеллектуальной познавательной деятельности» [Бочаров, Маркин, 2008, с. 13], и цитату из одного из популярных введений в теорию игр: «теория игр — это *наука о рациональном поведении* в интерактивных ситуациях» [Диксит и др., 2017, с. 21]. В обеих цитатах курсив наш.

²О нормативном статусе логики см.: [Steinberger, 2022], о нормативном статусе теории игр см.: [Aumann, 1985].

признается, что стандартный вариант нормы не идеален: он страдает от внутренних затруднений, для преодоления которых возникают параллельные программы (программа альтернативных логик и программа очищения равновесия). Каждая из этих программ предлагает большое разнообразие альтернативных норм. При этом ни в логике, ни в теории игр нет никакого консенсуса относительно того, какой именно вариант модификации нормы стоит принять.

Во-вторых, в обеих дисциплинах сформировалась *программа компромиссной нормы* как ответ на конфликт стандартной нормы с данными смежных эмпирических дисциплин — поведенческой экономики (в случае теории игр) и психологии рассуждений (в случае логики). Программой компромиссной нормы, как нам кажется, являются программы моделей рассуждений и поведенческая теория игр.

В-третьих, и внутри логики, и внутри теории игр сформировалась программа *«смены перспективы»*, которая не пытается модифицировать норму в ответ на внутренние затруднения или эмпирическую критику, а предлагает посмотреть на проблему нормативности в более широком контексте. В определенном смысле программа «смены перспективы» признает стандартную формулировку вопроса о нормативности некорректной в силу недостаточности данных. Нельзя сказать, как нужно рационально рассуждать и как нужно рационально действовать, не зная ничего о том, *кто* рассуждает и действует. Что это за агент? Что он знает? Во что он верит? Есть ли у него ограничения в ресурсах (в памяти, во внимании и пр.)? Как он относится к риску? В какой степени он подвержен социальному влиянию? Без ответов на эти вопросы нельзя сказать, что такое норма.

1. Парадоксальный консенсус: от внутренних затруднений стандартного варианта нормы к поиску альтернативы

Первая параллель, которую мы бы хотели обсудить, — наличие парадоксального консенсуса относительно стандартного варианта нормы. В случае логики речь идет о законах классической логики³, в случае теории игр — о равновесии Нэша⁴. Оба варианта нормы признаются как некоторая точка отсчета, с которой будут сравниваться другие варианты нормы.

³Под законами классической логики в данной статье мы подразумеваем множество тавтологий классической логики высказываний. Мы осознаем, что рассмотрение только пропозиционального уровня является упрощением, однако надеемся, что такое упрощение не влияет на ключевые тезисы настоящей статьи.

⁴Равновесием Нэша называется такой профиль стратегий, при котором ни у одного из игроков нет стимула в одиночку от него отклониться.

И одновременно признается, что оба варианта нормы вызывают внутреннее затруднение, для преодоления которых возникает программа «альтернативных логик» в случае логики и программа «очищения равновесия» в случае теории игр.

1.1. Затруднения классической логики и программа альтернативных логик

К затруднениям классической логики, которые стремятся преодолеть альтернативные логики⁵, относятся разнообразные парадоксы материальной и строгой импликации, а также другие схемы рассуждений, раскрывающие «темную» сторону классической логики.

Для иллюстрации этих затруднений рассмотрим следующую формулу, которая является законом классической логики высказываний:

$$((p_1 \wedge p_2) \rightarrow q) \rightarrow (((p_1 \wedge \neg p_2) \rightarrow q) \vee ((\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow q)) \quad (1)$$

Пусть пропозициональным переменным приписаны следующие значения: p_1 := «нажата кнопка №1», p_2 := «нажата кнопка №2», q := «лампочка горит». Тогда (1) можно прочесть следующим образом: если нажать на обе кнопки, то лампочка загорится, следовательно, достаточно нажать только на первую или только на вторую кнопку, чтобы лампочка загорелась. Данная интерпретация явно вызывает содержательные затруднения⁶.

Пример (1) далеко не единственный. В целом трудно назвать закон классической логики, который бы не ставился под сомнение по тем или иным причинам, даже такое основополагающее правило, как *modus ponens*, может стать мишенью для критики⁷.

В ответ на затруднения классической логики сформировалась программа альтернативных (или девиантных) логик, которые либо сужают законы классической логики (как конструктивные, релевантные и паранепротиворечивые логики и пр.), либо пересекаются с ними (как, например, коннексивные логики).

Вряд ли можно сказать, что спор о том, какая именно альтернативная логика должна заменить классическую, уже разрешен или может быть разрешен в принципе. В философии логики сосуществуют логический монизм, утверждающий, что есть только одна правильная логика (не обязательно

⁵Традиционно неклассические логики принято делить на расширяющие и альтернативные (или девиантные) логики. Расширяющие логики признают все законы классической логики и добавляют новые, но только в новом языке; альтернативные логики не согласны с какими-либо законами классической логики. Насколько нам известно, это различие восходит к работам С. Хаак [Haack, 1978].

⁶Подробнее об этих затруднениях и вариантах решения см.: [Vidal, 2014].

⁷О контрпримерах к *modus ponens* см.: [Боброва, Драгалина-Черная, 2024].

классическая), и логический плюрализм, признающий возможность существования сразу нескольких корректных логик⁸.

1.2. Затруднения равновесия Нэша и программа очищения равновесия

Равновесие Нэша является стандартным вариантом решения игры, однако с его формулировкой связан целый ряд затруднений. «Понятие равновесия [Нэша], — отмечает Р. Майерсон, — является одним из важнейших и изящных понятий в теории игр. К сожалению, в игре может быть несколько равновесий Нэша и некоторые из равновесий могут быть несовместимыми с нашими интуитивными представлениями о том, как должен выглядеть исход игры» [Myerson, 1978, p. 73].

Для иллюстрации этой мысли рассмотрим следующий пример. Существует два вида игр: игры в стратегической (матричной) форме и игры в развернутой (древесной) форме. Одна из проблем заключается в том, что равновесие Нэша, определяемое в игре в матричной форме, может порождать неправдоподобную угрозу (noncredible threat) в соответствующей игре в развернутой форме. Например, в игре в матричной форме в табл. 1 есть равновесия Нэша (в чистых стратегиях): (T, L) и (B, R) . Однако если мы рассмотрим игру на рис. 1, которая будет иметь ту же стратегическую форму, то равновесие (T, L) будет описывать иррациональную стратегию поведения. А именно, игрок 2 будет демонстрировать неправдоподобную угрозу: равновесие предписывает игроку 2 выбрать действие L с выигрышем 0 вместо действия R с выигрышем 1, то есть равновесная стратегия предписывает игроку иррациональное поведение. Данное затруднение демонстрирует, что равновесие Нэша может вступать в конфликт с основополагающим положением экономической рациональности о стремлении игроков к максимизации полезности.

Таблица 1

Игра с двумя равновесиями Нэша (в чистых стратегиях)

	L	R
T	1, 2	1, 2
B	0, 0	2, 1

В ответ на эти и другие затруднения равновесия Нэша возникла программа «очищения равновесия», которая предлагает обогатить равновесие Нэша дополнительным условием, чтобы исключить неинтуитивные

⁸Подробнее о логическом монизме см.: [Griffiths, Paseau, 2022], о логическом плюрализме см.: [Cook, 2010].

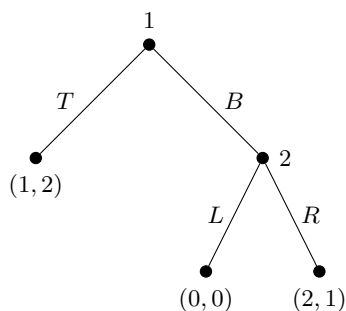


Рис. 1. Игра в развернутой форме. Равновесие (T, L) является неправдоподобной угрозой

варианты равновесия. В литературе предлагаются многочисленные варианты очищения: равновесие Нэша, совершенное по подыграм [Osborne, 2004], сильное равновесие Нэша [Aumann, 1959], равновесие дрожащей руки [Selten, 1975], совершенное равновесие Маркова [Maskin, Tirole, 2001], эpsilon-равновесие [Fudenberg, Levine, 1986], равновесие Байеса-Нэша [Maschler et al., 2013], совершенное байесово равновесие [Battigalli, 1996], ядро [Gillies, 1959], собственное равновесие [Myerson, 1978], квази-совершенное равновесие [van Damme, 1984] и др.

2. От конфликта с дескриптивным к компромиссному варианту нормы

Следующая структурная параллель, которую мы бы хотели отметить, состоит в том, что и в логике, и в теории игр возникли программы ответа на данные смежных эмпирических дисциплин. В отличие от предыдущих параллельных программ (уточнения нормы в ответ на внутренние затруднения), предлагается компромиссная программа, ослабляющая действия нормы с целью моделирования поведения реальных людей, а не идеальных логических или экономических агентов.

2.1. Логика: от психологии рассуждений к логическим моделям рассуждений

Психология рассуждений представляет собой дескриптивную дисциплину, которая описывает, как люди рассуждают и принимают решения⁹. Данные психологии рассуждений свидетельствуют о том, что реальные испытуемые отклоняются от предсказаний классического логического следования даже в очень простых случаях.

⁹Подробнее о психологии рассуждений см. сборник: [Sternberg, Funke, 2019].

Один из классических экспериментов, демонстрирующих такие отклонения, — «задача П. Уэйзона» [Wason, 1966]. Испытуемым предлагалось следующее задание:

На столе лежат карты, на одной стороне которых напечатаны буквы, а на другой — числа. На видимой стороне карт написано: «А», «К», «4», «7». Какие карты нужно перевернуть, чтобы проверить утверждение «Если на карте гласная буква, то на обороте четное число»?

Удивительно, что в данном эксперименте и в его последующих воспроизведениях только 5–10 % испытуемых давали правильный, с точки зрения логики, ответ: нужно перевернуть карты «А» и «7» [Stenning, van Lambalgen, 2004]. Были предложены как различные варианты объяснения этих данных¹⁰, так и варианты расширения эксперимента, сформировавшие целое направление внутри психологии рассуждений — изучение рассуждений с кондиционалами¹¹.

Как нам кажется, на пересечении логики и психологии рассуждений сложилась программа «логических моделей рассуждений», которая стремится дать объяснение данным, которые предлагает классическая психология рассуждений.

Предлагаются логические модели как для задачи Уэйзона [Stenning, van Lambalgen, 2004], так и для других феноменов: модели силлогистических рассуждений [Geurts, 2003], рассуждений с обобщенными кванторами [Szymanik, 2016], стратегических рассуждений по обратной индукции [Ghosh et al., 2014], эпистемических метарассуждений [Cedegao et al., 2021], модели для работы быстрой и медленной системы мышления [Solaki et al., 2021], теории психического [Arslan et al., 2017; van de Pol et al., 2018] и др. Некоторые из перечисленных моделей предлагают только логическую формализацию того или иного паттерна рассуждений, а некоторые из них позволяют делать количественные предсказания, подлежащие экспериментальной проверке.

2.2. Теория игр: от поведенческой экономики к поведенческой теории игр

Поведенческая экономика представляет собой науку на пересечении экономики и психологии, которая изучает влияние социальных, когнитивных и эмоциональных факторов на принятие решений в экономических ситуациях¹².

¹⁰См.: [Oaksford, Chater, 1994].

¹¹См.: [Johnson-Laird, 2006; Declerck, Reed, 2012].

¹²Подробнее о поведенческой экономике см.: [Bernheim et al., 2018; Ogaki, Tanaka, 2017].

Один из классических примеров, демонстрирующих расхождение в поведении реальных испытуемых и предсказаний теории игр, — игра «ультиматум». В этой игре первому игроку предлагается предложить пропорцию, в которой определенная сумма денег будет поделена между ним и вторым игроком. Второй игрок может согласиться с решением первого игрока, и тогда каждый получит свою долю, либо не согласиться, и тогда никто из игроков ничего не получит. Эксперимент [Güth et al., 1982] и его последующие модификации показывают, что если предлагаемая доля составляет меньше 20%, то второй игрок чаще всего отказывается от предложения, что явно не согласуется с предсказаниями теории игр.

Если результаты аномалии игры «ультиматум» можно объяснить влиянием социальных и психологических факторов на рациональность отдельного игрока, то в следующей игре под сомнение ставится допущение о рациональности остальных игроков.

Рассмотрим игру «Угадай $\frac{2}{3}$ от среднего» [Nagel, 1995]. Игрокам предлагается выбрать число от 0 до 100 такое, чтобы оно было максимально близко к $\frac{2}{3}$ от среднего чисел, выбранных всеми игроками. С точки зрения теории игр в этой игре существует только одно равновесие Нэша в чистых стратегиях, которое получается по процедуре последовательного устранения строго доминируемых стратегий: все игроки должны выбрать 0. Однако это предсказание не соответствует экспериментальным данным, в которых среднее число значительно больше 0, см.: [Agranov et al., 2015].

В стремлении получить более адекватные эмпирические результаты возникли поведенческая и психологическая теория игр. Поведенческая теория игр стремится согласовать экспериментальные данные поведенческой экономики с формальным аппаратом теории игр¹³.

Одно из ключевых понятий поведенческой теории игр — равновесие дискретного отклика (quantal response equilibrium)¹⁴. Основная идея состоит в том, что игроки ведут себя не оптимальным, а субоптимальным образом: они могут совершать небольшие ошибки (их количество определяется параметром¹⁵) в выборе оптимальной чистой стратегии. В частности, именно этот формализм позволяет моделировать паттерны поведения испытуемых в известной игре «сороконожка», которые не в состоянии объяснить стандартная теория игр¹⁶.

¹³Подробнее о поведенческой теории игр см.: [Gintis, 2005; Camerer, 2003].

¹⁴Подробнее о равновесии дискретного отклика см.: [Goeree et al., 2016].

¹⁵Из-за наличия параметра, модификация которого может объяснить разнообразные данные, QRE упрекают в нефальсифицируемости, см.: [Haile et al., 2008].

¹⁶См.: [McKelvey, Palfrey, 1995].

Близким к поведенческой теории игр является такое направление исследований, как «психологическая теория игр», которая «стремится модифицировать ортодоксальную теорию через введение формальных принципов рассуждения, которые могут помочь объяснить эмпирические наблюдения и широко распространенные интуиции, которые остаются необъясненными ортодоксальной теорией» [Colman, 2003].

3. Смена перспективы: обогащение контекста нормы

Третья структурная параллель, на наш взгляд, проходит между программой «логической динамики» и «эпистемической программой». Обе программы отличаются как от программ уточнения нормы (альтернативные логики и программа очищения равновесия), так и от программы ослабления нормы (логические модели рассуждения и поведенческая теория игр).

«Логическая динамика» и «эпистемическая программа» предлагают сменить перспективу в решении вопроса о нормативности, а именно, обе программы требуют более широкого описания контекста, в котором проходят рассуждения и принимаются решения.

«Логическая динамика» утверждает, что невозможно утвердить норму правильных рассуждений, игнорируя агента этих рассуждений. Прежде всего мы должны посмотреть на устройство агента и его окружения, а потом определить норму для данного агента в данном окружении¹⁷.

Эпистемическая программа в теории игр также требует уточнения контекста: для решения игр недостаточно только описания набора стратегий и платежей, также нужна характеристика и информационного окружения, в котором происходит игра. С точки зрения эпистемической программы теория игр воспринимается как частный случай теории принятия решений: игрок принимает оптимальное решение относительно своих представлений о поведении других игроков.

3.1. Логика: от альтернативных логик к программе логической динамики

Программа «логической динамики»¹⁸ предлагает сместить фокус внимания с поиска совершенного отношения логического следования и обратить внимание на информационную динамику. С точки зрения этой про-

¹⁷Мы исходим из понимания программы логической динамики как унифицирующего подхода, который позволяет моделировать в том числе и различные ситуации осуществления рассуждений.

¹⁸Термин принадлежит Й. ван Бентаму [van Benthem, 2011; van Benthem, 2008], также к этому направлению можно отнести работы [Baltag, Smets, 2014; Degremont, Zvespe, 2011].

граммы, в фокусе внимания логики находится не разнообразие стилей рассуждения (как в случае программы альтернативных логик), а скорее разнообразие задач, которые решают рациональные агенты в разных информационных контекстах.

В этой перспективе логическое следование становится одной из таких задач наряду с наблюдениями, поиском ответов на вопросы и другими коммуникативными практиками. Как отмечает Й. ван Бентем: «Логическая динамика делает все эти виды деятельности полноценными гражданами и говорит, что логическая теория должна воспринимать их как равных. Получающаяся в результате динамическая логика добавляет точности и расширяет границы классических систем, выводя их за пределы безагентных доказательств и вычислений» [van Benthem, 2011, p. 22].

Программа логической динамики стремится предложить взгляд на логику, с точки зрения которого различные виды рассуждений становятся частными случаями информационной динамики разного типа. Так, в русле данного подхода Ф. Веласкез-Кесада [Velázquez-Quesada, 2015] стремится показать, что дедуктивные рассуждения, рассуждения с умолчанием и абдуктивные рассуждения можно считать частными случаями эпистемической динамики.

Таким образом, программа логической динамики смотрит на задачи логики в более широкой перспективе: логика становится не просто наукой о правильных рассуждениях, но и наукой об извлечении информации в коммуникации рациональных агентов с ограничениями в ресурсах. Отдельная большая тема в программе логической динамики — моделирование взаимодействия агентов с разными типами ограничений¹⁹.

3.2. Теория игр: от программы очищения равновесия к эпистемической теории игр

Эпистемическая теория игр (или «эпистемическая программа» в теории игр) представляет собой семейство подходов, которые стремятся обогатить формальный аппарат теории игр инструментами, эксплицитно описывающими знания, представления и стратегические рассуждения игроков²⁰.

В отличие от стандартной теории игр, эпистемическая теория игр требует более широкого контекста для решения игры. Как отмечают Э. Пэкит и О. Рой: «С эпистемической точки зрения классических компонентов игры (игроки, действия, исходы и предпочтения) недостаточно для того, чтобы сформулировать рекомендации или предсказания о том, как игроки должны или будут действовать. Нужно определить (интерактивную)

¹⁹См.: [Liu, 2009].

²⁰Подробнее об эпистемической теории игр см.: [de Bruin, 2012].

задачу (decision problem), которую решает игрок: каковы представления агентов о возможных действиях (и представлениях) друг друга» [Pacuit, Roy, 2024].

Ряд результатов эпистемической теории игр связан с описанием эпистемических условий того или иного решения игр. В частности, достаточно естественными выглядят эпистемические условия для последовательного исключения строго доминируемых стратегий и обратной индукции. Напротив, общее знание о рациональности не является ни необходимым, ни достаточным условием для равновесия Нэша²¹.

Одним из наиболее важных понятий в эпистемической теории игр является понятие «коррелированного равновесия» [Aumann, 1987]. Подчеркивая естественность этого понятия, Р. Майерсон отмечает: «...если на других планетах существует разумная жизнь, то в большинстве из них коррелированное равновесие должно быть открыто раньше равновесия Нэша» (цит. по: [Shoham, Leyton-Brown, 2008, p. 83]).

Коррелированное равновесие не является одним из вариантов очищения равновесия, а представляет собой эпистемическую конструкцию. «Идея общего знания, — отмечает Р. Ауманн, — позволяет дать “правильную” формулировку коррелированного равновесия, которое не является каким-то эзотерическим расширением равновесия Нэша. Скорее, утверждается, что если люди оптимально реагируют на имеющуюся у них информацию — и это общеизвестно, — то в результате получается коррелированное равновесие. При этом термин “равновесие” не является главным. Коррелированное равновесие — это не что иное, как просто общее знание о рациональности друг друга в сочетании с общими оценками априорных вероятностей (common priors)» [Hart, 2005, p. 698].

Заключение

Итак, мы бы хотели отметить ряд структурных параллелей между логикой и теорией игр в решении вопроса о нормативности см.: табл. 2.

Однако, кроме отмеченных параллелей, как нам кажется, можно говорить и о наметившейся тенденции сближения логики и теории игр, а именно, эпистемическую программу в теории игр и программу логической динамики можно рассматривать как две ветви унифицирующей теории рациональной агентности: логика становится наукой об извлечении информации в интеракциях рациональных агентов, а теория игр — наукой об оптимальном поведении в ситуации взаимодействия рациональных агентов с различающимися интересами.

²¹См.: [Pacuit, Roy, 2024].

Таблица 2

«Структурные параллели между логикой и теорией игр»

Структурные параллели	Логика	Теория игр
1. стандартный вариант нормы	законы классической логики	равновесие Нэша
2. внутренние затруднения стандартного варианта нормы	затруднения классической логики	затруднения равновесия Нэша
3. программа совершенствования нормы как ответ на п. 2	программа альтернативных логик	программа очищения равновесия
4. внешние затруднения стандартного варианта нормы	данные психологии рассуждений	данные поведенческой экономики
5. программа компромисса с эмпирическим как ответ на п. 4	логические модели рассуждений	поведенческая теория игр
6. программа смены перспективы в определении нормы	программа логической динамики	эпистемическая теория игр

Одной из частей общей теории рациональной агентности может стать «теория игры» (theory of play), предложенная Й. ван Бентемом и Э. Пэки-том: «Благодаря тонкой структуре, которую предлагает логика, мы можем рассматривать динамику игр гораздо детальнее, включая ее в общий анализ агентности, встречающийся и во многих других областях — от “мультиагентных систем” в компьютерных науках до социальной эпистемологии и философии действия. Мы ожидаем, что результатом этого взаимодействия может стать нечто новое — не совсем логика и не совсем теория игр, а Теория Игры (play), а не только теория игр (games)» [van Benthem et al., 2011, p. 52].

Мы бы хотели отметить, что программа компромиссной нормы также может рассматриваться как часть общей теории рациональной агентности, но с поправкой на неидеальность взаимодействующих агентов, понимаемую как ограничения в ресурсах различного типа. В такой унифицирующей перспективе ключевым вопросом о норме как в логике, так и в теории игр становится не «статическое понятие корректности, а динамическое — коррекции» [ван Бентем, 2011, с. 72].

Литература

- ван Бентем, 2011 – *ван Бентем Й.* Логика и рассуждение: много ли значат факты? // Вопросы философии. 2011. № 12. С. 63–76.
- Боброва, Драгалина-Черная, 2024 – *Боброва А.С., Драгалина-Черная Е.Г.* «Контрпримеры» к *modus ponens*: логическая корректность и эпистемическая рациональность // Эпистемология и философия науки. 2024. Т. 61. № 4. С. 117–128.
- Бочаров, Маркин, 2008 – *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику: учебник. М.: Инфра-М; Форум, 2008.
- Диксит и др., 2017 – *Диксит А.К., Скит С., Рейли Д.Х.* Стратегические игры. Доступный учебник по теории игр. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2017.
- Agranov et al., 2015 – *Agranov M., Caplin A., Tergiman C.* Naive Play and the Process of Choice in Guessing Games // Journal of the Economic Science Association. 2015. Vol. 1. No. 2. P. 146–157.
- Arslan et al., 2017 – *Arslan B., Taatgen N.A., Verbrugge R.* Five-Year-Olds' Systematic Errors in Second-Order False Belief Tasks Are Due to First-Order Theory of Mind Strategy Selection: A Computational Modeling Study // Frontiers in Psychology. 2017. Vol. 8. P. 1–16.
- Aumann, 1959 – *Aumann R.J.* Acceptable points in general cooperative n-person games // Contributions to the Theory of Games / Ed. by A. Tucker, D. Luce. Princeton: Princeton University Press, 1959. P. 287–324.
- Aumann, 1985 – *Aumann R.J.* What Is Game Theory Trying to Accomplish? // Frontiers of Economics / Ed. K. Arrow, S. Honkapohja. Oxford: Basil Blackwell, 1985. P. 5–46.
- Aumann, 1987 – *Aumann R.J.* Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality // Econometrica. 1987. Vol. 55. No. 1. P. 1–18.
- Baltag, Smets, 2014 – *Baltag A., Smets S. (eds.)* Johan van Benthem on Logic and Information Dynamics. Cham: Springer International Publishing, 2014.
- Battigalli, 1996 – *Battigalli P.* Strategic Independence and Perfect Bayesian Equilibria // Journal of Economic Theory. 1996. Vol. 70. No. 1. P. 201–234.
- van Benthem, 2008 – *van Benthem J.* Logical dynamics meet logical pluralism? // The Australasian Journal of Logic. 2008. Vol. 6. P. 182–209.
- van Benthem, 2011 – *van Benthem J.* Logical Dynamics of Information and Interaction. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- van Benthem et al., 2011 – *van Benthem J., Pacuit E., Roy O.* Toward a Theory of Play: A Logical Perspective on Games and Interaction // Games. 2011. Vol. 2. No. 1. P. 52–86.
- Bernheim et al., 2018 – *Bernheim B.D., DellaVigna S., Laibson D. (eds.)* Handbook of Behavioral Economics — Foundations and Applications 1. Amsterdam: Elsevier, 2018.
- de Bruin, 2012 – *de Bruin B.* Explaining Games: The Epistemic Programme in Game Theory. Dordrecht: Springer, 2012.

- Camerer, 2003 – *Camerer C.F.* Behavioral Game Theory: Experiment in Strategic Interaction. Princeton: Princeton University Press, 2003.
- Cedegao et al., 2021 – *Cedegao Z., Ham H., Holliday W.H.* Does Amy Know Ben Knows You Know Your Cards? A Computational Model of Higher-Order Epistemic Reasoning // Proc. of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society. 2021. P. 2588–2594.
- Colman, 2003 – *Colman A.M.* Cooperation, psychological game theory, and limitations of rationality in social interaction // Behavioral and Brain Sciences. 2003. Vol. 26. No. 2. P. 139–153.
- Cook, 2010 – *Cook R.T.* Let a Thousand Flowers Bloom: A Tour of Logical Pluralism // Philosophy Compass. 2010. Vol. 5. No. 6. P. 492–504.
- van Damme, 1984 – *van Damme E.* A Relation between Perfect Equilibria in Extensive Form Games and Proper Equilibria in Normal Form Games // International Journal of Game Theory. 1984. Vol. 13. No. 1. P. 1–13.
- Declerck, Reed, 2012 – *Declerck R., Reed S.* Conditionals: A Comprehensive Empirical Analysis. Berlin, Boston: De Gruyter Mouton, 2001.
- Degremont, Zvespe, 2011 – *Degremont C., Zvespe J.* Dynamics we can believe in: a view from the Amsterdam School on the centenary of Evert Willem Beth // Synthese. 2011. Vol. 179. No. 2. P. 223–238.
- Fudenberg, Levine, 1986 – *Fudenberg D., Levine D.* Limit games and limit equilibria // Journal of Economic Theory. 1986. Vol. 38. No. 2. P. 261–279.
- Geurts, 2003 – *Geurts B.* Reasoning with quantifiers // Cognition. 2003. Vol. 86. No. 3. P. 223–251.
- Gillies, 1959 – *Gillies D.B.* Solutions to General Zero-Sum Games // Contributions to the Theory of Games / Ed. by A. Tucker, D. Luce. Princeton: Princeton University Press, 1959. P. 47–85.
- Gintis, 2005 – *Gintis H.* Behavioral Game Theory and Contemporary Economic Theory // Analyse & Kritik. 2005. Vol. 27. No. 1. P. 48–72.
- Ghosh et al., 2014 – *Ghosh S., Meijering B., Verbrugge R.* Strategic Reasoning: Building Cognitive Models from Logical Formulas // Journal of Logic, Language and Information. 2014. Vol. 23. No. 1. P. 1–29.
- Goeree et al., 2016 – *Goeree J.K., Holt C.A., Palfrey T.R.* Quantal Response Equilibrium. Princeton: Princeton University Press, 2016.
- Griffiths, Paseau, 2022 – *Griffiths O., Paseau A.C.* One true logic: a monist manifesto. Oxford: Oxford University Press, 2022.
- Güth et al., 1982 – *Güth W., Schmittberger R., Schwarze B.* An experimental analysis of ultimatum bargaining // Journal of Economic Behavior & Organization. 1982. Vol. 3. No. 4. P. 367–388.
- Haack, 1978 – *Haack S.* Philosophy of logics. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
- Haile et al., 2008 – *Haile P.A., Hortaçsu A., Kosenok G.* On the Empirical Content of Quantal Response Equilibrium // American Economic Review. 2008. Vol. 98. No. 1. P. 180–200.

- Hart, 2005 – *Hart S.* An interview with Robert Aumann // *Macroeconomic Dynamics*. 2005. Vol. 9. No. 5. P. 683–740.
- Johnson-Laird, 2006 – *Johnson-Laird P.N.* How We Reason. Oxford: Oxford University Press, 2006.
- Liu, 2009 – *Liu F.* Diversity of agents and their interaction // *Journal of Logic, Language and Information*. 2009. Vol. 18. No. 1. P. 23–53.
- Maschler et al., 2013 – *Maschler M., Solan E., Zamir S.* Game Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- Maskin, Tirole, 2001 – *Maskin E., Tirole J.* Markov Perfect Equilibrium: I. Observable Actions // *Journal of Economic Theory*. 2001. Vol. 100. No. 2. P. 191–219.
- McKelvey, Palfrey, 1995 – *McKelvey R.D., Palfrey T.R.* Quantal Response Equilibria for Normal Form Games // *Games and Economic Behavior*. 1995. Vol. 10. No. 1. P. 6–38.
- Myerson, 1978 – *Myerson R.B.* Refinements of the Nash equilibrium concept // *International Journal of Game Theory*. 1978. Vol. 7. No. 2. P. 73–80.
- Nagel, 1995 – *Nagel R.* Unraveling in Guessing Games: An Experimental Study // *American Economic Review*. 1995. Vol. 85. No. 5. P. 1313–1326.
- Oaksford, Chater, 1994 – *Oaksford M., Chater N.* A rational analysis of the selection task as optimal data selection // *Psychological Review*. 1994. Vol. 101. No. 4. P. 608–631.
- Ogaki, Tanaka, 2017 – *Ogaki M., Tanaka S.C.* Behavioral Economics: Toward a New Economics by Integration with Traditional Economics. Singapore: Springer, 2017.
- Osborne, 2004 – *Osborne M.J.* Introduction to Game Theory. New York: Oxford University Press, 2004.
- Pacuit, Roy, 2024 – *Pacuit E., Roy O.* Epistemic Foundations of Game Theory // *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2024. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/fall2024/entries/epistemic-game/> (дата обращения: 12.09.2025).
- van de Pol et al., 2018 – *van de Pol I., van Rooij I., Szymanik J.* Parameterized Complexity of Theory of Mind Reasoning in Dynamic Epistemic Logic // *Journal of Logic, Language and Information*. 2018. Vol. 27. No. 3. P. 255–294.
- Rubinstein, Ariel, 2007 – *Rubinstein A.* Interview // *Game Theory: 5 Questions* / Ed. by P. Hendricks, V. Hansen. Copenhagen: Authomatic Press, 2007. P. 157–163.
- Selten, 1975 – *Selten R.* Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games // *International Journal of Game Theory*. 1975. Vol. 4. No. 1. P. 25–55.
- Shoham, Leyton-Brown, 2008 – *Shoham Y., Leyton-Brown K.* Multiagent Systems Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- Solaki et al., 2021 – *Solaki A., Berto F., Smets S.* The Logic of Fast and Slow Thinking // *Erkenntnis*. 2021. Vol. 86. No. 2. P. 733–762.

- Steinberger, 2022 – *Steinberger F.* The Normative Status of Logic // Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2022. URL: <https://plato.stanford.edu/entries/logic-normative/> (дата обращения: 01.06.2025).
- Stenning, van Lambalgen, 2004 – *Stenning K., van Lambalgen M.* A little logic goes a long way: basing experiment on semantic theory in the cognitive science of conditional reasoning // *Cognitive Science*. 2004. Vol. 28. No. 4. P. 481–529.
- Sternberg, Funke, 2019 – *Sternberg R.J., Funke J. (eds.)* The Psychology of Human Thought. Heidelberg: Heidelberg University, 2019.
- Szymanik, 2016 – *Szymanik J.* Quantifiers and Cognition Logical and Computational Perspectives. Springer, 2016.
- Velázquez-Quesada, 2015 – *Velázquez-Quesada F.R.* Reasoning Processes as Epistemic Dynamics // *Axiomathes*. Kluwer Academic Publishers. 2015. Vol. 25. No. 1. P. 41–60.
- Vidal, 2014 – *Vidal M.* The defective conditional in mathematics // *Journal of Applied Non-Classical Logics*. 2014. Vol. 24. No. 1–2. P. 169–179.
- Wason, 1966 – *Wason P.C.* Reasoning // *New Horizons in Psychology* / Ed. by B. Foss. Harmondsworth, UK: Penguin Books, 1966. P. 135–151.

VITALY V. DOLGORUKOV, ELENA L. POPOVA

Normative standards in logic and game theory: structural parallels

Vitaly V. Dolgorukov

National Research University Higher School of Economics,
21/4 Staraya Basmannaya St., 105066, Moscow, Russian Federation.
E-mail: vdolgorukov@hse.ru

Elena L. Popova

National Research University Higher School of Economics,
21/4 Staraya Basmannaya St., 105066, Moscow, Russian Federation.
E-mail: elpopova@hse.ru

Abstract: The paper examines some structural parallels between normative standards in logic and game theory. On the one hand, the standard view holds that both logic and game theory are normative disciplines. On the other hand, their normative status remains a subject of debate. It is shown that parallel research programs have emerged within logic and game theory, each responding in different ways to questions about their normative status. First, both fields exhibit a “paradoxical consensus” regarding their standard normative frameworks — classical logical consequence (in logic) and Nash equilibrium (in game theory). This consensus is paradoxical because, while these norms are widely accepted, their shortcomings are also acknowledged: classical logic faces paradoxes, and Nash equilibrium encounters conceptual difficulties. In response, alternative programs have developed, such as non-classical logics and equilibrium refinements. Second, conflicts with empirical data from related disciplines (psychology of reasoning and behavioral economics) have led to the emergence of compromise approaches — logical models of reasoning and behavioral game theory — which seek to reconcile normative ideals with observed human behavior. Third, both logic and game theory have developed a “perspective shift” program, distinct from either strengthening or weakening norms. Instead, it demands an expanded contextual framework for defining norms. This includes logical dynamics in logic and epistemic game theory in game theory. The article also argues that the “perspective shift” program reveals a convergence between logic and game theory within a broader theory of rational agency. Moreover, the search for a compromise norm can also be seen as part of this unified theory, modeling interactions among agents with varying resource constraints.

Keywords: normativity, game theory, philosophy of logic, agency, rationality, epistemic game theory, logical dynamics, models of reasoning

For citation: Dolgorukov V.V., Popova E.L. “Normativnye standarty v logike i teorii igr: strukturnye paralleli” [Normative standards in logic and game theory: structural parallels], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 2, pp. 31–51. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-31-51. (In Russian)

Acknowledgements. The research was supported by the Russian Science Foundation, project No. 23–18–00695 “Logical-cognitive models of reasoning: principles of demarcation of normative and descriptive”.

References

- Agranov et al., 2015 – Agranov, M., Caplin, A., Tergiman, C. “Naive Play and the Process of Choice in Guessing Games”, *Journal of the Economic Science Association*, 2015, Vol. 1, No. 2, pp. 146–157.
- Arslan et al., 2017 – Arslan, B., Taatgen, N.A., Verbrugge, R. “Five-Year-Olds’ Systematic Errors in Second-Order False Belief Tasks Are Due to First-Order Theory of Mind Strategy Selection: A Computational Modeling Study”, *Frontiers in Psychology*, 2017, Vol. 8, pp. 1–16.
- Aumann, 1959 – Aumann, R.J. “Acceptable points in general cooperative n-person games”, *Contributions to the Theory of Games*, ed. by A. Tucker, D. Luce. Princeton: Princeton University Press, 1959, pp. 287–324.
- Aumann, 1985 – Aumann, R.J. “What Is Game Theory Trying to Accomplish?”, *Frontiers of Economics*, ed. K. Arrow, S. Honkapohja. Oxford: Basil Blackwell, 1985. pp. 5–46.
- Aumann, 1987 – Aumann, R.J. “Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality”, *Econometrica*, 1987, Vol. 55, No. 1, pp. 1–18.
- Baltag, Smets, 2014 – Baltag, A., Smets, S. (eds.) *Johan van Benthem on Logic and Information Dynamics*. Cham: Springer International Publishing, 2014.
- Battigalli, 1996 – Battigalli, P. “Strategic Independence and Perfect Bayesian Equilibria”, *Journal of Economic Theory*, 1996, Vol. 70, No. 1, pp. 201–234.
- Bobrova, Dragalina-Chernaya, 2024 – Bobrova, A.S., Dragalina-Chernaya, E.G. “Kontrprimery k modus ponens: logicheskaya korrektnost’ i epistemicheskaya ratsionalnost’” [“Counterexamples” to modus ponens: logical soundness and epistemic rationality], *Epistemologiya i filosofiya nauki* [Epistemology & Philosophy of Science], 2024, Vol. 61, No. 4, pp. 117–128. (In Russian)
- van Benthem, 2008 – van Benthem, J. “Logical dynamics meet logical pluralism?”, *The Australasian Journal of Logic*, 2008, Vol. 6, pp. 182–209.
- van Benthem, 2011 – van Benthem, J. *Logical Dynamics of Information and Interaction*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- van Benthem et al., 2011 – van Benthem, J., Pacuit, E., Roy, O. “Toward a Theory of Play: A Logical Perspective on Games and Interaction”, *Games*, 2011, Vol. 2, No. 1, pp. 52–86.
- Bernheim et al., 2018 – Bernheim, B.D., DellaVigna, S., Laibson, D. (eds.) *Handbook of Behavioral Economics - Foundations and Applications 1*. Amsterdam: Elsevier, 2018.
- Bocharov, Markin, 2008 – Bocharov, V.A., Markin, V.I. *Vvedeniye v logiku: uchebnik* [Introduction to Logic: a textbook]. Moscow: Infra-M; Forum, 2008. (In Russian)
- de Bruin, 2012 – de Bruin, B. *Explaining Games: The Epistemic Programme in Game Theory*. Dordrecht: Springer, 2012.

- Camerer, 2003 – Camerer, C.F. *Behavioral Game Theory: Experiment in Strategic Interaction*. Princeton: Princeton University Press, 2003.
- Cedegao et al., 2021 – Cedegao, Z., Ham, H., Holliday, W.H. “Does Amy Know Ben Knows You Know Your Cards? A Computational Model of Higher-Order Epistemic Reasoning”, in: *Proc. of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*. 2021, pp. 2588–2594.
- Colman, 2003 – Colman, A.M. “Cooperation, psychological game theory, and limitations of rationality in social interaction”, *Behavioral and Brain Sciences*, 2003, Vol. 26, No. 2, pp. 139–153.
- Cook, 2010 – Cook, R.T. “Let a Thousand Flowers Bloom: A Tour of Logical Pluralism”, *Philosophy Compass*, 2010, Vol. 5, No. 6, pp. 492–504.
- van Damme, 1984 – van Damme, E. “A Relation between Perfect Equilibria in Extensive Form Games and Proper Equilibria in Normal Form Games”, *International Journal of Game Theory*, 1984, Vol. 13, No. 1, pp. 1–13.
- Declerck, Reed, 2012 – Declerck, R., Reed, S. *Conditionals: A Comprehensive Empirical Analysis*. Berlin, Boston: De Gruyter Mouton, 2001.
- Degremont, Zvespe, 2011 – Degremont, C., Zvespe, J. “Dynamics we can believe in: a view from the Amsterdam School on the centenary of Evert Willem Beth”, *Synthese*, 2011, Vol. 179, No. 2, pp. 223–238.
- Dixit et al., 2015 – Dixit, A.K., Skeath, S., Reiley, D.H. *Games of Strategy*, New York: W.W. Norton & Company, 2015.
- Fudenberg, Levine, 1986 – Fudenberg, D., Levine, D. “Limit games and limit equilibria”, *Journal of Economic Theory*, 1986, Vol. 38, No. 2, pp. 261–279.
- Geurts, 2003 – Geurts, B. “Reasoning with quantifiers”, *Cognition*, 2003, Vol. 86, No. 3, pp. 223–251.
- Gillies, 1959 – Gillies, D.B. “Solutions to General Zero-Sum Games”, *Contributions to the Theory of Games*, ed. by A. Tucker, D. Luce. Princeton: Princeton University Press, 1959, pp. 47–85.
- Gintis, 2005 – Gintis, H. “Behavioral Game Theory and Contemporary Economic Theory”, *Analyse & Kritik*, 2005, Vol. 27, No. 1, pp. 48–72.
- Ghosh et al., 2014 – Ghosh, S., Meijering, B., Verbrugge, R. “Strategic Reasoning: Building Cognitive Models from Logical Formulas”, *Journal of Logic, Language and Information*, 2014, Vol. 23, No. 1, pp. 1–29.
- Goeree et al., 2016 – Goeree, J.K., Holt, C.A., Palfrey, T.R. *Quantal Response Equilibrium*. Princeton: Princeton University Press, 2016.
- Griffiths, Paseau, 2022 – Griffiths, O., Paseau, A.C. *One true logic: a monist manifesto*. Oxford: Oxford University Press, 2022.
- Güth et al., 1982 – Güth, W., Schmittberger, R., Schwarze, B. “An experimental analysis of ultimatum bargaining”, *Journal of Economic Behavior & Organization*, 1982, Vol. 3, No. 4, pp. 367–388.
- Haack, 1978 – Haack, S. *Philosophy of logics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

- Haile et al., 2008 – Haile, P.A., Hortaçsu, A., Kosenok, G. “On the Empirical Content of Quantal Response Equilibrium”, *American Economic Review*, 2008, Vol. 98, No. 1, pp. 180–200.
- Hart, 2005 – Hart, S. “An interview with Robert Aumann”, *Macroeconomic Dynamics*, 2005, Vol. 9, No. 5, pp. 683–740.
- Johnson-Laird, 2006 – Johnson-Laird, P.N. *How We Reason*. Oxford: Oxford University Press, 2006.
- Liu, 2009 – Liu, F. “Diversity of agents and their interaction”, *Journal of Logic, Language and Information*, 2009, Vol. 18, No. 1, pp. 23–53.
- Maschler et al., 2013 – Maschler, M., Solan, E., Zamir, S. *Game Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- Maskin, Tirole, 2001 – Maskin, E., Tirole, J. “Markov Perfect Equilibrium: I. Observable Actions”, *Journal of Economic Theory*, 2001, Vol. 100, No. 2, pp. 191–219.
- McKelvey, Palfrey, 1995 – McKelvey, R.D., Palfrey, T.R. “Quantal Response Equilibria for Normal Form Games”, *Games and Economic Behavior*, 1995, Vol. 10, No. 1, pp. 6–38.
- Myerson, 1978 – Myerson, R.B. “Refinements of the Nash equilibrium concept”, *International Journal of Game Theory*, 1978, Vol. 7, No. 2, pp. 73–80.
- Nagel, 1995 – Nagel, R. “Unraveling in Guessing Games: An Experimental Study”, *American Economic Review*, 1995, Vol. 85, No. 5, pp. 1313–1326.
- Oaksford, Chater, 1994 – Oaksford, M., Chater, N. “A rational analysis of the selection task as optimal data selection”, *Psychological Review*, 1994, Vol. 101, No. 4, pp. 608–631.
- Ogaki, Tanaka, 2017 – Ogaki, M., Tanaka, S.C. *Behavioral Economics: Toward a New Economics by Integration with Traditional Economics*. Singapore: Springer, 2017.
- Osborne, 2004 – Osborne, M.J. *Introduction to Game Theory*. New York: Oxford University Press, 2004.
- Pacuit, Roy, 2024 – Pacuit, E., Roy, O. “Epistemic Foundations of Game Theory”, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2024. [<https://plato.stanford.edu/archives/fall2024/entries/epistemic-game/>, accessed on 12.09.2025].
- van de Pol et al., 2018 – van de Pol, I., van Rooij, I., Szymanik, J. “Parameterized Complexity of Theory of Mind Reasoning in Dynamic Epistemic Logic”, *Journal of Logic, Language and Information*, 2018, Vol. 27, No. 3, pp. 255–294.
- Rubinstein, Ariel, 2007 – Rubinstein, A. “Interview” in *Game Theory: 5 Questions*, ed. by P. Hendricks, V. Hansen. Copenhagen: Authomatic Press, 2007, pp. 157–163.
- Selten, 1975 – Selten, R. “Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games”, *International Journal of Game Theory*, 1975, Vol. 4, No. 1, pp. 25–55.
- Shoham, Leyton-Brown, 2008 – Shoham, Y., Leyton-Brown, K. *Multiagent Systems Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- Solaki et al., 2021 – Solaki, A., Berto, F., Smets, S. “The Logic of Fast and Slow Thinking”, *Erkenntnis*, 2021, Vol. 86, No. 2, pp. 733–762.

- Steinberger, 2022 – Steinberger, F. “The Normative Status of Logic”, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2022. [<https://plato.stanford.edu/entries/logic-normative/> accessed on: 01.06.2025].
- Stenning, van Lambalgen, 2004 – Stenning, K., van Lambalgen, M. “A little logic goes a long way: basing experiment on semantic theory in the cognitive science of conditional reasoning”, *Cognitive Science*, 2004, Vol. 28, No. 4, pp. 481–529.
- Sternberg, Funke, 2019 – Sternberg, R.J., Funke, J. (eds.) *The Psychology of Human Thought*. Heidelberg: Heidelberg University, 2019.
- Szymanik, 2016 – Szymanik, J. *Quantifiers and Cognition Logical and Computational Perspectives*. Springer, 2016.
- Velázquez-Quesada, 2015 – Velázquez-Quesada, F.R. “Reasoning Processes as Epistemic Dynamics”, *Axiomathes. Kluwer Academic Publishers*, 2015, Vol. 25, No. 1, pp. 41–60.
- Vidal, 2014 – Vidal, M. “The defective conditional in mathematics”, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2014, Vol. 24, No. 1–2, pp. 169–179.
- Wason, 1966 – Wason, P.C. *Reasoning, New Horizons in Psychology*, ed. by B. Foss. Harmondsworth: Penguin Books, 1966, pp. 135–151.

В.И. ШАЛАК

Целеориентированная семантика динамической логики

Владимир Иванович Шалак

Институт философии РАН.

Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

E-mail: shalack@mail.ru

Аннотация: Общее определение алгоритма содержит информацию о действиях и очередности их выполнения для достижения конкретных целей, которые могут быть представлены некоторым описанием. В семантике динамической логики упор делается на действия, которые необходимо совершить в определенной последовательности, а преследуемая цель остается за рамками анализа, ей отводится роль метаинформации по отношению к самому алгоритму. С другой стороны, одну и ту же цель можно достичь разными способами. Если для действующего агента в первую очередь важна цель, ради которой составляется и выполняется алгоритм, то его конкретная реализация не столь уж и важна, так как инвариантом всех конкретных реализаций является именно преследуемая цель. В статье показано, каким образом возможно построение семантики динамической логики в терминах целей, а не выполняемых действий. Целеориентированная семантика применима не только для анализа алгоритмов, выполняемых в мире абстрактных математических объектов, но и в физическом мире, в котором понятие алгоритма синонимично понятию целенаправленного поведения. Поскольку понятие цели относится к еще не реализованному будущему положению дел и потому осмысленно лишь в рамках принимаемой модели времени, семантика целеориентированной логики строится с опорой на семантику оккамистской временной логики древовидно ветвящегося времени. При этом агент, выполняющий алгоритм, также должен обладать некоторой свободой в выборе совершаемых им действий. Если в стандартной семантике динамической логики элементарные действия интерпретируются посредством ничем не опосредованных переходов между возможными мирами, то в целеориентированной семантике действия интерпретируются сегментами путей возможного развития событий, в конечной точке которых цель, ради достижения которой выполняется действие, истинна, а во все предшествующие моменты ложна. В терминах предлагаемой семантики можно, с некоторыми вариациями, определить все стандартные операторы динамической логики и плюс к ним еще один специальный оператор обращения к процессам, протекающим во внешнем физическом мире.

Ключевые слова: алгоритм, цель, динамическая логика, семантика, целенаправленное поведение

Для цитирования: Шалак В.И. Целеориентированная семантика динамической логики // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 2. С. 52–72. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-52-72

Введение

Одним из важнейших как в теоретическом, так и в практическом плане понятий науки является понятие цели. Основоположники ныне не слишком почитаемого марксизма писали, что «история — не что иное, как деятельность преследующего свои цели человека» [Маркс, Энгельс, 1955а, с. 102]. Вся без исключения человеческая культура, все ее артефакты — это продукты нашей целенаправленной деятельности. Необходимость перехода от созерцательного к целенаправленно-деятельностному отношению к окружающему нас миру подчеркивается еще в одной известной цитате тех же классиков: «Философы лишь различным образом объясняли мир, но дело заключается в том, чтобы изменить его» [Маркс, Энгельс, 1955b, с. 4]. В здании, где ныне заседает Государственная дума РФ, долгое время располагался Госплан СССР — государственный орган, осуществлявший общегосударственное планирование развития народного хозяйства СССР и контроль за выполнением народнохозяйственных планов. В союзных республиках (в том числе и РСФСР) и автономных образованиях существовали государственные плановые комиссии (в РСФСР — Государственная плановая комиссия РСФСР), в областях (в том числе и автономных областях) — областные плановые комиссии, в районах — районные плановые комиссии, в городах — городские плановые комиссии. Можно надеяться, что логико-философский анализ понятия цели и путей ее достижения может принести определенную пользу в работе по дальнейшей рационализации целенаправленной деятельности.

Исторически первый подробный анализ понятия цели принадлежит Аристотелю. *«Уже онтологические предпосылки Аристотеля внушали ему идею о целесообразном строе Вселенной, так как, согласно Аристотелю, вещество, будучи возможностью, стремится к своей “форме”. Осуществление этого стремления и есть цель движения»* [Асмус, 1976, с. 33].

Дальнейшая судьба понятия цели складывалась не слишком удачно. В Новое время была выдвинута и начала успешно реализовываться на практике идея математизации науки, в которой на первое место было поставлено понятие причинной связи, соответствующее действующей причине Аристотеля. Вся наука стала строиться вокруг понятия причинных связей. Это можно объяснить тем, что существовавший к тому времени математический аппарат был как нельзя лучше приспособлен для описания и анализа детерминистических (причинных) закономерностей природы, но не для ее целенаправленных изменений. Развитие математического анализа и значительные успехи естественных наук привели в конце концов к тому, что понятие цели и не поддающаяся математизации телеология получили клеймо антинаучных. Произошел определенный перекосяк. Однако,

вопреки оказываемому давлению, философы не поспешили отказаться и сдать в утиль понятие цели и все, что с ним связано. В конечном счете они оказались правы. Прошло время, и наука сегодня значительно расширила арсенал используемых ею математических методов, в ее распоряжении появились новые средства, которые могут быть успешно применены в том числе для описания и анализа многих телеологических понятий. Первой заметной ласточкой в этом направлении стали работы Н. Винера [Винер, 1983]. С 1943 по 1953 гг. был проведен ряд научных конференций на темы телеологии и самоуправляемых систем [Масу, 1946]. Но, как это часто случается, вслед за начальным всплеском энтузиазма вокруг новых идей наступил определенный период застоя, и термин «кибернетика» сегодня звучит гораздо реже, чем это было еще полвека назад.

Главная задача настоящей работы — предложить альтернативный метод построения семантики динамической логики, который позволял бы интерпретировать анализируемые действия в терминах целей, преследуемых активным агентом. Это можно рассматривать как попытку приблизиться к построению формальной телеологии с будущим выходом на ее практическое применение. Выбор именно динамической логики не случаен и объясняется тем, что она изначально была предназначена для логического анализа выполнения алгоритмов, которые в общем случае включают в себя и целенаправленную деятельность. Последнее утверждение представляется очевидным при понимании, с одной стороны, структуры целенаправленной деятельности как состоящей из ряда шагов по достижению заранее поставленной цели, а с другой — общем определении алгоритма как «общепонятного и однозначного предписания, какие и в каком порядке производить действия, чтобы получить искомый результат» [Смирнов, 1963]. Целеориентированная семантика динамической логики может рассматриваться как один из шагов по созданию строгих языков для программирования будущего путем постановки рационально обоснованных целей и нахождения путей их достижения.

В семантике динамической логики [Harel et al., 2000], предназначенной для анализа выполнения компьютерных алгоритмов, действия интерпретируются как переходы от одних возможных состояний памяти компьютера к другим. Простейший пример — действие прибавления единицы к числу, хранящемуся в одной из ячеек памяти, которое стандартно записывают в виде $x := x + 1$, где переменная x — это указатель на ячейку памяти. Символ «:=» отделяет содержимое ячейки до совершения действия от ее нового содержимого после выполнения действия.

$$\{x:=x+1\}$$

$$c(t) \text{ -----} \rightarrow c(t)+1$$

Рис. 1. Прибавление единицы

Всякая компьютерная программа составляется для решения каких-то задач, т.е. с некоторой целью, на практике описываемой в спецификации программы. Цель, ради достижения которой составляется программа, является *метаинформацией* по отношению к коду программы. Она говорит, *что* должна делать программа, но то, *как* этого достичь, решает программист. Иными словами, спецификация программы — это формулировка некоторого *инварианта*, не зависящего от того, каким образом программист должен решить эту задачу. Он всего лишь выбирает те или иные находящиеся в его распоряжении элементарные действия и с соблюдением правил конкретного языка программирования составляет сложную программу. Его решение не является единственно возможным. По исходному тексту самой программы бывает очень трудно понять, для чего она была создана. Более того, в теории вычислимости есть даже теорема о том, что не существует универсального метода, который бы по двум произвольным текстам программ позволил определить, вычисляют ли они одну и ту же функцию. То есть не существует универсального метода, чтобы определить, с какой целью была написана произвольная программа, что она должна делать. Но если выполняемый программой алгоритм обретает смысл лишь в связи с достижением цели, ради которого он был создан, то почему бы не перенести информацию о цели из метаязыка в язык самой программы?

Переход от одного содержимого памяти компьютера к другому как результат выполнения действия $x := x+1$ можно представить без упоминания самого действия, а лишь посредством явного описания результата, который изначально был целью данного действия.

$$\langle c(t') = c(t) + 1 \rangle$$

$$c(t) \text{ -----} \rightarrow c(t)+1$$

Рис. 2. Прибавление единицы без упоминания действия

Посредством записи $\langle c(t') = c(t) + 1 \rangle$ представлена абстракция от действия по достижению цели $c(t') = c(t) + 1$, его инвариант, которое на компьютерах с разной архитектурой и на разных языках может быть реализовано совершенно по-разному. Приведенный пример демонстрирует принципиальную возможность на уровне элементарных действий описывать их

в терминах преследуемых целей [Шалак, 1993]. Осталось лишь более систематически исследовать эту возможность, распространив ее на широкий круг явлений целенаправленной деятельности, имеющих место не только в компьютерах, но и в реальном мире. Для того, чтобы было с чем сравнивать, вспомним язык и семантику одного из вариантов пропозициональной динамической логики [Harel et al., 2000].

1. Пропозициональная динамическая логика

Динамическая логика строится как расширение классической логики высказываний за счет добавления к исходным символам языка некоторого набора термов для представления элементарных действий и четырех операторов для построения сложных действий (программ).

1.1. Язык

1. $Prop = \{p_1, p_2, \dots\}$ — множество пропозициональных переменных;
2. $Act = \{d_1, d_2, \dots\}$ — множество элементарных действий;
3. $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ — логические связки;
4. $;, \cup, *, ?$ — операторы действий;
5. $), (, >, <$ — технические символы.

Понятие формулы определим следующим образом:

1.2. Формулы динамической логики

Понятия формулы **DForm** и программы **DProg** определяются взаимной рекурсией:

DForm = $p \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \supset B) \mid (A \equiv B) \mid \langle \alpha \rangle A$ —
 $p \in Prop, A, B \in \mathbf{DForm}, \alpha \in \mathbf{DProg}$.

По сравнению с логикой высказываний понятие формулы дополнено одним случаем — формулами вида $\langle \alpha \rangle A$, которые можно читать как «после некоторого выполнения действия (программы) α истинна формула A ».

DProg = $\varepsilon \mid d \mid C? \mid (\alpha; \beta) \mid (\alpha \cup \beta) \mid \alpha^* — d \in Act, \alpha, \beta \in \mathbf{DProg}, C \in \mathbf{DForm}$.

- ε — пустое действие;
- d — элементарное далее не анализируемое действие;

- $C?$ — тест на проверку того, что имеет место C ;
- $\alpha; \beta$ — программа, представляющая последовательное выполнение программ α и β ;
- $\alpha \cup \beta$ — программа, представляющая выполнение программы α или программы β ;
- α^* — программа, представляющая некоторое заранее не определенное число повторений выполнения программы α .

1.3. Модели динамической логики

Моделью будем называть тройку $M = \langle W, R, I \rangle$, где

1. W — непустое множество возможных миров;
2. $I : Prop \rightarrow 2^W$ — функция интерпретации пропозициональных переменных;
3. $R : Act \rightarrow 2^{W \times W}$ — функция интерпретации элементарных действий, сопоставляющая каждому из них некоторое бинарное отношение достижимости на возможных мирах.

Для определения условий истинности формул вида $\alpha^* A$ нам понадобится вспомогательное определение:

Def.1 α^m — конечная итерация программы α

- $\alpha^0 =_{def} \varepsilon$;
- $\alpha^{n+1} =_{def} \alpha^n; \alpha$.

Отношение $M, w \models A$ истинности формулы A в возможном мире w модели M задается следующим образом:

1. $M, w \models p \Leftrightarrow w \in I(p), p \in Prop$;
2. Для логических связок условия истинности определяются стандартно;
3. $M, w \models \langle \varepsilon \rangle A \Leftrightarrow M, w \models A$;
4. $M, w \models \langle d \rangle A \Leftrightarrow \exists v (\langle w, v \rangle \in R(d) \ \& \ M, v \models A)$;

5. $M, w \models \langle C? \rangle A \Leftrightarrow M, w \models C \wedge A$;
6. $M, w \models \langle \alpha; \beta \rangle A \Leftrightarrow M, w \models \langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle A$;
7. $M, w \models \langle \alpha \cup \beta \rangle A \Leftrightarrow M, w \models \langle \alpha \rangle A$ или $M, w \models \langle \beta \rangle A$;
8. $M, w \models \langle \alpha^* \rangle A \Leftrightarrow \exists n \geq 0 (M, w \models \langle \alpha^n \rangle A)$.

Определения истинности формул в модели и их общезначимости обычные.

1.4. Аксиоматика динамической логики

Динамическая пропозициональная логика аксиоматизируема. Определим дуал оператора $\langle \alpha \rangle$:

$$Def.2 \quad [\alpha] =_{def} \neg \langle \alpha \rangle \neg.$$

Полная система аксиом динамической логики будет иметь следующий вид:

1. *Аксиомы логики высказываний*;
2. $[\alpha](A \supset B) \supset ([\alpha]A \supset [\alpha]B)$;
3. $[\varepsilon]A \equiv A$;
4. $[\alpha](A \wedge B) \equiv [\alpha]A \wedge [\alpha]B$;
5. $[\alpha \cup \beta]A \equiv [\alpha]A \wedge [\beta]A$;
6. $[\alpha; \beta]A \equiv [\alpha][\beta]A$;
7. $[C?]A \equiv (C \supset A)$;
8. $A \wedge [\alpha][\alpha^*]A = [\alpha^*]A$;
9. $A \wedge [\alpha^*](A \supset [\alpha]A) \supset [\alpha^*]A$.

Два правила вывода:

$$R.1 \vdash A, \vdash (A \supset B) \Rightarrow \vdash B;$$

$$R.2 \vdash A \Rightarrow \vdash [\alpha]A.$$

1.5. Дополнительные конструкции

Чтобы показать связь динамической логики с языками программирования, определим операторы условного выбора следующего действия и цикла.

Def.3 **If** C **then** α **else** $\beta =_{def} (C?; \alpha) \cup (\neg C?; \beta)$.

Смысл оператора условного выбора заключается в том, что если имеет место условие C , то выполняется программа α , в противном же случае выполняется программа β .

Определение оператора цикла имеет следующий вид:

Def.4 **while** C **do** $\alpha =_{def} (\neg C?; \varepsilon) \cup ((C?; \alpha)^*; \neg C?)$.

Если условие цикла C не имеет места, то никаких действий не производится. В противном случае действие α циклически выполняется до тех пор, пока условие C не перестанет иметь место.

В литературе по динамическим логикам в отдельный класс выделяют так называемые *while*-программы, являющиеся естественной абстракцией программ таких известных универсальных императивных языков программирования, как *Pascal* и *C* [Harel et al., 2000, с. 147–148]. При их построении в качестве базиса используются элементарные действия d , а сложные программы определяются по индукции с помощью операторов:

- $C?$ — тест;
- $\alpha; \beta$ — последовательное выполнение действий;
- **if** C **then** α **else** β — выбор следующих действий в зависимости от выполнения условий;
- **while** A **do** α — циклы.

2. Семантика целеориентированной динамической логики

В общем случае цель, ради которой выполняется некоторое действие, можно представить ее описанием (формулой) A , а абстракцию от действия по ее достижению представить посредством заключения описания цели в угловые скобки $\langle A \rangle$. Такая форма записи удобна для единообразного представления целей, которые могут быть не только состояниями памяти компьютера, но и описаниями ситуаций в физическом мире, в достижении которых заинтересован активный агент.

В динамической логике элементарное действие d интерпретируется бинарным отношением достижимости $R(d) \subseteq W \times W$ на множестве возможных миров. Семантически переходы между мирами выглядят как ничем не опосредованные скачки из одних миров в другие.

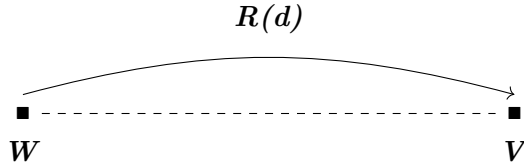


Рис. 3. Скачки между мирами

Если говорить о структуре действий по достижению целевого состояния A в реальном физическом мире, она не является простым скачком между двумя возможными мирами. На шкале физического времени действию соответствует некоторый отрезок с конечной точкой, в которой цель A достигнута, а во все предшествующие моменты времени еще нет, т.е. в них имеет место $\neg A$.

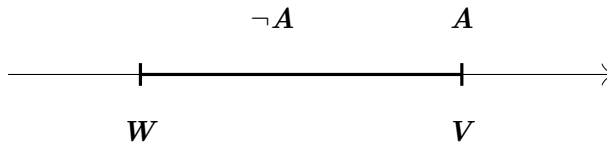


Рис. 4. Достижение цели A

Уместно заметить, что и в компьютерах физическое выполнение элементарного действия $x := x + 1$ происходит не мгновенно, а опосредованно бесконечным множеством промежуточных моментов времени до достижения нового состояния памяти. Очевидно, что такой подход к определению действий не приводит ни к какой потере информации о переходе от начального к результирующему возможному миру, а даже более богат по сравнению с семантикой действий стандартной динамической логики, поскольку сопоставляет не просто двухместное отношение достижимости между возможными мирами, а упорядоченное множество промежуточных миров, в которых до завершения действия могут иметь место и другие явления.

Если мы предполагаем распространить динамическую логику на описание и анализ целенаправленных действий в физическом мире, необходимо определиться с выбором семантики для нее. Простого неструктурированного множества возможных миров уже недостаточно, так как они должны быть упорядочены временным отношением раньше-позже, поскольку все

действия, как уже было сказано, протекают во времени. Здесь мы сталкиваемся со старой философской проблемой детерминизма. Известный американский физик Даниэль Сасскинд в книге *«Теоретический минимум. Все, что нужно знать о современной физике»* [Сасскинд, Грабовский, 2016] пишет:

«Правило, согласно которому динамические законы должны быть детерминистичными и обратимыми, настолько важно для классической физики, что в учебных курсах о нем попросту забывают упомянуть... это, несомненно, самый фундаментальный из всех физических законов — закон сохранения информации» [Там же, с. 23–24].

Если приведенная цитата выражает не только личную точку зрения автора, но и точку зрения большинства современных физиков, время в их понимании упорядочено линейно из прошлого в будущее и все события будущего предопределены сегодняшним положением дел. Иными словами, мир классической физики детерминистичен и на временной шкале может быть представлен стрелой из прошлого в будущее. Но тогда закономерно возникает вопрос: какой смысл в анализе целенаправленных действий, если все уже предопределено?

Не дело логиков предписывать, детерминистичен или нет окружающий нас физический мир. Мы можем лишь анализировать и представлять корректные способы рассуждений для каждого из этих случаев. Когда Аристотель при анализе будущих случайных событий натолкнулся на проблему логического детерминизма, он приложил значительные усилия, чтобы ее решить. Уже в наше время эта же проблема привела к появлению многозначных и временных логик.

Одновременно с этим мы должны обратить внимание на то, что детерминистичность, о которой пишет Сасскинд, относится лишь к известным физическим законам, но никто и никогда не доказал и даже не ставил цели доказать полноту законов современного естествознания. Именно уверенность в их неполноте и является основным стимулом продолжения научных изысканий. И с практической, и с теоретической точки зрения возможны явления, которые не объяснимы исходя из принципа детерминистичности физических законов, но и не противоречат ему. Всем известный и издавна обсуждаемый пример — явления, описываемые в терминах свободы воли действующего субъекта, когда допускается, что такой субъект может производить действия, не следующие из известных причинных зависимостей физического мира.

Одним из фундаментальных законов физики является закон возрастания энтропии, но стоит нам оглянуться вокруг, и мы увидим сложный

мир созданных нами артефактов, существующих, воспроизводимых и постоянно усложняющихся. Это просто невозможно с точки зрения закона возрастания энтропии, поскольку это не может быть результатом случайных флуктуаций атомов. В то же время, стоит человеку покинуть места своего обитания, природа сразу вступает в свои права и мир артефактов начинает стремительно разрушаться. Самое простое объяснение этому — допущение свободы воли действующих субъектов, которые создают свой искусственный мир, подчиняющийся своим законам, но в то же время сосуществующий с детерминистическим физическим миром. Передо мной на столе стоит чашка кофе. Я опасаясь случайно задеть ее рукой и опрокинуть. Я могу помыслить о том, чтобы отнести ее на кухню или просто отодвинуть в сторону. И то, и другое — возможные отклонения от того детерминистического мира, в котором я существую. Чтобы чашка переместилась в сторону, в мире должен появиться приложенный к ней вектор силы, благодаря которому в дальнейшем в полном согласии с физическими законами будет преодолена сила трения между чашкой и поверхностью стола и она начнет перемещаться. Мое действие будет заключаться исключительно в том, чтобы создать такой достаточный по величине и направлению вектор силы. Это ничему не противоречит, а всего лишь необъяснимо в терминах известных нам законов.

Не углубляясь далее в рассмотрение этих вопросов, примем, что агенты действий, подобные мне, обладают свободой воли. Только в этом случае имеет смысл говорить о каком-то осмысленном целеполагании и действиях по достижению поставленных целей.

Из принятых допущений следует, что возможная временная структура возможных миров должна будет выглядеть уже не стрелой из прошлого в будущее, как у Сасскинда, а быть больше похожа на дерево:

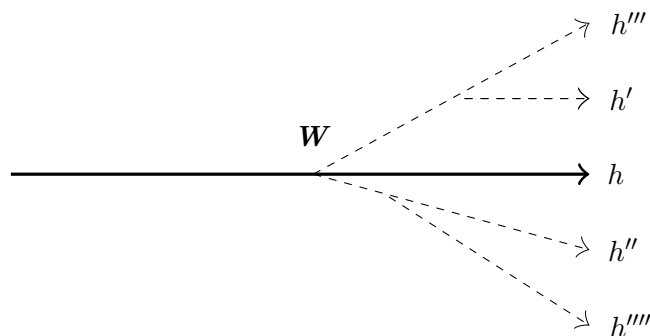


Рис. 5. Древовидная структура множества возможных миров

Смысл этой структуры заключается в том, что в текущем мире w , лежащем на физически детерминистической стреле времени h , я как агент могу помыслить альтернативные пути его развития $h', h'', h''', \dots$, на которые может свернуть стрела времени, если я вздумаю совершить то или иное действие, после которого новый линейный путь развития событий h''' продолжит подчиняться тем же детерминистическим физическим законам, если только в будущем в другом мире v я не вздумаю совершить еще одно действие, чтобы свернуть на другой путь h' , и т.д.

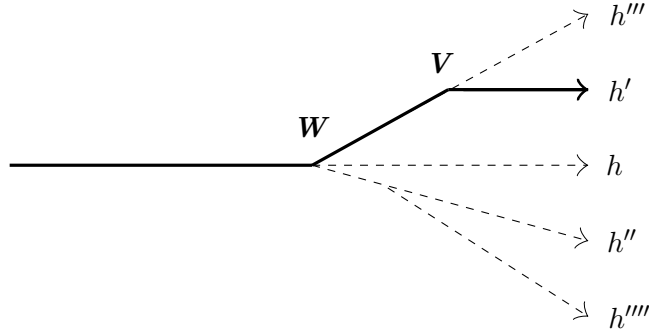


Рис. 6. Древоидная структура множества возможных миров с учетом действующего агента

Представленная структура времени соответствует оккамистской временной логике с древоидно ветвящимся временем [Goranko, Rumberg, 2024].

Поскольку целеориентированная семантика для динамической логики будет строиться над временной структурой возможных миров, мы должны сначала строго определить модельную структуру возможных миров, язык для ее описания и понятие модели.

2.1. Модельная структура

Модельной структурой будем называть тройку $\langle W, <, H \rangle$, где

1. W — непустое множество возможных миров;
2. $< \subseteq W \times W$ — бинарное отношение *раньше–позже* на возможных мирах, обладающее свойствами:
 - $\neg(w < w)$ — иррефлексивность;
 - $w < v \ \& \ v < u \Rightarrow w < u$ — транзитивность.

3. $H \subseteq 2^W$ — множество всех возможных путей развития событий из прошлого в будущее, для краткости называемое также множеством историй, удовлетворяющих условиям линейности и максимальности, которое можно определить следующим образом:

- $H_0 =_{def} \{h \subseteq W : \forall v \in \forall u \in h (v < u \dot{\vee} u < v \dot{\vee} v = u)\}$ — линейность;
- $H =_{def} \{h \in H_0 : \forall g \in H_0 (h \subseteq g \Rightarrow h = g)\}$ — максимальность.

Чтобы иметь возможность говорить о возможных ветвлениях историй, примем следующее определение:

Def5. $h =_w h' \Leftrightarrow_{def} w \in h \ \& \ w \in h' \ \& \ \forall v (v < w \Rightarrow (v \in h \Leftrightarrow v \in h'))$.

Две истории h и h' находятся в отношении $=_w$, если и только если им обеим принадлежит возможный мир w и их начальные сегменты вплоть до мира w совпадают.

2.2. Язык

1. $Prop = \{p_1, p_2, \dots\}$ — множество пропозициональных переменных;
2. $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ — логические связки;
3. U, S — двухместные временные операторы;
4. $\Diamond$ — оператор возможности;
5. $), (, -$ — технические символы.

Form = $p \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \supset B) \mid (A \equiv B) \mid \Diamond A \mid U(A, B) \mid S(A, B) - p \in Prop, A, B \in \mathbf{Form}$.

Мы остановились на языке логики высказываний, с двумя двухместными временными операторами $U(n\text{til})$ и $S(\text{ince})$, введенными в свое время Кампом [Camp, 1968] для того, чтобы иметь возможность говорить о протекающих во времени процессах. $U(A, B)$ означает, что *в будущем будет иметь место A, а до тех пор будет иметь место B*. Аналогичным образом $S(A, B)$ означает, что *когда-то в прошлом имело место A, а с тех пор имело место B*.

Модальный оператор $\Diamond$ нам понадобится, чтобы иметь возможность говорить о возможных альтернативных путях развития событий. По сути, он будет играть роль квантора существования по альтернативным историям.

2.3. Модель

Модель $M = \langle W, <, H, I \rangle$ — это четверка, состоящая из модельной структуры $\langle W, <, H \rangle$ и функции интерпретации пропозициональных переменных $I : Prop \rightarrow 2^{H \times W}$. Особенностью функции интерпретации является то, что ее значениями будут не просто множества возможных миров, а множества пар $\langle h, w \rangle$, состоящих из истории и принадлежащего ей возможного мира: $I(p) \subseteq \{ \langle h, w \rangle \mid h \in H \ \& \ w \in h \}$.

Отношение $M, h, w \models A$ читается: в модели $M = \langle W, <, H, I \rangle$ в мире w истории h истинна формула A .

1. $M, h, w \models p \Leftrightarrow \langle h, w \rangle \in I(p)$;
2. Для логических связок условия истинности определяются стандартно;
3. $M, h, w \models \Diamond A \Leftrightarrow \exists h'(h =_w h' \ \& \ M, h', w \models A)$;
4. $M, h, w \models U(A, B) \Leftrightarrow \exists v \in h(w < v \ \& \ M, h, v \models A \ \& \ \forall u(w < u < v \Rightarrow M, h, u \models B))$;

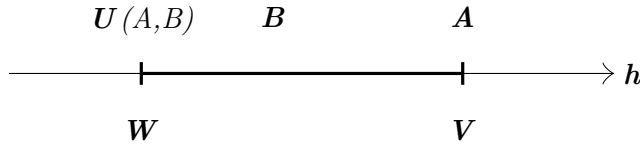


Рис. 7. Оператор $U(A, B)$

5. $M, h, w \models S(A, B) \Leftrightarrow \forall v \in h(v < w \ \& \ M, h, v \models A \ \& \ \forall u(v < u < w \Rightarrow M, h, u \models B))$.

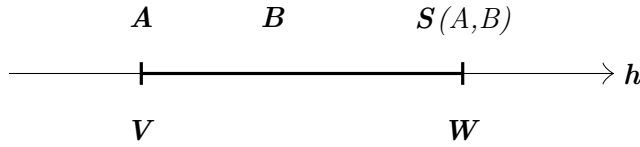


Рис. 8. Оператор $S(A, B)$

Обычным образом определим отношение $M \models A$ истинности формулы A в модели M и ее общезначимости $\models A$.

- $M \models A \Leftrightarrow \forall h \forall w \in h (M, h, w \models A)$;
- $\models A \Leftrightarrow \forall M (M \models A)$.

2.4. Динамические целеориентированные операторы

Нашей целью является представление действий в языке не путем его расширения термами действий, как в динамической логике, а путем обращения к описаниям целей, к которым эти подразумеваемые действия должны приводить. Какими конкретно будут действия, в нашем случае не столь важно.

В языке классической логики мы умеем посредством контекстуальных определений расширять набор используемых связок. Например, мы знаем, как определить связку материальной импликации через конъюнкцию и отрицание, а эквиваленцию — через импликацию и конъюнкцию. Аналогичным образом поступим и мы, определяя целеориентированные операторы через уже имеющиеся в языке логические связки и модальные временные операторы.

В язык динамической логики изначально включается оператор тестирования $C?$. Мы можем ввести его аналог посредством следующего контекстуального определения:

Def6. $\langle A? \rangle D =_{def} A \wedge D$, где A и D — любые формулы языка.

Условия истинности формулы $\langle A? \rangle D$ совпадают с аналогичными условиями стандартной динамической логики. Никаких дополнительных действий агент не производит, а просто проверяет истинность формулы A . Язык динамической логики изначально содержит некоторый набор элементарных действий $d_1, d_2, \dots$. Их конкретные свойства никак не специфицируются, но они, как атомы, участвуют в построении более сложных динамических операторов. У нас нет необходимости постулировать наличие таких элементарных действий, так как нас интересуют не они, а цели, ради достижения которых они выполняются. Любая же цель может быть представлена некоторым описанием A соответствующей ей целевой ситуации, т.е. формулой.

Успешность достижения цели A может быть представлена формулой $\langle A \rangle A$ — «после выполнения некоторого действия по достижению цели A действительно имеет место A ». Поскольку после достижения цели могут быть истинны и другие формулы, мы примем более общее определение:

Def7. $\langle A \rangle D =_{def} \Diamond U(A \wedge D, \neg A)$ — «после некоторого успешного выполнения действия с целью достижения A имеют место A и D ».

Оператор возможности $\Diamond$ появился в правой части определения потому, что для достижения целевого положения дел A может оказаться, что агент должен совершить действие, приводящее к изменению текущей истории

на одну из альтернативных. Именно выбор такой истории и совершается посредством оператора возможности.

Последовательное выполнение целеориентированных действий $\langle \alpha \rangle$ и $\langle \beta \rangle$ определим естественным образом:

$$Def8. \langle \alpha; \beta \rangle D =_{def} \langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle D.$$

Альтернативу выбора одного из двух действий $\langle \alpha \rangle$ или $\langle \beta \rangle$ мы также определяем естественным образом:

$$Def9. \langle \alpha \cup \beta \rangle D =_{def} \langle \alpha \rangle D \vee \langle \beta \rangle D.$$

В случае динамической логики при составлении программ (алгоритмов) выбор следующего действия может зависеть от выполнения определенных условий. Для этого в ней посредством определения «**If C then α else β** » $=_{def} (C?; \alpha) \cup (\neg C?; \beta)$ » вводится оператор условного выбора. Мы также можем определить его аналог в терминах целеориентированных операторов:

$$Def10. \langle \text{If } C \text{ then } A \text{ else } B \rangle D =_{def} ((\langle C?; A \rangle) \cup (\langle \neg C?; B \rangle))D [\equiv (C \wedge \langle A \rangle D) \vee (\neg C \wedge \langle B \rangle D)].$$

При построении сложных программ не обойтись без оператора циклов, который в динамической логике вводится определением «**while C do α** » $=_{def} (\neg C?; \varepsilon) \cup ((C?; \alpha)^*; \neg C?)$. Для этого в нем используется оператор звездочки $*$, который в применении к действию d означает некоторое заранее не определенное число раз его повторения.

В языке целеориентированной динамической логики мы можем определить аналогичный цикл напрямую:

$$Def11. \langle \text{while } C \text{ do } A \rangle D =_{def} \langle \neg C? \rangle D \cup \langle C? \rangle \diamond U(D, \langle C? \rangle \langle A \rangle A) [\equiv (\neg C \wedge D) \vee (C \wedge \diamond U(D, \langle C? \rangle \langle A \rangle A))].$$

Таким образом, мы показали, как средствами оккаместской временной логики определить инварианты действий по достижению целей, а также аналоги основных стандартных операторов построения сложных алгоритмов. Заметим, что эти операторы хоть и являются близкими аналогами операторов динамической логики, но по смыслу несколько отличаются, что связано с древовидно ветвящейся структурой возможных миров.

Последний случай определения целеориентированных операторов выводит нас за рамки операторов стандартной динамической логики. Он будет направлен на использование для достижения целей, ограниченных во времени физических процессов, протекающих во внешнем мире. Необходимость этого случая легко продемонстрировать на примере всем известного алгоритма измерения температуры тела с помощью ртутного градусника.

«Если вам нужно измерить температуру тела и у вас есть ртутный градусник, возьмите его, встряхните, вставьте в подмышку и подождите десять минут. После этого достаньте его и посмотрите, до какого деления поднялся ртутный столбик. Это и будет значением температуры вашего тела».

Этот алгоритм не может быть представлен в языке стандартной динамической логики, поскольку включает в себя не только интуитивно эффективные механические действия взять, встряхнуть и вставить градусник в подмышку, а потом достать его, которые легко промоделировать на компьютерном мониторе, но и обращение к внешнему миру — подождать десять минут, — когда как раз и выполняется главная часть его работы, ради которой все и затевалось, а именно — теплообмен между телом и градусником до достижения их температурного равновесия. Результат этого алгоритма невозможно предсказать одним лишь обращением к карандашу, ластик и бумаге, но можно весьма просто описать в языке целеориентированной динамической логики. Для этого достаточно определить следующий целеориентированный оператор:

$$Def12. \quad < A || P > D =_{def} \Diamond U(A \wedge D, \neg A \wedge P).$$

Смысл формулы $U(A \wedge D, \neg A \wedge P)$ заключается в том, что одновременно с совершением действия, направленного на достижение цели A , параллельно протекает процесс P и по достижении цели A имеет место D . Таким способом мы можем выразить параллельное протекание процессов. Например, в случае измерения температуры формула A могла бы означать прохождение 10 минут времени, P — процесс теплообмена между телом и градусником, а D — результирующие показания градусника. Целеориентированность применения этого оператора на примере измерения температуры тела проявляется в том, что не обязательно использовать ртутный градусник. Это может быть электронный градусник, или устройство для инфракрасного сканирования температуры поверхности тела. В каждом из этих случаев результат получают благодаря протеканию некоторого физического процесса между прибором и телом человека.

3. Заключение

Обычная динамическая логика ориентирована на анализ вычислений в абстрактных математических пространствах и практически никак не учитывает физического времени и протекающих в нем физических процессов. Но понятие алгоритма не ограничивается одними лишь математическими объектами. Огромное количество алгоритмов привязано к физическим преобразованиям в реальном физическом мире, начиная с приготовления

блюдов согласно кулинарным рецептам и выращивания урожая и заканчивая промышленным производством и функционированием бюрократических структур. Все эти примеры — возможные области приложения целеориентированной динамической логики.

Если в обычной динамической логике посредством while-программ можно представить абстракцию от уже существующих процедурных языков программирования, то на базе целеориентированной динамической логики могут быть созданы абстрактные языки *для программирования будущего* в смысле постановки будущих целей и планирования шагов для их достижения.

Базой таких языков могут быть выбраны следующие целеориентированные операторы:

- $\langle A \rangle$ — цели;
- $\langle A? \rangle$ — тесты;
- $\langle \alpha; \beta \rangle$ — последовательное достижение целей;
- $\langle \text{if } C \text{ then } A \text{ else } B \rangle$ — выбор следующих целей;
- $\langle \text{while } C \text{ do } A \rangle$ — циклы;
- $\langle A || P \rangle$ — обращения к внешним процессам.

Первые пять операторов являются по своей сути модификациями операторов обычной динамической логики, но привязанными к физическому времени. Последний же оператор обращения к внешним процессам расширяет ее возможности. Результат выполнения алгоритмов с его использованием не может быть определен аналитически, так как зависит от внешних условий физического мира. Явления, которые могут быть описаны и проанализированы с использованием этого языка, уже существуют и протекают в окружающем мире, как можно видеть на примерах измерения температуры тела и непрерывно функционирующего промышленного производства. В этом смысле ничего нового мы не открыли, а всего лишь обратили внимание на то, что еще одна область явлений может быть структурирована с целью ее изучения и практического использования. Задача заключается в создании строгой теории и языка для их описания и анализа, по аналогии с тем, что мы видим в случае стандартной теории вычислимости.

В качестве будущих направлений теоретических исследований предполагается нахождение и изучение методов построения целеориентированных программ исходя из уже поставленных целей. Первые попытки найти подходы к решению этой задачи можно найти в работах [Шалак, 2017; Шалак, 2018].

Литература

- Асмус, 1976 – *Асмус В.Ф.* Метафизика Аристотеля // *Аристотель*. Сочинения в четырех томах Т. 1 / Под ред. В.Ф. Асмуса. М.: Мысль, 1976. С. 5–62.
- Винер, 1983 – *Винер Н.* Поведение, целесообразность и телеология // *Винер Н.* Кибернетика. М.: Наука, 1983. С. 297–307.
- Маркс, Энгельс, 1955а – *К. Маркс, Ф. Энгельс* Святое семейство // Сочинения. Т. 2 / Под ред. Я.Б. Турчинса. М.: Гос. полит. издат, 1955. С. 3–230.
- Маркс, Энгельс, 1955б – *К. Маркс* Тезисы о Фейербахе // Сочинения. Т. 3 / Под ред. Я.Б. Турчинса. М.: Гос. полит. издат, 1955. С. 1–4.
- Сасскинд, Грабовский, 2016 – *Сасскинд Л., Грабовский Д.* Теоретический минимум. Все, что нужно знать о современной физике. СПб.: Питер, 2016. 288 с.
- Смирнов, 1963 – *Смирнов В.А.* Алгоритмы и логические схемы алгоритмов // Проблемы логики. 1963. С. 84–101.
- Шалак, 1993 – *Шалак В.И.* Динамическая интерпретация высказываний // Логические исследования. 1993. Т. 2. С. 68–81.
- Шалак, 2017 – *Шалак В.И.* Аналитический подход к решению задач // Логические исследования. 2017. Т. 23. № 1. С. 121–139.
- Шалак, 2018 – *Шалак В.И.* Анализ vs дедукция // Логические исследования. 2018. Т. 24. № 1. С. 26–45.
- Goranko, Rumberg, 2024 – *Goranko V., Rumberg A.* Temporal Logic // Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2024. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/sum2024/entries/logic-temporal/> (дата обращения: 07.11.2024).
- Harel et al., 2000 – *Harel D., Kozen D., Tiurin J.* Dynamic Logic. Cambridge, MA: MIT Press, 2000. 476 p.
- Kamp, 1968 – *Kamp J.A.W.* Tense Logic and the Theory of Linear Order. Doctoral dissertation. University of California at Los Angelis, 1968.
- Macy, 1946 – *Macy J.* PART 1: A Summary Account of Macy Conference Attendees and Activities. URL: <https://asc-cybernetics.org/foundations/history/MacySummary.htm> (дата обращения: 09.05.2024).

VLADIMIR I. SHALACK

Goal-directed semantics for dynamic logic

Vladimir I. Shalack

Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: shalack@mail.ru

Abstract: The general definition of an algorithm contains information about actions and the order in which they are performed to achieve specific goals, which can be represented by some description. In the semantics of dynamic logic, the emphasis is on actions that must be performed in a certain sequence, and the goal pursued remains outside the scope of analysis, it is assigned the role of meta-information in relation to the algorithm itself. On the other hand, the same goal can be achieved in different ways. If the goal for which the algorithm is compiled and executed is primarily important for the acting agent, then its specific implementation is not so important, since the invariant of all specific implementations is precisely the goal being pursued. The article shows how it is possible to construct the semantics of dynamic logic in terms of goals rather than actions performed. Goal-oriented semantics is applicable not only to the analysis of algorithms performed in the world of abstract mathematical objects, but also in the physical world, in which the concept of algorithm is synonymous with the concept of purposeful behavior. Since the concept of goal refers to a future state of affairs that has not yet been realized and is therefore meaningful only within the framework of the accepted time model, the semantics of goal-oriented logic is based on the semantics of the Occamist temporal logic of tree-branching time. At the same time, the agent executing the algorithm must also have some freedom in choosing the actions it performs. While in the standard semantics of dynamic logic, elementary actions are interpreted through unmediated transitions between possible worlds, in goal-oriented semantics, actions are interpreted by segments of possible event paths, at the end point of which the goal for which the action is being performed is true, and at all previous moments is false. In terms of the proposed semantics, it is possible, with some variations, to define all the standard operators of dynamic logic, plus one more special operator for accessing processes occurring in the external physical world.

Keywords: algorithm, goal, dynamic logic, semantics, goal-directed behavior

For citation: Shalack V.I. “Tseleorientirovannaya semantika dinamicheskoi logiki” [Goal-directed semantics for dynamic logic], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 2, pp. 52–72. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-52-72. (In Russian)

References

Asmus, 1976 – Asmus, V.F. “Metafizika Aristotelya” [Aristotle’s Metaphysics] in: *Aristotel’ Sochineniya v chetyrekh tomakh. T. 1* [Aristotle. Selected Works. Vol. 1], ed. by V.F. Asmus. Moscow.: Mysl’, 1976. pp. 5–62. (In Russian)

- Goranko, Rumberg, 2024 – Goranko, V., Rumberg, A. “Temporal Logic”, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2024. [<https://plato.stanford.edu/archives/sum2024/entries/logic-temporal/> accessed on 07.11.2024]
- Harel et al., 2000 – Harel, D., Kozen, D., Tiurin, J. *Dynamic Logic*. Cambridge, MA: MIT Press, 2000. 476 p.
- Kamp, 1968 – Kamp, J.A.W. “*Tense Logic and the Theory of Linear Order*”, doctoral dissertation, University of California at Los Angelis, 1968.
- Macy, 1946 – Macy, J. “PART 1: A Summary Account of Macy Conference Attendees and Activities”. [<https://asc-cybernetics.org/foundations/history/MacySummary.htm>, accessed on 09.05.2024]
- Marx, Engels, 1955a – Marx, K., Engels, F. “Svyatoe semejstvo” [The Holy Family] in: *Sochineniya. T. 2* [Selected Works. Vol. 2]. Moscow.: Gos. polit. izdat, 1955, pp. 3–230. (In Russian)
- Marx, Engels, 1955b – Marx, K., Engels, F. “Tezisy o Fejervbahe” [Theses on Feuerbach] in: *Sochineniya. T. 3* [Selected Works. Vol. 3]. Moscow.: Gos. polit. izdat, 1955, pp. 1–4. (In Russian)
- Sasskind, Grabovskij, 2016 – Sasskind, L., Grabovskij, D. *Teoreticheskij minimum. Vse, chto nuzhno znat' o sovremennoj fizike* [Theoretical minimum. Everything you need to know about modern physics]. Saint-Petersburg.: Piter, 2016. 288 pp. (In Russian)
- Shalack, 1993 – Shalack, V.I. “Dinamicheskaya interpretaciya vyskazyvanij” [Dynamic interpretation of statements], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], 1993, Vol. 2, pp. 68–81. (In Russian)
- Shalack, 2017 – Shalack, V.I. “Analiticheskij podhod k resheniyu zadach” [Analytical approach to problem solving], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], 2017, Vol. 23, No. 1, pp. 121–139. (In Russian)
- Shalack, 2018 – Shalack, V.I. “Analiz vs dedukciya” [Analysis vs. deduction], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], 2018, Vol. 24, No. 1, pp. 26–45. (In Russian)
- Smirnov, 1963 – Smirnov, V.A. “Algoritmy i logicheskie skhemy algoritmov” [Algorithms and logical schemes of algorithms], *Problemy logiki* [Problems of logic], 1963, pp. 84–101. (In Russian)
- Viner, 1983 – Viner, N. “Povedenie, celesoobraznost' i teleologiya” [Behavior, expediency, and teleology] in: *Viner N. Kibernetika* [Viner N. Cybernetics]. Moscow: Nauka, 1983, pp. 297–307. (In Russian)

Символическая логика
Symbolic Logic

В.И. МАРКИН

**Реляционная полнота множества
силлогистических констант**

Владимир Ильич Маркин

МГУ имени М.В. Ломоносова.

Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.

E-mail: markin@philos.msu.ru

Аннотация: В статье исследуется вопрос о полноте множества силлогистических констант. Эти константы понимаются как знаки отношений между двумя непустыми множествами (объемами двух общих терминов). Среди указанных отношений особое место занимают «эйлеровские»: (1) равенство множеств, (2) строгое включение первого множества во второе, (3) строгое включение второго множества в первое, (4) перекрещивание множеств, (5) несовместимость множеств. Остальные отношения представляют из себя комбинации эйлеровских. Каждая константа k в предлагаемом силлогистическом языке кодируется последовательностью (возможно пустой) попарно различных чисел из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, расположенных по возрастанию. Эта последовательность указывает на номера тех эйлеровских отношений, при которых простое высказывание формы SkP истинно. Ранее была задана точная теоретико-множественная семантика «универсального» языка, содержащего все силлогистические константы. Вводятся понятия выразимости силлогистической константы в «локальном» языке силлогистики, содержащем лишь некоторые из таких констант. Множество исходных констант «локального» языка реляционно полно, если и только если в нем выразима любая силлогистическая константа «универсального» языка. Формулируются критерии реляционной полноты. Доказывается метатеорема о том, что множество силлогистических констант реляционно полно, если и только если его элементами являются: константа, содержащая ровно одно из двух чисел — либо 2, либо 3; константа, содержащая ровно одно из двух чисел — либо 1, либо 4; константа, содержащая ровно одно из двух чисел — либо 1, либо 5; константа, содержащая ровно одно из двух чисел — либо 4, либо 5.

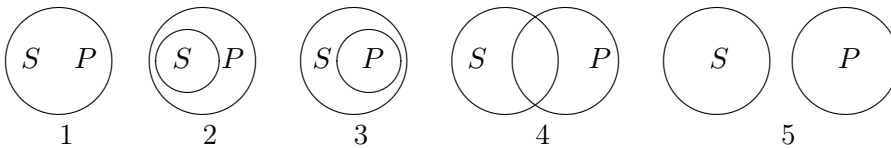
Ключевые слова: силлогистика, силлогистическая константа, формализованный язык, семантика, выразимость константы, реляционная полнота

Для цитирования: Маркин В.И. Реляционная полнота множества силлогистических констант // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 2. С. 73–93. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-73-93

Введение

В [Маркин, 2020] был построен язык силлогистики, в алфавите которого содержатся все возможные силлогистические константы. Они понимаются как знаки тех или иных отношений между двумя непустыми множествами — объемами субъекта (S) и предиката (P) категорического высказывания. Среди этих отношений выделяются пять базисных («эйлеровских»), которые представимы известными круговыми диаграммами.

Диаграмме 1 соответствует отношение равенства двух множеств, диаграмме 2 — отношение строгого включения первого множества во второе, диаграмме 3 — отношение строгого включения второго множества в первое, диаграмме 4 — отношение перекрещивания, диаграмме 5 — отношение объемной несовместимости (внеположенности).



Для каждого из эйлеровских отношений в язык вводится силлогистическая константа — номер соответствующего отношения (т.е. натуральное число x от 1 до 5). Утверждение о том, что объем S находится в данном отношении к объему P , передается в этом силлогистическом языке посредством элементарной формулы SxP .

Два непустых множества могут находиться и в иных, «неэйлеровских» отношениях, но эти отношения могут быть сведены к эйлеровским. Так, отношение нестрогого включения объема субъекта в объем предиката имеет место как на диаграмме 1, так и на диаграмме 2, номера этих диаграмм включаются в состав соответствующей силлогистической константы, и данное отношение будет репрезентировать двухкомпонентная константа 12. Вместо привычной формальной записи общеутвердительного высказывания SaP используется формула $S12P$. Частноутвердительные высказывания записываются в виде $S1234P$ с помощью четырехкомпонентной константы 1234, поскольку субъект и предикат совместимы по объему именно на диаграммах 1–4. Определенно-частные высказывания вида «Только некоторые S есть P » значимы на диаграммах 3 и 4, поэтому они выражаются посредством формулы $S34P$.

Таким образом, силлогистическая константа представляет собой последовательность чисел из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (для удобства будем предполагать эти числа без повторений и в порядке возрастания).

Общее количество силлогистических констант, представляющих все возможные отношения между двумя непустыми множествами, равно тридцати двум (мощности множества всех подмножеств $\{1, 2, 3, 4, 5\}$). Константы, которые репрезентируют эйлеровские отношения, являются однокомпонентными. Константы, репрезентирующие 26 неэйлеровских отношений, представляют собой многокомпонентные последовательности чисел. В язык вводится также нулькомпонентная константа, она репрезентирует «пустое» отношение — такое, в котором не находятся никакие два непустые множества.

Элементарные формулы данного языка имеют вид SkP , где S и P — произвольные общие термины, а k — любая (из тридцати двух) силлогистическая константа. Сложные формулы образуются с помощью пропозициональных связок.

Для данного «универсального» силлогистического языка в [Маркин, 2020] сформулирована теоретико-множественная семантика, в которой условия значимости любой атомарной формулы SkP опираются на приведенную выше трактовку константы k как знака определенного отношения между двумя непустыми множествами. Построено также исчисление **C4U**, аксиоматизирующее класс общезначимых в данной семантике формул.

Обычно силлогистические теории строятся не в «универсальном», а в «локальном» языке, где в алфавит включается лишь часть силлогистических констант. Так, в традиционной силлогистике всего четыре исходные константы: a (в нашей нотации 12), i (1234), e (5) и o (345). Их количество может быть уменьшено до двух, например a и i , в силу законов диагоналей логического квадрата.

Возникает вопрос, можно ли в рамках того или иного локального силлогистического языка определить — посредством формул, содержащих лишь константы из его алфавита, — все возможные силлогистические константы и тем самым выразить каждое из тридцати двух отношений между двумя непустыми множествами. Для некоторых локальных языков (например, языка с исходными константами a и i) ответ на этот вопрос утвердительный. В таком случае будем говорить, что множество исходных силлогистических констант данного языка является *реляционно полным*. Для других же языков (например, языка с исходными константами a и o) ответ будет отрицательным и множество их исходных констант окажется *реляционно неполным*.

В докладе на Тринадцатых Смирновских чтениях по логике (см. [Маркин, 2023]) были сформулированы критерии реляционной полноты для произвольного множества силлогистических констант. Основная цель данной статьи — доказать, что каждое реляционно полное множество удовлетво-

ряет всем этим критериям, а любое реляционно неполное множество не удовлетворяет хотя бы одному из них.

1. Силлогистика в «универсальном» языке и ее особенности

Силлогистической константой универсального силлогистического языка, как было сказано выше, называется последовательность (возможно, пустая) $x_1x_2 \dots x_n$ попарно различных чисел из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, расположенных по возрастанию. Неформально, за каждым числом x_i в составе константы k стоит определенная круговая диаграмма, и числовой код $x_1x_2 \dots x_n$ задает исчерпывающий список эйлеровских отношений, при которых высказывание формы SkP оказывается истинным (значимым). Сама константа k репрезентирует такое отношение между объемами терминов S и P , которое является объединением эйлеровских отношений, кодируемых числами $x_1, x_2, \dots, x_n$.

В алфавит универсального силлогистического языка помимо тридцати двух силлогистических констант включаются также: бесконечный список общих терминов, пропозициональные связки и скобки. Элементарные формулы имеют вид SkP , где S и P — общие термины, а k — произвольная силлогистическая константа. Сложные формулы имеют вид $\neg A$, $(A \nabla B)$, где A и B — формулы, $\neg$ — пропозициональное отрицание, ∇ — любая бинарная пропозициональная связка из алфавита. Будем обозначать множество всех формул данного языка как L_U .

Моделью данного языка называется пара $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, где $\mathbf{D}$ — произвольное непустое множество, φ — функция, сопоставляющая каждому общему термину некоторое непустое подмножество $\mathbf{D}$: $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$ и $\varphi(S) \neq \emptyset$.

Для определения понятия значимости (истинности) формулы $A \in L_U$ в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ вводится трехместный предикат $\mathcal{V}$. $\mathcal{V}(A, \mathbf{D}, \varphi)$ читается так: «формула A значима в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ ».

Условия значимости элементарных формул, образованных посредством *нулькомпонентной* константы, определяются так:

$\mathcal{V}_{\emptyset}$. Неверно, что $\mathcal{V}(SP, \mathbf{D}, \varphi)$

(то есть формулы данного типа не являются значимыми).

Условия значимости элементарных формул, образованных посредством *однокомпонентных* силлогистических констант, задаются следующим образом:

$\mathcal{V}_1$. $\mathcal{V}(S1P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) = \varphi(P)$;

$\mathcal{V}_2$. $\mathcal{V}(S2P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) \subset \varphi(P)$;

$\mathcal{V}_3$. $\mathcal{V}(S3P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(P) \subset \varphi(S)$;

$\mathcal{V}_4$. $\mathcal{V}(S4P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$ и $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \emptyset$ и $\varphi(P) \setminus \varphi(S) \neq \emptyset$;

$\mathcal{V}_5$. $\mathcal{V}(S5P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \emptyset$.

($\mathcal{V}_1$ – $\mathcal{V}_5$ фиксируют в теоретико-множественном языке те же самые эйлеровские отношения, которые изображены на круговых диаграммах 1–5.)

Затем задаются условия значимости формул, образованных с помощью *многокомпонентных* силлогистических констант. Пусть силлогистическая константа k — это последовательность $x_1x_2 \dots x_n$ попарно различных чисел из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, расположенных по возрастанию, причем $2 \leq n \leq 5$.

$\mathcal{V}_M$. $\mathcal{V}(Sx_1x_2 \dots x_nP, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\mathcal{V}(Sx_1P, \mathbf{D}, \varphi)$, или $\mathcal{V}(Sx_2P, \mathbf{D}, \varphi)$, или $\dots$, или $\mathcal{V}(Sx_nP, \mathbf{D}, \varphi)$

(формула, образованная с помощью многокомпонентной константы, значима в некоторой модели, е.т.е. в этой модели значима хотя бы одна формула, образованная с помощью однокомпонентной константы, входящей в данную многокомпонентную константу).

$\mathcal{V}_C$. Условия значимости сложных формул стандартные.

Формула $A \in L_U$ *общезначима* в семантике универсального силлогистического языка (*U-общезначима*), е.т.е. $V(A, \mathbf{D}, \varphi)$ в любой модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$.

Формула $A \in L_U$ *выполнима* в семантике универсального силлогистического языка (*U-выполнима*), е.т.е. $V(A, \mathbf{D}, \varphi)$ по крайней мере в одной модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$.

Формулы A и B *эквивалентны* в семантике универсального силлогистического языка, е.т.е. для любой модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ верно, что $\mathcal{V}(A, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\mathcal{V}(B, \mathbf{D}, \varphi)$.

Формулы $A_1, A_2, \dots, A_n$ *совместимы* в семантике универсального силлогистического языка, е.т.е. существует модель $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, в которой значима каждая из них.

Для данной логической теории можно доказать метатеорему об эквивалентной замене.

Теорема 1. Пусть A и B — произвольные формулы из L_U , C_A — формула данного языка с выделенным вхождением подформулы A , а C_B — формула, получающаяся в результате замены выделенного вхождения A в C_A на формулу B . Если формулы A и B эквивалентны в семантике универсального силлогистического языка, то формулы C_A и C_B также эквивалентны в ней.

Доказательство. Доказательство приведено в [Маркин, 2020, с. 46]. ■

Сформулируем и обоснуем ряд важных утверждений, касающихся силлогистики в универсальном языке. Эти утверждения понадобятся нам в дальнейшем для доказательства основной метатеоремы.

Утверждение 1. Если константа k представляет собой непустую последовательность $x_1x_2 \dots x_n$ чисел из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, то формула SkP эквивалентна формуле $Sx_1P \vee Sx_2P \dots \vee Sx_nP$.

Если k — однокомпонентная константа, то дизъюнкция является вырожденной, она содержит один дизъюнкт SkP , эквивалентный самому себе. Если k — многокомпонентная константа, то наше утверждение справедливо в силу $\mathcal{V}_M$ (условий значимости элементарных формул с такого типа силлогистическими константами).

Утверждение 2. Формула $S12345P$ общезначима.

Формула $S12345P$, согласно Утверждению 1, эквивалентна формуле $S1P \vee S2P \vee S3P \vee S4P \vee S5P$, которая общезначима в силу $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_5$.

Утверждение 3. Формула SP , содержащая нулькомпонентную константу, невыполнима.

Утверждение справедливо в силу $\mathcal{V}_\emptyset$.

Утверждение 4. Если константа k содержит 1, то формула вида QkQ общезначима, а если k не содержит 1, то QkQ невыполнима.

Если k — нулькомпонентная константа, то QkQ имеет вид QQ . Эта формула невыполнима (Утверждение 3), и k при этом не содержит 1.

Если k — однокомпонентная константа, то в силу условий значимости простых формул с такого рода константами QkQ общезначима лишь в том случае, когда k есть 1. Если же k отлично от 1, то формула QkQ невыполнима.

Пусть k — многокомпонентная константа. Тогда если k содержит 1, QkQ эквивалентна дизъюнктивной формуле, содержащей дизъюнкт $Q1Q$ (Утверждение 1), который является общезначимым; поэтому QkQ тоже общезначима. Если же k не содержит 1, то QkQ эквивалентна дизъюнктивной формуле, содержащей только невыполнимые дизъюнкты; поэтому QkQ тоже оказывается невыполнимой.

В рамках «универсальной» силлогистики можно развить интересное учение об обращении (подробнее об этом см. в [Маркин, 2022]).

В традиционной логике *обращением* называли непосредственное умозаключение силлогистики, в котором субъект заключения совпадает с предикатом посылки, а предикат заключения — с субъектом посылки. Обращение, таким образом, есть умозаключение вида $Sk_1P \Rightarrow Pk_2S$, где k_1 и k_2 — силлогистические константы, которые могут быть одинаковыми, а могут и не совпадать.

Нас будет интересовать лишь одна разновидность обращения — так называемое *сильное обращение*. Сильным обращением назовем умозаключение вида $Sk_1P \Rightarrow Pk_2S$, в котором заключение эквивалентно посылке.

В универсальной силлогистике простые высказывания любого типа сильно обратимы, то есть для любой силлогистической константы k_1 существует константа k_2 такая, что формулы Sk_1P и Pk_2S эквивалентны в семантике универсального силлогистического языка. Этот тезис вытекает из двух следующих утверждений.

Утверждение 5. Элементарные формулы, образованные с помощью нулькомпонентной или однокомпонентной константы, сильно обратимы: SP в PS , $S1P$ в $P1S$, $S2P$ в $P3S$, $S3P$ в $P2S$, $S4P$ в $P4S$, $S5P$ в $P5S$.

Справедливость данного утверждения основывается на условиях значимости $\mathcal{V}_\emptyset$, $\mathcal{V}_1$ – $\mathcal{V}_5$.

Утверждение 6. Для элементарных формул, образованных с помощью констант с произвольным числом компонент, справедливы следующие принципы сильного обращения:

(6a) если силлогистическая константа k не содержит чисел 2 и 3, то SkP сильно обращается в PkS ;

(6b) если силлогистическая константа k содержит как число 2, так и число 3, то SkP сильно обращается в PkS ;

(6c) если константа k_1 содержит число 2, но не содержит число 3, а константа k_2 получается из k_1 заменой 2 на 3, то Sk_1P сильно обращается в Pk_2S ;

(6d) если константа k_1 содержит число 3, но не содержит число 2, а константа k_2 получается из k_1 заменой 3 на 2, то Sk_1P сильно обращается в Pk_2S .

Данное утверждение является следствием утверждений 1 и 5.

Утверждение 7. Формулы $S1P$, $S2P$, $S3P$, $S4P$, $S5P$ попарно несовместимы.

Утверждение справедливо в силу условий значимости $\mathcal{V}_1$ – $\mathcal{V}_5$.

Утверждение 8. Если константа k_2 включает все те и только те числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которые отсутствуют в k_1 , то формула $\neg Sk_1P$ эквивалентна формуле Sk_2P в семантике универсального силлогистического языка.

Если k_1 есть нулькомпонентная константа или константа 12345, тогда k_2 является, соответственно, либо константой 12345, либо нулькомпонентной константой. Наш тезис вытекает из Утверждений 2 и 3.

Рассмотрим случай, когда k_1 отлична от обеих указанных констант. Поскольку объединение множеств чисел, составляющих константы k_1 и k_2 , равно $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, формула $Sk_1P \vee Sk_2P$ эквивалентна, в силу Утверждения 1, общезначимой формуле $S1P \vee S2P \vee S3P \vee S4P \vee S5P$, откуда вытекает, что из $\neg Sk_1P$ логически следует Sk_2P . Обратное следование ($\neg Sk_1P$ из Sk_2P) также имеет место, в силу Утверждения 7, ведь одинаковых чисел в составе этих двух констант нет.

Утверждение 9. Формулы $Sk_1P, Sk_2P, \dots, Sk_nP$ совместимы, е.т.е. существует число, входящее в состав каждой из констант $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Допустим, что существует число x из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которое входит в состав каждой из констант $k_1, k_2, \dots, k_n$. Рассмотрим модель, в которой формула SxP значима (такая модель существует в силу условий $\mathcal{V}_1\text{--}\mathcal{V}_5$). В этой модели окажется значимой каждая из формул $Sk_1P, Sk_2P, \dots, Sk_nP$ (условие $\mathcal{V}_M$). Поэтому указанные формулы совместимы.

В противном случае каждый элемент x множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ не содержится в какой-то константе k_i из списка $k, k_2, \dots, k_n$. В модели, в которой значима формула SxP , формула Sk_iP не является значимой, в силу Утверждений 1 и 7. Из условий $\mathcal{V}_1\text{--}\mathcal{V}_5$ вытекает, что в каждой модели значима ровно одна формула из списка $S1P, S2P, S3P, S4P, S5P$. Поэтому в каждой модели какая-то формула из списка $Sk_1P, Sk_2P, \dots, Sk_nP$ не является значимой. Следовательно, эти формулы несовместимы.

Утверждение 10. Если константа k_3 включает все те и только те числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которые содержатся как в k_1 , так и в k_2 , то формула $Sk_1P \wedge Sk_2P$ эквивалентна формуле Sk_3P в семантике универсального силлогистического языка.

Формулу $Sk_1P \wedge Sk_2P$ можно эквивалентно преобразовать в формулу вида $(Sk_3P \vee Sk_4P) \wedge (Sk_3P \vee Sk_5P)$, где константа k_4 содержит все числа, входящие в k_1 , но не входящие в k_2 , а константа k_5 содержит все числа, входящие в k_2 , но не входящие в k_1 . Полученная формула эквивалентна формуле $Sk_3P \vee (Sk_4P \wedge Sk_5P)$. Поскольку константы k_4 и k_5 не содержат одинаковых чисел, формулы Sk_4P и Sk_5P несовместимы в силу Утверждения 9,

а значит, их конъюнкция невыполнима. Поэтому $Sk_3P \vee (Sk_4P \wedge Sk_5P)$ эквивалентна формуле Sk_3P .

Утверждение 11. Если константа k_3 включает все те и только те числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которые включаются в k_1 или в k_2 , то формула $Sk_1P \vee Sk_2P$ эквивалентна формуле Sk_3P в семантике универсального силлогистического языка.

Данный тезис непосредственно следует из Утверждения 1.

Утверждение 12. Формулы Sk_1P и Sk_2P не являются эквивалентными, е.е. существует число из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которое включается в k_1 , но отсутствует в k_2 , или включается в k_2 , но отсутствует в k_1 .

Пусть число x содержится в k_1 , но отсутствует в k_2 . Тогда в модели, в которой значима формула SxP , формула Sk_1P значима, а Sk_2P нет, в силу Утверждений 1 и 7. Аналогично, если x содержится в k_2 , но отсутствует в k_1 , то в модели, в которой значима формула SxP , формула Sk_2P значима, а Sk_1P нет.

2. Атомарные нормальные формы

Пусть формула A универсального силлогистического языка содержит в точности два различных общих термина S и P (причем S предшествует P в алфавите). *Атомарной нормальной формой* формулы A назовем элементарную формулу вида SkP данного языка, логически эквивалентную A в его семантике.

Теорема 2. Для любой формулы $A \in L_U$, содержащей в точности два различных общих термина, существует единственная атомарная нормальная форма.

Доказательство. Рассмотрим произвольную формулу A универсального силлогистического языка, которая содержит в точности два различных общих термина S и P , причем S предшествует P в алфавите этого языка.

Сформулируем сначала *алгоритм приведения* формулы A указанного типа к атомарной нормальной форме.

Шаг 1. Каждая подформула формулы A , имеющая вид QkQ (где Q есть S или P), заменяется либо на $S12345P$, если константа k содержит 1, либо на SP , если k не содержит 1.

После этого шага получаем формулу A_1 , каждая атомарная подформула которой содержит в точности два различных термина — S и P .

Шаг 2. Каждая подформула, имеющая вид PkS , заменяется на формулу $Sk'P$, полученную в результате сильного обращения PkS .

После этого шага получаем формулу A_2 , каждая атомарная подформула которой начинается с S и заканчивается P .

Шаг 3. Формула A_2 приводится к дизъюнктивной нормальной форме.

Получаем формулу A_3 — дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Шаг 4. Каждый член элементарных конъюнкций вида $\neg Sk_1P$ заменяется формулой Sk_2P , где k_2 есть упорядоченная по возрастанию последовательность всех попарно различных чисел из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, не содержащихся в k_1 .

После этого шага получаем формулу A_4 , в которой каждый член элементарных конъюнкций является элементарной формулой.

Шаг 5. Каждая элементарная конъюнкция $Sk_1P \wedge Sk_2P \wedge \dots \wedge Sk_mP$ заменяется формулой SkP , где k есть упорядоченная по возрастанию последовательность всех попарно различных чисел из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, содержащихся в каждой из констант $k_1, k_2, \dots, k_m$.

После этого шага получаем формулу A_5 , в которой каждая элементарная конъюнкция становится вырожденной, и вся формула принимает вид $Sk_1P \vee Sk_2P \vee \dots \vee Sk_rP$.

Шаг 6. Данная формула $(Sk_1P \vee Sk_2P \vee \dots \vee Sk_rP)$ заменяется формулой вида SkP , где k есть упорядоченная по возрастанию последовательность всех попарно различных чисел из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, содержащихся по крайней мере в одной из констант $k_1, k_2, \dots, k_r$.

В результате получаем формулу A_6 — элементарную формулу вида SkP .

Покажем, что формула A_6 является атомарной нормальной формой формулы A .

Для этого нужно убедиться в следующем:

(i) каждый шаг алгоритма является эквивалентным преобразованием, т.е. формулы $A_1, A_2, \dots, A_6$ эквивалентны формуле A (и друг другу) в семантике универсального силлогистического языка;

(ii) результатом работы алгоритма является элементарная формула вида SkP ;

(iii) эта формула является единственной элементарной формулой с субъектом S и предикатом P , которая эквивалентна формуле A в семантике универсального силлогистического языка.

Справедливость тезиса (i) устанавливается с использованием метатеоремы об эквивалентной замене (Теорема 1). Необходимо удостовериться в том, что на каждом шаге работы алгоритма заменяемые подформулы и те формулы, на которые они заменяются, эквивалентны в семантике универсального силлогистического языка.

На Шаге 1 заменяются подформулы вида QkQ (где Q есть S или P). Они общезначимы, если константа k содержит число 1 (Утверждение 4) и подставляемая вместо них формула $S12345P$ также общезначима (Утверждение 2). Если же константа k не содержит 1, то подформулы вида QkQ невыполнимы (Утверждение 4) и подставляемая вместо них формула SP также невыполнима (Утверждение 3). В каждом из этих случаев QkQ эквивалентна результату своей замены.

На Шаге 2 подформулы вида PkS заменяются на формулы $Sk'P$, эквивалентные им, поскольку вторые есть результат сильного обращения первых (Утверждение 6).

На Шаге 3 формула приводится к дизъюнктивной нормальной форме, что является эквивалентным преобразованием, поскольку условия значимости сложных формул классические.

На Шаге 4 заменяемые формулы и результаты этих замен эквивалентны в силу Утверждения 8.

На Шаге 5 заменяемые формулы и результаты этих замен эквивалентны в силу Утверждения 10.

На Шаге 6 заменяется вся формула A_5 . В результате получаем эквивалентную ей формулу (согласно Утверждению 11).

Справедливость тезиса (ii) обусловлена характером осуществляемых преобразований: сначала заменяются все элементарные подформулы, не имеющие вида SkP (Шаги 1 и 2), а затем последовательно устраняются все пропозициональные связи.

Справедливость тезиса (iii) основана на Утверждении 12. ■

Таким образом, любую (в том числе и сложную) формулу универсального силлогистического языка, содержащую два различных общих термина, можно эквивалентным образом преобразовать в элементарную формулу, причем единственную.

3. «Локальные» силлогистические языки, понятие реляционной полноты множества силлогистических констант

Как правило, в язык позитивной силлогистики в качестве исходных вводят не все, а только часть силлогистических констант. Такие языки будем называть «локальными». К числу локальных относятся языки традиционной силлогистики (его исходными константами являются 12, 1234, 345, 5), ассерторической силлогистики Васильева (с исходными константами 12, 34, 5) и логики классов Венна (где в качестве исходных выбираются все однокомпонентные константы).

При семантическом построении силлогистики в локальном языке исходным константам сопоставляются некоторые отношения между объемами двух непустых общих терминов. Крайне важно, однако, чтобы этих отношений было достаточно для экспликации и всех других бинарных объемных отношений. В таком случае можно сказать, что множество исходных констант является реляционно полным.

Введем точные понятия выразимости силлогистической константы в локальном языке и реляционной полноты множества силлогистических констант.

Константа k *выразима* в локальном языке с исходными силлогистическими константами $k_1, k_2, \dots, k_m$, е.т.е. в этом языке найдется формула A , содержащая в точности два термина S и P , такая что A эквивалентна формуле SkP в семантике универсального силлогистического языка.

Например, константы 1 и 34 выразимы в языке традиционной силлогистики, поскольку существуют формулы данного локального языка (а именно, $S12P \wedge P12S$ и $S1234P \wedge S345P$), которые эквивалентны соответственно формулам $S2P$ и $S34P$ в семантике универсального языка.

Множество силлогистических констант $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ называется *реляционно полным*, е.т.е. любая силлогистическая константа выразима в локальном языке с исходными силлогистическими константами $k_1, k_2, \dots, k_m$.

Множества исходных констант традиционной силлогистики, ассерторической силлогистики Васильева и логики классов Венна являются примерами реляционно полных множеств.

В дальнейшем нам понадобится установить факт реляционной полноты множества всех однокомпонентных констант.

Теорема 3. *Множество исходных констант логики классов Венна $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ является реляционно полным.*

Доказательство. Доказательство приведено в [Маркин, 2020, с. 47–48]. ■

Данная метатеорема может быть использована для демонстрации реляционной полноты некоторого множества силлогистических констант K : для этого достаточно показать, что каждая однокомпонентная константа выразима в локальном языке L_K , в котором K — исходное множество констант.

4. Критерии реляционной полноты. Основная метатеорема

Выделим четыре важных типа силлогистических констант.

2/3-константой назовем силлогистическую константу, содержащую ровно одно из двух чисел: либо 2, либо 3.

$1/4$ -константой назовем силлогистическую константу, содержащую ровно одно из двух чисел: либо 1, либо 4.

$1/5$ -константой назовем силлогистическую константу, содержащую ровно одно из двух чисел: либо 1, либо 5.

$4/5$ -константой назовем силлогистическую константу, содержащую ровно одно из двух чисел: либо 4, либо 5.

Очевидно, что одна и та же силлогистическая константа может относиться сразу к нескольким типам из четырех перечисленных. Например, константа 12 является $1/4$ -константой, $1/5$ -константой и $2/3$ -константой. Вместе с тем существуют и такие константы, которые не относятся ни к одному из четырех указанных типов, например нулькомпонентная константа и константа 23.

Пусть K — множество силлогистических констант из алфавита некоторого локального языка L_K . Перед формулировкой критериев реляционной полноты необходимо доказать четыре важные леммы.

Лемма 1. *Никакая $2/3$ -константа невыразима в языке L_K , если K не содержит $2/3$ -констант.*

Доказательство. Пусть k_1 — произвольная $2/3$ -константа. Допустим, что K не содержит $2/3$ -констант, но k_1 выразима в языке L_K . Последнее означает, что существует формула A , содержащая в точности два термина S и P и силлогистические константы только из K , такая что A эквивалентна формуле Sk_1P в семантике универсального силлогистического языка.

Осуществим приведение формулы A к атомарной нормальной форме. Убедимся, что на каждом шаге этой процедуры мы получаем формулу, не содержащую $2/3$ -констант.

Исходная формула A не содержит $2/3$ -констант.

На Шаге 1 появляются формулы, которые содержат или пустую константу, или константу 12345. Обе эти константы не являются $2/3$ -константами.

На Шаге 2 в результате сильного обращения элементарных подформул, образованных с помощью констант, которые содержат и число 2, и число 3, мы получаем формулы (с обратным порядком субъекта и предиката) с константами, также содержащими оба эти числа. Если же константа в исходной элементарной подформуле не содержит ни 2, ни 3, мы получаем формулу с константой, не содержащей этих чисел. В каждом из этих случаев, в силу Утверждения 6, результирующая формула не содержит $2/3$ -констант.

На Шаге 3 множество силлогистических констант в составе формулы не изменяется, то есть $2/3$ -константы не появляются.

На Шаге 4 результат преобразования негативной формулы, согласно Утверждению 8, дает либо элементарную формулу, константа которой содержит числа 2 и 3 (в случае, когда константа формулы под отрицанием не содержала ни 2, ни 3), либо элементарную формулу с константой, не содержащей никакого из этих двух чисел (в случае, когда формула под отрицанием образована посредством константы, которая содержит оба этих числа).

На Шаге 5 если все члены элементарной конъюнкции образованы с помощью констант, содержащих как число 2, так и число 3, то результат ее замены также будет содержать и 2, и 3. Если же хотя бы один из членов элементарной конъюнкции образован с помощью константы, не содержащей ни числа 2, ни числа 3, то результат ее замены также не будет содержать ни 2, ни 3 (Утверждение 10).

На Шаге 6 если все дизъюнкты образованы с помощью констант, не содержащих ни числа 2, ни числа 3, то результат замены этой дизъюнктивной формулы также не будет содержать ни 2, ни 3. Если же хотя бы один дизъюнкт образован с помощью константы, содержащей как число 2, так и число 3, то результат замены этой дизъюнктивной формулы также будет содержать 2 и 3 (Утверждение 11).

В итоге мы получаем формулу вида Sk_2P , которая является атомарной нормальной формой формулы A , причем k_2 не является 2/3-константой. Очевидно, что константы k_1 и k_2 различны, то есть существует число из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которое включается в k_1 , но отсутствует в k_2 или включается в k_2 , но отсутствует в k_1 . Поэтому в силу Утверждения 12, формула Sk_2P , а значит, и A , не эквивалентна формуле Sk_1P в семантике универсального силлогистического языка. Таким образом, любая 2/3-константа k_1 невыразима в языке L_K . ■

С помощью аналогичных рассуждений можно доказать еще три леммы:

Лемма 2. *Никакая 1/4-константа невыразима в языке L_K , если K не содержит 1/4-констант.*

Лемма 3. *Никакая 1/5-константа невыразима в языке L_K , если K не содержит 1/5-констант.*

Лемма 4. *Никакая 4/5-константа невыразима в языке L_K , если K не содержит 4/5-констант.*

Сформулируем критерии реляционной полноты множества силлогистических констант K :

- (1) K содержит хотя бы одну $2/3$ -константу;
- (2) K содержит хотя бы одну $1/4$ -константу;
- (3) K содержит хотя бы одну $1/5$ -константу;
- (4) K содержит хотя бы одну $4/5$ -константу.

Продemonстрируем адекватность этих критериев, то есть докажем, что любое реляционно полное множество удовлетворяет каждому из них, а любое реляционно неполное множество не удовлетворяет какому-то из этих критериев.

Теорема 4. *Множество силлогистических констант K является реляционно полным, е.т.е. K содержит $2/3$ -константу k_1 , $1/4$ -константу k_2 , $1/5$ -константу k_3 и $4/5$ -константу k_4 .*

Доказательство. Докажем сначала, что любое реляционно полное множество силлогистических констант K должно содержать $2/3$ -константу, $1/4$ -константу, $1/5$ -константу и $4/5$ -константу.

Если K не содержит ни одной $2/3$ -константы, то, согласно Лемме 1, никакая $2/3$ -константа невыразима в языке L_K с исходным множеством силлогистических констант K , а значит, множество K не является реляционно полным. Поэтому полное множество силлогистических должно содержать хотя бы одну $2/3$ -константу.

С помощью аналогичных рассуждений, основываясь на Леммах 2, 3 и 4, приходим к следующему выводу: если множество K реляционно полно, оно содержит $1/4$ -константу, $1/5$ -константу и $4/5$ -константу.

Докажем далее, что достаточным условием реляционной полноты множества силлогистических констант K является наличие в нем $2/3$ -константы k_1 , $1/4$ -константы k_2 , $1/5$ -константы k_3 и $4/5$ -константы k_4 .

Для этого покажем, что константы 1, 2, 3, 4, 5 выразимы в локальном языке L_K с исходным множеством силлогистических констант K , содержащим константы k_1 , k_2 , k_3 и k_4 . Поскольку множество констант $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ является реляционно полным (Теорема 3), то полным в этом случае будет и множество K .

(а) Покажем, что в языке L_K выразимы константы 2 и 3, то есть существует формула C^2 языка L_K , эквивалентная формуле $S2P$ в семантике универсального силлогистического языка, и существует формула C^3 языка L_K , логически эквивалентная формуле $S3P$ в семантике универсального силлогистического языка.

K содержит $2/3$ -константу k_1 . Согласно определению $2/3$ -константы, k_1 либо включает число 2 и не включает число 3, либо включает число 3 и не включает число 2.

(a1) Пусть k_1 включает число 2 и не включает число 3. Тогда C^2 есть $Sk_1P \wedge \neg Pk_1S$, а C^3 есть $Pk_1S \wedge \neg Sk_1P$.

Докажем сначала, что формула $Sk_1P \wedge \neg Pk_1S$ эквивалентна формуле $S2P$. Производим эквивалентную замену ее подформулы $\neg Pk_1S$ в соответствии с Утверждением 8. В результате получим элементарную формулу $Pk'S$, которая образована с помощью константы k' , содержащей те и только те числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которые не входят в k_1 . Заметим, что в k' число 3 входит, а число 2 нет. Далее осуществляем сильное обращение формулы $Pk'S$. В результате, в соответствии с Утверждением 6, получаем эквивалентную ей формулу $Sk''P$. Константа k'' будет снова содержать 2 и не содержать 3, а все остальные входящие в нее числа по-прежнему не будут содержаться в k_1 . Общим у k'' и константы k_1 будет только число 2. В соответствии с Утверждением 10, $Sk_1P \wedge Sk''P$ оказывается эквивалентной в семантике универсального силлогистического языка формуле $S2P$.

Докажем далее, что формула $Pk_1S \wedge \neg Sk_1P$ эквивалентна формуле $S3P$. Осуществляем сильное обращение подформулы Pk_1S , в результате чего получаем формулу $Sk'P$, где константа k' отличается от k_1 лишь тем, что содержит число 3 вместо 2. Производим эквивалентную замену подформулы $\neg Sk_1P$, в соответствии с Утверждением 8, на формулу $Sk''P$, причем константа k'' содержит те и только те числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которые не входят в k_1 . В частности, k'' содержит число 3 и не содержит 2. Константы k' и k'' содержат единственное общее число — 3. Поэтому, в соответствии с Утверждением 10, формула $Sk'P \wedge Sk''P$ эквивалентна $S3P$.

Приведем пример. Пусть k_1 есть 124. Тогда C^2 есть $S124P \wedge \neg P124S$. Осуществляем упомянутые выше эквивалентные преобразования: $S124P \wedge \neg P124S \Leftrightarrow S124P \wedge P35S \Leftrightarrow S124P \wedge S25P \Leftrightarrow S2P$. C^3 есть $P124S \wedge \neg S124P$. Осуществляем упомянутые выше эквивалентные преобразования: $P124S \wedge \neg S124P \Leftrightarrow S134P \wedge \neg S124P \Leftrightarrow S134P \wedge S35P \Leftrightarrow S3P$.

(a2) Пусть k_1 включает число 3 и не включает число 2. Тогда C^2 есть $Pk_1S \wedge \neg Sk_1P$, а C^3 есть $Sk_1P \wedge \neg Pk_1S$.

Обоснование аналогично случаю (a1).

(b) Докажем, что в языке L_K выразима константа 1, то есть существует формула C^1 этого языка, эквивалентная формуле $S1P$ в семантике универсального силлогистического языка.

K содержит $1/4$ -константу k_2 , которая включает число 1 и не включает число 4 либо включает число 4 и не включает число 1. K содержит также $1/5$ -константу k_3 , которая включает число 1 и не включает число 5 либо включает число 5 и не включает число 1.

Рассмотрим четыре возможных подслучая.

(b1) k_2 включает число 1 и не включает число 4, а k_3 включает число 1 и не включает число 5. Тогда C^1 есть $Sk_2P \wedge Sk_3P \wedge \neg C^2 \wedge \neg C^3$.

Поскольку C^2 эквивалентно $S2P$, а C^3 эквивалентно $S3P$, меняем подформулы $\neg C^2$ и $\neg C^3$ на эквивалентные им (в силу Утверждения 8) формулы $S1345P$ и $S1245P$. После этого у четырех конъюнктов оказывается всего одно общее число в составе силлогистических констант, а именно число 1. Поэтому вся конъюнктивная формула эквивалентна (в силу Утверждения 10) формуле $S1P$.

Приведем пример. Пусть k_2 есть 1235P, а k_3 — 1234. Осуществляем упомянутые выше эквивалентные преобразования: $S1235P \wedge S1234P \wedge \neg C^2 \wedge \neg C^3 \Leftrightarrow S1235P \wedge S1234P \wedge S1345P \wedge S1245P \Leftrightarrow S1P$.

(b2) k_2 включает число 1 и не включает число 4, а k_3 включает число 5 и не включает число 1. Тогда C^1 есть $Sk_2P \wedge \neg Sk_3P \wedge \neg C^2 \wedge \neg C^3$.

Заменим подформулу $\neg Sk_3P$ эквивалентной ей формулой $Sk'P$, где константа k' содержит те и только те числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которые не входят в k_3 , поэтому k' включает 1 и не включает 5. $\neg C^2$ и $\neg C^3$ заменяется эквивалентными формулами $S1345P$ и $S1245P$. После этого у четырех конъюнктов оказывается всего одно общее число (а именно 1) в составе силлогистических констант. Поэтому вся конъюнктивная формула эквивалентна формуле $S1P$.

(b3) k_2 включает число 4 и не включает число 1, а k_3 включает число 1 и не включает число 5. Тогда C^1 есть $\neg Sk_2P \wedge Sk_3P \wedge \neg C^2 \wedge \neg C^3$.

Обосновывается аналогично случаю (b2).

(b4) k_2 включает число 4 и не включает число 1, а k_3 включает число 5 и не включает число 1. Тогда C^1 есть $\neg Sk_2P \wedge \neg Sk_3P \wedge \neg C^2 \wedge \neg C^3$.

Производим следующие эквивалентные замены подформул: $\neg Sk_2P$ заменяем на $Sk'P$, где константа k' содержит те и только те числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которые не входят в k_2 , $\neg Sk_3P$ заменяем на $Sk''P$, где константа k'' содержит те и только те числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которые не входят в k_3 , $\neg C^2$ заменяем на $S1345P$, а $\neg C^3$ на $S1245P$. Константа k' содержит 1 и не содержит 4, константа k'' содержит 1 и не содержит 5. Единственным одинаковым числом в константах каждого из четырех полученных конъюнктов является 1. Поэтому конъюнктивная формула эквивалентна формуле $S1P$.

(с) Покажем, что в языке L_K выразима константа 4, то есть существует формула C^4 этого языка, эквивалентная формуле $S4P$ в семантике универсального силлогистического языка.

K содержит 1/4-константу k_2 , которая включает число 1 и не включает число 4 либо включает число 4 и не включает число 1. K содержит также

4/5-константу k_4 , которая включает число 4 и не включает число 5 либо включает число 5 и не включает число 4.

Возможны четыре подслучая:

(с1) k_2 включает число 1 и не включает число 4, а k_4 включает число 4 и не включает число 5. Тогда C^4 есть $\neg Sk_2P \wedge Sk_4P \wedge \neg C^2 \wedge \neg C^3$.

(с2) k_2 включает число 1 и не включает число 4, а k_4 включает число 5 и не включает число 4. Тогда C^4 есть $\neg Sk_2P \wedge \neg Sk_4P \wedge \neg C^2 \wedge \neg C^3$.

(с3) k_2 включает число 4 и не включает число 1, а k_4 включает число 4 и не включает число 5. Тогда C^4 есть $Sk_2P \wedge Sk_4P \wedge \neg C^2 \wedge \neg C^3$.

(с4) k_2 включает число 4 и не включает число 1, а k_4 включает число 5 и не включает число 4. Тогда C^4 есть $Sk_2P \wedge \neg Sk_4P \wedge \neg C^2 \wedge \neg C^3$.

Доказательство аналогично приведенному при разборе случая (b).

(d) Покажем, что в языке L_K выразима константа 5, то есть существует формула C^5 этого языка, эквивалентная формуле $S5P$ в семантике универсального силлогистического языка. C^5 есть $\neg C^1 \wedge \neg C^2 \wedge \neg C^3 \wedge \neg C^4$.

Осуществляем следующие эквивалентные замены: $\neg C^1$ заменяем на $S2345P$, $\neg C^2$ на $S1345P$, $\neg C^3$ на $S1245P$, $\neg C^4$ на $S1235P$. Силлогистические константы в четырех полученных конъюнктах содержат ровно одно одинаковое число, а именно 5. Поэтому, в силу Утверждения 10, конъюнктивная формула эквивалентна формуле $S5P$.

Таким образом, мы доказали, что в языке с множеством исходных констант K , которое содержит 2/3-константу k_1 , 1/4-константу k_2 , 1/5-константу k_3 и 4/5-константу k_4 , выразимы все однокомпонентные константы, а значит, в силу Теоремы 3, K является реляционно полным множеством. ■

Множество исходных констант $\{12, 1234\}$ (то есть $\{a, i\}$), посредством которых можно построить традиционную силлогистику, реляционно полно, поскольку оно содержит 2/3-константу (12), 1/4-константу (12), 1/5-константу (12 и 1234) и 4/5-константу (1234). Множества исходных констант ассерторической силлогистики Васильева ($\{12, 34, 5\}$) и логики классов Венна ($\{1, 2, 3, 4, 5\}$) также являются реляционно полными. Можно обнаружить и иные, не используемые в известных системах силлогистики языки, у которых множества исходных констант реляционно полны: $\{13, 24\}$, $\{35, 4\}$ и др.

Примерами неполных множеств силлогистических констант являются: $\{1234, 5\}$ (то есть $\{i, e\}$), так как оно не содержит 1/4-константы; $\{12, 345\}$ (то есть $\{a, o\}$), так как оно не содержит 4/5-константы; $\{1, 4, 5\}$, так как оно не содержит 2/3-константы; $\{15, 2, 3, 4\}$, так как оно не содержит 1/5-константы.

Литература

- Маркин, 2020 – *Маркин В.И.* Силлогистика как логика отношений между двумя непустыми множествами // Логические исследования. 2020. Т. 26. № 2. С. 39–57.
- Маркин, 2022 – *Маркин В.И.* Учение об обращении в универсальном силлогистическом языке // Третий Международный Конгресс Русского общества истории и философии науки «После постпозитивизма». М.: Изд-во РОИФН, 2022. С. 513–516.
- Маркин, 2023 – *Маркин В.И.* Критерии полноты для множества силлогистических констант // Тринадцатые Смирновские чтения по логике: материалы междунар. науч. конф. (г. Москва, 22–24 июня 2023 г.). М.: Издатель Воробьев А.В., 2023. С. 94–97.

VLADIMIR I. MARKIN

Relational completeness of a set of syllogistic constants

Vladimir I. Markin

Lomonosov Moscow State University,

27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.

E-mail: markin@philos.msu.ru

Abstract: Formerly, we offered the language and set theoretical semantics of positive syllogistic the alphabet of which contains all syllogistic constants. These constants are interpreted as the signs of different relationships between two non-empty sets (the extensions of general terms). Among these relationships we give accent to ‘Eulerian’ relationships: (1) equality, (2) strict inclusion of the first set into the second, (3) strict inclusion of the second set into the first, (4) overlap, (5) exclusion. The other relationships can be represented as various combinations of Eulerian. Every constant k in the ‘universal’ syllogistic language is encoded with a sequence of numbers from 1 to 5 in accordance with the diagrams where the proposition of the form SkP is true. We introduce the notion of the definability of a syllogistic constant in a ‘local’ syllogistic language that contains only some of such constants, and the notion of the relational completeness of a set of initial constants in a ‘local’ language. We set out the completeness criteria for a set of syllogistic constants. We prove that such a set is relationally complete iff it contains a constant including either 2 or 3, a constant including either 1 or 4, a constant including either 1 or 5, a constant including either 4 or 5.

Keywords: syllogistic, logical constants, formalized language, semantics, definability, relational completeness.

For citation: Markin V.I. “Relyatsionnaya polnota mnozhestva sillogisticheskikh konstant” [Relational completeness of a set of syllogistic constants], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 2, pp. 73–93. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-73-93. (In Russian)

References

- Markin, 2020 – Markin, V.I. “Sillogistika kak logika otnoshenii mezhdvu dvumya nepustymi mnozhestvami” [Syllogistic as a logic of the relations between two non-empty sets], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 39–57. (In Russian)
- Markin, 2022 – Markin, V.I. *Uchenie ob obrashchenii v universal’nom sillogisticheskoy yazyke* [The theory of conversion in the universal syllogistic language]. Proceedings of the 3d International congress of the Russian society of the history

- and philosophy of science “After post-positivism”. Moscow: RSHPS Publ., 2022, pp. 513–516. (In Russian)
- Markin, 2023 – Markin, V.I. *Kriterii polnoty dlya mnozhestva sillogisticheskikh konstant* [Completeness criteria for a set of syllogistic constants]. Proceedings of the 13th Smirnov’s readings on logic (Moscow 22–24 June 2023). Moscow: Vorob’ev A.V. Publ., 2023, pp. 94–97. (In Russian)

И.Ю. СЛЮСАРЕВ

Интерполяционная теорема Крейга для логики с оператором Руета*

Иван Юрьевич Слюсарев

МГУ имени М.В. Ломоносова.

Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.

Институт философии РАН.

Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

E-mail: ivan.slusarev@mail.ru

Аннотация:

Изучаемая здесь система — это логика, язык которой содержит унарную логическую связку, представляющую некоторую циклическую операцию на множестве истинностных значений и симулирующую своей двойной итерацией дедуктивные свойства отрицания классической логики высказываний. Эта унарная связка называется оператором Руета. Целью статьи является доказательство интерполяционной теоремы Крейга для логики с оператором Руета. Приводится определение логики с оператором Руета, ее адекватная секвенциальная аксиоматизация, строится новое секвенциальное исчисление в языке, обогащенном логическими константами, и доказывается интерполяционная теорема Крейга.

Ключевые слова: четырехзначная логика, теория доказательств, секвенциальное исчисление, устранимость сечения, обратимое правило, перевод, паранепротиворечивая логика, парapolная логика, циклическая операция

Для цитирования: *Слюсарев И.Ю.* Интерполяционная теорема Крейга для логики с оператором Руета // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 2. С. 94–113. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-94-113

Введение

В [Post, 1921] Э. Пост определил логику с унарной логической связкой, представляющей унарную циклическую операцию на множестве истинностных значений. Существуют и иные логики, включающие одноместные связки, которые представляют унарные циклические операции на множестве истинностных значений. Такого рода логикой является логика с оператором П. Руета. Впервые оператор Руета был представлен в [Ruet,

* Выражаю благодарность рецензентам за плодотворные комментарии и замечания.

1996] в контексте исследования функционально полных систем логических связок системы **FDE**. Позже в [Belikov et al., 2022] была определена логика с этим оператором, возникшая в контексте исследований логических связок, двойная итерация которых симулирует дедуктивные свойства классического отрицания. В [Ibid.] эта логика была поименована как **dCP** (dual classical paraconsistent logic), и она является двойственной логике **CP** (classical paraconsistent logic), представленной впервые в [Kamide, 2017]. **CP** является логикой, включающей в себя двойственную оператору Руэта унарную связку, которая представляет иную унарную циклическую операцию на четырехэлементном множестве в некоторой логической матрице. При этом в логике **CP** двойная итерация этой унарной связки симулирует дедуктивные свойства классической связки отрицания. Этим свойством обладает и оператор Руэта в логике **dCP**.

Логика L обладает интерполяционным свойством Крейга, если для всякой формулы $\varphi \rightarrow \psi$, принадлежащей L , существует такая формула χ , что (1) множество переменных χ содержится в пересечении множеств переменных формул φ и ψ и (2) формулы $\varphi \rightarrow \chi$ и $\chi \rightarrow \psi$ принадлежат L . Эта теорема используется в доказательстве теоремы Бета о неявной определмости терминов в теории. Заметим, что теорема Бета имеет методологическое применение.

Впервые интерполяционная теорема была доказана в [Craig, 1957] У. Крейгом в 1957 г. для классической логики предикатов. В [Шютте, 1967] К. Шютте доказал эту теорему для интуиционистской логики предикатов в 1962 г. А в 1977 г. Л.Л. Максимова доказала в [Максимова, 1977], что непротиворечивых суперинтуиционистских логик высказываний с интерполяционным свойством ровно 7 (теорема 3 из [Там же]). Для логики **CP** была доказана интерполяционная теорема в форме Крейга в [Kamide, 2017]. В доказательстве этой теоремы для логики **CP** использовалась функция перевода из языка логики **CP** в язык классической логики высказываний.

1. Логика **dCP**

Пусть $Var = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ — множество пропозициональных переменных. Алфавит A' пропозиционального языка L' — это множество $Var \cup \{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \cdot, \cdot, \cdot\}$, где $\sim$ — это унарная логическая связка, $\wedge, \vee, \rightarrow$ — это бинарные логические связки, $\cdot, \cdot, \cdot$ — это скобки. Алфавит A^* пропозиционального языка L^* есть $A' \cup \{\top, \perp\}$, где $\top, \perp$ — это логические константы.

Определение L' -формулы рекурсивно: (1) всякая $q \in Var$ есть L' -формула, (2) если φ, ψ являются L' -формулами, то $\sim\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ являются L' -формулами. Определение L^* -формулы также рекурсивно: (1) всякая $q \in Var$ есть L^* -формула, (2) $\top, \perp$ есть L^* -формулы,

(3) если φ, ψ являются L^* -формулами, то $\sim\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ являются L^* -формулами.

Принимается стандартное соглашение об опускании скобок в x -формулах, где $x \in \{L', L^*\}$. Через $\sim^k \varphi$ обозначим $\underbrace{\sim \dots \sim}_k \varphi$, где φ — x -формула и $x \in \{L', L^*\}$.

Определение 1. Логикой называем непустое множество x -формул, где $x \in \{L', L^*\}$, замкнутое относительно правила *modus ponens* и относительно правила пропозициональной подстановки.

Семантика для логики **dCP** была введена в [Belikov et al., 2022].

Определим интерпретацию языка L' как пару $\langle \mathcal{P}(\{t, f\}), v \rangle$, где $\mathcal{P}(\{t, f\}) = \{\{t, f\}, \{t\}, \{f\}, \emptyset\}$ и v — это отображение, действующее из Var в $\mathcal{P}(\{t, f\})$, называемое оценкой.

Определим отношения $\Vdash_v^t$ и $\Vdash_v^f$ рекурсивно следующим образом:

- $\Vdash_v^t q$, если $t \in v(q)$; $\Vdash_v^f q$, если $f \in v(q)$;
- $\Vdash_v^t \sim\varphi$, если $\nVdash_v^f \varphi$; $\Vdash_v^f \sim\varphi$, если $\Vdash_v^t \varphi$;
- $\Vdash_v^t \varphi \vee \psi$, если $\Vdash_v^t \varphi$ или $\Vdash_v^t \psi$; $\Vdash_v^f \varphi \vee \psi$, если $\Vdash_v^f \varphi$ и $\Vdash_v^f \psi$;
- $\Vdash_v^t \varphi \wedge \psi$, если $\Vdash_v^t \varphi$ и $\Vdash_v^t \psi$; $\Vdash_v^f \varphi \wedge \psi$, если $\Vdash_v^f \varphi$ или $\Vdash_v^f \psi$;
- $\Vdash_v^t \varphi \rightarrow \psi$, если $\nVdash_v^t \varphi$ или $\Vdash_v^t \psi$; $\Vdash_v^f \varphi \rightarrow \psi$, если $\Vdash_v^t \varphi$ и $\Vdash_v^f \psi$.

L' -формула φ называется **dCP**-общезначимой, если $\Vdash_v^t \varphi$ для всякой оценки v .

L' -формула φ следует из множества L' -формул Γ ($\Gamma \models_{\mathbf{dCP}} \varphi$), если для всякой оценки v верно следующее: если $\Vdash_v^t \chi$ для всякой L' -формулы $\chi \in \Gamma$, то $\Vdash_v^t \varphi$.

Обозначим через **dCP** множество всех **dCP**-общезначимых L' -формул.

Замечание 1. **dCP** является логикой.

2. Секвенциальные исчисления логики **dCP**

Приведем секвенциальное исчисление $\mathcal{G}'$, адекватно аксиоматизирующее логику **dCP** [Niki, 2023].

$$\begin{array}{c}
 [Ax_1] \quad \frac{}{p \Rightarrow p} \quad [Ax_2] \quad \frac{}{\sim p \Rightarrow \sim p} \\
 [w_L] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad [w_R] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
[cut] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, \varphi \quad \varphi, \Delta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Lambda} \\
\\
[\wedge_L] \quad \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad [\wedge_R] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \\
\\
[\vee_L] \quad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad [\vee_R] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
\\
[\rightarrow_L] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, \varphi \quad \psi, \Delta \Rightarrow \Lambda}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Lambda} \quad [\rightarrow_R] \quad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
\\
[\sim\sim_L] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\sim\sim\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad [\sim\sim_R] \quad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim\sim\varphi} \\
\\
[\sim\wedge_L] \quad \frac{\sim\varphi, \sim\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim(\varphi \wedge \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad [\sim\wedge_R] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim\varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim\psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim(\varphi \wedge \psi)} \\
\\
[\sim\vee_L] \quad \frac{\sim\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \sim\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim(\varphi \vee \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad [\sim\vee_R] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim\varphi, \sim\psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim(\varphi \vee \psi)} \\
\\
[\sim\rightarrow_L] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, \varphi \quad \sim\psi, \Delta \Rightarrow \Lambda}{\sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Lambda} \quad [\sim\rightarrow_R] \quad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim\psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim(\varphi \rightarrow \psi)}
\end{array}$$

Понятия $\mathcal{G}'$ -доказательства и $\mathcal{G}'$ -доказуемой секвенции определяются обычным образом. В частности, $\mathcal{G}'$ -доказательство имеет вид дерева.

Лемма 1 ([Niki, 2023]). $\vdash_{\mathcal{G}'} \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$.

Рассмотрим нижеследующие секвенциальные правила:

$$[R_1] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim^3\psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim^3(\varphi \rightarrow \psi)} \quad [R_2] \quad \frac{\varphi, \sim^3\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim^3(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Если в $\mathcal{G}'$ заменить секвенциальные правила $[\sim\rightarrow_L]$ и $[\sim\rightarrow_R]$ на секвенциальные правила $[R_1]$ и $[R_2]$, то получится секвенциальное исчисление $\mathcal{G}$, введенное в [Belikov et al., 2022].

Лемма 2. $\vdash_{\mathcal{G}'} \Gamma \Rightarrow \Delta$, если и только если $\vdash_{\mathcal{G}} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Доказательство. Будут рассмотрены правила, относительно которых исчисления отличаются друг от друга (правила $[\sim \rightarrow_L]$, $[\sim \rightarrow_R]$, $[R_1]$ и $[R_2]$). Остальные правила совпадают.

Докажем необходимость.

Случай применения $[\sim \rightarrow_L]$.

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, \varphi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \varphi} [w_L]}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Lambda, \varphi} [w_R] \quad \frac{\frac{\frac{\sim \psi, \Delta \Rightarrow \Lambda}{\Delta \Rightarrow \Lambda, \sim^3 \psi} [\sim \sim_R]}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Lambda, \sim^3 \psi} [w_L]}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Lambda, \sim^3 \psi} [w_R]}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Lambda, \sim^3(\varphi \rightarrow \psi)} [R_1] \quad \frac{\sim(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \sim(\varphi \rightarrow \psi)}{\sim^3(\varphi \rightarrow \psi), \sim(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow} [\sim \sim_L]}{\sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Lambda} [cut]$$

Случай применения $[\sim \rightarrow_R]$.

$$\frac{\frac{\sim(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \sim(\varphi \rightarrow \psi)}{\Rightarrow \sim^3(\varphi \rightarrow \psi), \sim(\varphi \rightarrow \psi)} [\sim \sim_R] \quad \frac{\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim \psi}{\varphi, \sim^3 \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} [\sim \sim_L]}{\sim^3(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta} [R_2]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim(\varphi \rightarrow \psi)} [cut]$$

Докажем достаточность.

Случай применения $[R_1]$.

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi, \sim^5 \psi}{\Rightarrow \varphi, \sim(\varphi \rightarrow \sim^4 \psi)} [\sim \rightarrow_R] \quad \frac{\frac{\frac{\varphi, \sim \psi \Rightarrow \sim \psi}{\varphi, \sim \psi, \sim^3 \psi \Rightarrow} [\sim \sim_L]}{\varphi, \sim \psi \Rightarrow \sim^5 \psi} [\sim \sim_R]}{\sim \psi \Rightarrow \sim(\varphi \rightarrow \sim^4 \psi)} [\sim \rightarrow_R]}{\sim(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \sim(\varphi \rightarrow \sim^4 \psi)} [\sim \rightarrow_L] \quad T}{\frac{\sim(\varphi \rightarrow \sim \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim^3(\varphi \rightarrow \sim \psi)} [\sim \sim_R]} [cut]$$

T =

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim^3 \psi}{\sim^5 \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} [\sim \sim_L]}{\sim(\varphi \rightarrow \sim^4 \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta} [\sim \rightarrow_L]$$

Случай применения $[R_2]$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi, \sim^3\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim^5\psi} [\sim\sim R] \quad \frac{\frac{\varphi, \sim\psi \Rightarrow \sim\psi}{\varphi \Rightarrow \sim\psi, \sim^3\psi} [\sim\sim R] \quad \frac{\varphi, \sim^5\psi \Rightarrow \sim\psi}{\varphi, \sim^5\psi \Rightarrow \sim\psi} [\sim\sim L] \quad \frac{\varphi \Rightarrow \sim\psi, \varphi}{\varphi \Rightarrow \sim\psi, \varphi} [\sim\rightarrow L]}{\frac{\varphi, \sim^5\psi \Rightarrow \sim\psi}{\varphi, \sim^5\psi \Rightarrow \sim\psi} [\sim\rightarrow R] \quad \frac{\varphi, \sim(\varphi \rightarrow \sim^4\psi) \Rightarrow \sim\psi}{\sim(\varphi \rightarrow \sim^4\psi) \Rightarrow \sim(\varphi \rightarrow \psi)} [\sim\rightarrow R]} \\
 \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim(\varphi \rightarrow \sim^4\psi)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim(\varphi \rightarrow \sim\psi)} [\sim\rightarrow R] \quad \frac{\sim(\varphi \rightarrow \sim^4\psi) \Rightarrow \sim(\varphi \rightarrow \psi)}{\sim(\varphi \rightarrow \sim\psi) \Rightarrow \sim(\varphi \rightarrow \psi)} [cut]}{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim(\varphi \rightarrow \sim\psi)}{\sim^3(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta} [\sim\sim R]}
 \end{array}$$

■

Теорема 1 ([Belikov et al., 2022]). $\vdash_{\mathcal{G}} \Gamma \Rightarrow \varphi$, если и только если $\Gamma \models_{dCP} \varphi$.

Из леммы 2 и теоремы 1 следует, что верна нижеследующая теорема 2.

Теорема 2. $\vdash_{\mathcal{G}'} \Gamma \Rightarrow \varphi$, если и только если $\Gamma \models_{dCP} \varphi$.

Через $\mathcal{G}' \ominus \{[cut]\}$ обозначим секвенциальное исчисление $\mathcal{G}'$ без правила $[cut]$ (правила сечения).

Теорема 3 ([Niki, 2023]). $\vdash_{\mathcal{G}'} \Gamma \Rightarrow \Delta$, если и только если $\vdash_{\mathcal{G}' \ominus \{[cut]\}} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

3. Преобразование секвенциального исчисления логики dCP

К секвенциальным правилам $\mathcal{G}'$ добавим секвенциальные правила.

$$\begin{array}{cc}
 [Ax_3] & \overline{\Rightarrow \top} \quad [Ax_4] & \overline{\perp \Rightarrow} \\
 [Ax_5] & \overline{\Rightarrow \sim\top} \quad [Ax_6] & \overline{\sim\perp \Rightarrow}
 \end{array}$$

Заменим правила $[\rightarrow_L]$ и $[\sim\rightarrow_L]$ на нижеследующие правила:

$$[\rightarrow'_L] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad [\sim\rightarrow'_L] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \sim\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Благодаря такой замене правил мы сможем получить более простое доказательство леммы 8.

Обозначим полученное исчисление через $\mathcal{G}^*$. Это исчисление будет использоваться в доказательстве интерполяционной теоремы Крейга для логики **dCP**.

Через $Var(\Gamma)$ обозначим множество всех пропозициональных переменных, которые входят в конечное множество L^* -формул Γ . Если φ — L^* -формула, то будем писать $Var(\varphi)$ вместо $Var(\{\varphi\})$. А если Γ_1, Γ_2 — множества L^* -формул, то будем писать $Var(\Gamma_1, \Gamma_2)$ вместо $Var(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

Определение 2. Пусть φ, ψ — L' -формулы и $Var(\varphi) \cap Var(\psi) \neq \emptyset$. Тогда отображение t из множества всех L^* -формул в множество всех L' -формул такое, что $t(q) = q$, $t(\top) = p_i \vee \sim \sim p_i$, где p_i — фиксированная пропозициональная переменная, являющаяся первой в пересчете пропозициональных переменных, принадлежащих множеству $Var(\varphi) \cap Var(\psi)$; $t(\perp) = p_i \wedge \sim \sim p_i$, где p_i — фиксированная пропозициональная переменная, являющаяся первой в пересчете пропозициональных переменных, принадлежащих множеству $Var(\varphi) \cap Var(\psi)$; $t(\sim \chi) = \sim t(\chi)$, $t(\chi_1 \circ \chi_2) = t(\chi_1) \circ t(\chi_2)$ (где $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$), будем называть переводом L^* в L' .

Через $t(\Gamma)$ обозначим $\{t(\varphi) \mid \varphi \in \Gamma\}$.

Лемма 3. Если $\vdash_{\mathcal{G}^*} \Gamma \Rightarrow \Delta$, то $\vdash_{\mathcal{G}'} t(\Gamma) \Rightarrow t(\Delta)$.

Для доказательства этой леммы воспользуемся индукцией по числу применений секвенциальных правил.

Доказательство. Нетривиальными случаями являются применения правил $[Ax_3], [Ax_4], [Ax_5], [Ax_6]$. Так как правило $[Ax_3]$ схоже с правилом $[Ax_5]$, а правило $[Ax_4]$ схоже с правилом $[Ax_6]$, то рассмотрим применения $[Ax_5], [Ax_6]$.

Пусть было применено правило $[Ax_5]$. По определению отображения $t(\sim \top) = \sim t(\top) = \sim(p_i \vee \sim \sim p_i)$, где p_i — фиксированная пропозициональная переменная, являющаяся первой в пересчете пропозициональных переменных, принадлежащих множеству $Var(\varphi) \cap Var(\psi) \neq \emptyset$.

$$\begin{array}{c} [Ax_2] \frac{}{\sim p_i \Rightarrow \sim p_i} \\ [\sim \sim_R] \frac{}{\Rightarrow \sim p_i, \sim^3 p_i} \\ [\sim \vee_R] \frac{}{\Rightarrow \sim(p_i \vee \sim \sim p_i)} \end{array}$$

Значит, $\vdash_{\mathcal{G}'} t(\sim \top)$.

Пусть было применено правило $[Ax_6]$. По определению отображения $t(\sim \perp) = \sim t(\perp) = \sim(p_i \wedge \sim \sim p_i)$, где p_i — фиксированная пропозициональная переменная, являющаяся первой в пересчете пропозициональных переменных, принадлежащих множеству $Var(\varphi) \cap Var(\psi) \neq \emptyset$.

$$[\sim \wedge_L] \frac{[\sim \sim L] \frac{[Ax_2] \frac{}{\sim p_i \Rightarrow \sim p_i}}{\sim p_i, \sim^3 p_i \Rightarrow}}{\sim(p_i \wedge \sim \sim p_i) \Rightarrow}$$

Значит, $\vdash_{\mathcal{G}'} t(\sim \perp) \Rightarrow$. ■

Лемма 4. Если $\vdash_{\mathcal{G}^*} \Gamma \Rightarrow \Delta$, то $\vdash_{\mathcal{G}' \ominus \{[cut]\}} t(\Gamma) \Rightarrow t(\Delta)$.

Доказательство. По лемме 3 получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}'} t(\Gamma) \Rightarrow t(\Delta)$. По теореме 3 заключаем, что $\vdash_{\mathcal{G}' \ominus \{[cut]\}} t(\Gamma) \Rightarrow t(\Delta)$. ■

Очевидна справедливость нижеследующей леммы.

Лемма 5. Если $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Gamma \Rightarrow \Delta$, то $\vdash_{\mathcal{G}^*} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Из леммы 4 и леммы 5 получаем, что верна лемма 6.

Лемма 6. Если $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Gamma \Rightarrow \Delta$, то $\vdash_{\mathcal{G}' \ominus \{[cut]\}} t(\Gamma) \Rightarrow t(\Delta)$.

Теорема 4. Если $\vdash_{\mathcal{G}^*} \Gamma \Rightarrow \Delta$, то $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Схематично опишем доказательство теоремы 4. Это доказательство аналогично оригинальному доказательству Г. Генцена из [Генцен, 1967]. Сначала правило $[cut]$ заменяется на правило смешения (см. [Там же]). Далее доказывается лемма о том, что всякое $\mathcal{G}^*$ -доказательство с применением правила смешения возможно преобразовать так, что оно не будет содержать ни одного применения правила смешения. А поскольку было устранено применение правила смешения, устранено и применение правила сечения. Для доказательства леммы об устранимости смешения используется вложенная индукция по двум параметрам:

- по числу вхождений логических связок в L^* -формулу,
- по числу применений секвенциальных правил.

Лемма 7. $\vdash_{\mathcal{G}^*} \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по числу вхождений логических связок в L^* -формулу χ . Рассмотрим случаи, когда $\chi = \sim \top$ и $\chi = \sim \perp$. Остальные случаи либо тривиальны (правила $[Ax_1]$, $[Ax_2]$), либо аналогичны (правила $[Ax_3]$, $[Ax_4]$), либо используют предположение индукции (случаи однопосылочных и двухпосылочных правил).

Случай $\chi = \sim\top$.

$$\frac{[w_L] \frac{[Ax_5] \frac{}{\sim\top} \Rightarrow \sim\top}{\sim\top \Rightarrow \sim\top}}{[w_R] \frac{\sim\top \Rightarrow \Delta, \sim\top}{\sim\top, \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim\top}}$$

Случай $\chi = \sim\perp$.

$$\frac{[w_L] \frac{[w_R] \frac{[Ax_6] \frac{}{\sim\perp} \Rightarrow \sim\perp}{\sim\perp \Rightarrow \sim\perp}}{\sim\perp \Rightarrow \Delta, \sim\perp}}{\sim\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim\perp}$$

■

Определение 3. Секвенциальные правила обратимы, если из доказуемости секвенции, стоящей под чертой, следует доказуемость секвенций, стоящих над чертой.

Лемма 8. Секвенциальные правила исчисления $\mathcal{G}^*$ обратимы.

Доказательство. Докажем обратимость правила $[\sim\rightarrow'_L]$. Относительно иных секвенциальных правил доказательство строится схожим образом.

Пусть $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{\text{cut}\}} \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta$. Из этого и **леммы 5** получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}^*} \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta$.

$$\frac{\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \sim\psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \sim(\varphi \rightarrow \sim\psi)} [\sim\rightarrow'_L] \quad \sim(\varphi \rightarrow \sim\psi), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} [\text{cut}]$$

$$\frac{\frac{\varphi, \sim\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim\psi}{\sim\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim(\varphi \rightarrow \sim\psi)} [\sim\rightarrow'_L] \quad \sim(\varphi \rightarrow \sim\psi), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} [\text{cut}]$$

Из этого, применяя **теорему 4**, получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{\text{cut}\}} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{\text{cut}\}} \sim\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

■

4. Интерполяционная теорема Крейга для логики dCP

Определение 4. Разбиением $\Gamma \Rightarrow \Delta$ называется пара $\langle \langle \Gamma_1; \Delta_1 \rangle, \langle \Gamma_2; \Delta_2 \rangle \rangle$, где $\langle \Gamma_1; \Delta_1 \rangle$ и $\langle \Gamma_2; \Delta_2 \rangle$ — обозначения для секвенций $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ и $\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$, и $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$.

Лемма 9. Если $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ и $\langle \langle \Gamma_1; \Delta_1 \rangle, \langle \Gamma_2; \Delta_2 \rangle \rangle$ — разбиение $\Gamma \Rightarrow \Delta$, то существует такая L^* -формула χ , что:

- (i) $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \chi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$,
- (ii) $Var(\chi) \subseteq Var(\Gamma_1, \Delta_1) \cap Var(\Gamma_2, \Delta_2)$.

Здесь χ называется интерполянтом разбиения $\langle \langle \Gamma_1; \Delta_1 \rangle, \langle \Gamma_2; \Delta_2 \rangle \rangle$.

Для доказательства **леммы 9** воспользуемся методом Маехары (см. [Такеути, 1978; Оно, 2019]).

Доказательство.

Нужно рассмотреть случаи (1) нульпосылочных, (2) однопосылочных и (3) двухпосылочных правил.

Случай (1). Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть результат применения нульпосылочного секвенциального правила.

Случай (1.1). Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть $p \Rightarrow p$. Возможны лишь следующие типы разбиения $\Gamma \Rightarrow \Delta$: (1.1.1) $\langle \langle \{p\}; \{p\} \rangle, \langle \emptyset; \emptyset \rangle \rangle$, (1.1.2) $\langle \langle \emptyset; \emptyset \rangle, \langle \{p\}; \{p\} \rangle \rangle$, (1.1.3) $\langle \langle \{p\}; \emptyset \rangle, \langle \emptyset; \{p\} \rangle \rangle$, (1.1.4) $\langle \langle \emptyset; \{p\} \rangle, \langle \{p\}; \emptyset \rangle \rangle$. Исчерпываемость числа типов разбиения здесь и далее в доказательстве обеспечивается числом различных возможных вхождений формул относительно интерполянта разбиения.

В случае (1.1.1) в качестве χ берем $\perp$.

$$[w_R] \frac{[Ax_1] \frac{}{p \Rightarrow p}}{p \Rightarrow p, \perp} \quad [Ax_4] \frac{}{\perp \Rightarrow}$$

В случае (1.1.2) в качестве χ берем $\top$.

$$[Ax_3] \frac{}{\Rightarrow \top} \quad [w_L] \frac{[Ax_1] \frac{}{p \Rightarrow p}}{\top, p \Rightarrow p}$$

В случае (1.1.3) в качестве χ берем p .

$$[Ax_1] \frac{}{p \Rightarrow p} \quad [Ax_1] \frac{}{p \Rightarrow p}$$

В случае (1.1.4) в качестве χ берем $\sim\sim p$.

$$[\sim\sim_R] \frac{[Ax_1] \overline{p \Rightarrow p}}{\Rightarrow p, \sim\sim p} \quad [\sim\sim_L] \frac{[Ax_1] \overline{p \Rightarrow p}}{\sim\sim p, p \Rightarrow}$$

Случай (1.2). Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть $\sim p \Rightarrow \sim p$. Возможны лишь следующие типы разбиения $\Gamma \Rightarrow \Delta$: (1.2.1) $\langle\langle\{\sim p\}; \{\sim p\}\rangle, \langle\emptyset; \emptyset\rangle$, (1.2.2) $\langle\langle\emptyset; \emptyset\rangle, \langle\{\sim p\}; \{\sim p\}\rangle$, (1.2.3) $\langle\langle\{\sim p\}; \emptyset\rangle, \langle\emptyset; \{\sim p\}\rangle$, (1.2.4) $\langle\langle\emptyset; \{\sim p\}\rangle, \langle\{\sim p\}; \emptyset\rangle$.

В случае (1.2.1) в качестве χ берем $\perp$.

$$[w_R] \frac{[Ax_2] \overline{\sim p \Rightarrow \sim p}}{\sim p \Rightarrow \sim p, \perp} \quad [Ax_4] \overline{\perp \Rightarrow}$$

В случае (1.2.2) в качестве χ берем $\top$.

$$[Ax_3] \overline{\Rightarrow \top} \quad [w_L] \frac{[Ax_2] \overline{\sim p \Rightarrow \sim p}}{\top, \sim p \Rightarrow \sim p}$$

В случае (1.2.3) в качестве χ берем $\sim p$.

$$[Ax_2] \overline{\sim p \Rightarrow \sim p} \quad [Ax_2] \overline{\sim p \Rightarrow \sim p}$$

В случае (1.2.4) в качестве χ берем $\sim^3 p$.

$$[\sim\sim_R] \frac{[Ax_2] \overline{\sim p \Rightarrow \sim p}}{\Rightarrow \sim p, \sim^3 p} \quad [\sim\sim_L] \frac{[Ax_2] \overline{\sim p \Rightarrow \sim p}}{\sim^3 p, \sim p \Rightarrow}$$

Случай (1.3). Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть $\Rightarrow \top$. Возможны лишь следующие типы разбиения $\Gamma \Rightarrow \Delta$: (1.3.1) $\langle\langle\emptyset; \{\top\}\rangle, \langle\emptyset; \emptyset\rangle$, (1.3.2) $\langle\langle\emptyset; \emptyset\rangle, \langle\emptyset; \{\top\}\rangle$.

В случае (1.3.1) в качестве χ берем $\perp$.

$$[w_R] \frac{[Ax_3] \overline{\Rightarrow \top}}{\Rightarrow \top, \perp} \quad [Ax_4] \overline{\perp \Rightarrow}$$

В случае (1.3.2) в качестве χ берем $\top$.

$$[Ax_3] \overline{\Rightarrow \top} \quad [w_L] \frac{[Ax_3] \overline{\Rightarrow \top}}{\top \Rightarrow \top}$$

Случай (1.4). Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть $\perp \Rightarrow$. Возможны лишь следующие типы разбиения $\Gamma \Rightarrow \Delta$: (1.4.1) $\langle \langle \{\perp\}; \emptyset \rangle, \langle \emptyset; \emptyset \rangle \rangle$, (1.4.2) $\langle \langle \emptyset; \emptyset \rangle, \langle \{\perp\}; \emptyset \rangle \rangle$.

В случае (1.4.1) в качестве χ берем $\perp$.

$$[w_R] \frac{[Ax_4] \frac{}{\perp \Rightarrow}}{\perp \Rightarrow \perp} \quad [Ax_4] \frac{}{\perp \Rightarrow}$$

В случае (1.4.2) в качестве χ берем $\top$.

$$[Ax_3] \frac{}{\Rightarrow \top} \quad [w_L] \frac{[Ax_4] \frac{}{\perp \Rightarrow}}{\top, \perp \Rightarrow}$$

Случай (1.5). Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть $\Rightarrow \sim \top$. Возможны лишь следующие типы разбиения $\Gamma \Rightarrow \Delta$: (1.5.1) $\langle \langle \emptyset; \{\sim \top\} \rangle, \langle \emptyset; \emptyset \rangle \rangle$, (1.5.2) $\langle \langle \emptyset; \emptyset \rangle, \langle \emptyset; \{\sim \top\} \rangle \rangle$.

В случае (1.5.1) в качестве χ берем $\sim \perp$.

$$[w_R] \frac{[Ax_5] \frac{}{\Rightarrow \sim \top}}{\Rightarrow \sim \top, \sim \perp} \quad [Ax_6] \frac{}{\sim \perp \Rightarrow}$$

В случае (1.5.2) в качестве χ берем $\sim \top$.

$$[Ax_5] \frac{}{\Rightarrow \sim \top} \quad [w_L] \frac{[Ax_5] \frac{}{\Rightarrow \sim \top}}{\sim \top \Rightarrow \sim \top}$$

Случай (1.6). Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть $\sim \perp \Rightarrow$. Возможны лишь следующие типы разбиения $\Gamma \Rightarrow \Delta$: (1.6.1) $\langle \langle \{\sim \perp\}; \emptyset \rangle, \langle \emptyset; \emptyset \rangle \rangle$, (1.6.2) $\langle \langle \emptyset; \emptyset \rangle, \langle \{\sim \perp\}; \emptyset \rangle \rangle$.

В случае (1.6.1) в качестве χ берем $\sim \perp$.

$$[w_R] \frac{[Ax_6] \frac{}{\sim \perp \Rightarrow}}{\sim \perp \Rightarrow \sim \perp} \quad [Ax_6] \frac{}{\sim \perp \Rightarrow}$$

В случае (1.6.2) в качестве χ берем $\sim \top$.

$$[Ax_5] \frac{}{\Rightarrow \sim \top} \quad [w_L] \frac{[Ax_6] \frac{}{\sim \perp \Rightarrow}}{\sim \top, \sim \perp \Rightarrow}$$

Условие (ii) справедливо для всех вышеизложенных случаев.

Случай (2). Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть результат применения однопосылочного секвенциального правила. Рассмотрим случай применения $[\sim \wedge_L]$. Остальные случаи схожи.

Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ получена применением секвенциального правила $[\sim \wedge_L]$, то есть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ имеет вид $\sim(\varphi \wedge \psi), \Gamma' \Rightarrow \Delta'$. Тогда возможны лишь следующие типы разбиения этой секвенции: $\langle \langle \sim(\varphi \wedge \psi), \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$ или $\langle \langle \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \sim(\varphi \wedge \psi), \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$.

Пусть имеет место следующий тип разбиения этой секвенции — $\langle \langle \sim(\varphi \wedge \psi), \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$. Используя предположение индукции и **лемму 8**, согласно которой $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \sim\varphi, \sim\psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, и беря разбиение $\langle \langle \sim\varphi, \sim\psi, \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$, получаем, что существует такая L^* -формула χ , что:

- (i') $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \sim\varphi, \sim\psi, \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \chi, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2$,
- (ii') $Var(\chi) \subseteq Var(\sim\varphi, \sim\psi, \Gamma'_1, \Delta'_1) \cap Var(\Gamma'_2, \Delta'_2)$.

Из (i'), (ii'), применяя секвенциальное правило $[\sim \wedge_L]$, получаем, что

- (i) $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \sim(\varphi \wedge \psi), \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \chi, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2$,
- (ii) $Var(\chi) \subseteq Var(\sim(\varphi \wedge \psi), \Gamma'_1, \Delta'_1) \cap Var(\Gamma'_2, \Delta'_2)$.

Пусть имеет место следующий тип разбиения этой секвенции — $\langle \langle \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \sim(\varphi \wedge \psi), \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$. Используя предположение индукции и **лемму 8**, согласно которой $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \sim\varphi, \sim\psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, и беря разбиение $\langle \langle \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \sim\varphi, \sim\psi, \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$, получаем, что существует такая L^* -формула χ , что:

- (i') $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \chi, \sim\varphi, \sim\psi, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2$,
- (ii') $Var(\chi) \subseteq Var(\Gamma'_1, \Delta'_1) \cap Var(\sim\varphi, \sim\psi, \Gamma'_2, \Delta'_2)$.

Из (i'), (ii'), применяя секвенциальное правило $[\sim \wedge_L]$, получаем, что

- (i) $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \chi, \sim(\varphi \wedge \psi), \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2$,
- (ii) $Var(\chi) \subseteq Var(\Gamma'_1, \Delta'_1) \cap Var(\sim(\varphi \wedge \psi), \Gamma'_2, \Delta'_2)$.

Случай (3). Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть результат применения двухпосылочного секвенциального правила.

Рассмотрим случай применения $[\sim \rightarrow_L]$. Остальные случаи схожи.

Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ получена применением секвенциального правила $[\sim \rightarrow_L]$, то есть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ имеет вид $\sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma' \Rightarrow \Delta'$. Тогда возможны лишь следующие типы разбиения этой секвенции: $\langle \langle \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$ или $\langle \langle \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$.

Пусть имеет место следующий тип разбиения этой секвенции — $\langle \langle \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$. Используя предположение индукции и **лемму 8**, согласно которой $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Gamma' \Rightarrow \Delta', \varphi, \vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \sim\psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, и беря разбиения $\langle \langle \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle, \langle \Gamma'_1; \Delta'_1, \varphi \rangle \rangle$ и $\langle \langle \sim\psi, \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$, получаем, что существует такая L^* -формула χ_1 , что:

- (i') $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2, \chi_1$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \chi_1, \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \varphi$,

(ii') $Var(\chi_1) \subseteq Var(\Gamma'_2, \Delta'_2) \cap Var(\Gamma'_1, \Delta'_1, \varphi)$; и существует такая L^* -формула χ_2 , что:

- (i'') $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \sim\psi, \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi_2$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \chi_2, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2$,
(ii'') $Var(\chi_2) \subseteq Var(\sim\psi, \Gamma'_1, \Delta'_1) \cap Var(\Gamma'_2, \Delta'_2)$.

Тогда

$$\frac{\frac{\chi_1, \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \varphi \quad \sim\psi, \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi_2}{\sim(\varphi \rightarrow \psi), \chi_1, \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi_2} [\sim \rightarrow'_L]}{\sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi_1 \rightarrow \chi_2} [\sim \rightarrow'_R]$$

$$\frac{\Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2, \chi_1 \quad \chi_2, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2}{\chi_1 \rightarrow \chi_2, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2} [\sim \rightarrow'_L]$$

Следовательно,

- (i) $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi_1 \rightarrow \chi_2$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \chi_1 \rightarrow \chi_2, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2$,

а из (ii') и (ii'') легко заключить, что

- (ii) $Var(\chi_1 \rightarrow \chi_2) \subseteq Var(\sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_1, \Delta'_1) \cap Var(\Gamma'_2, \Delta'_2)$.

Положив в качестве χ L^* -формулу $\chi_1 \rightarrow \chi_2$, заключаем, что

- (i) $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \chi, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2$,
(ii) $Var(\chi) \subseteq Var(\sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_1, \Delta'_1) \cap Var(\Gamma'_2, \Delta'_2)$.

Пусть имеет место следующий тип разбиения этой секвенции — $\langle \langle \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$. Используя предположение индукции и **лемму 8**, согласно которой $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \Gamma' \Rightarrow \Delta', \varphi, \vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \sim\psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, и беря разбиения $\langle \langle \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \Gamma'_2; \Delta'_2, \varphi \rangle \rangle$ и $\langle \langle \Gamma'_1; \Delta'_1 \rangle, \langle \sim\psi, \Gamma'_2; \Delta'_2 \rangle \rangle$, получаем, что существует такая L^* -формула χ_1 , что:

- (i') $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi_1$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \chi_1, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2, \varphi$,

(ii') $Var(\chi_1) \subseteq Var(\Gamma'_1, \Delta'_1) \cap Var(\Gamma'_2, \Delta'_2, \varphi)$; и существует такая L^* -формула χ_2 , что:

- (i'') $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi_2$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{cut\}} \chi_2, \sim\psi, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2$,

- (ii'') $Var(\chi) \subseteq Var(\Gamma'_1, \Delta'_1) \cap Var(\sim\psi, \Gamma'_2, \Delta'_2)$.

Тогда

$$\frac{\frac{\chi_1, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2, \varphi}{\chi_1, \chi_2, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2, \varphi} [w_L] \quad \frac{\chi_2, \sim\psi, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2}{\sim\psi, \chi_1, \chi_2, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2} [w_L]}{\frac{\chi_1, \chi_2, \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2}{\chi_1 \wedge \chi_2, \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2} [\wedge_L]} [\sim \rightarrow'_L]$$

$$\frac{\Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi_1 \quad \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi_2}{\Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi_1 \wedge \chi_2} [\wedge_R]$$

Следовательно,

(i) $\vdash_{\mathcal{G}^*\ominus\{cut\}} \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi_1 \wedge \chi_2$ и $\vdash_{\mathcal{G}^*\ominus\{cut\}} \chi_1 \wedge \chi_2, \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2$,
а из (ii') и (ii'') легко заключить, что

(ii) $Var(\chi_1 \wedge \chi_2) \subseteq Var(\Gamma'_1, \Delta'_2) \cap Var(\sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_2, \Delta'_2)$.

Положив в качестве χ L^* -формулу $\chi_1 \wedge \chi_2$, заключаем, что

(i) $\vdash_{\mathcal{G}^*\ominus\{cut\}} \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1, \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^*\ominus\{cut\}} \chi, \sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2$,

(ii) $Var(\chi) \subseteq Var(\Gamma'_1, \Delta'_1) \cap Var(\sim(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma'_2, \Delta'_2)$. ■

Следующая лемма очевидна.

Лемма 10. Пусть Γ, Δ — множества L' -формул.

Тогда если $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} \Gamma \Rightarrow \Delta$, то $\vdash_{\mathcal{G}^*\ominus\{cut\}} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Далее докажем **теорему 5**, являющуюся интерполяционной теоремой Крейга. Ее формулировка сходна с формулировкой теоремы из [Kamide, 2017], но способ доказательства отличается.

Теорема 5. Пусть $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} \varphi \Rightarrow \psi$, где φ, ψ — L' -формулы.

Тогда если $Var(\varphi) \cap Var(\psi) \neq \emptyset$, то существует такая L' -формула χ , что:

(i) $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} \varphi \Rightarrow \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} \chi \Rightarrow \psi$,

(ii) $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi) \cap Var(\psi)$.

Если $Var(\varphi) \cap Var(\psi) = \emptyset$, то

(iii) $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} \varphi \Rightarrow \sim\sim\varphi$ или $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} \psi \Rightarrow \psi$.

Доказательство.

Допустим, что $Var(\varphi) \cap Var(\psi) \neq \emptyset$. Опираясь на **лемму 10**, заключаем, что $\vdash_{\mathcal{G}^*\ominus\{cut\}} \varphi \Rightarrow \psi$. Тогда, применяя **лемму 9**, положив в качестве $\Gamma_1 = \{\varphi\}$, в качестве $\Delta_2 = \{\psi\}$, а Δ_1 и Γ_2 положив пустыми, получаем, что существует такая L^* -формула χ , что:

(i) $\vdash_{\mathcal{G}^*\ominus\{cut\}} \varphi \Rightarrow \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^*\ominus\{cut\}} \chi \Rightarrow \psi$,

(ii) $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi) \cap Var(\psi)$.

Применяя **лемму 6**, получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} t(\varphi) \Rightarrow t(\chi)$ и $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} t(\chi) \Rightarrow t(\psi)$. Утверждение $Var(t(\chi)) \subseteq Var(t(\varphi)) \cap Var(t(\psi))$ будет также верно в силу определения перевода t . Так как исходно φ и ψ есть L' -формулы, то $t(\varphi) = \varphi$ и $t(\psi) = \psi$. Тогда $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} \varphi \Rightarrow t(\chi)$ и $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} t(\chi) \Rightarrow \psi$, $Var(t(\chi)) \subseteq Var(\varphi) \cap Var(\psi)$.

Значит, существует такая L' -формула χ , что:

(i) $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} \varphi \Rightarrow \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}'\ominus\{cut\}} \chi \Rightarrow \psi$,

(ii) $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi) \cap Var(\psi)$.

Допустим теперь, что $Var(\varphi) \cap Var(\psi) = \emptyset$. Опираясь на **лемму 10**, заключаем, что $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \varphi \Rightarrow \psi$. Опираясь на **лемму 9**, положив в качестве $\Gamma_1 = \{\varphi\}$, в качестве $\Delta_2 = \{\psi\}$, а Δ_1 и Γ_2 положив пустыми, получаем, что существует такая L^* -формула χ , что:

- (i) $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \varphi \Rightarrow \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \chi \Rightarrow \psi$,
- (ii) $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi) \cap Var(\psi)$.

Так как $Var(\varphi) \cap Var(\psi) = \emptyset$, получаем, что существует такая L^* -формула χ , что:

- (i) $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \varphi \Rightarrow \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \chi \Rightarrow \psi$,
- (ii) $Var(\chi) \subseteq \emptyset$.

Утверждение (ii) выполнится только при условии, что $Var(\chi) = \emptyset$, а значит, χ — L^* -формула без пропозициональных переменных.

Следовательно, существует такая L^* -формула χ , что:

- (i) $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \varphi \Rightarrow \chi$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \chi \Rightarrow \psi$,
- (ii) χ — L^* -формула без пропозициональных переменных.

Пусть χ есть $\top$. Тогда $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \varphi \Rightarrow \top$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \top \Rightarrow \psi$. По **лемме 5**, получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}^*} \top \Rightarrow \psi$. Поскольку $\vdash_{\mathcal{G}^*} \Rightarrow \top$, применяя секвенциальное правило $[cut]$ к секвенции $\vdash_{\mathcal{G}^*} \Rightarrow \top$ и секвенции $\vdash_{\mathcal{G}^*} \top \Rightarrow \psi$, получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}^*} \Rightarrow \psi$, а значит, применяя **теорему 4**, получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow \psi$, а значит, $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow \sim\sim\varphi$ или $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow \psi$.

Пусть χ есть $\perp$. Тогда $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \varphi \Rightarrow \perp$ и $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \perp \Rightarrow \psi$. По **лемме 5**, получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}^*} \varphi \Rightarrow \perp$. Поскольку $\vdash_{\mathcal{G}^*} \perp \Rightarrow$, применяя секвенциальное правило $[cut]$ к секвенции $\vdash_{\mathcal{G}^*} \varphi \Rightarrow \perp$ и $\vdash_{\mathcal{G}^*} \perp \Rightarrow$, получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}^*} \varphi \Rightarrow$. Применяя секвенциальное правило $[\sim\sim_R]$, получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}^*} \Rightarrow \sim\sim\varphi$, а значит, применяя **теорему 4**, получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow \sim\sim\varphi$, а значит, $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow \sim\sim\varphi$ или $\vdash_{\mathcal{G}^* \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow \psi$.

Случай, когда χ — сложная L^* -формула без пропозициональных переменных, рассматривается схожим образом. Заметим, что в случае для формулы χ , построенной из констант при помощи $\sim$, нам понадобятся правила $[Ax_5]$ и $[Ax_6]$.

Поскольку исходно φ и ψ есть L' -формулы, то $t(\varphi) = \varphi$ и $t(\psi) = \psi$. Тогда, применяя **лемму 6**, получаем, что $\vdash_{\mathcal{G}' \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow t(\sim\sim\varphi)$ или $\vdash_{\mathcal{G}' \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow t(\psi)$. Из вышеприведенных утверждений заключаем, что $\vdash_{\mathcal{G}' \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow \sim\sim\varphi$ или $\vdash_{\mathcal{G}' \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow \psi$.

Получаем тогда, что если $Var(\varphi) \cap Var(\psi) = \emptyset$, то

- (iii) $\vdash_{\mathcal{G}' \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow \sim\sim\varphi$ или $\vdash_{\mathcal{G}' \ominus \{[cut]\}} \Rightarrow \psi$.

■

Таким образом, опираясь на **теорему 2** и **теорему 5**, получаем, что верна интерполяционная теорема Крейга для логики с оператором Руэта (**dCP**).

5. Заключение

Сформулируем **гипотезу**, касающуюся интерполяционного свойства Крейга для схожих с **dCP** логик.

Гипотеза. Пусть $M = \langle \mathcal{P}^n(\{t, f\}), g^1, \{f_i^2\}_{i=1\dots k}, D \rangle$ — конечная логическая матрица, где g^1 — унарная циклическая операция на $\mathcal{P}^n(\{t, f\})$, $\{f_i^2\}_{i=1\dots k}$ — конечное число бинарных операций на $\mathcal{P}^n(\{t, f\})$, а $D \subseteq \mathcal{P}^n(\{t, f\})$; $L(M)$ — логика в алфавите, не содержащем констант и содержащем пропозициональные переменные, унарную логическую связку и конечное число бинарных логических связок. Тогда имеет место интерполяционное свойство Крейга для $L(M)$, если и только если в секвенциальное исчисление для $L(M)$ добавить $|\mathcal{P}^n(\{t, f\})| = m$ новых нульпосылочных правил и расширить алфавит константами $\top$ и $\perp$.

Кроме того, для логики **dCP** неизвестно свойство Линдона, которое является более сильным свойством по формулировке, нежели свойство Крейга. Известно, что существуют логики, обладающие интерполяционным свойством Крейга, но не обладающие свойством Линдона (см. [Максимова, 1982]). Автор не успел рассмотреть свойство Линдона для логики **dCP**, что является также одной из будущих целей исследования.

Литература

- Генцен, 1967 — Генцен Г. Исследование логического вывода // Математическая теория логического вывода / Под ред. А.В. Идельсона, Г.Е. Минца. М.: Наука, 1967. С. 9–74.
- Максимова, 1977 — Максимова Л.Л. Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. № 6. С. 643–681.
- Максимова, 1982 — Максимова Л.Л. Интерполяционная теорема Линдона в модальных логиках // Труды института математики. 1982. Т. 2. С. 45–55.
- Такеути, 1978 — Такеути Г. Теория доказательств. М.: Мир, 1978. 412 с.
- Шютте, 1967 — Шютте К. Интерполяционная теорема для интуиционистской логики предикатов // Математическая теория логического вывода / Под ред. А.В. Идельсона, Г.Е. Минца. М.: Наука, 1967. С. 285–295.
- Belikov et al., 2022 — Belikov A.A., Grigoriev O.M., Zaitsev D.V. On connegation // Relevance Logics and other Tools for Reasoning. Essays in Honor of J. Michael Dunn. 2022. Vol. 46. P. 73–88.
- Craig, 1957 — Craig W. Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorem // Journal of Symbolic Logic. 1957. Vol. 22. P. 250–268.
- Kamide, 2017 — Kamide N. Paraconsistent double negations as classical and intuitionistic negations // Studia Logica. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1167–1191.
- Niki, 2023 — Niki S. Double Negation as Minimal Negation // Journal of Logic, Language and Information. 2023. Vol. 32. No. 5. P. 861–886.

-
- Ono, 2019 – *Ono H.* Theory and Algebra in Logic. Singapore: Springer, 2019. 164 p.
- Post, 1921 – *Post E.* Introduction to a general theory of elementary propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol. 43. No. 3. P. 163–185.
- Ruet, 1996 – *Ruet P.* Complete set of connectives and complete sequent calculus for Belnap's logic // Tech. rep., Ecole Normale Supérieure. Logic Colloquium. Paris, France: Document LIENS-96–28, 1996. P. 1–17.

IVAN YU. SLIUSAREV

Craig's interpolation theorem for logic with the Ruet operator

Ivan Yu. Sliusarev

Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: ivan.slusarev@mail.ru

Abstract: The system with the Ruet operator studied here is a logic, the language of which contains a unary logical connective representing a certain cyclic operation on a set of truth values and simulating with its double iteration the deductive properties of negation of classical propositional logic. This unary connective is called the Ruet operator. The purpose of this article is to prove Craig's interpolation theorem for a logic with the Ruet operator. The definition of logic with the Ruet operator is given, an adequate sequent axiomatization of this logic is given, a new sequent calculus is constructed in a language enriched with logical constants and Craig's interpolation theorem for this logic is proved.

Keywords: four-valued logic, proof theory, sequent calculus, cut-elimination, reversible rule, translation, paraconsistent logic, paracomplete logic, cyclic operation

For citation: Sliusarev I. "Interpolyatsionnaya teorema Kreiga dlya logiki s operatorom Rueta" [Craig's interpolation theorem for logic with the Ruet operator], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 2, pp. 94–113. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-94-113. (In Russian)

References

- Belikov et al., 2022 – Belikov, A.A., Grigoriev, O.M., Zaitsev, D.V. "On connegation", *Relevance Logics and other Tools for Reasoning. Essays in Honor of J. Michael Dunn*, 2022, Vol. 46, pp. 73–88.
- Craig, 1957 – Craig, W. "Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorem", *Journal of Symbolic Logic*, 1957, Vol. 22, pp. 250–268.
- Gentzen, 1967 – Gentzen, G. "Issledovanie logicheskogo vyvoda" [Investigations into Logical Deduction], in: *Matematicheskaya teoriya logicheskogo vyvoda* [Mathematical theory of logical inference], ed. by A.V. Idelson, G.E. Mints. Moscow: Nauka, 1967, pp. 9–74. (In Russian)
- Kamide, 2017 – Kamide, N. "Paraconsistent double negations as classical and intuitionistic negations", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1167–1191.

- Maksimova, 1977 – Maksimova, L.L. “Teorema Krejga v superintuicionistskikh logikakh i amal’gamiruemye mnogoobraziya psevdobulevykh algebr” [Craig’s theorem in superintuitionistic logics and amalgamable varieties of pseudo-boolean algebras], *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 1977, Vol. 16, No. 6, pp. 643–681. (In Russian)
- Maksimova, 1982 – Maksimova, L.L. “Interpoliatsionnaya teorema Lindona v modal’nykh logikakh” [Lyndon Interpolation Theorem in Modal Logics], *Trudy instituta matematiki* [Proceedings of the Institute of Mathematics], 1982, Vol. 2, pp. 45–55. (In Russian)
- Niki, 2023 – Niki, S. “Double Negation as Minimal Negation”, *Journal of Logic, Language and Information*, 2023, Vol. 32, No. 5, pp. 861–886.
- Ono, 2019 – Ono, H. *Theory and Algebra in Logic*. Singapore: Springer, 2019. 164 pp.
- Post, 1921 – Post, E. “Introduction to a general theory of elementary propositions”, *American Journal of Mathematics*, 1921, Vol. 43, No. 3, pp. 163–185.
- Ruet, 1996 – Ruet, P. “Complete set of connectives and complete sequent calculus for Belnap’s logic”, in: *Tech. rep., Ecole Normale Supérieure. Logic Colloquium*. Paris, France: Document LIENS-96–28, 1996, pp. 1–17.
- Schütte, 1967 – Schütte, C. “Interpolyatsionnaya teorema dlya intuicionistskoi logiki predikatov” [An interpolation theorem for intuitionistic predicate logic], in: *Matematicheskaya teoriya logicheskogo vyvoda* [mathematical theory of logical inference], Moscow: Nauka, 1967, pp. 285–295. (In Russian)
- Takeuti, 1978 – Takeuti, G. *Teoriya dokazatel’stv* [Proof theory]. Moscow: Mir, 1978. 412 pp. (In Russian)

Неклассическая логика
Non-classical Logic

Л.Ю. ДЕВЯТКИН

**Обобщенная паранепротиворечивость
в трехзначных логиках: критерий максимальности**

Леонид Юрьевич Десяткин

Институт философии РАН.

Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Аннотация: В статье предложено обобщенное описание свойства паранепротиворечивости, независимое от наличия отрицания в языке рассматриваемой логики. Найдены необходимые и достаточные условия максимальности данного свойства для трехзначных логик с двумя выделенными значениями, операции которых совпадают с операциями классической логики в том же языке, когда область интерпретации ограничена классическими значениями. Эти условия сформулированы в терминах выразительных возможностей операций в трехзначных логических матрицах. Называем пропозициональную логику обобщенно паранепротиворечивой, если некоторое множество формул в этой логике не является инконсистентным, однако оно является таковым с точки зрения классической логики, сформулированной в том же языке. Называем логику максимально обобщенно паранепротиворечивой, если она обобщенно паранепротиворечива, но ни одна ее собственная надлогика не обладает этим свойством. В статье рассматриваются трехзначные логические матрицы с двумя выделенными значениями, операции которых содержатся в клоне функций, сохраняющих классические значения, но не содержатся ни в одном из пяти предполных клонов данного клона, соответствующих предполным клонам решетки клонов Булевых функций. Показано, что логика, характеризуемая матрицей такого рода, является максимально обобщенно паранепротиворечивой, если и только если операции ее матрицы не сохраняют отношения из установленного нами семейства, определенные на универсуме этой матрицы.

Ключевые слова: пропозициональная логика, многозначные логики, паранепротиворечивость, выразительные возможности формальных языков, логические отношения

Для цитирования: Десяткин Л.Ю. Обобщенная паранепротиворечивость в трехзначных логиках: критерий максимальности // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 2. С. 114–142. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-114-142

1. Введение

Станислав Яськовский, один из родоначальников паранепротиворечивой логики, описывает проблему построения логики инконсистентных (*inconsistent*) систем следующим образом: «Задача состоит в том, чтобы найти систему исчисления высказываний, которая (1) в ходе применения к инконсистентным системам не всегда приведет к переполнению, (2) будет достаточно богата для практических рассуждений, (3) будет иметь интуитивное обоснование» [Jaśkowski, 1969].

В теории пропозициональных исчислений множество формул называется инконсистентным, когда из него выводима любая формула [Wójcicki, 1988, р. 24]. Именно выводимость любой формулы из некоторого множества посылок имеет в виду Яськовский, когда пишет о «переполнении».

Существует два типа инконсистентных множеств: противоречивые и контрарные. Формулы противоречивого множества не могут быть ни одновременно истинными, ни одновременно ложными. Формулы контрарного множества не могут быть одновременно истинными, но могут оказаться одновременно ложными.

В современной литературе паранепротиворечивость обычно определяется посредством отказа от «принципа взрывоопасности»: в паранепротиворечивой логике из α и $\neg\alpha$ следует не каждая формула. обстоятельный обзор проблемы определения паранепротиворечивости доступен в [Томова, 2023].

Подобный подход к определению паранепротиворечивости фокусирует внимание исследователей на инконсистентных множествах противоречивого типа, ведь именно таково множество $\{\alpha, \neg\alpha\}$, лежащее в основе приведенного выше критерия паранепротиворечивости. Кроме того, существование противоречивых множеств в классической логике напрямую связано с существованием в ней отрицания как логического оператора. Таким образом, в исследованиях по паранепротиворечивой логике на первый план выходят свойства отрицания. Ставится задача скорректировать свойства отрицания таким образом, чтобы наличие в посылках формулы вместе с ее отрицанием не делало множество посылок инконсистентным.

В то же время контрарные множества могут существовать и в языковом фрагменте классической логики, свободном от отрицания. Например, это может быть ее позитивный фрагмент с базовыми связками $\{\wedge, \vee\}$. Примером инконсистентного множества контрарного типа в позитивном фрагменте классической логики служит $\{p, q, p \vee q\}$.

Цель настоящей работы — распространить определение понятия паранепротиворечивости на контрарные множества, сделав предметом исследо-

вания любые инконсистентные множества, а не только противоречивые, и освободить это понятие от привязки к свойствам отрицания.

Мы вводим понятие обобщенной паранепротиворечивости. Логика обобщенно паранепротиворечива, если некоторое множество формул в ней не является инконсистентным, однако является таковым с точки зрения классической логики, сформулированной в том же языке. Далее, мы осуществляем сравнительный анализ стандартного определения паранепротиворечивости через «принцип взрывоопасности» с предложенным нами.

Предметом анализа выступает понятие максимальной паранепротиворечивости. Н. да Коста выдвинул неформальное требование к теории инконсистентных систем, состоящее в том, что она должна содержать «наибольшую часть» схем аксиом и правил классической логики, которые не входят в противоречие с условием паранепротиворечивости [da Costa, 1974]. Одна из формальных трактовок этого требования предложена в [Arieli et al., 2011]: логика является максимально паранепротиворечивой, если она паранепротиворечива, но ни одна ее собственная надлогика не обладает этим свойством.

Объектом исследования являются трехзначные паранепротиворечивые логики, операции которых сохраняют классические значения истинности. К данному типу относится большинство трехзначных паранепротиворечивых логик, известных в литературе (см. [Девяткин, 2016], а также ссылки, приведенные в данной работе).

Мы представляем два основных результата. Во-первых, показано, что все трехзначные логики рассматриваемого нами типа являются максимально паранепротиворечивыми в смысле [Arieli et al., 2011] (Теорема 1). Во-вторых, даны необходимые и достаточные условия, которым должны отвечать операции подобных трехзначных логик, чтобы эти логики являлись максимально обобщенно паранепротиворечивыми (Теорема 7).

2. Базовые определения и факты

В этом разделе мы определяем понятия и приводим результаты, на которые опирается дальнейшее исследование. Вводятся понятия множества порождающих алгебры, подуниверсума, пропозициональной логики, матричной семантики. Рассматриваются операции над логическими матрицами. Вводятся понятия $\neg$ -паранепротиворечивости и обобщенной паранепротиворечивости. Кроме того, рассматриваются понятия, относящиеся к теории функций многозначной логики, такие как замкнутый класс функций и сохранение функцией отношения. Поскольку тематика работы существенно пересекается с [Девяткин, 2023; Девяткин, 2024], многие определения заимствованы из этих статей.

Типом подобия (или *сигнатурой*) алгебр τ называем последовательность $(n_0, n_1, \dots, n_k, \dots)$ неотрицательных целых чисел, $k < o(\tau)$, где $o(\tau)$ — ординал, называемый *порядком* τ . Каждому n_k ($k < o(\tau)$) сопоставляется символ f_k , обозначающий n_k -местную операцию. *Алгебра* $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ *типа* τ — это такая пара, что A — непустое множество, и для каждого $k < o(\tau)$ мы интерпретируем f_k как n_k -местную операцию $(f_k)_{\mathcal{A}}$ на A , то есть $F = \langle (f_0)_{\mathcal{A}}, (f_1)_{\mathcal{A}}, \dots, (f_k)_{\mathcal{A}}, \dots \rangle$. Алгебры, относящиеся к одному и тому же типу, будем называть *подобными*.

Если $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ — алгебра, называем A *универсумом* $\mathcal{A}$, а элементы F — *базовыми операциями* $\mathcal{A}$. *Подуниверсум* $\mathcal{A}$ — это подмножество B множества A , замкнутое относительно базовых операций $\mathcal{A}$, то есть для каждой $(f_k)_{\mathcal{A}}$ из F верно, что $(f_k)_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{n_k}) \in B$, коль скоро $(a_1, \dots, a_{n_k}) \in B^{n_k}$. Если дана алгебра $\mathcal{A}$, определим для каждого $X \subseteq A$:

$$Sg(X) = \bigcap \{B : X \subseteq B, \text{ и } B \text{ — подуниверсум } \mathcal{A}\}.$$

Читаем $Sg(X)$ как «подуниверсум, порожденный X ». Если $X \subseteq A$ и $Sg(X) = A$, говорим, что X *порождает* $\mathcal{A}$ или что X — *множество порождающих* $\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *свободной в классе алгебр* K , если она имеет такое порождающее множество X , что каждое отображение X в любую алгебру $\mathcal{A}'$ из K может быть расширено до гомоморфизма из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$. Алгебру, свободную в классе всех алгебр, подобных ей, называем *абсолютно свободной*.

Называем *пропозициональным языком* абсолютно свободную алгебру формул $\mathcal{S} = \langle S, Con \rangle$, порожденную множеством своих пропозициональных переменных, где S — множество всех формул языка $\mathcal{S}$, а Con — множество алгебраических функций на S , не обязательно конечное.

Пусть C — оператор, определенный на $\mathcal{P}(S)$, множестве всех подмножеств универсума $\mathcal{S}$. Называем C *следованием* в $\mathcal{S}$, если для всех $X, Y \subseteq S$ выполнены следующие условия: $X \subseteq C(X)$; $X \subseteq Y$ влечет $C(X) \subseteq C(Y)$; $C(C(X)) \subseteq C(X)$.

Если $\varepsilon C(X) \subseteq C(\varepsilon X)$ для любой подстановки ε языка $\mathcal{S}$, называем следование C *структурным*. Называем *пропозициональной логикой* пару $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C \rangle$, где $\mathcal{S}$ — пропозициональный язык, а C — структурное следование.

Пусть C_1 и C_2 — следования в $\mathcal{S}$. Определим порядок $\geq$ следующим образом: $C_2 \geq C_1$, если $C_1(X) \subseteq C_2(X)$ для всех $X \subseteq S$. Если $C_2 \geq C_1$ и $C_2 \neq C_1$, называем логику $\langle \mathcal{S}, C_2 \rangle$ *собственной надлогикой* $\langle \mathcal{S}, C_1 \rangle$.

Пусть $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C \rangle$ — пропозициональная логика, и язык $\mathcal{S}$ содержит унарную связку $\neg$. Называем $\neg$ *отрицанием*, если $\neg\alpha \notin C(\{\alpha\})$ и $\alpha \notin C(\{\neg\alpha\})$ для каждой формулы $\alpha \in S$.

Пусть $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C \rangle$ — пропозициональная логика, причем отрицание $\neg$ содержится в $\mathcal{S}$. Называем $\mathbf{L}$ $\neg$ -*паранепротиворечивой*, если $C(\{\alpha, \neg\alpha\}) \neq S$ для некоторой формулы $\alpha \in S$. Обозначим классическую пропозициональную логику в языке $\mathcal{S}$ как **СРС**, а ее следование — как $C_{СРС}$.

Называем пропозициональную логику $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C \rangle$ *обобщенно паранепротиворечивой*, если $C_{СРС}(X) = S$ и $C(X) \neq S$ для некоторого $X \subseteq S$.

Следующее понятие определяется единообразно для $\neg$ -паранепротиворечивости и обобщенной паранепротиворечивости. Называем паранепротиворечивую логику *максимально паранепротиворечивой*, если ни одна ее собственная надлогика не паранепротиворечива в том же смысле.

Логическая матрица — это структура $M = \langle A, F, D \rangle$, где A — множество, F — множество алгебраических функций на A , не обязательно конечное, а D — подмножество A , возможно, пустое. Называем D *множеством выделенных значений* M .

Если алгебры $\mathcal{S} = \langle S, Con \rangle$ и $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ имеют одинаковую сигнатуру, говорим, что M — *матрица для $\mathcal{S}$* . Если M — матрица для $\mathcal{S}$, гомоморфизм v из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой $\mathcal{S}$ в M* .

Определяем *следование C_M , порождаемое матрицей M* , следующим образом: $\alpha \in C_M(X)$, если для любой оценки v в M верно, что $v(\alpha) \in D$, коль скоро $v(X) \subseteq D$.

Называем M *характеристической матрицей для $\mathbf{L} = \langle \mathcal{S}, C \rangle$* , если $C = C_M$.

Называем логическую матрицу (максимально) паранепротиворечивой, если она является характеристической для какой-либо (максимально) паранепротиворечивой логики.

Говорим, что следование порождено классом матриц K , если выполнено следующее условие: $\alpha \in C_K(X)$, е.т.е. $\alpha \in C_{M_i}(X)$ для каждой $M_i \in K$. Иными словами, $C_K = \inf\{C_{M_i} \mid M_i \in K\}$. Называем матричную семантику K *адекватной для $\mathbf{L}$* , если $C_K = C$. Если K — адекватная матричная семантика для $\mathbf{L}$, говорим, что $\mathbf{L}$ *детерминирована семантикой K* .

Пусть $M = \langle A, F, D \rangle$ и $N = \langle B, G, E \rangle$ — логические матрицы, причем их алгебры $\langle A, F \rangle$ и $\langle B, G \rangle$ имеют одинаковую сигнатуру. Говорим, что φ — *матричный гомоморфизм из M в N* , если

- φ — отображение множества A в множество B ;
- $\varphi(f_i^n(a_1, \dots, a_n)) = g_i^n(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$ для каждой пары соответствующих операций $f_i^n \in F$, $g_i^n \in G$, $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$;
- $\varphi(a) \in E$, е.т.е. $a \in D$.

Если между M и N существует взаимно-однозначный гомоморфизм, говорим, что матрицы M и N *изоморфны*.

Факт 1. [Wójcicki, 1988, § 3.3.2 (D)] Пусть φ — матричный гомоморфизм из M в N . Тогда $C_M = C_{\varphi(M)} = C_{\varphi^{-1}(N)} \geq C_N$.

Пусть $M = \langle A, F, D \rangle$ и $N = \langle B, G, E \rangle$ — логические матрицы для $\mathcal{S}$. Говорим, что N — *подматрица* M , если $B \subseteq A$; $E \subseteq D \cap B$; $f^n(b_1, \dots, b_n) \in B$ для каждой функции $f^n \in F$ и любого $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$, то есть B является подуниверсумом алгебры $\langle A, F \rangle$. Обозначим как $S(K)$ множество всех изоморфных копий подматриц матриц, входящих в K .

Факт 2. [Wójcicki, 1988, § 3.3.2 (A)] Если N — подматрица M , то $C_N \geq C_M$.

Пусть $M_1, \dots, M_k$ — логические матрицы для $\mathcal{S}$, где $M_i = \langle A_i, F_i, D_i \rangle$. Называем матрицу $N = \langle B, G, E \rangle$ *прямым произведением* матриц $M_1, \dots, M_k$, если $B = A_1 \times \dots \times A_k$; $E = D_1 \times \dots \times D_k$;

$$\begin{aligned} &g_i((a_{1,1}, \dots, a_{k,1}), \dots, (a_{1,n}, \dots, a_{k,n})) = \\ &(f_{1,i}(a_{1,1}, \dots, a_{1,n}), \dots, f_{k,i}(a_{k,1}, \dots, a_{k,n})) \end{aligned}$$

для всех $f_{i,j} \in F_j$, $(a_{j,1}, \dots, a_{j,n}) \in A_j^n$.

Обозначим как $P_n(K)$ множество всех прямых произведений вида $M_1 \times \dots \times M_n$ матриц из класса $K \cup \{\tau_0, \tau_1\}$, где τ_0, τ_1 — одноэлементные матрицы, подобные матрицам из K , причем класс выделенных значений τ_0 пуст, а класс выделенных значений τ_1 совпадает с ее универсумом. Обозначим объединение всех $P_n(K)$ для каждого конечного $n \geq 1$ как $P_f(K)$.

Назовем логическую матрицу M *тривиальной*, если $C_M(X) = S$ для всех $X \subseteq S$. Матрица нетривиальна, если ее класс выделенных значений не пуст и не совпадает с универсумом данной матрицы.

Факт 3. [Zygmunt, 1974, Th. 1] Пусть M_1 и M_2 — нетривиальные логические матрицы для языка $\mathcal{S}$. Тогда для каждого $X \subseteq S$ верно следующее:

$$C_{M_1 \times M_2} = \begin{cases} S, & \text{если } C_{M_1}(X) = S \text{ или } C_{M_2}(X) = S, \\ C_{M_1}(X) \cap C_{M_2}(X) & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Факт 4. Пусть C и C' — структурные следования в языке $\mathcal{S}$, причем $C' \geq C$. Пусть K — такой класс матриц для $\mathcal{S}$, что $C = C_K$. Тогда найдется такой класс $K_0 \subseteq SP(K)$, что $C' = C_{K_0}$. Если K — конечный класс конечных матриц, то $K_0 \subseteq SP_f(K)$ [Wójcicki, 1988, § 4.5.7].

Если функция f реализуется формулой, которая содержит только символы функций $f_1, \dots, f_s$, а также символы переменных, то говорим, что функция f является *суперпозицией* функций $f_1, \dots, f_s$ или что f получена из функций $f_1, \dots, f_s$ с помощью *операции суперпозиции*.

Пусть F — произвольное множество функций, заданных на некотором множестве. *Замыканием* F называем множество $[F]$ всех функций, которые являются суперпозициями функций из F . Говорим, что множество функций F (функционально) *замкнуто*, если $F = [F]$. Множества такого рода также будем называть *замкнутыми классами функций*.

Пусть $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Обозначим как P_k множество всех алгебраических функций на E_k .

Называем *m-местным отношением* ϱ на E_k множество $\varrho \subseteq E_k^m$.

Говорим, что $f^n \in P_k$ *сохраняет отношение* ϱ^m на E_k (ϱ^m — *инвариант* f), если

$$f \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}) \\ f(a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,n}) \\ \vdots \\ f(a_{m,1}, a_{m,2}, \dots, a_{m,n}) \end{pmatrix} \in \varrho^m \text{ для всех}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \in \varrho^m.$$

Отношение ϱ^m является инвариантом f , е.т.е. ϱ^m — универсум подалгебры $\langle E_k, \{f\} \rangle^m$ [Лау, 2006, р. 130]. Условимся обозначать как $Pol(\varrho^m)$ класс всех таких функций, которые сохраняют отношение ϱ^m .

Предметом исследования являются пропозициональные логики, имеющие трехзначную характеристическую матрицу с двумя выделенными значениями, операции которых совпадают с таковыми в матрице классической логики, когда универсум ограничен классическими значениями.

Классическая логика может задаваться в разных языках, например: $\{\wedge, \vee, \supset, \neg\}$, $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\supset, \neg\}$, $\{\downarrow\}$. Это возможно в силу взаимной определимости операторов: $[\wedge, \vee, \supset, \neg] = [\wedge, \vee, \neg] = [\supset, \neg] = [\downarrow] = P_2$. Опираясь на функциональную полноту системы операций классической логики, определим двухзначную матрицу классической логики *CPC* без указания на конкретную сигнатуру языка $\mathcal{S}$:

$$CPC = \langle \{0, 1\}, F, \{1\} \rangle, \text{ где } [F] = P_2.$$

Введем следующие обозначения:

$$T_0 = \{0\}, T_1 = \{1\}, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что приведенные выше отношения являются таковыми как на E_2 , так и на E_3 .

Факт 5. [Марченков, 2004, §§ 1.5–1.6] Пусть $F \subseteq P_2$. Тогда F содержит такие функции f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 , не обязательно различные, что $f_1 \notin \text{Pol}(T_0)$, $f_2 \notin \text{Pol}(T_1)$, $f_3 \notin \text{Pol}(S)$, $f_4 \notin \text{Pol}(M)$, $f_5 \notin \text{Pol}(L)$, е.т.е. $[F] = P_2$.

Из Факта 5 вытекает Факт 6.

Факт 6. Пусть $F \subseteq P_3$. Тогда $F \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$ и F содержит такие функции f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 , не обязательно различные, что $f_1 \notin \text{Pol}(T_0)$, $f_2 \notin \text{Pol}(T_1)$, $f_3 \notin \text{Pol}(S)$, $f_4 \notin \text{Pol}(M)$, $f_5 \notin \text{Pol}(L)$, е.т.е. выполняются следующие условия:

1. Для каждой $g(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ найдется такая $f(x_1, \dots, x_n) \in [F]$, что $f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n)$, коль скоро $(a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$;
2. Для каждой $f(x_1, \dots, x_n) \in [F]$ найдется такая $g(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, что $f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n)$, коль скоро $(a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$.

В свою очередь, из Факта 6 и результатов, представленных в работе [Макагов, 2015], вытекает Факт 7.

Факт 7. Пусть $F \subseteq P_3 \cap \text{Pol}(\{0, 1\})$ и F содержит такие функции f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 , не обязательно различные, что $f_1 \notin \text{Pol}(T_0)$, $f_2 \notin \text{Pol}(T_1)$, $f_3 \notin \text{Pol}(S)$, $f_4 \notin \text{Pol}(M)$, $f_5 \notin \text{Pol}(L)$. Тогда $\downarrow_i \in [F]$ для некоторого $1 \leq i \leq 5$, причем $\downarrow_i$ отвечает одной из следующих таблиц:

$\downarrow_1$	0	1	2	$\downarrow_2$	0	1	2	$\downarrow_3$	0	1	2
0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	2
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
2	0	0	0	2	1	0	1	2	2	2	2

$\downarrow_4$	0	1	2	$\downarrow_5$	0	1	2
0	1	0	0	0	1	0	2
1	0	0	0	1	0	0	2
2	0	0	2	2	0	0	2

В завершение раздела примем две нотационные конвенции. Во-первых, условимся использовать одни и те же символы для связок пропозиционального языка и соответствующих им матричных операторов. Во-вторых, условимся обозначать наборы $(0, \dots, 0)$, $(1, \dots, 1)$, $(2, \dots, 2)$ как $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$ соответственно. Конкретная длина набора такого рода будет очевидна из контекста.

3. Результаты

В этом разделе излагаются основные результаты работы. Рассматриваются логики, имеющие характеристическую матрицу вида $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $[F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$ содержит такие функции f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 , не обязательно различные, что $f_1 \notin \text{Pol}(T_0)$, $f_2 \notin \text{Pol}(T_1)$, $f_3 \notin \text{Pol}(S)$, $f_4 \notin \text{Pol}(M)$, $f_5 \notin \text{Pol}(L)$. Раздел открывает первый общий результат: Теорема 1 демонстрирует, что каждая такая логика является максимально $\neg$ -паранепротиворечивой. Оставшаяся часть раздела посвящена критерию, которому должны отвечать операции матрицы описанного выше рода, чтобы она характеризовала максимально обобщенно паранепротиворечивую логику. Как вытекает из Факта 7, в каждой матрице, попадающей в поле нашего рассмотрения, выражима одна из операций вида $\downarrow_i$ ($1 \leq i \leq 5$). Для каждого из пяти возможных значений i мы приводим отдельную теорему, которая дает необходимые и достаточные условия максимальной логики, характеризуемой матрицей вида $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_i \in [F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$. Эти пять теорем используются как фундамент для общей Теоремы 7, где дается универсальный критерий максимальной обобщенной паранепротиворечивости в логиках интересующего нас типа.

Теорема 1. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $[F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$ содержит такие функции f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 , не обязательно различные, что $f_1 \notin \text{Pol}(T_0)$, $f_2 \notin \text{Pol}(T_1)$, $f_3 \notin \text{Pol}(S)$, $f_4 \notin \text{Pol}(M)$, $f_5 \notin \text{Pol}(L)$. В таком случае матрица M является максимально $\neg$ -паранепротиворечивой.

Доказательство. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$ — трехзначная $\neg$ -паранепротиворечивая матрица и $[F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$. Тогда в $[F]$ найдется такая функция $\neg$, что $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$, $\neg 2 \in \{1, 2\}$. Кроме того, поскольку $[F]$ содержит функции $f_1 \notin \text{Pol}(T_0)$, $f_2 \notin \text{Pol}(T_1)$, $f_3 \notin \text{Pol}(S)$, $f_4 \notin \text{Pol}(M)$, $f_5 \notin \text{Pol}(L)$, в $[F]$ найдется функция $\wedge$, такая что $0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$ и $1 \wedge 1 = 1$.

Допустим, что $C \geq C_M$. Тогда $C = C_K$ для некоторого $K \subseteq SP_f(M)$. Пусть $N \in SP_f(M)$. Тогда $N = \langle A, F, D \rangle$, где $A \subseteq \{0, 1, 2\}^n$, $D \subseteq \{1, 2\}^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Случай 1. $A = D$. Тогда $C_N(X) = S$ для всех $X \subseteq S$, и N не является $\neg$ -паранепротиворечивой матрицей.

Случай 2. $A \neq D$. Возможны два подслучая: либо $\tilde{2} \in D$, либо $\tilde{2} \notin D$.

Случай 2.1. $\tilde{2} \in D$. Допустим, что $F \subseteq \text{Pol}(\{2\})$. Поскольку $A \neq D$, найдется набор $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$, содержащий 0. Рассмотрим наборы $\tilde{a}_0 = \neg\neg(\tilde{a} \wedge \neg\tilde{a})$ и $\tilde{a}_1 = \neg(\tilde{a} \wedge \neg\tilde{a})$. Набор $\tilde{a}_0$ не содержит 1. Набор $\tilde{a}_1$ не содержит 0. При этом для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ верно следующее. Во-первых, $\neg\neg(a_i \wedge \neg a_i) = 2$, е.т.е. $\neg(a_i \wedge \neg a_i) = 2$. Во-вторых, $\neg\neg(a_i \wedge \neg a_i) = 0$, е.т.е. $\neg(a_i \wedge \neg a_i) = 1$.

Рассмотрим матрицу $N^* = \langle \{\tilde{a}_0, \tilde{a}_1\} \cup \{\tilde{2}\}, F, \{\tilde{2}\} \rangle$. Поскольку $N^* \in S(N)$, имеем $C_{N^*} \geq C_N$. В то же время N^* изоморфна M относительно отображения $\tilde{a}_0 \mapsto 0$, $\tilde{a}_1 \mapsto 1$, $\tilde{2} \mapsto 2$. Поэтому $C_{N^*} = C_M$. Таким образом, $C_N \leq C_M$. Однако, так как $N \in SP_f(M)$, также верно, что $C_N \geq C_M$. Следовательно, $C_N = C_M$.

Допустим, что F не сохраняет отношение $\{2\}$. В таком случае $\tilde{0}, \tilde{1} \in A$. Это означает, что N содержит подматрицу с универсумом $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$, изоморфную M . Отсюда снова получаем $C_N = C_M$.

Случай 2.2. $\tilde{2} \notin D$. В этом случае для каждого $\tilde{a} \in D$ верно, что $\tilde{a}$ содержит единицу. Но тогда для каждого $\tilde{a} \in D$ также верно, что $\neg\tilde{a} \notin D$, и N не является $\neg$ -паранепротиворечивой.

Таким образом, N $\neg$ -паранепротиворечива, только если $C_N = C_M$. Следовательно, если $C = C_K$ для некоторого $K \subseteq SP_f(M)$, логика $\langle S, C \rangle$ $\neg$ -паранепротиворечива, только если $C = C_M$. Но тогда M — максимально $\neg$ -паранепротиворечивая матрица. ■

Для доказательства Теоремы 2 нам потребуется ряд вспомогательных лемм.

Лемма 1. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_1 \in [F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$. Тогда $\downarrow_2 \in [F]$, е.т.е. $[F]$ содержит такую функцию f , что $f \notin \text{Pol} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Доказательство.

Если $F \subseteq \text{Pol} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, то $\downarrow_2 \notin [F]$, поскольку $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \downarrow_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $[F]$ содержит такую функцию f , что $f \notin Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Поскольку наборы $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ могут быть получены из любого набора, входящего в $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, с помощью $\downarrow_1$, можем считать, что f — тернарная функция, причем $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Случай 1. Допустим, что $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$, где $a \in \{0, 1\}$.

Пусть $a = 0$. Тогда $f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В таком случае $g_1(x) = f(x, x, 1)$ — такая унарная функция, что $g_1(1) = 0$ и $g_1(2) = 1$.

Пусть $a = 1$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В таком случае $h_1(x) = f(x, 1, x)$ — такая унарная функция, что $h_1(1) = 1$ и $h_1(2) = 0$.

Случай 2. Допустим, что $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$, где $a \in \{0, 1\}$.

Пусть $a = 0$. Тогда $f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. В таком случае $g_2(x) = f(x, x, 1)$ — такая унарная функция, что $g_2(1) = 0$ и $g_2(2) = 2$.

Пусть $a = 1$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В таком случае $h_2(x) = f(x, 1, x)$ — такая унарная функция, что $h_2(1) = 1$ и $h_2(2) = 0$.

Случай 3. Допустим, что $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, где $a \in \{0, 1\}$.

Пусть $a = 0$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. В таком случае $g_3(x) = f(x, 1, x)$ — такая унарная функция, что $g_3(1) = 0$ и $g_3(2) = 1$.

Пусть $a = 1$. Тогда $f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. В таком случае $h_3(x) = f(x, x, 1)$ — такая унарная функция, что $h_3(1) = 1$ и $h_3(2) = 0$.

Случай 4. Допустим, что $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$, где $a \in \{0, 1\}$.

Пусть $a = 0$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. В таком случае $g_4(x) = f(x, 1, x)$ — такая унарная функция, что $g_4(1) = 0$ и $g_4(2) = 2$.

Пусть $a = 1$. Тогда $f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. В таком случае $h_4(x) = f(x, x, 1)$ — такая унарная функция, что $h_4(1) = 1$ и $h_4(2) = 0$.

Таким образом, если $f \in F$ и $f \notin Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, то классу $[F]$ принадлежит одна из следующих операций:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1
2	1	1	2	2	0	0

Покажем, что в этом случае $\downarrow_2 \in [\downarrow_1, f]$. Введем вспомогательные операции: $J_0(x) = x \downarrow_1 x$; $x \vee y = J_0(x \downarrow_1 y)$.

Пусть $J_1(1) = 1$ и $J_1(0) = J_1(2) = 0$. Поскольку $x \downarrow_2 y = J_1(x) \downarrow_1 J_1(y)$, достаточно показать определимость J_1 : $J_1(x) = J_0(J_0(x) \vee f_1(x))$; $J_1(x) = J_0(f_2(x))$; $J_1(x) = J_0(J_0(x) \vee f_3(x))$; $J_1(x) = J_0(f_4(x))$; $J_1(x) = f_5(x)$; $J_1(x) = J_0(J_0(x) \vee J_0(f_6(x)))$. ■

Лемма 2. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_1 \in [F] \subseteq Pol(\{0, 1\})$. Матрица M является обобщенно паранепротиворечивой, е.т.е. $\downarrow_2 \in [F]$.

Доказательство. Пусть $\downarrow_2 \notin [F]$. Как следует из Леммы 1, это влечет $F \subseteq Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Допустим, что M — обобщенно паранепротиворечивая матрица. Тогда $C_{CPC}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = S$, однако $\beta \notin C_M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in S$. Если $\beta \notin C_M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то существует такая оценка v в M , что $v(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) \subseteq \{1, 2\}$ и $v(\beta) = 0$. Пусть $\bar{v}(p) = 1$, если $v(p) \in \{1, 2\}$, и $\bar{v}(p) = 0$, если $v(p) = 0$. Поскольку $F \subseteq Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, имеем $\bar{v}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) \subseteq \{1\}$ и $\bar{v}(\beta) = 0$.

Обратим внимание, что $\bar{v}$ является оценкой не только в M , но и в CPC . Таким образом, существует такая оценка в CPC , при которой каждая из

формул $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ принимает выделенное значение, а формула β принимает невыделенное значение. То есть $\beta \notin C_{SPC}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Однако в таком случае $C_{SPC}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq S$, и мы приходим к противоречию.

Итак, мы установили, что матрица M является обобщенно паранепротиворечивой, только если $\downarrow_2 \in [F]$. Теперь покажем следующее: если $\downarrow_2 \in [F]$, то матрица M является обобщенно паранепротиворечивой.

Пусть $\downarrow_2 \in [F]$. Как мы уже установили в ходе доказательства Леммы 1, $\downarrow_2 \in [F]$ влечет $J_1 \in [F]$. Далее, используя определения J_0 и $\vee$ из Леммы 1, получаем $q \in C_{SPC}(J_0(J_0(p) \vee J_1(p)))$. Однако $q \notin C_M(J_0(J_0(p) \vee J_1(p)))$, поскольку $J_0(J_0(2) \vee J_1(2)) = 1$. Из этого вытекает, что M — обобщенно паранепротиворечивая матрица. ■

Лемма 3. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $[\downarrow_1, \downarrow_2] \subseteq [F] \subseteq Pol(\{0, 1\})$. Если матрица M является максимально обобщенно паранепротиворечивой, то подуниверсумы M^3 , порожденные $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$ и $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержат $(2, 2, 2)$.

Доказательство. Пусть ϱ — подуниверсум M^3 , порожденный наборами $\tilde{a}_1 = (0, 2, 2)$ и $\tilde{a}_2 = (2, 0, 2)$. Матрица вида $N = \langle \varrho, F, \varrho \cap \{1, 2\}^3 \rangle$ — подматрица M^3 . Поэтому $C_M \leq C_N$. Допустим, что каждый столбец $\varrho \cap \{1, 2\}^3$ содержит 1. Тогда $q \in C_N(p, p \downarrow_2 p)$. Однако $q \notin C_M(p, p \downarrow_2 p)$, поскольку $2 \downarrow_2 2 = 1$. Следовательно, $C_M \neq C_N$. Таким образом, $\langle \mathcal{S}, C_N \rangle$ — собственная надлогика $\langle \mathcal{S}, C_M \rangle$.

Теперь покажем, что N — обобщенно паранепротиворечивая матрица. Используя определения $J_0, J_1, \vee$ из Леммы 1, зададим вспомогательные операции: $J_2(x) = J_0(J_0(x) \vee J_1(x))$; $x \circ_1 y = J_0(J_2(x) \downarrow_1 J_2(y))$. Операция $\circ_1$ отвечает следующей таблице:

$\circ_1$	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	1
2	1	1	1

Так как $\circ_1 \in [F]$, имеет место $\tilde{a}_1 \circ_1 \tilde{a}_2 \in \varrho$. Поскольку $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, также верно, что $\tilde{a}_1 \circ_1 \tilde{a}_2 \in \varrho \cap \{1, 2\}^3$. Это значит, что $r \notin C_N(p \circ_1 q)$. В то же время $r \in C_{SPC}(p \circ_1 q)$, поскольку $x \circ_1 y = 0$, коль скоро $x, y \in E_2$. Следовательно, N — обобщенно паранепротиворечивая матрица. Это означает, что логика $\langle \mathcal{S}, C_M \rangle$ не является максимально обобщенно паранепротиворечивой.

Если ϱ — подуниверсум M^3 , порожденный наборами $\tilde{b}_1 = (1, 2, 2)$ и $\tilde{b}_2 = (2, 1, 2)$, рассуждение строится аналогичным образом. ■

Лемма 4. Пусть $f \notin \text{Pol}(\varrho_1)$, где

$$\varrho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $[F]$ не сохраняет по меньшей мере одно из следующих отношений:

$$\varrho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $f \notin \text{Pol}(\varrho_1)$. Тогда $f \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & \dots & a_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

для некоторых $\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $f \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & \dots & a_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Допустим, что $f \in \text{Pol}(\varrho_2)$. Определим отображение φ_1 : $\varphi_1 \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ 0 \end{pmatrix}$, если $a_{i,1} = 2$; $\varphi_1 \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ 1 \end{pmatrix}$ в остальных случаях.

Пусть $\varphi_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & \dots & a_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{n,1} \\ b_{1,2} & \dots & b_{n,2} \end{pmatrix}$. Тогда $(b_{1,1}, \dots, b_{n,1}) = (a_{1,1}, \dots, a_{n,1})$ и $f(b_{1,1}, \dots, b_{n,1}) = 2$. Поскольку $f \in \text{Pol}(\varrho_2)$, $f \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{n,1} \\ b_{1,2} & \dots & b_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $f(b_{1,2}, \dots, b_{n,2}) = 0$.

Допустим, что $f \in \text{Pol}(\varrho_3)$. Определим отображение φ_2 : $\varphi_2 \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{i,2} \end{pmatrix}$, если $a_{i,1} = 2$; $\varphi_2 \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_{i,2} \end{pmatrix}$ в остальных случаях.

Пусть $\varphi_2 \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & \dots & a_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{n,1} \\ c_{1,2} & \dots & c_{n,2} \end{pmatrix}$. Тогда $(c_{1,2}, \dots, c_{n,2}) = (a_{1,2}, \dots, a_{n,2})$ и $f(c_{1,2}, \dots, c_{n,2}) = 2$. Поскольку $f \in \text{Pol}(\varrho_3)$, $f \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{n,1} \\ c_{1,2} & \dots & c_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $f(c_{1,1}, \dots, c_{n,1}) = 1$.

Однако $(b_{1,2}, \dots, b_{n,2}) = (c_{1,1}, \dots, c_{n,1})$, и мы приходим к противоречию. Следовательно, если $f \notin \text{Pol}(\varrho_1)$, то $f \notin \text{Pol}(\varrho_2)$ или $f \notin \text{Pol}(\varrho_3)$. ■

Лемма 5. Пусть $[\downarrow_1, \downarrow_2] \subseteq [F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$ и $[F]$ не сохраняет по меньшей мере одно из следующих отношений:

$$\varrho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $g_i \in [F]$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$, где $g_1(0) = g_1(1) = g_2(1) = 0$, $g_1(2) = g_2(2) = g_3(2) = 2$, $g_2(0) = g_3(1) = g_3(0) = 1$.

Доказательство. Допустим, что $f \in [F]$ и $f \notin \varrho_2$. Тогда $f \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & \dots & a_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ для некоторых $\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, причем $\begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Имеет место следующее: $J_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $J_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $J_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $J_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Поэтому $[F]$ также принадлежит такая унарная функция g , что $g \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Либо $g(1) = 0$, и тогда g есть g_2 , либо $g(1) = 1$, и тогда g есть g_3 . Следовательно, если $f \notin \text{Pol}(\varrho_2)$, то $g_2 \in [F]$ или $g_3 \in [F]$. Аналогичным образом, если $f \notin \varrho_3$, то $g_1 \in [F]$ или $g_2 \in [F]$. ■

Лемма 6. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $[\downarrow_1, \downarrow_2] \subseteq [F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$. Если подуниверсумы M^3 , порожденные $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$ и $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержат $(2, 2, 2)$, то $\star_j \in [F]$ для некоторого $j \in \{0, 1\}$, где $\star_0(a, b) = \star_1(a, b) = 2$, если $2 \in \{a, b\}$, и $\star_0(a, b) = 0$, $\star_1(a, b) = 1$ в противном случае.

Доказательство. Если подуниверсум M^3 , порожденный $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$, содержит $(2, 2, 2)$, то $[F]$ содержит бинарную функцию h_0 , такую что $h_0(0, 2) = h_0(2, 0) = h_0(2, 2) = 2$. Если подуниверсум M^3 , порожденный $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержит $(2, 2, 2)$, то $[F]$ содержит бинарную функцию h_1 , такую что $h_1(1, 2) = h_1(2, 1) = h_1(2, 2) = 2$. Если $\{h_0, h_1\} \cap [F] \neq \emptyset$, то $[F]$ не сохраняет ϱ_1 , поскольку $h_0 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = h_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. В силу доказанных выше Лемм 4 и 5, если $[F]$ не сохраняет ϱ_1 , то $g_i \in [F]$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$.

Теперь покажем следующее: если $\{h_0, h_1, g_i\} \subseteq [F]$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$, то $\star_0 \in [F]$ или $\star_1 \in [F]$. Обратим внимание, что константа 0 принадлежит $[F]$, так как $(x \downarrow_1 x) \downarrow_1 J_0(x \downarrow_1 x) = 0$.

Случай 1. Пусть $g_1 \in [F]$. Тогда $x \star_0 y = h_0(g_1(x), g_1(y))$. Следовательно, $x \star_0 y \in [F]$.

Случай 2. Пусть $g_2 \in [F]$. Покажем, что в этом случае $g_1 \in [F]$ или $g_3 \in [F]$. Допустим обратное: $g_1 \notin [F]$ и $g_3 \notin [F]$. Тогда $h_0(x, x) \in \{x, g_2(x)\}$.

Случай 2.1. Пусть $h_0(x, x) = x$. Тогда $h_0(0, x) = x$, так как в противном случае $h_0(0, x) = g_1(x)$, что противоречит условию. Аналогичным образом, $h_0(x, 0) = x$, поскольку в противном случае $h_0(x, 0) = g_1(x)$. Если $h_0(x, x) = h_0(0, x) = h_0(x, 0) = x$, то $h_0(h_0(x, x), g_2(h_0(x, x))) = g_3(x)$, что приводит к противоречию.

Случай 2.2. Пусть $h_0(x, x) = g_2(x)$. Тогда $h_0(0, x) = g_2(x)$, так как в противном случае $h_0(0, x) = g_3(x)$, что противоречит условию. Аналогичным образом, $h_0(x, 0) = g_2(x)$, поскольку в противном случае $h_0(x, 0) = g_3(x)$. Если $h_0(x, x) = h_0(0, x) = h_0(x, 0) = g_2(x)$, то $h_0(h_0(x, x), g_2(h_0(x, x))) = g_1(x)$, что приводит к противоречию.

Таким образом, $g_2 \in [F]$ влечет $g_1 \in [F]$ или $g_3 \in [F]$. Как мы уже показали выше, $g_1 \in [F]$ влечет $x \star_0 y \in [F]$. Теперь покажем, что $g_3 \in [F]$ влечет $x \star_1 y \in [F]$.

Случай 3. Пусть $g_3 \in [F]$. Тогда $x \star_1 y = h_1(g_3(x), g_3(y))$. Следовательно, $x \star_1 y \in [F]$. ■

Лемма 7. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\star_j \in [F]$ для некоторого $j \in \{0, 1\}$, где $\star_0(a, b) = \star_1(a, b) = 2$, если $2 \in \{a, b\}$, и $\star_0(a, b) = 0$, $\star_1(a, b) = 1$ в противном случае. Тогда F не сохраняет никакое отношение ϱ , отвечающее следующим условиям: (1) каждый столбец матрицы ϱ содержит по меньшей мере одно вхождение 0 или 1; (2) каждая строка матрицы ϱ содержит по меньшей мере одно вхождение 2.

Доказательство. Поскольку каждая строка матрицы ϱ содержит по меньшей мере одно вхождение 2, в ϱ найдутся такие n наборов, не обязательно различных, что $\tilde{a}_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,i-1}, 2, a_{i,i+1}, a_{i,n})$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $\star_j \in [F]$ ($j \in \{0, 1\}$). Определим функцию $\star_j^n$ следующим образом: $\star_j^n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \star_j \dots \star_j x_n$. Тогда $\star_j^n(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{2}$. Однако в таком случае $\star_j^n \notin \text{Pol}(\varrho)$, поскольку каждый столбец матрицы ϱ содержит по меньшей мере одно вхождение 0 или 1. В то же время $\star_j^n \in [F]$. Таким образом, $[F]$ не сохраняет ϱ . ■

Лемма 8. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_i \in [F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$ и F не сохраняет никакое отношение ϱ , отвечающее следующим условиям: (1) каждый столбец матрицы ϱ содержит по меньшей мере одно вхождение 0 или 1; (2) каждая строка матрицы ϱ содержит по меньшей мере одно вхождение 2. Тогда M — максимально обобщенно паранепротиворечивая матрица.

Доказательство. Допустим, что условие леммы выполнено. В таком случае, если N — подматрица M^n с универсумом $\pi \subseteq E_3^n$, имеет место

по меньшей мере одно из двух: либо матрица π содержит набор $\tilde{2}$, либо некоторая строка матрицы π не содержит 2 .

Случай 1. Пусть $\tilde{2} \in \pi$. Если $\tilde{2} \in \pi$, то π также содержит $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, поскольку $\tilde{2} \downarrow_1 \tilde{2} = (\tilde{2} \downarrow_2 \tilde{2}) \downarrow_2 (\tilde{2} \downarrow_2 \tilde{2}) = \tilde{0}$ и $\tilde{2} \downarrow_2 \tilde{2} = (\tilde{2} \downarrow_1 \tilde{2}) \downarrow_1 (\tilde{2} \downarrow_1 \tilde{2}) = \tilde{1}$. Это означает, что N имеет подматрицу с универсумом $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$, изоморфную M . В таком случае $C_N \leq C_M$.

Пусть $K \subseteq SP_f(M)$. Если K содержит матрицу с универсумом π , где $\tilde{2} \in \pi$, то $C_K = C_M$.

Случай 2. Пусть $\tilde{2} \notin \pi$. Тогда некоторая строка матрицы множества π не содержит 2 . Отсюда получаем $N \in S(M^{n-1} \times CPC)$. Это означает, что $C_N \geq C_{M \times CPC}$. Следовательно, $C_{M \times CPC}(X) = S$ влечет $C_N(X) = S$. В то же время если $C_{CPC}(X) = S$, то $C_{M \times CPC}(X) = S$. Таким образом, для всех $X \subseteq S$, $C_{CPC}(X) = S$ влечет $C_N(X) = S$, и матрица N не является обобщенно паранепротиворечивой.

Пусть $K \subseteq SP_f(M)$. Если K не содержит матрицу с универсумом π , где $\tilde{2} \in \pi$, то $\langle S, C_K \rangle$ не является обобщенно паранепротиворечивой логикой.

Таким образом, $\langle S, C_M \rangle$ не имеет обобщенно паранепротиворечивых надлогик. ■

Теорема 2. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_1 \in [F] \subseteq Pol(\{0, 1\})$. Следующие условия эквивалентны:

1. M — максимально обобщенно паранепротиворечивая матрица.
2. Подуниверсумы M^3 , порожденные $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$ и $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержат $(2, 2, 2)$.
3. $\star_i \in [F]$ для некоторого $i \in \{0, 1\}$, где $\star_0(a, b) = \star_1(a, b) = 2$, если $2 \in \{a, b\}$, и $\star_0(a, b) = 0$, $\star_1(a, b) = 1$ в противном случае.

Доказательство. Условие (1) влечет условие (2) в силу Лемм 2 и 3. Условие (2) влечет условие (3) в силу Леммы 6. Условие (3) влечет условие (1) в силу Лемм 7 и 8. ■

Как и в предыдущем случае, предвараем Теорему 3 рядом вспомогательных лемм.

Лемма 9. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_2 \in [F] \subseteq Pol(\{0, 1\})$. Тогда $\downarrow_1 \notin [F]$, е.т.е. $F \subseteq Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Если $[F] \subseteq Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, то $\downarrow_1 \notin [F]$, поскольку $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \downarrow_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Теперь покажем следующее: если F содержит такую функцию f , что $f \notin Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, то $\downarrow_1 \in [F]$. Поскольку наборы $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ могут быть получены из любого набора, входящего в $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, с помощью $\downarrow_2$, можем считать, что f — тернарная функция, причем $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$, где $a \in \{0, 1\}$.

Пусть $a = 0$. Тогда $f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В таком случае $g_1(x) = f(x, x, 0)$ — такая унарная функция, что $g_1(0) = 0$ и $g_1(2) = 1$.

Пусть $a = 1$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В таком случае $h_1(x) = f(x, 0, x)$ — такая унарная функция, что $h_1(0) = 1$ и $h_1(2) = 0$.

Случай 2. Допустим, что $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$, где $a \in \{0, 1\}$.

Пусть $a = 0$. Тогда $f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В таком случае $g_2(x) = f(x, x, 0)$ — такая унарная функция, что $g_2(0) = 0$ и $g_2(2) = 1$.

Пусть $a = 1$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. В таком случае $h_2(x) = f(x, 0, x)$ — такая унарная функция, что $h_2(0) = 1$ и $h_2(2) = 2$.

Случай 3. Допустим, что $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, где $a \in \{0, 1\}$.

Пусть $a = 0$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. В таком случае $g_3(x) = f(x, 0, x)$ — такая унарная функция, что $g_3(0) = 0$ и $g_3(2) = 1$.

Пусть $a = 1$. Тогда $f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. В таком случае $h_3(x) = f(x, x, 0)$ — такая унарная функция, что $h_3(0) = 1$ и $h_3(2) = 0$.

Случай 4. Допустим, что $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, где $a \in \{0, 1\}$.

Пусть $a = 0$. Тогда $f \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. В таком случае $g_4(x) = f(x, 0, x)$ — такая унарная функция, что $g_4(0) = 0$ и $g_4(2) = 1$.

Пусть $a = 1$. Тогда $f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. В таком случае $h_4(x) = f(x, x, 0)$ — такая унарная функция, что $h_4(0) = 1$ и $h_4(2) = 2$.

Таким образом, если $f \in F$ и $f \notin Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, то классу $[F]$ принадлежит одна из следующих операций:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	1	0	0	2	2

Покажем, что в этом случае $\downarrow_1 \in [\downarrow_2, f]$. Введем вспомогательные операции: $\neg_2 x = x \downarrow_2 x$; $J_1(x) = \neg_2 \neg_2 x$, $x \vee_2 y = \neg_2(x \downarrow_2 y)$.

Пусть $J_0(0) = 1$ и $J_0(1) = J_0(2) = 0$. Поскольку $x \downarrow_1 y = J_0(J_0(x) \downarrow_2 J_0(y))$, достаточно показать определимость J_0 : $J_0(x) = \neg_2(J_1(x) \vee_2 f_1(x))$; $J_0(x) = \neg_2 f_2(x)$; $J_0(x) = f_3(x)$; $J_0(x) = \neg_2(J_1(x) \vee_2 \neg_2 f_4(x))$; $J_0(x) = J_1(f_5(x))$; $J_0(x) = \neg_2(J_1(x) \vee_2 \neg_2 f_6(x))$. ■

Лемма 10. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где

$$\downarrow_2 \in [F] \subseteq Pol(\{0, 1\}) \cap Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если матрица M является максимально обобщенно паранепротиворечивой, то подуниверсум M^3 , порожденный $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержит $(2, 2, 2)$.

Доказательство. Пусть ϱ — подуниверсум M^3 , порожденный наборами $\tilde{a}_1 = (1, 2, 2)$ и $\tilde{a}_2 = (2, 1, 2)$. Матрица вида $N = \langle \varrho, F, \varrho \cap \{1, 2\}^3 \rangle$ — подматрица M^3 . Поэтому $C_M \leq C_N$. Допустим, что каждый столбец $\varrho \cap \{1, 2\}^3$ содержит 1. Тогда $q \in C_N(p, p \downarrow_2 p)$. Однако $q \notin C_M(p, p \downarrow_2 p)$, поскольку $2 \downarrow_2 2 = 1$. Следовательно, $C_M \neq C_N$. Таким образом, $\langle \mathcal{S}, C_N \rangle$ — собственная надлогика $\langle \mathcal{S}, C_M \rangle$.

Теперь покажем, что N — обобщенно паранепротиворечивая матрица. Используя определения $\neg_2$ и $\vee_2$ из доказательства Леммы 9, введем вспомогательную операцию $x \circ_2 y$ следующим образом: $x \circ_2 y = \neg_2 x \vee_2 \neg_2 y$. Она отвечает приведенной ниже таблице.

$\circ_2$	0	1	2
0	1	1	1
1	1	0	1
2	1	1	1

Имеет место $r \notin C_N(p, q, p \circ_2 q)$, поскольку $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Однако $r \in C_{SPC}(p, q, p \circ_2 q)$, поскольку $1 \circ_2 1 = 0$. Поэтому N — обобщенно паранепротиворечивая матрица. Следовательно, $\langle \mathcal{S}, C_N \rangle$ — обобщенно паранепротиворечивая собственная надлогика $\langle \mathcal{S}, C_M \rangle$, и матрица M не является максимально обобщенно паранепротиворечивой. ■

Лемма 11. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где

$$\downarrow_2 \in [F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\}) \cap \text{Pol} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если подуниверсум M^3 , порожденный $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержит $(2, 2, 2)$, то матрица M является максимально обобщенно паранепротиворечивой.

Доказательство. Пусть $N \in SP_f(M)$ и $N = \langle \varrho, F, \varrho \cap \{1, 2\}^n \rangle$, $\varrho \subseteq \{0, 1, 2\}^n$.

Случай 1. Пусть $\varrho \cap \{1, 2\}^n$ содержит такие m наборов $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$, не обязательно различных, что для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ выполняется $a_{i,j} = 2$ для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$. Иными словами, каждая строка матрицы $\varrho \cap \{1, 2\}^n$ содержит 2. Если подуниверсум M^3 , порожденный $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержит $(2, 2, 2)$, то $[F]$ содержит такую бинарную операцию $*$, что $1 * 2 = 2 * 1 = 2 * 2 = 2$.

Определим вспомогательную операцию: $*^n(x_1, \dots, x_n) = x_1 * \dots * x_n$. Ясно, что $*^n(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{2}$. Таким образом, $\tilde{2} \in \varrho$. В таком случае $\tilde{0}, \tilde{1} \in \varrho$, поскольку $\tilde{1} = \tilde{2} \downarrow_2 \tilde{2}$, $\tilde{0} = \tilde{1} \downarrow_2 \tilde{1}$.

Но тогда N имеет подматрицу с универсумом $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$, изоморфную M . Следовательно, $C_N \leq C_M$. В то же время $N \in SP_f(M)$, поэтому $C_N \geq C_M$. То есть $C_N = C_M$.

Случай 2. Пусть существует такое $j \in \{1, \dots, n\}$, что $a_{i,j} = 1$ для каждого $\tilde{a}_i \in \varrho \cap \{1, 2\}^n$. Пусть $C_N(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq S$ для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in S$. Тогда существует такая оценка w в N , что $w(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) \subseteq \varrho \cap \{1, 2\}^n$.

При этом, каждая оценка w в N может быть представлена как набор оценок в M : $w(p) = (v_1(p), \dots, v_n(p))$. Если $w(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) \subseteq \varrho \cap \{1, 2\}^n$ и $w(p) = (v_1(p), \dots, v_n(p))$, то $v_i(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) \subseteq \{1, 2\}$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$. При этом, в силу допущения Случая 2, $v_j(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) \subseteq \{1\}$.

Сопоставим каждой оценке v в M оценку $\bar{v}$ следующим образом: $\bar{v}(p) = 0$, если $v(p) \in \{0, 2\}$, $\bar{v}(p) = 1$, если $v(p) = 1$. Поскольку $[F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\}) \cap \text{Pol} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, верно следующее: $v(\alpha) = 1$ влечет $\bar{v}(\alpha) = 1$ для всех $\alpha \in S$. Поэтому $\bar{v}_j(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) \subseteq \{1\}$.

Однако $\bar{v}_j$ также является оценкой в CPC . Следовательно, $C_{CPC}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq S$. Таким образом, $C_N(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq S$ влечет $C_{CPC}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq S$. Но тогда матрица N не является обобщенно паранепротиворечивой.

Итак, если $N \in SP_f(M)$, то $C_N = C_M$, или N не является обобщенно паранепротиворечивой. Из этого вытекает, что логика $\langle S, C_M \rangle$ не имеет обобщенно паранепротиворечивых собственных надлогик и, следовательно, M является максимально обобщенно паранепротиворечивой матрицей. ■

Переходим к доказательству Теоремы 3.

Теорема 3. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где

$$\downarrow_2 \in [F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\}) \cap \text{Pol} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следующие условия эквивалентны:

1. M — максимально обобщенно паранепротиворечивая матрица.
2. Подуниверсум M^3 , порожденный $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержит $(2, 2, 2)$.

Доказательство. Условие (1) влечет условие (2) в силу Леммы 10. Условие (2) влечет условие (1) в силу Леммы 11. ■

Мы рассмотрели случаи $\downarrow_1 \in [F]$ и $\downarrow_2 \in [F]$. Теперь рассмотрим случай $\downarrow_3 \in [F]$.

Лемма 12. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_i \in [F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$ для некоторого $i \in \{3, 4, 5\}$, и F не сохраняет никакое отношение ϱ , отвечающее следующим условиям: (1) каждый столбец матрицы ϱ содержит по меньшей мере одно вхождение 0 или 1; (2) каждая строка матрицы ϱ содержит по меньшей мере одно вхождение 2. Тогда M — максимально обобщенно паранепротиворечивая матрица.

Доказательство. Пусть $C \geq C_M$. Тогда $C = C_K$ для некоторого $K \subseteq SP_f(M)$. Пусть $N \in SP_f(M)$. Если $\pi \subseteq E_3^n$ — универсум N , имеет место одно из двух: либо π содержит набор $\tilde{2}$, либо некоторая строка матрицы π не содержит 2.

Случай 1. Пусть $\tilde{2} \in \pi$. Если $\pi = \{\tilde{2}\}$, то $q \in C_N(p)$, и N не является обобщенно паранепротиворечивой матрицей. Пусть $\tilde{a} \in \pi$ и $\tilde{a} \neq \tilde{2}$. Определим вспомогательную операцию: $\sim x = x \downarrow_i x$. В таком случае N имеет подматрицу N' с универсумом $\{\tilde{a} \downarrow_i \sim \tilde{a}, \sim(\tilde{a} \downarrow_i \sim \tilde{a}), \tilde{2}\}$.

Матрица N' изоморфна M относительно отображения $\varphi: \tilde{a} \downarrow_i \sim \tilde{a} \mapsto 0, \sim(\tilde{a} \downarrow_i \sim \tilde{a}) \mapsto 1, \tilde{2} \mapsto 2$. Поэтому $C_{N'} = C_M$. В то же время $N' \in SP_f(N)$, поэтому $C_{N'} \geq C_N$. Следовательно, $C_M \geq C_N$. Однако, поскольку $N \in SP_f(M)$, также имеет место $C_N \geq C_M$. Таким образом, $C_N = C_M$.

Случай 2. Пусть некоторая строка матрицы π не содержит 2. Тогда $N \in SP_f(M^{n-1} \times CPC)$. Это значит, что $C_{CPC}(X) = S$ влечет $C_N(X) = S$ для всех $X \subseteq S$. Однако в таком случае N не является обобщенно паранепротиворечивой матрицей.

Таким образом, если $N \in SP_f(M)$, то N не является обобщенно паранепротиворечивой матрицей или $C_N = C_M$. В таком случае $C_K = C_M$ или $\langle S, C_K \rangle$ не является обобщенно паранепротиворечивой логикой. Следовательно, M — максимально обобщенно паранепротиворечивая матрица. ■

Теорема 4. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_3 \in [F] \subseteq Pol(\{0, 1\})$. Следующие условия эквивалентны:

1. M — максимально обобщенно паранепротиворечивая матрица.
2. Подуниверсумы M^3 , порожденные $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$ и $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержат $(2, 2, 2)$.
3. $\star_i \in [F]$ для некоторого $i \in \{0, 1\}$, где $\star_0(a, b) = \star_1(a, b) = 2$, если $2 \in \{a, b\}$, и $\star_0(a, b) = 0, \star_1(a, b) = 1$ в противном случае.

Доказательство. Если $\downarrow_3 \in [F]$, то $\star_0 \in [F]$: $x \star_0 y = (x \downarrow_3 y) \downarrow_3 ((x \downarrow_3 y) \downarrow_3 (x \downarrow_3 y))$.

Если $\star_0 \in [F]$, то подуниверсумы M^3 , порожденные $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$ и $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержат $(2, 2, 2)$:

$$\star_0 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \star_0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В силу Леммы 7, если $\star_0 \in [F]$, то F не сохраняет никакое отношение ϱ , отвечающее следующим условиям: (1) каждый столбец матрицы ϱ содержит по меньшей мере одно вхождение 0 или 1; (2) каждая строка матрицы ϱ содержит по меньшей мере одно вхождение 2. В таком случае, по Лемме 12, M — максимально обобщенно паранепротиворечивая матрица. ■

Переходим к рассмотрению случая $\downarrow_4 \in [F]$.

Лемма 13. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_4 \in [F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$. Если матрица M является максимально обобщенно паранепротиворечивой, то подуниверсумы M^3 , порожденные $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$ и $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержат $(2, 2, 2)$.

Доказательство. Пусть ϱ — подуниверсум M^3 , порожденный наборами $\tilde{a}_1 = (0, 2, 2)$ и $\tilde{a}_2 = (2, 0, 2)$. Матрица вида $N = \langle \varrho, F, \varrho \cap \{1, 2\}^3 \rangle$ — подматрица M^3 . Поэтому $C_M \leq C_N$. Допустим, что каждый столбец $\varrho \cap \{1, 2\}^3$ содержит 1. Тогда $q \in C_N(p, p \downarrow_4 p)$. Однако $q \notin C_M(p, p \downarrow_4 p)$, поскольку $2 \downarrow_4 2 = 2$. Следовательно, $C_M \neq C_N$. Таким образом $\langle \mathcal{S}, C_N \rangle$ — собственная надлогика $\langle \mathcal{S}, C_M \rangle$.

Теперь покажем, что N — обобщенно паранепротиворечивая матрица. Определим вспомогательные операции: $\sim x = x \downarrow_4 x$; $x \vee_4 y = \sim(x \downarrow_4 y)$; $x \circ_4 y = \sim((x \downarrow_4 y) \vee_4 (\sim x \downarrow_4 y) \vee_4 (x \downarrow_4 \sim y) \vee_4 (\sim x \downarrow_4 \sim y))$. Операция $\circ_4$ отвечает следующей таблице:

$\circ_4$	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	1
2	1	1	2

Так как $\circ_4 \in [F]$, имеет место $\tilde{a}_1 \circ_4 \tilde{a}_2 \in \varrho$. Поскольку $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, также верно, что $\tilde{a}_1 \circ_4 \tilde{a}_2 \in \varrho \cap \{1, 2\}^3$. Это значит, что $r \notin C_N(p \circ_4 q)$. В то же время $r \in C_{SPC}(p \circ_4 q)$, поскольку $x \circ_4 y = 0$, коль скоро $x, y \in E_2$. Следовательно, N — обобщенно паранепротиворечивая матрица. Это означает, что логика $\langle \mathcal{S}, C_M \rangle$ не является максимально обобщенно паранепротиворечивой.

Если ϱ — подуниверсум M^3 , порожденный наборами $\tilde{b}_1 = (1, 2, 2)$ и $\tilde{b}_2 = (2, 1, 2)$, рассуждение строится аналогичным образом. ■

Лемма 14. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_i \in [F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$ для некоторого $i \in \{4, 5\}$. Если подуниверсумы M^3 , порожденные

$\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$ и $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержат $(2, 2, 2)$, то $\star_i \in [F]$ для некоторого $i \in \{0, 1\}$, где $\star_0(a, b) = \star_1(a, b) = 2$, если $2 \in \{a, b\}$, и $\star_0(a, b) = 0$, $\star_1(a, b) = 1$ в противном случае.

Доказательство. Пусть подуниверсум M^3 , порожденный наборами $\tilde{a}_1 = (0, 2, 2)$ и $\tilde{a}_2 = (2, 0, 2)$, содержит $\tilde{2}$. В таком случае, поскольку ϱ — подуниверсум M^3 , порожденный $\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\}$, в $[F]$ найдется такая функция h_0 , зависящая от не более чем двух переменных, что $h_0(0, 2) = h_0(2, 0) = h_0(2, 2) = 2$. Если h_0 существенно зависит только от одной переменной, то $h_0(0) = 2$. Однако это противоречит условию $[F] \subseteq Pol(\{0, 1\})$. Поэтому h_0 — существенно бинарная функция.

Определим вспомогательные операции: $\sim x = x \downarrow_i x$; $g_1(x) = h_0(x, x) \downarrow_i \sim h_0(x, x)$. Имеем $\star_0 \in [F]$, так как $x \star_0 y = h_0(g_1(x), g_1(y)) \downarrow_i \sim h_0(g_1(x), g_1(y))$. В то же время $x \star_1 y = \sim(x \star_0 y)$, поэтому $\star_1 \in [F]$. ■

Теорема 5. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_4 \in [F] \subseteq Pol(\{0, 1\})$. Следующие условия эквивалентны:

1. M — максимально обобщенно паранепротиворечивая матрица.
2. Подуниверсумы M^3 , порожденные $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$ и $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержат $(2, 2, 2)$.
3. $\star_i \in [F]$ для некоторого $i \in \{0, 1\}$, где $\star_0(a, b) = \star_1(a, b) = 2$, если $2 \in \{a, b\}$, и $\star_0(a, b) = 0$, $\star_1(a, b) = 1$ в противном случае.

Доказательство. Условие (1) влечет условие (2) в силу Леммы 13. Условие (2) влечет условие (3) в силу Леммы 14. Условие (3) влечет условие (1) в силу Лемм 7 и 12. ■

Теперь остается рассмотреть случай $\downarrow_5 \in [F]$, после чего можно будет объединить все пять случаев в общей теореме.

Лемма 15. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_5 \in [F] \subseteq Pol(\{0, 1\})$. Если матрица M является максимально обобщенно паранепротиворечивой, то подуниверсумы M^3 , порожденные $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$ и $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержат $(2, 2, 2)$.

Доказательство. Пусть ϱ — подуниверсум M^3 , порожденный наборами $\tilde{a}_1 = (0, 2, 2)$ и $\tilde{a}_2 = (2, 0, 2)$. Матрица вида $N = \langle \varrho, F, \varrho \cap \{1, 2\}^3 \rangle$ — подматрица M^3 . Поэтому $C_M \leq C_N$. Допустим, что каждый столбец $\varrho \cap \{1, 2\}^3$ содержит 1. Тогда $q \in C_N(p, p \downarrow_5 p)$. Однако $q \notin C_M(p, p \downarrow_5 p)$, поскольку

$2 \downarrow_5 2 = 2$. Следовательно, $C_M \neq C_N$. Таким образом $\langle \mathcal{S}, C_N \rangle$ — собственная надлогика $\langle \mathcal{S}, C_M \rangle$.

Теперь покажем, что N — обобщенно паранепротиворечивая матрица. Определим вспомогательные операции: $\sim x = x \downarrow_5 x$; $x \vee_5 y = \sim(x \downarrow_5 y)$; $x \circ_5 y = \sim((x \downarrow_5 y) \vee_5 (\sim x \downarrow_5 y) \vee_5 (x \downarrow_5 \sim y) \vee_5 (\sim x \downarrow_5 \sim y))$. Операция $\circ_5$ отвечает следующей таблице:

$\circ_5$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	1	1	2

Так как $\circ_5 \in [F]$, имеет место $\tilde{a}_1 \circ_5 \tilde{a}_2 \in \varrho$. Поскольку $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, также верно, что $\tilde{a}_1 \circ_5 \tilde{a}_2 \in \varrho \cap \{1, 2\}^3$. Это значит, что $r \notin C_N(p \circ_5 q)$. В то же время $r \in C_{CPC}(p \circ_5 q)$, поскольку $x \circ_5 y = 0$, коль скоро $x, y \in E_2$. Следовательно, N — обобщенно паранепротиворечивая матрица. Это означает, что логика $\langle \mathcal{S}, C_M \rangle$ не является максимально обобщенно паранепротиворечивой.

Если ϱ — подуниверсум M^3 , порожденный наборами $\tilde{b}_1 = (1, 2, 2)$ и $\tilde{b}_2 = (2, 1, 2)$, рассуждение строится аналогичным образом. ■

Теорема 6. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $\downarrow_5 \in [F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$. Следующие условия эквивалентны:

1. M — максимально обобщенно паранепротиворечивая матрица.
2. Подуниверсумы M^3 , порожденные $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$ и $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержат $(2, 2, 2)$.
3. $\star_i \in [F]$ для некоторого $i \in \{0, 1\}$, где $\star_0(a, b) = \star_1(a, b) = 2$, если $2 \in \{a, b\}$, и $\star_0(a, b) = 0$, $\star_1(a, b) = 1$ в противном случае.

Доказательство. Условие (1) влечет условие (2) в силу Леммы 15. Условие (2) влечет условие (3) в силу Леммы 14. Условие (3) влечет условие (1) в силу Лемм 7 и 12. ■

Переходим к основной теореме работы.

Теорема 7. Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, где $[F] \subseteq \text{Pol}(\{0, 1\})$ содержит такие функции $f_1, \dots, f_5$, не обязательно различные, что $f_1 \notin \text{Pol}(\mathbf{T}_0)$, $f_2 \notin \text{Pol}(\mathbf{T}_1)$, $f_3 \notin \text{Pol}(\mathbf{S})$, $f_4 \notin \text{Pol}(\mathbf{M})$, $f_5 \notin \text{Pol}(\mathbf{L})$. Матрица M максимально обобщенно паранепротиворечива, е.т.е. выполняется по меньшей мере одно из следующих условий:

1. Подуниверсумы M^3 , порожденные $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2)\}$ и $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержат $(2, 2, 2)$.
2. $[F] \subseteq Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и подуниверсум M^3 , порожденный $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$, содержит $(2, 2, 2)$.

Доказательство. Следует из Теорем 2, 3, 4, 5, 6. ■

4. Заключение

В заключение остановимся на направлениях дальнейших исследований, касающихся затронутой в статье проблематики.

Мы предложили критерий максимальности для обобщенной паранепротиворечивости в трехзначных логиках с двумя выделенными значениями. В то же время, как вытекает из построений в [Девяткин, 2024], в отличие от стандартного определения паранепротиворечивости, критериям нашего определения отвечают также некоторые трехзначные логики с одним выделенным значением. Представляет интерес поиск критерия, аналогичного представленному в настоящей работе, для логик с одним выделенным значением.

За рамками настоящего исследования также остался вопрос о критерии максимальности для обобщенной паранепротиворечивости в трехзначных логиках, операции которых не сохраняют классические значения истинности. Примеры такого рода логик можно найти, например, в [Jukiewicz et al., 2025; Беликов, 2023].

В работе [Девяткин, 2023] даны критерии максимальности относительно классической логики для логики Клини и ее трехзначных языковых расширений. Логика называется максимальной относительно классической логики, если добавление к ней любого нового правила, содержащегося в классической логике, превращает рассматриваемую логику в классическую. Аналогичный критерий максимальности для рассмотренных в статье логик был бы полезен с точки зрения требования сохранить как можно большую часть классической логики при построении паранепротиворечивых логик, выдвинутого Н. да Коста в [da Costa, 1974].

Наконец, с понятием паранепротиворечивости тесно связано понятие парapolноты. Анализу данного понятия и его связи с паранепротиворечивостью посвящены работы Н.Е. Томовой [Томова, 2023; Томова, 2025]. Опираясь на данный анализ, можно было бы предложить понятие обобщенной парapolноты и критерии его максимальности по аналогии с результатами, предложенными в настоящей статье.

Литература

- Беликов, 2023 – *Беликов А.А.* Логические отношения между условными высказываниями и трехзначная логика // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2023. № 71. С. 5–12.
- Девяткин, 2016 – *Девяткин Л.Ю.* Неклассические модификации многозначных матриц классической логики. Часть I // Логические исследования / Logical Investigations. 2016. Т. 22. № 2. С. 27–58.
- Девяткин, 2023 – *Девяткин Л.Ю.* О трехзначных расширениях логики Клини // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 2. С. 59–88.
- Девяткин, 2024 – *Девяткин Л.Ю.* Трехзначные обобщения классической логики в бедных языках: степень максимальности следования // Логические исследования / Logical Investigations. 2024. Т. 30. № 2. С. 44–71.
- Марченков, 2004 – *Марченков С.С.* Функциональные системы с операцией суперпозиции. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 104 с.
- Томова, 2022 – *Томова Н.Е.* К вопросу о критерии паранепротиворечивости логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2022. Т. 28. № 2. С. 77–95.
- Томова, 2023 – *Томова Н.Е.* К вопросу о критерии параконсistency логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 2. С. 104–124.
- Томова, 2025 – *Томова Н.Е.* О дуальности логических систем: паралогики // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 1. С. 47–73.
- Arieli et al., 2011 – *Arieli O., Avron A., Zamansky A.* Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics // Studia Logica. 2011. Vol. 97. No. 1. P. 31–60.
- da Costa, 1974 – *da Costa N.C.A.* On the theory of inconsistent formal systems // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1974. Vol. 11. No. 4. P. 497–510.
- Jaśkowski, 1969 – *Jaśkowski S.* A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.
- Jukiewicz et al., 2025 – *Jukiewicz M., Nasieniewski M., Petrukhin Ya., Shangin V.* Computer-aided searching for a tabular many-valued discussive logic — Matrices // Logic Journal of the IGPL. 2025. Vol. 33. No. 2. jzae080.
- Lau, 2006 – *Lau D.* Function algebras on finite sets: Basic course on many-valued logic and clone theory. Springer Science & Business Media, 2006. 670 с.
- Makarov, 2015 – *Makarov A.V.* Description of all minimal classes in the partially ordered set $\mathcal{L}_2^3$ of closed classes of the three-valued logic that can be homomorphically mapped onto the two-valued logic // Moscow University Mathematics Bulletin. 2015. Vol. 70. No. 1. P. 48.
- Wójcicki, 1988 – *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi. Dordrecht: Springer, 1988. 473 p.
- Zygmunt, 1974 – *Zygmunt J.* A note on direct products and ultraproducts of logical matrices // Studia Logica. 1974. Vol. 33. P. 349–357.

LEONID YU. DEVYATKIN

Generalized paraconsistency in three-valued logics: a maximality criterion

Leonid Yu. Devyatkin

Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Abstract: This paper proposes a generalized characterization of paraconsistency that does not presuppose the presence of negation in the language of the logic under consideration. We obtain necessary and sufficient conditions for the maximality of this property for three-valued logics with two designated values whose operations agree with the classical ones in the same language when restricted to the classical two-valued subuniverse. These conditions are formulated in terms of the expressive power of operations in three-valued logical matrices.

We call a propositional logic generalized paraconsistent if there exists a set of formulas that is consistent in that logic but is inconsistent from the standpoint of classical logic formulated in the same language. A logic is called maximally generalized paraconsistent if it is generalized paraconsistent and none of its proper extensions has this property.

We consider three-valued logical matrices with two designated values whose operations are contained in the clone of functions that preserve the Boolean values, yet are not contained in any of its five maximal subclones — the ones corresponding to the maximal clones in the lattice of clones of Boolean functions.

We show that a logic characterized by such a matrix is maximally generalized paraconsistent if and only if the operations of its matrix do not preserve the relations, defined on the matrix's universe, from a family that we establish.

Keywords: propositional calculi, many-valued logics, paraconsistency, expressive power of formal languages, logical relations

For citation: Devyatkin L.Yu. “Obobshchennaia paraneprotivorechivost’ v trehznachnykh logikah: kriterij maksimal’nosti” [Generalized paraconsistency in three-valued logics: a maximality criterion], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 2, pp. 114–142. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-114-142. (In Russian)

References

- Belikov, 2023 – Belikov, A.A. “Logicheskie otnosheniia mezhdru uslovnymi vyskazyvaniiami i trehznachnaia logika” [Logical relations between conditionals and three-valued logic], *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofii. Sociologii. Politologii* [Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science], 2023, No. 71, pp. 5–12. (In Russian)

- Devyatkin, 2016 – Devyatkin, L.Yu. “Neklassicheskie modifikacii mnogoznachnyh matric klassicheskoy logiki. Chast’ I” [Non-classical modifications of many-valued matrices of the classical propositional logic. Part I], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2016, Vol. 22, No. 2, pp. 27–58. (In Russian)
- Devyatkin, 2023 – Devyatkin, L.Yu. “O trehznachnyh rasshireniyah logiki Klini” [On the three-valued expansions of Kleene’s logic], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 59–88. (In Russian)
- Devyatkin, 2024 – Devyatkin, L.Yu. “Tryohznachnye obobshcheniya klassicheskoy logiki v bednyh yazykah: stepen’ maksimal’nosti sledovaniya” [Three-valued generalizations of classical logic in weak languages: the degree of maximality], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2024, Vol. 30, No. 2, pp. 44–71. (In Russian)
- Marchenkov, 2004 – Marchenkov, S.S. *Funktsional’nye sistemy s operatsiei superpozitsii* [Functional systems with superposition operation], M., 2004. 104 pp.
- Tomova, 2022 – Tomova, N.E. “K voprosu o kriterii paraneprotivorechivosti logik” [On the question of the criteria for the paraconsistency of logics], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2022, Vol. 28, No. 2, pp. 77–95. (In Russian)
- Tomova, 2023 – Tomova, N.E. “On the question of the criteria for the paracompleteness of logics” [K voprosu o kriterii parapolnoty logik], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 104–124. (In Russian)
- Tomova, 2025 – Tomova, N.E. “On duality of logical systems: paralogs” [O dual’nosti logicheskikh sistem: paralogiki], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2025, Vol. 31, No. 1, pp. 47–73. (In Russian)
- Arieli et al., 2011 – Arieli, O., Avron, A., Zamansky, A. “Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics”, *Studia Logica*, 2011, Vol. 97, No. 1, pp. 31–60.
- da Costa, 1974 – da Costa, N.C.A. “On the theory of inconsistent formal systems”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1974, Vol. 11, No. 4, pp. 497–510.
- Jaśkowski, 1969 – Jaśkowski, S. “A propositional calculus for inconsistent deductive systems”, *Studia Logica*, 1969, Vol. 24, pp. 143–157.
- Jukiewicz et al., 2025 – Jukiewicz, M., Nasieniewski, M., Petrukhin, Ya., Shangin, V. “Computer-aided searching for a tabular many-valued discussive logic — Matrices”, *Logic Journal of the IGPL*, 2025, Vol. 33, No. 2, jzae080.
- Lau, 2006 – Lau, D. *Function algebras on finite sets: Basic course on many-valued logic and clone theory*, Springer Science & Business Media, 2006. 670 pp.
- Makarov, 2015 – Makarov, A.V. “Description of all minimal classes in the partially ordered set $\mathcal{L}_2^3$ of closed classes of the three-valued logic that can be homomorphically mapped onto the two-valued logic”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2015, Vol. 70, No. 1, p. 48.
- Wójcicki, 1988 – Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi*, Springer, 1988. 473 pp.
- Zygmunt, 1974 – Zygmunt, J. “A note on direct products and ultraproducts of logical matrices”, *Studia Logica*, 1974, Vol. 33, pp. 349–357.

И.В. ЗАЙЦЕВ

Отмеченное субординатное натуральное исчисление для базовой интуиционистской кондициональной логики*

Игорь Васильевич Зайцев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Российская Федерация, 105066, г. Москва, ул. Старая Басманная, д. 21/4.
E-mail: izaraytsev65@gmail.com

Аннотация: В статье осуществляется презентация и построение отмеченного субординатного натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$ для интуиционистской кондициональной логики IntCK , предложенной Г.К. Ольховиковым как интуиционистский вариант минимальной нормальной кондициональной логики Б. Челласа CK и полной относительно интуиционистского прочтения метатеории CK . Система IntCK задает базовые дедуктивные принципы для формализации конструктивных контекстов, допускающих использование двух независимых контрфактических связок — $\Box \rightarrow$ и $\Diamond \rightarrow$. Описываемое в статье натуральное исчисление $\mathcal{F}\text{IntCK}$ основывается на технике, задействующей метки (labels), реляционные атомы (relational atoms) и отмеченные квазиформулы, фигурирующие в правилах, причем данные правила позволяют метасинтаксически реализовать семантические условия истинности и неистинности формул относительно возможных миров интуиционистской кондициональной биреляционной модели. В рамках статьи предлагается индуктивное определение вывода, для чего применяется подход В.А. Смирнова с дальнейшей модификацией понятия субординатной последовательности на случай с отмеченными квазиформулами и реляционными атомами. Дана идея доказательства метатеорем о слабой полноте исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$ по отношению к классу всех интуиционистских кондициональных биреляционных шкал, а также дедуктивной эквивалентности натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$ и аксиоматического исчисления IntCK .

Ключевые слова: теория доказательств, исчисление естественного вывода, контрфактуалы, интуиционистская логика, условная логика, метки, отмеченные формулы, реляционные атомы, биреляционная семантика Крипке, семантическая полнота, дедуктивная эквивалентность

Для цитирования: Зайцев И.В. Отмеченное субординатное натуральное исчисление для базовой интуиционистской кондициональной логики // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 2. С. 143–168. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-143-168

* Статья подготовлена в результате проведения исследования в рамках проекта «Международное академическое сотрудничество» НИУ ВШЭ.

Введение

Кондициональная (условная) логика — это раздел современной философской логики, решающий задачи формального анализа условных выражений, прежде всего в контрфактической («если бы было A , то было бы B ») форме, и получивший развитие благодаря работам Д. Льюиса [Lewis, 1971; Lewis, 1973], Р. Сталнакера [Stalnaker, 1968; Stalnaker, Thomason, 1970], а затем и Д. Ньюта [Nute, 1980], Б. Челласа [Chellas, 1975] и К. Серерберга [Segerberg, 1989]. При интерпретации кондициональной связки как контрфактической оказываются необщезначимыми схемы усиления антецедента, контрапозиции и транзитивности, что является отличительной чертой подобного рода систем (см. [Stalnaker, 1968; Lewis, 1973; Nute, 1980]).

Как правило, кондициональные логики изучались на классической основе, то есть являлись консервативными расширениями классической логики (как пропозициональной, так и предикатной). Однако не так давно Й. Вайс [Weiss, 2019a; Weiss, 2019b] и позже И. Чиарделли и С. Лю [Ciardelli, Liu, 2019; Ciardelli, Liu, 2020] предложили логические теории, исследующие свойства контрфактических кондиционалов на конструктивной основе: они описали интуиционистские варианты известных в литературе систем кондициональной логики — базовой нормальной логики Б. Челласа **СК** из [Chellas, 1975], логик контрфактуалов семейства **V** Д. Льюиса из [Lewis, 1973] (системы логик минимального изменения), а также логики Р. Сталнакера **C2** из [Stalnaker, 1968] (логики уникального ближайшего возможного мира). Вайс определял интуиционистских напарников, в том числе напарника базовой логики **СК**, а именно **ICK**, следуя схеме построения интуиционистских вариантов модальных логик К. Дошена и М. Божича [Božić, Došen, 1984], строивших теории, адекватные моделям, обладающим меньшей степенью общности в сравнении с моделями, определяемыми Г. Плоткиным, К. Стирлингом [Plotkin, Stirling, 1986] и Ж. Фишер Серви [Fisher Servi, 1980; Fischer Servi, 1984], системы которых являются теперь каноническими интуиционистскими аналогами модальных логических теорий. К тому же системы Вайса, Чиарделли и Лю не являются полными относительно интуиционистского прочтения мета-теории **СК**: некоторые принципы, которые должны приниматься относительно сильной контрфактической связки, не являются общезначимыми в базовой логике Вайса. Более того, системы, основанные на системе Вайса, формализуют лишь один тип контрфактической связи, а потому не являются полностью кондициональными. В связи с этим обстоятельством Г.К. Ольховиковым в [Olkhovikov, 2024] был предложен альтернативный интуиционистский аналог минимальной кондициональной логики **СК**, обо-

значенный им как **IntCK**: в язык данной системы вводятся две контрфактические связи — $\Box \rightarrow$ и $\Diamond \rightarrow$ Д. Льюиса [Lewis, 1973, p. 1–4], — кондициональные аксиомные схемы воспроизводят структуру схем аксиом интуиционистской модальной логики **IK**, тем самым устанавливая минимальные дедуктивные принципы отдельно для сильной и слабой контрфактических связей, ввиду чего стало возможным определить более сильные биреляционные модели Крипке, чем у Й. Вайса, обосновать независимость $\Box \rightarrow$ и $\Diamond \rightarrow$, а также задать стандартный перевод в двухсортную интуиционистскую предикатную логику.

Теория доказательств для логики **IntCK** представлена исключительно в виде гильбертовского исчисления. Цель настоящего исследования — развитие теории доказательств этой логики посредством построения адекватного интуиционистским кондициональным биреляционным моделям Ольховикова субординатного натурального исчисления с задействованием аппарата меток (labels), позволяющих кодировать базовые понятия биреляционной семантики Крипке: возможного мира, истинности и неистинности формулы в возможном мире, отношений достижимости¹.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 представлен формализованный язык базовой интуиционистской кондициональной логики **IntCK**, алфавит которого включает две независимые контрфактические связи — $\Box \rightarrow$ и $\Diamond \rightarrow$, — а также кратко описана ее аксиоматизация и биреляционная семантика Крипке. Раздел 2 посвящен определению отмеченного натурального исчисления, обозначаемого как **IntCK**. В разделе 3 приводятся идеи доказательств слабой полноты, а также дедуктивной эквивалентности **IntCK** и **IntCK**. В заключении подводятся итоги статьи и обозначаются направления для дальнейшего исследования.

1. Язык, аксиоматизация и биреляционная семантика логики **IntCK**

В этом разделе представлена теория доказательств гильбертовского типа и формальная биреляционная семантика для базовой пропозициональной интуиционистской кондициональной логики **IntCK** Г.К. Ольховикова [Olkhovikov, 2024] в том объеме, в каком это необходимо для реализации цели статьи — построения отмеченного субординатного натурального исчисления.

Начнем с задания синтаксиса и аксиоматизации **IntCK** [Ibid., p. 1202, 1205–1206].

¹Об использовании техники меток для построения исчислений генценовского типа неклассических логик см. в [Vigand, 2000].

Определение 1 (Язык интуиционистской кондициональной логики **IntCK**). Под языком интуиционистской кондициональной логики $\mathcal{L}_{\text{IntCK}}$ понимается двойка $\langle \text{Alph}_{\mathcal{L}_{\text{IntCK}}}, \text{Fm}_{\mathcal{L}_{\text{IntCK}}} \rangle$, где $\text{Alph}_{\mathcal{L}_{\text{IntCK}}} = \text{Var} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box\rightarrow, \Diamond\rightarrow, (,)\}$, при этом Var есть счетное множество пропозициональных переменных, $\neg$ есть унарная связка, а $\wedge, \vee, \rightarrow, \Box\rightarrow, \Diamond\rightarrow$ суть бинарные связки; $\text{Fm}_{\mathcal{L}_{\text{IntCK}}}$ есть множество формул языка $\mathcal{L}_{\text{IntCK}}$, задаваемое посредством следующей грамматики (где $p \in \text{Var}$):

$$A ::= p \mid \neg A \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A) \mid (A \rightarrow A) \mid (A \Box\rightarrow A) \mid (A \Diamond\rightarrow A)^2. \quad (1)$$

Соглашение 1. Символы A, B, C, D (возможно, с нижними числовыми индексами) будут использоваться в качестве метаобозначений произвольных формул языка $\mathcal{L}_{\text{IntCK}}$ ³. Символы p, q, r (быть может, с нижними числовыми индексами) используются в качестве метаобозначений произвольных пропозициональных переменных. Стандартным образом вводятся следующие сокращения: $\perp := (p_0 \wedge \neg p_0)$, $\top := \neg \perp$, $(A \leftrightarrow B) := ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ (где A, B суть произвольные формулы языка $\mathcal{L}_{\text{IntCK}}$, а p_0 — некоторая фиксированная пропозициональная переменная). Принимается соглашение об опускании внешних скобок. В качестве метаобозначений произвольных множеств формул языка $\mathcal{L}_{\text{IntCK}}$ будут использоваться символы $\Phi, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$

Соглашение 2. Далее везде, записывая Fm , будем иметь в виду $\text{Fm}_{\mathcal{L}_{\text{IntCK}}}$, если специально не оговорено иное. Также далее будем использовать выражение «формула», имея в виду «формула языка $\mathcal{L}_{\text{IntCK}}$ », если специально не оговорено иное.

Пропозициональную интуиционистскую логику будем обозначать как **Int**. Определим исчисление гильбертовского типа для системы **IntCK**, несколько модифицировав исходную формулировку, представленную в [Olkhovikov, 2024, p. 1205].

²Обратим внимание на то, что в оригинальной формулировке языка логики **IntCK** в качестве исходного логического символа фигурирует не $\neg$, а $\perp$ (и $\top$) (см. [Olkhovikov, 2024, p. 1202]), однако это обстоятельство, разумеется, не влияет на множество теорем и случаи наличия отношения выводимости. Формулировка с исходной константой $\neg$ выбирается для упрощения определения соответствующего натурального исчисления.

³Логический термин $\Box\rightarrow$ понимается как сильная контрфактическая связка Д. Льюиса, и, соответственно, выражение вида $(A \Box\rightarrow B)$ читается как «если бы было A , то обязательно было бы и B » [Lewis, 1973, p. 1–2]. Логический термин $\Diamond\rightarrow$ понимается как слабая контрфактическая связка, и тогда выражение вида $(A \Diamond\rightarrow B)$ читается как «если бы было A , то, возможно, было бы и B » [Ibid., p. 2–3]. Отметим, что в логиках контрфактических кондиционалов на классической основе эти связки определимы друг через друга.

Определение 2 (Аксиомные схемы и правила вывода аксиоматического исчисления **IntCK**). Пусть $A, B, C \in \text{Fm}$. Следующие схемы и правила вывода являются *аксиомными схемами и правилами вывода аксиоматического исчисления IntCK*.

Аксиомные схемы IntCK:

A0 Полный список стандартных аксиомных схем **Int**

$$\mathbf{A1} \quad (A \Box \rightarrow (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \Box \rightarrow B) \wedge (A \Box \rightarrow C)) \quad (\text{CMC}_{\Box \rightarrow})$$

$$\mathbf{A2} \quad A \Box \rightarrow \top \quad (\text{LT}_{\Box \rightarrow})$$

$$\mathbf{A3} \quad (A \Diamond \rightarrow (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \Diamond \rightarrow B) \vee (A \Diamond \rightarrow C)) \quad (\text{CMC}_{\Diamond \rightarrow})$$

$$\mathbf{A4} \quad \neg(A \Diamond \rightarrow \perp) \quad (\text{N}_{\Diamond \rightarrow})$$

$$\mathbf{A5} \quad ((A \Diamond \rightarrow B) \rightarrow (A \Box \rightarrow C)) \rightarrow (A \Box \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad (\text{CFS1})$$

$$\mathbf{A6} \quad (A \Diamond \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \Box \rightarrow B) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow C)) \quad (\text{CFS2})^4$$

Правила вывода IntCK:

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \quad (\text{MP})$$

$$\frac{A \leftrightarrow B}{(C \bigcirc A) \leftrightarrow (C \bigcirc B)} \quad (\text{RCEC}_{\bigcirc}) \quad \frac{A \leftrightarrow B}{(A \bigcirc C) \leftrightarrow (B \bigcirc C)} \quad (\text{RCEA}_{\bigcirc}),$$

где $\bigcirc \in \{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow\}$. Правила **RCEC** $_{\bigcirc}$ и **RCEA** $_{\bigcirc}$ применимы не к произвольным формулам, а только к элементам **IntCK** (то есть в конечном счете — к теоремам)⁵.

Понятия *логики, вывода из множества гипотез* $\Phi \in \mathcal{P}(\text{Fm})$, *доказательства, теоремы* и *отношения локальной выводимости* определяются

⁴Обозначения приведенных схем $\text{CMC}_{\Box \rightarrow}$, $\text{LT}_{\Box \rightarrow}$, $\text{CMC}_{\Diamond \rightarrow}$, $\text{N}_{\Diamond \rightarrow}$ приводятся нами; обозначение схем аксиом CFS1 и CFS2 , отсылающее к кондициональным вариантам аксиом, предложенных Ж. Фишер Серви для интуиционистской модальной логики **IK**, также приводится нами.

⁵Следует отметить, что представленная аксиоматика в одном аспекте отличается от той, которая была предложена Г.К. Ольховиковым: вместо аксиомной схемы CFS2 фигурирует схема аксиом $((A \Diamond \rightarrow B) \wedge (A \Box \rightarrow C)) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow (B \wedge C))$ [Olkhovikov, 2024, p. 1205]. Однако нетрудно показать, что эти аксиоматики являются эквивалентными в том смысле, что при допущении одной из этих схем в качестве исходной выводима как теорема другая, и наоборот. Мы выбираем формулировку с аксиомной схемой CFS2 , так как для алетического случая она являлась исторически первой [Fischer Servi, 1984, p. 228], к тому же схема CFS2 (вместе с аксиомной схемой CFS1) позволяет фиксировать явные и базовые свойства взаимоотношений двух контрфактических кондиционалов и интуиционистской импликации.

стандартно с учетом того, что было сказано в отношении правил **RCEC**_○ и **RCEA**_○.

Осуществим описание формальной семантики для базовой интуиционистской кондициональной логики **IntCK**. Для обеспечения наличия таких стандартных свойств, как монотонность истинности (выполнимости) относительно всех формул языка $\mathcal{L}_{\text{IntCK}}$, фиксируются особые условия связи между отношениями достижимости, а именно прямая и обратная конфлюэнтности⁶.

Определение 3 (Интуиционистская кондициональная биреляционная шкала). *Интуиционистская кондициональная биреляционная шкала $\mathcal{F}$ (или просто шкала) есть тройка $\langle W, \mathfrak{R}, R \rangle$, где:*

- редукт $\langle W, \mathfrak{R} \rangle$ есть интуиционистская шкала Крипке⁷;
- $R \subseteq W \times \mathcal{P}(W) \times W$, при этом R индуцирует для всех $X \in \mathcal{P}(W)$ индексированное семейство отношений $\{R_X\}_{X \in \mathcal{P}(W)}$, $R_X \subseteq W \times W$, где

$$\forall w, v \in W \quad (R_X(w, v) \iff R(w, X, v)). \quad (2)$$

Также для произвольного $X \in \mathcal{P}(W)$ выполняются следующие условия:

- (C1) $\mathfrak{R} \circ R_X \subseteq R_X \circ \mathfrak{R}$ (свойство обратной конфлюэнтности);
- (C2) $R_X \circ \mathfrak{R}^{-1} \subseteq \mathfrak{R}^{-1} \circ R_X$ (свойство прямой конфлюэнтности).

Соглашение 3. Пусть $\mathcal{F} = \langle W, \mathfrak{R}, R \rangle$ есть произвольная шкала, $w \in W$, $X \in \mathcal{P}(W)$. Введем стандартные обозначения для $\mathfrak{R}$ - и R_X -образа w : $\mathfrak{R}(w)$ и $R_X(w)$.

Определение 4 (Интуиционистская кондициональная биреляционная модель). Пусть $\mathcal{F} = \langle W, \mathfrak{R}, R \rangle$ есть шкала. Тогда *интуиционистская кондициональная биреляционная модель $\mathcal{M}$ (или просто модель) есть структура $\langle \mathcal{F}, V \rangle$, где $V: Var \rightarrow \mathcal{P}(W)$ является оценкой, удовлетворяющей условию монотонности:*

$$\dot{\forall} p \in Var \quad \dot{\forall} w, v \in W \quad ((w \in V(p) \wedge w \mathfrak{R} v) \implies v \in V(p)). \quad (3)$$

Определение 5 (Истинность (выполнимость) формулы языка $\mathcal{L}_{\Box \rightarrow \Diamond \rightarrow}$ в модели и возможном мире). Пусть $\mathcal{F} = \langle W, \mathfrak{R}, R \rangle$ есть шкала, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$

⁶Про условия прямой и обратной конфлюэнтностей см. в [Balbiani, Çigdem, 2025].

⁷Для элементов множества W вводятся стандартные метаобозначения: w, v, u (быть может, с нижними числовыми и нечисловыми индексами).

есть модель, $w \in W$, $A \in \mathbf{Fm}$. Индукцией по построению A зададим *истинность* (*выполнимость*) формулы A в модели $\mathcal{M}$ и мире w (обозначение: $\mathcal{M}, w \models A$). Случаи для $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ -фрагмента определяются точно так же, как и при формулировании условий истинности для пропозициональной интуиционистской логики, а потому лишь доопределим понятие истинности до формул вида $B \Box \rightarrow C$ и $B \Diamond \rightarrow C$ (для некоторых $B, C \in \mathbf{Fm}$).

$$\begin{aligned} (\Box \rightarrow) \quad \mathcal{M}, w \models B \Box \rightarrow C &\iff \forall v, u \in W ((w \mathfrak{R} v \wedge v R_{\|B\|_{\mathcal{M}}} u) \implies \mathcal{M}, u \models C); \\ (\Diamond \rightarrow) \quad \mathcal{M}, w \models B \Diamond \rightarrow C &\iff \exists v \in W (w R_{\|B\|_{\mathcal{M}}} v \wedge \mathcal{M}, v \models C), \text{ где} \\ &\|B\|_{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models B\}. \end{aligned}$$

Определения *выполнимости*, *общезначимости в модели*, *выполнимости* и *общезначимости в шкале*, *универсальной общезначимости* и *логического следования* стандартные, и для них вводятся канонические обозначения. Также стандартно определение *модели, основанной на шкале*.

Укажем на то, что условие обратной конфлюэнтности корреспондирует схеме **A5**, а условие прямой конфлюэнтности — схеме **A6** определения 2 [Balbiani, Cigdem, 2025]. С использованием свойства прямой конфлюэнтности определения 3 и условия монотонности (3) индукцией по построению произвольной формулы нетрудно доказать *метатеорему о монотонности*.

2. Натуральное исчисление $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$: правила и понятия вывода, выводимости, теоремы

Представим отмеченное натуральное исчисление, а именно $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$, для предложенной Г.К. Ольховиковым базовой интуиционистской кондициональной логики **IntCK**. Стоит отметить, что предлагаемое исчисление является адаптацией и модификацией натуральных исчислений в стиле Ф. Фитча (субординатных натуральных исчислений), описанных Т. Роем для большого класса неклассических логик [Roy, 2006]. Для дальнейшего определения дедуктивной части натурального исчисления введем ряд необходимых дефиниций технических понятий.

Определение 6 (Множество меток, отмеченная квазиформула, реляционный атом). *Множество меток* есть произвольное счетное множество, обозначаемое как $\mathbb{L}$. Метки будут обозначаться символами x, y, z, s, t (возможно, с нижними числовыми индексами)⁸. Пусть $\sim$ — произвольный символ.

⁸Нас не будет интересовать, чем именно является множество меток (но, для определенности, можно положить, что $\mathbb{L}$ есть множество целых положительных чисел); единственное, что требуется от элементов множества $\mathbb{L}$, — выступать в функции метасинтаксических аналогов возможных миров.

Посредством следующей грамматики определим понятие *квазиформулы*:

$$\mathcal{A} ::= A \mid \sim A \mid \neg A \mid (\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) \mid (\mathcal{A} \vee \mathcal{A}) \mid (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \mid (\mathcal{A} \Box \rightarrow \mathcal{A}) \mid (\mathcal{A} \Diamond \rightarrow \mathcal{A}), \quad (4)$$

где A — формула языка $\mathcal{L}_{\text{IntCK}}$ ⁹. Будем обозначать произвольные квазиформулы как $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ (быть может, с нижними числовыми индексами). Множество всех квазиформул обозначим как QFm . Пусть $x \in \mathbb{L}$, $\mathcal{A} \in \text{QFm}$. Тогда *отмеченная квазиформула* есть пара $\langle x, \mathcal{A} \rangle$ (обозначение: $x : \mathcal{A}$). Если $\mathcal{A} = A$ для некоторой $A \in \text{Fm}$, то $x : A$ есть *отмеченная формула*. Множество всех отмеченных квазиформул будем обозначать как QMark . Пусть $\mathcal{R}$ — произвольный символ, $y \in \mathbb{L}$. Тогда *реляционный атом первого типа* есть тройка $\langle x, \mathcal{R}, y \rangle$ (обозначение: $x\mathcal{R}y$). Пусть r — произвольный символ. Тогда *реляционный атом второго типа* есть четверка $\langle x, r, \mathcal{A}, y \rangle$ (обозначение: $xr\mathcal{A}y$). Множество всех реляционных атомов первого и второго типов обозначим как At . (Также вместо выражения «реляционные атомы первого и второго типов» будем употреблять выражение «реляционные атомы».)

Определение 7 (Истинность квазиформул в интуиционистской кондичиональной биреляционной модели и возможном мире). Пусть $\mathcal{F} = \langle W, \mathfrak{R}, R \rangle$ — шкала, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ — модель, $w \in W$, $\mathcal{A} \in \text{QFm}$. Индукцией по построению квазиформулы $\mathcal{A}$ зададим *истинность квазиформулы $\mathcal{A}$ в модели $\mathcal{M}$ и мире w* (обозначение: $\mathcal{M}, w \models_q \mathcal{A}$).

Пусть $\mathcal{A} = A$ для некоторой $A \in \text{Fm}$. Тогда верно следующее:

$$\mathcal{M}, w \models_q A \iff \mathcal{M}, w \models A. \quad (5)$$

Пусть $\mathcal{A} = \sim \mathcal{B}$ для некоторой $\mathcal{B} \in \text{QFm}$. Тогда верно следующее:

$$\mathcal{M}, w \models_q \sim \mathcal{B} \iff \mathcal{M}, w \not\models_q \mathcal{B}. \quad (6)$$

Случаи со связками $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow$ формулируются аналогично определению 5. Полагаем также для произвольной $\mathcal{A} \in \text{QFm}$ и модели $\mathcal{M} = \langle W, \mathfrak{R}, R, V \rangle$ множество $\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{M}}^q = \{v \in W \mid \mathcal{M}, v \models_q \mathcal{A}\}$ ¹⁰.

Замечание 1. Элементы множества $\mathbb{L}$ (то есть *метки*) при дальнейшей интерпретации являются метасинтаксическими представителями семантического понятия возможного мира некоторой шкалы $\mathcal{F}$ определения 3. В соответствии с определением 7 *квазиформулы* являются метасинтаксическими конструктами, в которых разрешается вхождение аналога $\not\models$ (неистинности), а именно символа $\sim$, и которые вследствие этого используются

⁹Для квазиформул принимаются соглашения о сокращении для выражений с символом $\leftrightarrow$ и опускании внешних скобок, аналогичные представленным в соглашении 1.

¹⁰Естественным образом возможно определить также понятия *общеэзначимости в модели, шкале, универсальной общеэзначимости* произвольной квазиформулы.

для воспроизведения условий истинности формулы, содержащей в качестве главного знака интуиционистское отрицание, с помощью правил вывода. *Отмеченные квазиформулы* выступают в качестве метасинтаксических представителей понятия истинности или неистинности формулы в возможном мире, ассоциированном с некоторой меткой z , помечающей квазиформулу. *Реляционные атомы* репрезентируют достижимость мира v_y из мира w_x по отношению $\mathfrak{R}$ произвольной шкалы $\mathcal{F} = \langle W, \mathfrak{R}, R \rangle$, где w_x представлен меткой x , а v_y — меткой y , если верно, что $x\mathcal{R}y$, а также $w_x R_{\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{M}}^q} v_y$ для произвольной модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$, если верно, что $x\mathcal{R}Ay$.

Соглашение 4. Договоримся использовать символы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ (быть может, с нижними числовыми индексами) для обозначения как отмеченных квазиформул, так и реляционных атомов. В качестве метаобозначений произвольных множеств отмеченных квазиформул и реляционных атомов будем использовать символы Γ, Δ, Σ (быть может, с нижними числовыми индексами).

Сформулируем *правила вывода натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$* . Зафиксируем произвольные $x, y, z, s, t \in \mathbb{L}$, произвольные $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \text{QFm}$, $A \in \text{Fm}$, произвольное выражение $\mathfrak{A} \in \text{QMark} \cup \text{At}$. Для удобства презентации разделим правила на тематические группы.

Определение 8 (Правила вывода натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$).

Группа 1 (повторение, реитерация, нормальность).

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Rep} & \begin{array}{c} i \mid \mathfrak{A} \\ \hline \mathfrak{A} \quad i \end{array} & \text{Reit} \quad \begin{array}{c} i \mid \mathfrak{A} \\ \vdots \\ \mathfrak{A} \quad i \\ \vdots \end{array} & \text{Norm} \quad \begin{array}{c} i \mid x\mathcal{R}Ay \\ j \mid \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \\ \hline x\mathcal{R}vy \quad i, j \end{array}
 \end{array}$$

Группа 2 (правила, характеризующие $\wedge$).

$$\begin{array}{ccc}
 \wedge \mathbf{I} & \begin{array}{c} i \mid x : \mathcal{A} \\ j \mid x : \mathcal{B} \\ \hline x : \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \quad i, j \end{array} & \wedge \mathbf{E}_1 & \begin{array}{c} i \mid x : \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \\ \hline x : \mathcal{A} \quad i \end{array} & \wedge \mathbf{E}_2 & \begin{array}{c} i \mid x : \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \\ \hline x : \mathcal{B} \quad i \end{array}
 \end{array}$$

Группа 3 (правила, характеризующие $\vee$).

$$\begin{array}{ccc}
 \vee\mathbf{I}_1 & \begin{array}{c} i \mid x : \mathcal{A} \\ \hline x : \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \quad i \end{array} & \vee\mathbf{I}_2 & \begin{array}{c} i \mid x : \mathcal{B} \\ \hline x : \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \quad i \end{array} & \vee\mathbf{E} & \begin{array}{c} i \mid x : \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \\ j \mid \underline{x : \mathcal{A}} \\ k \mid y : \mathcal{C} \\ l \mid \underline{x : \mathcal{B}} \\ m \mid y : \mathcal{C} \\ y : \mathcal{C} \quad i, j-k, l-m \end{array}
 \end{array}$$

Группа 4 (правила, характеризующие $\sim$).

$$\begin{array}{ccc}
 \sim\mathbf{I} & \begin{array}{c} i \mid \underline{x : \mathcal{A}} \\ j \mid y : \mathcal{B} \wedge \sim\mathcal{B} \\ x : \sim\mathcal{A} \quad i-j \end{array} & \sim\mathbf{E} & \begin{array}{c} i \mid \underline{x : \sim\mathcal{A}} \\ j \mid y : \mathcal{B} \wedge \sim\mathcal{B} \\ x : \mathcal{A} \quad i-j \end{array}
 \end{array}$$

Группа 5 (правила, характеризующие $\neg$).

$$\begin{array}{ccc}
 \neg\mathbf{I} & \begin{array}{c} i \mid \underline{x\mathcal{R}y} \\ j \mid y : \sim\mathcal{A} \\ x : \neg\mathcal{A} \quad i-j \end{array} & \neg\mathbf{E} & \begin{array}{c} i \mid x\mathcal{R}y \\ j \mid x : \neg\mathcal{A} \\ y : \sim\mathcal{A} \quad i, j \end{array}
 \end{array}$$

Группа 6 (правила, характеризующие $\rightarrow$).

$$\begin{array}{ccc}
 \rightarrow\mathbf{I} & \begin{array}{c} i \mid \underline{x\mathcal{R}y} \\ j \mid \underline{y : \mathcal{A}} \\ y : \mathcal{B} \\ x : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad i-j \end{array} & \rightarrow\mathbf{E} & \begin{array}{c} i \mid x\mathcal{R}y \\ j \mid x : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \\ k \mid y : \mathcal{A} \\ y : \mathcal{B} \quad i, j, k \end{array}
 \end{array}$$

Группа 7 (правила, характеризующие $\Box\rightarrow$).

$$\begin{array}{ccc}
 \Box\rightarrow\mathbf{I} & \begin{array}{c} i \mid \underline{x\mathcal{R}y} \\ \underline{y\mathcal{R}Az} \\ j \mid z : \mathcal{B} \\ x : \mathcal{A} \Box\rightarrow \mathcal{B} \quad i-j \end{array} & \Box\rightarrow\mathbf{E} & \begin{array}{c} i \mid x\mathcal{R}y \\ j \mid y\mathcal{R}Az \\ k \mid x : \mathcal{A} \Box\rightarrow \mathcal{B} \\ z : \mathcal{B} \quad i, j, k \end{array}
 \end{array}$$

Группа 8 (правила, характеризующие $\Diamond \rightarrow$).

$$\begin{array}{c} \Diamond \rightarrow \mathbf{I} \quad \left| \begin{array}{l} i \mid x r_{\mathcal{A}} y \\ j \mid y : \mathcal{B} \\ \hline x : \mathcal{A} \Diamond \rightarrow \mathcal{B} \quad i, j \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{c} \Diamond \rightarrow \mathbf{E} \quad \left| \begin{array}{l} i \mid x : \mathcal{A} \Diamond \rightarrow \mathcal{B} \\ j \mid \begin{array}{l} x r_{\mathcal{A}} y \\ y : \mathcal{B} \end{array} \\ \hline k \mid \begin{array}{l} s : \mathcal{C} \\ s : \mathcal{C} \end{array} \end{array} \right. \quad i, j-k$$

Группа 9 (правила, характеризующие поведение атома $\mathcal{R}$).

$$\begin{array}{c} \mathbf{Ref} \quad \left| \begin{array}{l} i \mid \begin{array}{l} \underline{x \mathcal{R} x} \\ y : \mathcal{C} \end{array} \\ j \mid y : \mathcal{C} \\ \hline y : \mathcal{C} \quad i-j \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbf{Tr} \quad \left| \begin{array}{l} i \mid x \mathcal{R} y \\ j \mid y \mathcal{R} z \\ \hline x \mathcal{R} z \quad i, j \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbf{Mon} \quad \left| \begin{array}{l} i \mid x \mathcal{R} y \\ j \mid x : \mathcal{A} \\ \hline y : \mathcal{A} \quad i, j \end{array} \right. \end{array}$$

Группа 10 (правила, характеризующие взаимоотношения атомов $r_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{R}$).

$$\begin{array}{c} \mathcal{NC1} \quad \left| \begin{array}{l} i \mid x r_{\mathcal{A}} y \\ j \mid y \mathcal{R} z \\ k \mid \begin{array}{l} x \mathcal{R} t \\ \underline{tr_{\mathcal{A}} z} \end{array} \\ l \mid \begin{array}{l} s : \mathcal{C} \\ s : \mathcal{C} \end{array} \end{array} \right. \quad i, j, k-l$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{NC2} \quad \left| \begin{array}{l} i \mid x r_{\mathcal{A}} y \\ j \mid x \mathcal{R} z \\ k \mid \begin{array}{l} y \mathcal{R} t \\ \underline{z r_{\mathcal{A}} t} \end{array} \\ l \mid \begin{array}{l} s : \mathcal{C} \\ s : \mathcal{C} \end{array} \end{array} \right. \quad i, j, k-l$$

Замечание 2. Следует подчеркнуть следующее:

- в формулировках правил $\rightarrow \mathbf{I}$, $\neg \mathbf{I}$ метка y не имеет вхождений ни в одно допущение (посылку) помимо допущений $y : \mathcal{A}$, $x \mathcal{R} y$, а также $x \neq y$;
- в правиле **Mon** выражение $x : \mathcal{A}$ не содержит вхождений символа $\sim$ (тем самым это выражение должно являться отмеченной *формулой*);
- в правилах вывода $\mathcal{NC1}$ и $\mathcal{NC2}$ $t \neq x$, $t \neq y$, $t \neq z$, $t \neq s$, при этом t не входит ни в одну посылку помимо посылок $x \mathcal{R} t$, $tr_{\mathcal{A}} z$ в правиле $\mathcal{NC1}$ и $y \mathcal{R} t$, $z r_{\mathcal{A}} t$ — в правиле $\mathcal{NC2}$;
- в правиле $\Box \rightarrow \mathbf{I}$ метки y и z не входят ни в одну посылку помимо посылок $x \mathcal{R} y$ и $y r_{\mathcal{A}} z$ и $y \neq z$, $x \neq y$, $x \neq z$;

- в правиле $\Diamond \rightarrow \mathbf{E}$ метка y не входит ни в одну посылку помимо посылок $x \text{г} \mathcal{A} u$ и $y : \mathcal{B}$, причем $y \neq x$ и $y \neq s$.

Для дальнейшего построения натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$ воспользуемся адаптированными для целей статьи версиями определений ключевых понятий субординатного исчисления, предложенных В.А. Смирновым в [Смирнов, 2002, с. 25–30]: *субординатная последовательность*, *вхождение выражения в субординатную последовательность*, *последнее выражение субординатной последовательности* и *вывод из множества посылок*.

Определение 9 (Субординатная последовательность отмеченных квазиформул и реляционных атомов). Пусть $\mathfrak{A} \in \text{QMark} \cup \text{At}$. По индукции определим понятие *субординатной последовательности отмеченных квазиформул и реляционных атомов*. (Далее для удобства будем писать просто «субординатная последовательность».)

База индукции: $\mathfrak{A}$ есть субординатная последовательность.

Индуктивный переход:

1. Если d есть субординатная последовательность, то $\frac{d}{\mathfrak{A}}$ есть субординатная последовательность.
2. Если d и d_0 суть субординатные последовательности, а $x : \mathcal{A} \in \text{QMark}$, то d_1 и d_2 суть субординатные последовательности, где

$$d_1 = \left| \begin{array}{c} d \\ | \\ d_0 \\ | \\ x : \mathcal{A} \end{array} \right| \quad d_2 = \left| \begin{array}{c} | \\ d_0 \\ | \\ x : \mathcal{A} \end{array} \right| \quad (7)$$

3. Если d , d_0 и d_1 суть субординатные последовательности, а $x : \mathcal{A} \in \text{QMark}$, то d_2 и d_3 суть субординатные последовательности, где

$$d_2 = \left| \begin{array}{c} d \\ | \\ d_0 \\ | \\ d_1 \\ | \\ x : \mathcal{A} \end{array} \right| \quad d_3 = \left| \begin{array}{c} | \\ d_0 \\ | \\ d_1 \\ | \\ x : \mathcal{A} \end{array} \right| \quad (8)$$

Экстремальное выражение: ничто иное не является субординатной последовательностью.

Соглашение 5. Далее символы $d, d_0, d_1, d_2, \dots$ будут использоваться в качестве метаобозначений произвольных субординатных последовательностей.

Определение 10 (Вхождение выражения в субординатную последовательность и последнее выражение субординатной последовательности). Пусть $\mathfrak{A} \in \mathbf{QMark} \cup \mathbf{At}$, d — субординатная последовательность. Индукцией по построению d одновременно определим понятия *вхождения выражения $\mathfrak{A}$ в субординатную последовательность d* и *последнего выражения $\mathfrak{A}$ субординатной последовательности d* .

1. Пусть d есть $\mathfrak{B}$ для некоторого $\mathfrak{B} \in \mathbf{QMark} \cup \mathbf{At}$. Тогда $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d ($\mathfrak{A}$ является последним выражением d), если и только если $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.
2. Пусть d есть $\frac{d_0}{\mathfrak{B}}$ для некоторой субординатной последовательности d_0 и некоторого $\mathfrak{B} \in \mathbf{QMark} \cup \mathbf{At}$. Тогда $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d , если и только если $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d_0 . В данном представлении субординатной последовательности d $\mathfrak{A}$ является последним выражением d , если и только если $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.
3. Пусть d есть $\frac{d_0}{\frac{d_1}{x : \mathcal{A}}}$ или $\frac{d_1}{\frac{d_0}{x : \mathcal{A}}}$ для некоторых субординатных последовательностей d_0, d_1 и некоторой $x : \mathcal{A} \in \mathbf{QMark}$. Тогда $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d , если и только если, в первом случае, $\mathfrak{A} = x : \mathcal{A}$, или $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d_0 , или $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d_1 , а во втором случае, $\mathfrak{A} = x : \mathcal{A}$ или $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d_1 . В данных представлениях субординатной последовательности d $\mathfrak{A}$ является последним выражением d , если и только если $\mathfrak{A} = x : \mathcal{A}$.
4. Пусть d есть $\frac{d_0}{\frac{d_1}{\frac{d_2}{x : \mathcal{A}}}}$ или $\frac{d_1}{\frac{d_0}{\frac{d_2}{x : \mathcal{A}}}}$ для некоторых субординатных последовательностей d_0, d_1, d_2 и некоторой $x : \mathcal{A} \in \mathbf{QMark}$. Тогда $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d , если и только если, в первом случае, $\mathfrak{A} = x : \mathcal{A}$, или $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d_0 , или $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d_1 , или $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d_2 , а во втором случае, $\mathfrak{A} = x : \mathcal{A}$, или $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d_1 , или $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d_2 . В данных представлениях субординатной последовательности d $\mathfrak{A}$ является последним выражением d , если и только если $\mathfrak{A} = x : \mathcal{A}$.

Перед тем как предложить дефиницию *вывода в натуральном исчислении $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$* , представим определения *прямого правила натурального исчисления $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$* и *непосредственной выводимости из множества посылок*.

Определение 11 (Прямое правило натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$). *Прямое правило* натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$ есть одно из следующих правил определения 8: **Rep**, **Norm**, $\wedge\mathbf{I}$, $\wedge\mathbf{E}_1$, $\wedge\mathbf{E}_2$, $\vee\mathbf{I}_1$, $\vee\mathbf{I}_2$, $\neg\mathbf{E}$, $\rightarrow\mathbf{E}$, $\Box\rightarrow\mathbf{E}$, $\Diamond\rightarrow\mathbf{I}$, **Tr**, **Mon**. Правила **Rep**, $\wedge\mathbf{E}_1$, $\wedge\mathbf{E}_2$, $\vee\mathbf{I}_1$, $\vee\mathbf{I}_2$ называются *однопосылочными*, правила **Norm**, $\neg\mathbf{E}$, $\Diamond\rightarrow\mathbf{I}$, **Tr** и **Mon** — *двухпосылочными*, а все остальные указанные правила — *трехпосылочными*.

Определение 12 (Непосредственная выводимость из множества посылок). Пусть $\Gamma = \{\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n\}$, где $\mathfrak{A}_j \in \text{QMark} \cup \text{At}$ для $1 \leq j \leq n$, $n \geq 1$, $\mathfrak{B} \in \text{QMark} \cup \text{At}$. Тогда из множества Γ *непосредственно выводима* $\mathfrak{B}$, если и только если $\mathfrak{B}$ является заключением некоторого прямого правила определения 11, не являющегося правилом **Norm**, и все посылки данного правила суть выражения $\mathfrak{A}_j \in \Gamma$.

Определение 13 (Вывод в натуральном исчислении $\mathcal{F}\text{IntCK}$ из множества посылок). Пусть $\Gamma, \Delta, \Sigma \subseteq \text{QMark} \cup \text{At}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3 \in \text{QMark} \cup \text{At}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{QFm}$, $x, y, z, s, t, x_0 \in \mathbb{L}^{11}$. По индукции определим понятие *вывода из множества посылок в натуральном исчислении $\mathcal{F}\text{IntCK}$* .

База индукции: субординатная последовательность $\mathfrak{A}$ есть вывод из множества посылок $\{\mathfrak{A}\}$.

Индуктивный переход:

1. Если d есть вывод из множества посылок Γ , то субординатная последовательность d_1 и d_2 есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \{\mathfrak{A}\}$ и $\Gamma \cup \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$, соответственно, где

$$d_1 = \frac{\mathfrak{A}}{d} \quad d_2 = \frac{\mathfrak{B}}{d} \quad (9)$$

2. Если d есть вывод из множества посылок Γ , а выражение $\mathfrak{A}$ имеет вхождение в d и выражение $\mathfrak{C}$ непосредственно выводимо из множества $\{\mathfrak{A}\}$ по некоторому однопосылочному прямому правилу определения 11, то $\frac{d}{\mathfrak{C}}$ есть вывод из множества посылок Γ .
3. Если d есть вывод из множества посылок Γ , а выражения $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ (и $\mathfrak{A}_3$) имеют вхождения в d и выражение $\mathfrak{C}$ непосредственно выводимо из множества $\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\}$ (из множества $\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3\}$) по некоторому двухпосылочному (трехпосылочному) прямому правилу определения 11,

¹¹Необходимо отметить, что множества Γ, Δ, Σ *конечны*.

кроме правила **Norm**, то субординатная последовательность $\frac{d}{\mathfrak{C}}$ есть вывод из множества посылок Γ^{12} .

4. Если d есть вывод из множества посылок Γ , выражения вида $z : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ и $z\mathcal{R}dy$ для любых $z \in \mathbb{L}$ имеют вхождения в d , причем отмеченная квазиформула $z : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ является последним выражением вывода d_1 из $\emptyset$, то субординатная последовательность $\frac{d}{z\mathcal{R}by}$ есть вывод из множества посылок Γ (соответствует правилу **Norm**)¹³.
5. Если d есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \{x : \mathcal{A}\}$, d_0 есть вывод из множества посылок $\Delta \cup \{x : \mathcal{B}\}$, причем последнее выражение выводов d и d_0 есть отмеченная квазиформула $y : \mathcal{C}$, то субординатная последовательность d_1 есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \Delta \cup \{x : \mathcal{A} \vee \mathcal{B}\}$ (соответствует правилу $\vee\mathbf{E}$), где

$$d_1 = \left| \begin{array}{l} x : \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \\ | \\ d \\ | \\ d_0 \\ | \\ y : \mathcal{C} \end{array} \right. \quad (10)$$

6. Если d есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \{x : \mathcal{A}\}$, причем отмеченная квазиформула $y : \mathcal{B} \wedge \sim \mathcal{B}$ является последним выражением вывода d , то субординатная последовательность d_1 есть вывод из множества посылок Γ (соответствует правилу $\sim\mathbf{I}$), где

$$d_1 = \left| \begin{array}{l} | \\ d \\ | \\ x : \sim \mathcal{A} \end{array} \right. \quad (11)$$

7. Если d есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \{x : \sim \mathcal{A}\}$, причем отмеченная квазиформула $y : \mathcal{B} \wedge \sim \mathcal{B}$ является последним выражением вывода d , то d_1 есть вывод из множества посылок Γ (соответствует правилу $\sim\mathbf{E}$), где

$$d_1 = \left| \begin{array}{l} | \\ d \\ | \\ x : \mathcal{A} \end{array} \right. \quad (12)$$

¹²Если двухпосылочное правило — это правило **Mon**, то $\mathfrak{A}_1 = x\mathcal{R}y$, $\mathfrak{A}_2 = x : A$, а $\mathfrak{C} = y : A$ для некоторых $x, y \in \mathbb{L}$, $A \in \mathbf{Fm}$.

¹³То есть для применения правила **Norm** необходимо иметь вывод отмеченной квазиформулы $z : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ из пустого множества посылок для любой $z \in \mathbb{L}$, что согласуется с ограничением, накладываемым на правило **RCEA** аксиоматического исчисления определения 2.

8. Если d есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \{x\mathcal{R}y\}$, причем отмеченная квазиформула $y : \sim\mathcal{A}$ является последним выражением вывода d , а ни одна из посылок Γ не содержит y и $x \neq y$, то субординатная последовательность d_1 есть вывод из множества посылок Γ (соответствует правилу $\neg\mathbf{I}$), где

$$d_1 = \left| \begin{array}{c} d \\ x : \neg\mathcal{A} \end{array} \right. \quad (13)$$

9. Если d есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \{x\mathcal{R}y, y : \mathcal{A}\}$, причем отмеченная квазиформула $y : \mathcal{B}$ является последним выражением вывода d , а ни одна из посылок Γ не содержит y и $x \neq y$, то d_1 есть вывод из множества посылок Γ (соответствует правилу $\rightarrow\mathbf{I}$), где

$$d_1 = \left| \begin{array}{c} d \\ x : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \end{array} \right. \quad (14)$$

10. Если d есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \{x\mathcal{R}y, yr_{\mathcal{A}}z\}$, отмеченная квазиформула $z : \mathcal{B}$ является последним выражением вывода d , при этом, во-первых, $y \neq z$, $y \neq x$, $z \neq x$, во-вторых, y и z не входят ни в одну посылку множества Γ , то субординатная последовательность d_1 есть вывод из множества посылок Γ (соответствует правилу $\Box\rightarrow\mathbf{I}$), где

$$d_1 = \left| \begin{array}{c} d \\ x : \mathcal{A} \Box\rightarrow \mathcal{B} \end{array} \right. \quad (15)$$

11. Если d есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \{xr_{\mathcal{A}}y, y : \mathcal{B}\}$, отмеченная квазиформула $s : \mathcal{C}$ есть последнее выражение вывода d , причем метка $z \neq x$, $z \neq s$ и z не входит ни в одну посылку множества Γ , то субординатная последовательность d_1 является выводом из множества посылок $\Gamma \cup \{x : \mathcal{A} \Diamond\rightarrow \mathcal{B}\}$ (соответствует правилу $\Diamond\rightarrow\mathbf{E}$), где

$$d_1 = \left| \begin{array}{c} x : \mathcal{A} \Diamond\rightarrow \mathcal{B} \\ d \\ s : \mathcal{C} \end{array} \right. \quad (16)$$

12. Если d является выводом из множества посылок $\Gamma \cup \{x\mathcal{R}x\}$, причем отмеченная квазиформула $y : \mathcal{C}$ есть последнее выражение d , то субординатная последовательность d_1 есть вывод из множества Γ (соответствует правилу $\mathbf{RefI}$), где

$$d_1 = \left| \begin{array}{c} d \\ s : \mathcal{C} \end{array} \right. \quad (17)$$

13. Если d есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \{x\mathcal{R}t, tr_{\mathcal{A}}z\}$, отмеченная квазиформула $s : \mathcal{C}$ есть последнее выражение вывода d , причем $t \neq x$, $t \neq y$, $t \neq z$, $t \neq s$ и t не входит ни в одну из посылок множества Γ , то субординатная последовательность d_1 является выводом из множества посылок $\Gamma \cup \{xr_{\mathcal{A}}y, y\mathcal{R}z\}$ (соответствует правилу $\mathcal{NC1}$), где

$$d_1 = \left| \begin{array}{c} xr_{\mathcal{A}}y \\ y\mathcal{R}z \\ | \\ d \\ s : \mathcal{C} \end{array} \right. \quad (18)$$

14. Если d есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \{y\mathcal{R}t, zr_{\mathcal{A}}t\}$, отмеченная квазиформула $s : \mathcal{C}$ есть последнее выражение вывода d , причем $t \neq x$, $t \neq y$, $t \neq z$, $t \neq s$ и t не входит ни в одну из посылок множества Γ , то субординатная последовательность d_1 является выводом из множества посылок $\Gamma \cup \{xr_{\mathcal{A}}y, x\mathcal{R}z\}$ (соответствует правилу $\mathcal{NC2}$), где

$$d_1 = \left| \begin{array}{c} xr_{\mathcal{A}}y \\ x\mathcal{R}z \\ | \\ d \\ s : \mathcal{C} \end{array} \right. \quad (19)$$

15. Пусть d есть вывод из множества посылок Γ , субординатные последовательности d_0 и $\left| \begin{array}{c} d_1 \\ x_0 : \mathcal{D} \end{array} \right.$ суть выводы из множества посылок $\Sigma \cup \Delta$,

а субординатные последовательности $\left| \begin{array}{c} \mathfrak{A} \\ | \\ d_1 \\ x_0 : \mathcal{D} \end{array} \right.$ и $\left| \begin{array}{c} \mathfrak{A} \\ | \\ d_2 \\ | \\ d_3 \\ x_0 : \mathcal{D} \end{array} \right.$ суть выводы

из множества посылок $\Sigma \cup \Delta$, причем $\mathfrak{A} \in \Sigma$. (d_1 , d_2 и d_3 суть некоторые субординатные последовательности.) Тогда, если каждое выражение из Σ имеет вхождение в вывод d , субординатные последовательности d_4 , d_5 и d_6 суть выводы из множества посылок $\Gamma \cup \Delta$ (соответствует правилу **Reit**), где

$$d_4 = \left| \begin{array}{c} d \\ d_0 \end{array} \right. \quad d_5 = \left| \begin{array}{c} d \\ | \\ d_1 \\ x_0 : \mathcal{D} \end{array} \right. \quad d_6 = \left| \begin{array}{c} d \\ | \\ d_2 \\ | \\ d_3 \\ x_0 : \mathcal{D} \end{array} \right. \quad (20)$$

Экстремальное выражение: ничто иное не является выводом из множества посылок в натуральном исчислении $\mathcal{F}\text{IntCK}$.

Соглашение 6. Пусть $x \in \mathbb{L}$, $\Phi \subseteq \text{Fm}$. Обозначим в качестве $x : \Phi$ множество $\{x : B \in \text{QMark} \mid B \in \Phi\}$ ¹⁴.

На основании изложенного стало возможным предложить определения понятиям *выводимости формулы из множества посылок в натуральном исчислении $\mathcal{F}\text{IntCK}$* и *теоремы натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$* .

Определение 14 (Выводимость формулы из множества посылок в натуральном исчислении $\mathcal{F}\text{IntCK}$). Пусть $\Phi \cup \{A\} \subseteq \text{Fm}$. Тогда *из множества формул Φ выводима формула A в натуральном исчислении $\mathcal{F}\text{IntCK}$* (обозначение: $\Phi \vdash_{\mathcal{F}\text{IntCK}} A$), если и только если существует вывод d из множества посылок $x : \Phi$ такой, что отмеченная формула $x : A$ является последним выражением d (для каждого $x \in \mathbb{L}$).

Определение 15 (Теорема натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$). Пусть $A \in \text{Fm}$. Тогда A есть *теорема исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$* , если и только если $\emptyset \vdash_{\mathcal{F}\text{IntCK}} x : A$ для каждого $x \in \mathbb{L}$. (Обозначение: $\vdash_{\mathcal{F}\text{IntCK}} A$.)

Соглашение 7. Обозначим множество всех правил вывода, указанных в определении 8, натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$ как $\text{Rule}_{\mathcal{F}\text{IntCK}}$.

До этого момента мы лишь неформально ссылались на натуральное исчисление $\mathcal{F}\text{IntCK}$ в различных формулировках определений и правил — ввиду всего изложенного стало возможным предложить точную дефиницию описываемого исчисления следующим образом.

Определение 16 (Отмеченное субординатное натуральное исчисление $\mathcal{F}\text{IntCK}$). *Отмеченное субординатное натуральное исчисление $\mathcal{F}\text{IntCK}$ (натуральное исчисление $\mathcal{F}\text{IntCK}$)* есть тройка $\langle \text{QMark} \cup \text{At}, \text{Rule}_{\mathcal{F}\text{IntCK}}, \vdash_{\mathcal{F}\text{IntCK}} \rangle$, где $\vdash_{\mathcal{F}\text{IntCK}}$ — отношение выводимости, заданное в определениях 14 и 15.

На этом завершается построение отмеченного субординатного натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$.

¹⁴Отметим, что, поскольку $\text{Fm} \subseteq \text{QFm}$, выражение вида $x : B$ для произвольных $B \in \text{Fm}$ и $x \in \mathbb{L}$ определено корректно.

3. Метатеорема о полноте натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$ и дедуктивная эквивалентность исчислений $\mathcal{F}\text{IntCK}$ и IntCK

Перейдем к презентации идей обоснования метатеоремы о (слабой) полноте исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$ относительно интуиционистской кондициональной биреляционной семантики, а также установлению дедуктивной эквивалентности исчислений $\mathcal{F}\text{IntCK}$ и IntCK . Перед этим укажем на справедливость следующей метатеоремы.

Метатеорема 1 (О сильной корректности натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$). *Натуральное исчисление $\mathcal{F}\text{IntCK}$ сильно корректно относительно класса всех шкал, то есть верно следующее:*

$$\forall \Phi \in \mathcal{P}(\text{Fm}) \forall A \in \text{Fm} \ (\Phi \vdash_{\mathcal{F}\text{IntCK}} A \implies \Phi \models A).$$

В силу того, что правила вывода воспроизводят структуру условий истинности формул в произвольной модели, а также структуру взаимоотношений между двумя отношениями достижимости в произвольной шкале, доказательство представленной метатеоремы является несложной модификацией стратегий доказательства корректности, принятых для отмеченных формализмов в контексте неклассических логик, через использование понятия интерпретации меток и доопределение условий истинности до отмеченных квазиформул и реляционных атомов с помощью определения 7 и вводимой интерпретации (см. [Roy, 2006; Viganò, 2000]). В качестве следствия из метатеоремы о сильной корректности имеется метатеорема о синтаксической непротиворечивости $\mathcal{F}\text{IntCK}$. (Доказательство стандартное.)

Следствие 1 (Синтаксическая непротиворечивость натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$). Отмеченное субординатное натуральное исчисление $\mathcal{F}\text{IntCK}$ синтаксически непротиворечиво, то есть $\not\vdash_{\mathcal{F}\text{IntCK}} \perp$.

Доказательство метатеоремы о семантической полноте осуществляется непрямым образом: используя результат Г.К. Ольховикова о семантической полноте аксиоматического исчисления IntCK [Olkhovikov, 2024], достаточно показать, что все частные случаи схем аксиом IntCK являются теоремами натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$ и что все правила вывода аксиоматического исчисления являются допустимыми в $\mathcal{F}\text{IntCK}$. Тем самым, применив возвратную индукцию по построению доказательства в исчислении IntCK , возможно продемонстрировать, что из $\vdash_{\text{IntCK}} A$ следует $\vdash_{\mathcal{F}\text{IntCK}} A$ для произвольной $A \in \text{Fm}$, что достаточно для доказательства слабой полноты натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$. Упомянутое обстоятельство обуславливает необходимость следующей леммы.

Лемма 1. Все частные случаи схем аксиом исчисления **IntCK** являются теоремами натурального исчисления **FIntCK**, а правила вывода **MP**, **RCEC** $_{\bigcirc}$ и **RCEA** $_{\bigcirc}$ аксиоматического исчисления **IntCK** для $\bigcirc \in \{\Box\rightarrow, \Diamond\rightarrow\}$ допустимы в натуральном исчислении **FIntCK**.

Доказательство. Поскольку обоснование большинства схем аксиом **IntCK** как теорем и правил вывода **IntCK** как допустимых в натуральном исчислении **FIntCK** не представляет особых трудностей, будет представлен вывод из пустого множества посылок лишь аксиомной схемы **A4** определения 2. Обратим внимание на то, что для обоснования допустимости правила **RCEA** $_{\bigcirc}$, где $\bigcirc \in \{\Box\rightarrow, \Diamond\rightarrow\}$, существенно использование правила **Norm**, а для обоснования аксиомной схемы **A5** — правила **NC1**.

Пусть $A \in \mathbf{Fm}$, $x, y, z, s \in \mathbb{L}$, причем все данные метки отличны друг от друга. Покажем, что $\vdash_{\mathbf{FIntCK}} \neg(A \Diamond\rightarrow \perp)$, то есть $\vdash_{\mathbf{FIntCK}} \neg(A \Diamond\rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0))$ для фиксированной $p_0 \in Var$ ввиду стандартного сокращения $\perp$ (соглашение 1). Рассмотрим следующую субординатную последовательность.

1	$x\mathcal{R}y$	Доп.
2	$y : A \Diamond\rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0)$	Доп.
3	$yr_A z$	Доп.
4	$z : p_0 \wedge \neg p_0$	
5	$s : \sim(p_0 \wedge \neg p_0)$	Доп.
6	$z : p_0 \wedge \neg p_0$	4 Reit
7	$z : p_0$	6 $\wedge \mathbf{E}_1$
8	$z : \neg p_0$	6 $\wedge \mathbf{E}_2$
9	$z\mathcal{R}z$	Доп.
10	$z : \neg p_0$	8 Reit
11	$z : \sim p_0$	9, 10 $\neg \mathbf{E}$
12	$z : \sim p_0$	9–11 Refl
13	$z : p_0 \wedge \sim p_0$	7, 12 $\wedge \mathbf{I}$
14	$s : p_0 \wedge \neg p_0$	5–13 $\sim \mathbf{E}$
15	$s : p_0 \wedge \neg p_0$	2, 3–14 $\Diamond\rightarrow \mathbf{E}$
16	$s : p_0$	15 $\wedge \mathbf{E}_1$
17	$s : \neg p_0$	15 $\wedge \mathbf{E}_2$
18	$s\mathcal{R}s$	Доп.

19				$s : \neg p_0$	17 Reit
20				$s : \sim p_0$	18, 19 $\neg\mathbf{E}$
21				$s : \sim p_0$	18–20 Refl
22				$s : p_0 \wedge \sim p_0$	16, 21 $\wedge\mathbf{I}$
23				$y : \sim(A \Diamond \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0))$	2–22 $\sim\mathbf{I}$
24				$x : \neg(A \Diamond \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0))$	1–23 $\neg\mathbf{I}$

Так как метки x, y, z, s различны, ограничение на правило $\Diamond \rightarrow \mathbf{E}$ соблюдено, и, поскольку метка x была произвольной, приведенная субординатная последовательность является выводом отмеченной формулы $x : \neg(A \Diamond \rightarrow \perp)$ для любой метки x из пустого множества посылок. ■

Метатеорема 2 (О слабой полноте натурального исчисления $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$). *Отмеченное субординатное натуральное исчисление $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$ является слабо полным относительно класса всех шкал, то есть верно следующее:*

$$\forall A \in \mathbf{Fm} \ (\models A \implies \vdash_{\mathcal{F}\mathbf{IntCK}} A). \quad (21)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную $A \in \mathbf{Fm}$ и положим $\models A$. В силу теоремы о полноте исчисления $\mathbf{IntCK}$ [Olkhovikov, 2024, p. 1213] имеем $\vdash_{\mathbf{IntCK}} A$. Как уже было отмечено, используя лемму 1, несложной возвратной индукцией по построению произвольного доказательства $\mathbf{IntCK}$ можно показать, что $\forall B \in \mathbf{Fm} \ (\vdash_{\mathbf{IntCK}} B \implies \vdash_{\mathcal{F}\mathbf{IntCK}} B)$, в частности $\vdash_{\mathbf{IntCK}} A \implies \vdash_{\mathcal{F}\mathbf{IntCK}} A$. Тем самым приходим к тому, что $\vdash_{\mathcal{F}\mathbf{IntCK}} A$. ■

Метатеорема 3 (Слабая дедуктивная эквивалентность исчислений $\mathbf{IntCK}$ и $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$). *Аксиоматическое исчисление $\mathbf{IntCK}$ и натуральное исчисление $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$ слабо дедуктивно эквивалентны, то есть*

$$\forall A \in \mathbf{Fm} \ (\vdash_{\mathbf{IntCK}} A \iff \vdash_{\mathcal{F}\mathbf{IntCK}} A). \quad (22)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную $A \in \mathbf{Fm}$. Прямая метаимпликация обоснована при доказательстве метатеоремы 2. Покажем справедливость обратной метаимпликации. В самом деле, пусть $\vdash_{\mathcal{F}\mathbf{IntCK}} A$. Тогда, по метатеореме 1, $\models A$, откуда, в силу семантической полноты $\mathbf{IntCK}$, $\vdash_{\mathbf{IntCK}} A$. ■

Заключение

В данной статье осуществлено построение отмеченного субординатного натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$, адекватное соответствующей кондициональной биреляционной семантике и дедуктивно эквивалентное аксиоматическому исчислению IntCK , формализующему в интуиционистском контексте свойства двух независимых контрфактических связок (сильной $\Box \rightarrow$ и слабой $\Diamond \rightarrow$). Для определения натурального исчисления была применена техника меток, позволяющая представлять возможные миры и отношения достижимости между ними на метасинтаксическом уровне посредством взаимодействия аналогов — меток и реляционных атомов. Было введено специальное метасинтаксическое понятие — отмеченная квазиформула, репрезентирующая истинность и неистинность формул в мире, ассоциированном с меткой. Были описаны специфические правила вывода, направленные на точное моделирование семантических условий истинности контрфактических кондиционалов, интуиционистских связок, а также общей структуры связи между отношениями достижимости, фиксируемой в интуиционистских кондициональных биреляционных шкалах. Понятие вывода дано индуктивно посредством адаптации подхода В.А. Смирнова из [Смирнов, 2002] через модификацию понятия субординатной последовательности на случай отмеченных квазиформул и реляционных атомов. Направления для дальнейших исследований включают рассмотрение вопроса о доказательстве сильной полноты натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$ через адаптацию техники канонических моделей, следуя [Roy, 2006], изучение расширений базовой логики IntCK и определение для них адекватных отмеченных натуральных и секвенциальных исчислений по аналогии с тем, как это было реализовано в настоящей статье, а также обоснование наличия таких важных метасвойств, как нормализуемость выводов и аналитичность натурального исчисления $\mathcal{F}\text{IntCK}$.

Литература

- Смирнов, 2002 – Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания / Под ред. В.Н. Садовского, В.А. Бочарова. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 264 с.
- Balbani, Çigdem, 2025 – Balbani P., Çigdem G. Intuitionistic Modal Logics: a Minimal Setting, 2025. P. 1–57. URL: <https://arxiv.org/pdf/2502.19060> (дата обращения: 15.05.2025).
- Božić, Došen, 1984 – Božić M., Došen K. Models for Normal Intuitionistic Modal Logics // *Studia Logica*. 1984. Vol. 43. No. 3. P. 217–245.
- Chellas, 1975 – Chellas B.F. Basic Conditional Logic // *Journal of Philosophical Logic*. 1975. Vol. 5. No. 2. P. 133–153.

- Ciardelli, Liu, 2020 – *Ciardelli I., Liu X.* Intuitionistic Conditional Logics // Journal of Philosophical Logic. 2020. Vol. 49. No. 4. P. 807–832.
- Ciardelli, Liu, 2019 – *Ciardelli I., Liu X.* Minimal-Change Counterfactuals in Intuitionistic Logic // Proc. 7th International Workshop: Logic, Rationality, and Interaction (LORI'19). Berlin, Heidelberg: Springer, 2019. P. 43–56.
- Fischer Servi, 1984 – *Fischer Servi G.* Axiomatizations for Some Intuitionistic Modal Logics // Rendiconti del Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino. 1984. Vol. 42. No. 3. P. 179–194.
- Fisher Servi, 1980 – *Fischer Servi G.* Semantics for a Class of Intuitionistic Modal Calculi // Italian Studies in the Philosophy of Science / Ed. by M.L. Dalla Chiara. Dordrecht: D. Reidel Pub. Comp., 1980. P. 59–72.
- Lewis, 1971 – *Lewis D.* Completeness and Decidability of Three Logics of Counterfactual Conditionals // Theoria. 1971. Vol. 37. No. 1. P. 74–85.
- Lewis, 1973 – *Lewis D.* Counterfactuals. Malden: Blackwell Publishing, 1973. 163 p.
- Nute, 1980 – *Nute D.* Topics in Conditional Logic. Dordrecht: D. Reidel Pub. Comp., 1980. 175 p.
- Olkhovikov, 2024 – *Olkhovikov G.K.* An Intuitionistically Complete System of Basic Intuitionistic Conditional Logic // Journal of Philosophical Logic. 2024. Vol. 53. No. 5. P. 1199–1240.
- Plotkin, Stirling, 1986 – *Plotkin G., Stirling C.* A Framework for Intuitionistic Modal Logics // Proc. 1st Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge (TARK'86). Burlington: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1986. P. 399–406.
- Roy, 2006 – *Roy T.* Natural Deductions for Priest, An Introduction to Non-Classical Logic // Australasian Journal of Logic. 2006. Vol. 5. P. 47–192.
- Segeberg, 1989 – *Segeberg K.* Notes on Conditional Logic // Studia Logica. 1989. Vol. 48. No. 2. P. 157–168.
- Stalnaker, 1968 – *Stalnaker R.C.* A Theory of Conditionals // Studies in Logical Theory / Ed. by N. Rescher. Oxford: Basil Blackwell, 1968. P. 98–112.
- Stalnaker, Thomason, 1970 – *Stalnaker R.C., Thomason R.H.* A Semantic Analysis of Conditional Logic // Theoria. 1970. Vol. 36. No. 1. P. 23–42.
- Viganò, 2000 – *Viganò L.* Labelled Non-Classical Logics. Dordrecht: Springer, 2000. 306 p.
- Weiss, 2019a – *Weiss Y.* Basic Intuitionistic Conditional Logic // Journal of Philosophical Logic. 2019. Vol. 48. No. 3. P. 447–469.
- Weiss, 2019b – *Weiss Y.* Frontiers of Conditional Logic. Ph.D. thesis. New York: The City University of New York, 2019. 174 p.

IGOR V. ZAITSEV

Labeled Fitch-style natural deduction for basic intuitionistic conditional logic

Igor V. Zaitsev

National Research University Higher School of Economics,
21/4 Staraya Basmannaya Str., Moscow, 105066, Russian Federation.
E-mail: izaitysev65@gmail.com

Abstract: This article presents a labeled Fitch-style natural deduction system, $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$, for the basic propositional intuitionistic conditional logic $\mathbf{IntCK}$ introduced by G.K. Olkhovikov. The logic $\mathbf{IntCK}$ serves as a correct intuitionistic counterpart to Chellas' minimal conditional logic $\mathbf{CK}$, designed to accommodate Lewis' strong and weak counterfactual conditionals within a single framework. In order to do this, $\mathbf{IntCK}$ features two independent logical connectives, namely $\Box\rightarrow$ and $\Diamond\rightarrow$, and is interpreted over birelational Kripke semantics with specific confluence conditions linking the intuitionistic and conditional accessibility relations. The $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$ calculus employs labels, relational atoms, and the notion of labeled quasi-formulas to encode semantic notions and conditions, allowing the construction of derivations that reflect the truth and non-truth of formulas in possible worlds. The system is built upon a subordinate derivation framework, enabling an inductive definition of derivability (in the style of V.A. Smirnov). The inference rules of $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$ are aligned with semantic principles: structural rules govern relational atoms, while logical rules determine the correct assertibility conditions for connectives, including the two counterfactual operators $\Box\rightarrow$ and $\Diamond\rightarrow$. Finally, the paper outlines the proof strategies for two metatheorems: weak completeness of $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$ with respect to the class of all birelational intuitionistic conditional frames and deductive equivalence of $\mathcal{F}\mathbf{IntCK}$ and $\mathbf{IntCK}$.

Keywords: proof theory, natural deduction, counterfactuals, intuitionistic logic, conditional logic, labels, labeled formulae, relational atoms, birelational Kripke semantics, completeness, deductive equivalence

For citation: Zaitsev I.V. "Otmechennye subordinatnye natural'nye ischisleniya dlya bazovoi intuitionskoi konditsional'noi logiki" [Labeled Fitch-style natural deduction for basic intuitionistic conditional logic], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 2, pp. 143–168. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-143-168. (In Russian)

Acknowledgements. The article was prepared within the framework of the project "International academic cooperation" HSE University.

References

Balbani, Çigdem, 2025 – Balbani, P., Çigdem, G. "Intuitionistic Modal Logics: a Minimal Setting", 2025, pp. 1–57. [<https://arxiv.org/pdf/2502.19060>, accessed on 15.05.2025]

- Božić, Došen, 1984 – Božić, M., Došen, K. “Models for Normal Intuitionistic Modal Logics”, *Studia Logica*, 1984, Vol. 43, No. 3, pp. 217–245.
- Chellas, 1975 – Chellas, B.F. “Basic Conditional Logic”, *Journal of Philosophical Logic*, 1975, Vol. 5, No. 2, pp. 133–153.
- Ciardelli, Liu, 2020 – Ciardelli, I., Liu, X. “Intuitionistic Conditional Logics”, *Journal of Philosophical Logic*, 2020, Vol. 49, No. 4, pp. 807–832.
- Ciardelli, Liu, 2019 – Ciardelli, I., Liu, X. “Minimal-Change Counterfactuals in Intuitionistic Logic”, in *Proc. 7th International Workshop: Logic, Rationality, and Interaction (LORI’19)*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2019, pp. 43–56.
- Fischer Servi, 1984 – Fischer Servi, G. “Axiomatizations for Some Intuitionistic Modal Logics”, *Rendiconti del Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino*, 1984, Vol. 42, No. 3, pp. 179–194.
- Fisher Servi, 1980 – Fischer Servi, G. “Semantics for a Class of Intuitionistic Modal Calculi”, in *Italian Studies in the Philosophy of Science*, ed. by M.L. Dalla Chiara. Dordrecht: D. Reidel Pub. Comp., 1980, pp. 59–72.
- Lewis, 1971 – Lewis, D. “Completeness and Decidability of Three Logics of Counterfactual Conditionals”, *Theoria*, 1971, Vol. 37, No. 1, pp. 74–85.
- Lewis, 1973 – Lewis, D. *Counterfactuals*. Malden: Blackwell Publishing, 1973. 163 pp.
- Nute, 1980 – Nute, D. *Topics in Conditional Logic*. Dordrecht: D. Reidel Pub. Comp., 1980. 175 pp.
- Olkhovikov, 2024 – Olkhovikov, G.K. “An Intuitionistically Complete System of Basic Intuitionistic Conditional Logic”, *Journal of Philosophical Logic*, 2024, Vol. 53, No. 5, pp. 1199–1240.
- Plotkin, Stirling, 1986 – Plotkin, G., Stirling, C. “A Framework for Intuitionistic Modal Logics”, in *Proc. 1st Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge (TARK’86)*. Burlington: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1986, pp. 399–406.
- Roy, 2006 – Roy, T. “Natural Deductions for Priest, An Introduction to Non-Classical Logic”, *Australasian Journal of Logic*, 2006, Vol. 5, pp. 47–192.
- Segerberg, 1989 – Segerberg, K. “Notes on Conditional Logic”, *Studia Logica*, 1989, Vol. 48, No. 2, pp. 157–168.
- Smirnov, 2002 – Smirnov, V.A. *Logicheskie metody analiza nauchnogo znaniya* [Logical methods of the analysis of scientific knowledge], eds. by V.N. Sadovskii, V.A. Bocharov. Moscow: Editorial URSS, 2002. 264 pp. (In Russian)
- Stalnaker, 1968 – Stalnaker, R.C. “A Theory of Conditionals”, in *Studies in Logical Theory*, ed. by N. Rescher. Oxford: Basil Blackwell, 1968, pp. 98–112.
- Stalnaker, Thomason, 1970 – Stalnaker, R.C., Thomason, R.H. “A Semantic Analysis of Conditional Logic”, *Theoria*, 1970, Vol. 36, No. 1, pp. 23–42.

-
- Viganò, 2000 – Viganò, L. *Labelled Non-Classical Logics*. Dordrecht: Springer, 2000. 306 pp.
- Weiss, 2019a – Weiss, Y. “Basic Intuitionistic Conditional Logic”, *Journal of Philosophical Logic*, 2019, Vol. 48, No. 3, pp. 447–469.
- Weiss, 2019b – Weiss, Y. *Frontiers of Conditional Logic*. Ph.D. thesis. New York: The City University of New York, 2019. 174 pp.

А.С. ПИМАНОВ

Расширения систем временной логики В.А. Смирнова в контексте детерминизма

Артем Сергеевич Пиманов

Институт философии РАН.

Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

E-mail: dillabunturmemoria@gmail.com

Аннотация: Статья посвящена рассмотрению одного из возможных расширений систем В.А. Смирнова в контексте проблемы детерминизма. Проблематика детерминизма традиционно тесно связана с различными системами временной логики. Рассуждения о детерминизме можно заметить как в ранних работах Аристотеля, так и в работах Прайора по основаниям логики времени. Особое место во временной логике занимает идея ветвящегося времени. Она выступает как один из стандартных подходов к пониманию детерминизма во временной логике. На текущий момент существует несколько параллельно развивающихся подходов в логике ветвящегося времени, каждый из которых не завершен и обладает определенными логико-философскими недостатками. Это дает нам основание обратиться к некоторым работам Смирнова. В 80-е гг. он предложил альтернативное понимание логики ветвящегося времени, которое позволяет устранить некоторые нежелательные детерминистические следствия при интерпретации овремененных высказываний. Особый интерес представляет понимание Смирновым возможности. Оно позволяет отобразить онтологический статус объектов, который описывает Сеймур Михаэль в реконструкции детерминистического аргумента Диодора Кроноса — если при анализе историй мы сместимся в сторону прошлого, трактовка $\Diamond A$ позволяет утверждать, что нечто возможно, но при этом в будущем не является истинным ни в какой момент времени. В статье подробно рассматриваются изначальные идеи Смирнова во временной логике, а также несколько предложенных им систем — K_s и K_r . Как результат, предлагается возможный вариант расширения систем Смирнова, показывается разрешимость данного расширения, выделяются перспективы дальнейшего изучения темы.

Ключевые слова: неклассическая логика, временная логика, логика ветвящегося времени, детерминизм, разрешимость, модализация овремененных высказываний

Для цитирования: Пиманов А.С. Расширения систем временной логики В.А. Смирнова в контексте детерминизма // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Т. 31. № 2. С. 169–190. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-169-190

Введение

Проблематика детерминизма традиционно тесно связана с развитием временной логики [Ohrstrom, Hasle, 1995; Brauner et al., 2000; Muller, 2015].

Рассуждения о детерминизме можно заметить как в ранних работах Аристотеля, так и в работах Прайора по основаниям логики времени. Особое место во временной логике занимает идея ветвящегося времени. Традиционно она выступает как один из стандартных подходов к пониманию детерминизма во временной логике. Исследования в этой области продолжают оставаться актуальными и по сей день. На текущий момент существует несколько параллельно развивающихся подходов. Один из них берет свое начало с работ Петера Эрстрема [Ohrstrom, 1984]. Он рассматривает проблему детерминизма в ее теологическом понимании, а именно с точки зрения известной проблемы совмещения догматов о свободе воли человека и всезнании Бога. Эрстрем отстаивает представление о выделении в рамках ветвления так называемой линии актуального будущего, которая должна быть использована непосредственно в определении оценки. Современные исследования в этом направлении связаны с поисками путей преодоления основных онтологических и семантических проблем. Здесь стоит отметить другие поздние работы Петера Эрстрема [Ohrstrom, 2009; Ohrstrom, 2014; Ploug, Ohrstrom, 2014], работы Яйцека Вейвера [Malpass, Wawer, 2012][Wawer, 2014; Wawer, Malpass, 2020]. Развитие данного подхода продолжается в последующих работах и на текущий момент не завершено. Отправной точкой другого подхода принято считать работу Ньюэла Белнапа и Митчелла Грина [Belnap, Green, 1994]. В ней дается конструктивная критика ранних работ Эрстрема в контексте известной проблемы утверждения – ситуации, при которой ряд овремененных высказываний о будущем не может иметь оценки. Как итог, в дальнейших работах Белнапом предлагается логика «ветвящегося пространства–времени» (branching space–time) [Belnap, 1992; Belnap, 2001; Belnap, Placek, 2012; Belnap et al., 2021]. Общей идеей данного подхода можно считать попытку совместить представления об индетерминизме с положениями релятивистской физики. Современные исследования в этом направлении связаны с поисками альтернатив устоявшейся концепции оценки через пары <момент, история> в виде семантики переходов [Rumberg, 2016; Rumberg, Zanardo, 2019].

Детальное изучение этих подходов показывает, что каждый из них, к сожалению, не завершен и обладает определенными логико-философскими недостатками. Это, по нашему мнению, дает нам основание обратиться к работам Владимира Александровича Смирнова. В восьмидесятые годы его интересовали вопросы возможной модализации временных операторов, в ходе разработки которых им предлагается альтернативный взгляд на проблематику детерминизма в логике ветвящегося времени. В рамках данной работы будет представлено аналитическое и содержательное рассмотрение работ Смирнова в контексте современного понимания детерминизма в ло-

гике. В первой части внимание будет уделено рассмотрению изначальных идей Смирнова во временной логике, показана их связь с проблематикой детерминизма. Как итог, в этой части нами предлагается одно возможное расширение, которое мы обозначим как систему BT_r . Показываются особенности данной системы и ее связь с проблематикой детерминизма. Во второй части доказывается разрешимость полученного расширения, подводятся итоги, показываются перспективы дальнейшего изучения темы.

1. Детерминизм в логике и системы Смирнова

В восьмидесятые годы Смирнова интересовали вопросы возможной модализации временных операторов, в ходе разработки которых им предлагается альтернативный взгляд на проблематику детерминизма в логике ветвящегося времени. При первом взгляде на его работы нужно отметить, что в ходе своих исследований его интересовал очень широкий спектр логических вопросов, а не только тех, которые имеют отношение к анализу овремененных высказываний. При этом, к сожалению, некоторые интересные идеи, которые были им сформулированы, по тем или иным причинам не нашли своего отражения в дальнейших исследованиях. Вячеслав Александрович Боcharов в предисловии к одному из изданий работы Смирнова отмечает, что ряд его идей носит характер «беглых заметок», и нам как современным исследователям приходится утешать себя тем фактом, что Смирнов пытался «объять необъятное», что попросту невозможно [Смирнов, 2002]. Так, в работе «Определение модальных операторов через временные» Смирнов дает свой анализ возможных вариантов понимания модальностей. Первое из них представляет собой так называемое «диодоровское» понимание, отраженное в работах Прайора [Prior, 1955]. Второе является интерпретацией Смирновым представлений о времени в работах Аристотеля. В качестве альтернативы Смирнов предлагает свое понимание модальностей, которое обосновывает следующим образом [Смирнов, 2010с, с. 188]:

Мы исходим из понимания возможного как того, что могло бы быть. Если нечто возможно, то не исключается ситуация, когда его не было, нет и не будет. Изобразим временную зависимость в виде древовидного графа; путь слева направо — в будущее, справа налево — в прошлое. Пусть a — настоящий момент, b — момент, предшествующий a , и пусть c — состояние, достижимое из b . Тогда не исключается случай, что A истинно в c , но не истинно ни в момент a , ни в один из предшествующих a моментов и ни в один из следующих за a моментов. Конечно, если в

a истинно «возможно A », то A может быть истинным в точке, лежащей между b и a , или в самой a , или в одной из точек, следующих за a . Но при каждом из этих условий (при достаточно естественных предпосылках) истинно PFA .

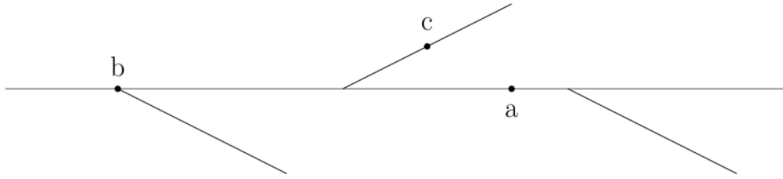


Рис. 1. Схема примера

- (DF1) $\Box A \equiv GA \wedge A$, $\Diamond A \equiv FA \vee A$;
 (DF2) $\Box A \equiv HA \wedge A \wedge GA$, $\Diamond A \equiv PA \vee A \vee FA$;
 (DF3) $\Box A \equiv HGA$, $\Diamond A \equiv PFA$.

Смирнов показывает, что при использовании перечисленных определений можно доказать, что известные системы модальных логик становятся фрагментами определенных систем временной логики¹ [Смирнов, 2010с, с. 195].

	+	DF1	DF2	DF3
K_t	$HA \rightarrow PA$	T	B	B^0 и B
K_{t4}	$HA \rightarrow PA$	$S4$	B	$???$
K_b	$HA \rightarrow PA$	$S4$	B	$S5^0$ и $S5$
$K_{t4.3}$	$HA \rightarrow PA$	$S4.3$	$S5$	$S5^0$ и $S5$
SL	$HA \rightarrow PA$	$S4.3$	$S5$	$S5^0$ и $S5$
PL	$HA \rightarrow PA$	$S4.3$	$S5$	$S5^0$ и $S5$
PCr		$S5$	$S5$	$S5$

В частности, Смирнов отмечает, что при определении $DF3$ ни одно расширение логики K_t не может содержать в качестве модального фрагмента модальную логику $S4$, $S4.3$ или T . Эта ситуация, по его мнению, побуждает нас пересмотреть вопрос о минимальной временной логике. Уже в других

¹Система Скотта SL получается из K_t за счет добавления аксиом $GA \rightarrow FA$ и $HA \rightarrow PA$. Система Прайора PL получается из системы Скотта путем добавления аксиомы $PA \rightarrow PPA$. Система циркулярной временной логики Прайора PCr получается из K_{t4} за счет добавления аксиом $GA \rightarrow A$ и $GA \rightarrow HA$. Система B^0 есть система B без аксиомы $\Box A \rightarrow A$. Система S^0 есть система S без аксиомы $\Box A \rightarrow A$.

работах «Определение модальных операторов через временные» [Смирнов, 2010с] и «Логические системы с модальными временными операторами» [Смирнов, 2010b] он отмечает, что важную роль в понимании систем временной логики играет изначальное понимание самих временных высказываний. Стандартно временные высказывания можно интерпретировать в двух смыслах: ассерторическом (как констатации будущего положения дел) и модальном (как возможные или необходимые положения будущего). Смирнов отстаивает именно модальное понимание временных высказываний [Смирнов, 2010а, с. 179]. Как итог, он предлагает определять операторы F и G следующим образом:

$F_{\Box}A$ — (необходимо когда-нибудь будет A) истинно в точке a , если на каждой ветке, выходящей из a , найдется момент, когда A истинно.

$F_{\Diamond}A$ — (возможно когда-нибудь будет A) истинно в точке a , если найдется такая нить, выходящая из точки a , и такая точка b на этой нити, что A истинна на ней.

$G_{\Box}A$ — (необходимо всегда будет A) истинно в точке a , если в любой нити, выходящей из a , в любой ее точке A истинно.

$G_{\Diamond}A$ — (возможно всегда будет A) истинно в точке a , если найдется такая нить, выходящая из a , что в любой ее точке A истинно.

При такой интерпретации временных операторов все временные логики становятся по существу бимодальными — $\langle LP, LF \rangle_t$, где LP — логика L для прошлого, LF — логика L для будущего, t — аксиомы сопряженности между прошлым и будущим. $L_S = \langle X, R_1, R_2 \rangle$, где R_1 — отношение в будущее, а R_2 — отношение в прошлое. Стандартно условия сопряженности между прошлым и будущим определяются следующим образом — $R_1(a, b) \Leftrightarrow R_2(b, a)$, то есть существует обращение между R_1 и R_2 . В рамках модальной интерпретации временных операторов Смирнов предлагает понимать отношения R_1 как отношение причинного порождения, а R_2 как отношение предшествования (a предшествует b). При такой интерпретации можно заметить, что $R_1(a, b) \rightarrow R_2(a, b)$ имеет место, но не $R_2(a, b) \rightarrow R_1(a, b)$. Как итог, им предлагается ввести следующие новые условия сопряженности прошлого и будущего.

- $s1 - R_1(a, b) \rightarrow R_2(b, a)$
- $s2 - (R_1(c, b) \wedge R_2(d, b)) \rightarrow (R_1(c, d) \vee R_2(d, c) \vee (c = d))$
- $n - \exists b(R_2(b, a) \wedge R_1(b, a))$
- $r1 - R_1(a, b) \rightarrow R_2(a, b)$
- $r2 - (R_1(c, b) \wedge R_2(d, b)) \rightarrow (R_1(c, d) \vee R_2(d, c) \vee (c = d))$
- $r3 - \exists b(R_2(b, a) \wedge R_1(b, a))$

Условию $s1$ соответствует формула $A \rightarrow GPA$, а условию $s2$ формула $FPA \rightarrow PA \vee A \vee FA$. Условию n соответствует формула $A \rightarrow PFA$. Для того, чтобы обеспечить общезначимость этой формулы, необходимо наличие формулы $HA \rightarrow PA$. Условие r есть объединение условий s и n . Используя эти новые условия сопряженности прошлого и будущего, на базе известных систем временной логики можно построить класс новых систем — $\langle LP, LF \rangle_s, \langle DP, LF \rangle_n, \langle DP, LF \rangle_r$, где $DP = LP + HA \rightarrow PA$. Здесь, на наш взгляд, стоит сделать важное замечание. В своих работах Смирнов не ставил перед собой прямой цели построения нового класса временных систем. Лично им было построено и рассмотрено всего две системы — K_r и K_s . Остановимся на них поподробнее. Языком, лежащим в основе этих систем, является прайоровский язык стандартной временной логики, состоящий из множества пропозициональных переменных, логических связок $\neg, \rightarrow, \wedge$ и $\vee$, а также модальных операторов F, P, G и H^2 . Понятие формулы задается индуктивно:

1. Всякая пропозициональная переменная есть формула,
2. Если A — формула, то $\neg A, FA, GA, PA, HA$ — формулы,
3. Если A и B — формулы, то $A \rightarrow B, A \wedge B, A \vee B$ — формулы.

В основе семантик систем K_r и K_s лежит следующая семантическая структура. $\langle T, R_1, R_2 \rangle$ — временная структура, где T есть непустое множество моментов времени, R_1, R_2 бинарные отношения на T . Для отношений R_1 и R_2 верно, что $R_1(a, b) \rightarrow R_2(b, a)$, $(R_1(c, b) \wedge R_2(d, b)) \rightarrow (R_1(c, d) \vee R_2(d, c) \vee (c = d))$, $\exists b(R_2(b, a) \wedge R_1(b, a))$. Модель $M = \langle T, R_1, R_2, V \rangle$, где T — множество возможных моментов времени, R_1, R_2 — отношение следования, V — функция приписывания значения. Значения формулам задаются следующим образом:

1. Значения для формул с пропозициональными связками задаются стандартным способом,
2. $\mathfrak{M}, t \models PA$, если и только если существует t_1 такое, что $R_2(t_1, t)$ и $\mathfrak{M}, t_1 \models A$,
3. $\mathfrak{M}, t \models FA$, если и только если существует t_1 такое, что $R_1(t, t_1)$ и $\mathfrak{M}, t_1 \models A$,
4. $\mathfrak{M}, t \models HA$, если и только если для всякого t_1 верно, что из $R_2(t_1, t)$ следует $\mathfrak{M}, t_1 \models A$,

²Операторы G и H можно задать по определению как $GA = \neg F \neg A$ и $HA = \neg P \neg A$.

5. $\mathfrak{M}, t \Vdash GA$, если и только если для всякого t_1 верно, что из $R_1(t, t_1)$ следует $\mathfrak{M}, t_1 \Vdash A$.

Аксиоматическое исчисление системы K_r

Схемы аксиом КЛВ +	Правила вывода
• $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$	• Modus ponens
• $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$	• $Gen_1 : \frac{A}{HA}$
• $A \rightarrow PFA$	• $Gen_2 : \frac{A}{GA}$
• $A \rightarrow GPA$	
• $HA \rightarrow PA$	
• $FPA \rightarrow PA \vee A \vee FA$	

Аксиоматическое исчисление системы K_s^3

Схемы аксиом КЛВ +	Правила вывода
• $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$	• Modus ponens
• $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$	• $Gen_1 : \frac{A}{HA}$
• $A \rightarrow PFA$	• $Gen_2 : \frac{A}{GA}$
• $A \rightarrow GPA$	
• $GA \rightarrow GGA$	
• $HA \rightarrow HHA$	
• $HA \rightarrow PA$	
• $FPA \rightarrow PA \vee A \vee FA$	

Краткое рассмотрение идей, предложенных Смирновым в контексте проблематики детерминизма, позволяет нам выделить несколько важных,

³Системы K_r и K_s получаются путем добавления к аксиомам систем K_t и K_t4 аксиом условия r . Аксиома $A \rightarrow HFA$ не используется. Вместо нее в соответствии с идеей Смирнова об определениях модальных операторов представлена формула $A \rightarrow PFA$.

на наш взгляд, моментов. Сам Смирнов лишь затронул проблематику детерминизма во временной логике. Текущие исследования по данной теме охватывают гораздо более широкий спектр вопросов. Тем не менее, на наш взгляд, предложенные им идеи могут быть использованы при решении некоторых интересных вопросов, которые были поставлены другими исследователями, но в полной мере до конца не были завершены. Ряд идей Смирнова находит свое отражение в фундаментальных работах Прайора по основаниям логики времени. Прайор при анализе семантики Пирсового типа обращает внимание на то, что в ее рамках возникают трудности с отображением идеи о необходимости событий прошлого — $Pp \rightarrow \Box Pp$. «В рамках пирсовской логики трудно определить необходимость, для которой мы можем сказать, что все истины о прошлом, но не все истины о будущем, являются необходимыми. Для F эта логика позволяет нам утверждать только такие истины о будущем, которые являются необходимыми. Что мы можем сделать, так это определить смысл “возможно будет”, который отличим от простого “будет”, хотя аналогичный смысл “возможно было” не отличим от простого “было”» [Prior, 1967, с. 132]. Прайор считает такой подход не совсем верным, так как он, с его точки зрения, больше отражает античные и средневековые представления нежели то, что можно проследить в работах самого Пирса. Он предлагает свое решение проблемы, связанное со следующим рассмотрением необходимости — $\langle t, h \rangle \in V(\Box A)$, если и только если $\forall h' (h' \in H(t) \wedge \langle t, h' \rangle \in V(FA))$, где $\Box$ также можно рассматривать как оператор G в значении «всегда будет». По мнению Прайора, можно адекватно показать, что все утверждения о прошлом являются необходимыми, но при этом не все утверждения о будущем являются необходимыми. Но тогда принцип $A \rightarrow HFA$ при такой интерпретации становится ложным. Тем не менее его можно сохранить за счет определения оператора F как $\neg G\neg$ в виде принципа $A \rightarrow H\neg G\neg A$. Как можно заметить, предложенное Смирновым понимание возможности возникает не на пустом месте. Ослабление принципа $A \rightarrow HFA$ в работах Смирнова за счет введения $\Diamond A \equiv PFA$, представлений о новых условиях сопряженности между прошлым и будущим, использования характеристической аксиомы $HA \rightarrow PA$, является не просто техническим решением задачи о представлении ряда модальных систем как фрагментов временной логики, но имеет под собой серьезное логико-философское обоснование.

Также некоторые наработки Смирнова могут быть применены в вопросе известной в логике ветвящегося времени идеи открытости будущего. Данная проблема была изложена в работах Берджесса [Burgess, 1978]. В статье “The unreal future” он рассматривает ряд детерминистических примеров, на основе которых предлагает деление подходов в логике ветвящегося вре-

мени на актуализм и антактуализм. Актуализм он определяет как позицию, при которой выражение «будет p » необходимо понимать как то, что p имеет или не имеет место в будущем в рамках некоторой реальной истории, хотя в настоящем может быть несколько потенциально возможных исходов. При этом важным моментом в позиции актуализма является то, что мы, находясь как наблюдатели в настоящем, рассуждаем не просто о потенциальной возможности того, что p имеет или не имеет место в будущем, но о том, что данный факт должен быть на определенной истории по необходимости. В таком случае можно заметить, что подобная трактовка отражает логическое понимание детерминизма, прослеживаемое еще с Аристотеля. Антактуализм он определяет как позицию, согласно которой выражение «будет p » имеет или не имеет место независимо от возможных исходов, а потому является строго необходимым. Как отмечает Бёрджесс, такое разделение подходов отражает предложенные в работах Прайора варианты семантик Оккамовского и Пирсового типа. С одной стороны, легко заметить, что идея Смирнова о возможности построения класса новых систем может быть альтернативной репрезентацией изложенного Прайором актуалистского принципа «жди и смотри». С другой стороны, предложенный им вариант понимания операторов $F_{\Box}A$ и $G_{\Box}A$ легко согласуется с идеей антактуализма.

Также в рамках такого определения операторов предложенный Смирновым вариант понимания модальностей хоть и не напрямую, но отражает результат исследований в области реконструкции известного детерминистического аргумента Диодора Кроноса. В частности, определенный интерес с точки зрения анализа овремененных высказываний долгое время представляет вариант реконструкции Сеймура Михаэля [Michael, 1976]. Он обращает внимание на особенности интерпретации одной из посылок аргумента — существует высказывание, которое возможно, но которое не является истинным и не будет истинным в будущем. В его представлении оно ошибочно рассматривается только с точки зрения настоящего и будущего и никак не сказывается о прошлом. Из этого он делает вывод о том, что утверждение, которое возможно, но не является и не будет являться истинным в посылке, на самом деле истинно в прошлом. Последнее заставляет Михаэля поднять вопрос о том, каким образом можно точно интерпретировать понятие необходимости в аргументе. Он считает, что оно должно пониматься так — если утверждение необходимо, то оно должно быть истинным в настоящем — необходимо p влечет p . Тогда посылку можно переформулировать — существует утверждение, которое возможно, но не является истинным ни в какой момент времени. Как итог, Михаэль предлагает следующий вариант реконструкции. $T_t(p)$ — p истинно в момент t .

$\Diamond_t(p)$ — p возможно в момент t . $\Box_t(p)$ — p необходимо в момент t . n — момент настоящего.

Реконструкция посылок:

$$(M_1) \forall t((T_t(p) \wedge t < n) \rightarrow \Box(p))$$

$$(M_3) \exists p(\Diamond(p) \wedge \neg \exists t(T_t(p)))^4$$

Реконструкция аргумента:

$(m1) t < n$	посылка
$(m2) \forall t((T_t(p) \wedge t < n) \rightarrow \Box(p))$	посылка
$(m3) \exists p(\Diamond(p) \wedge \neg \exists t(T_t(p)))$	допущение
$(m4) \Diamond(p) \wedge \neg \exists t(T_t(p))$	из $(m3)$
$(m5) \Diamond(p)$	из $(m4)$
$(m6) \neg \exists t(T_t(p))$	из $(m4)$
$(m7) \forall t(\neg T_t(p))$	из $(m6)$
$(m8) \neg T_t(p)$	из $(m7)$
$(m9) T_t(\neg p)$	из $(m8)$ и того, что $\forall t(T_t(\neg p) \equiv \neg T_t(p))$
$(m10) (T_t(p) \wedge t < n) \rightarrow \Box(p)$	из $(m2)$
$(m11) (T_t(\neg p) \wedge t < n) \rightarrow \Box(\neg p)$	подстановка $\neg p$ вместо p в $(m10)$
$(m12) T_t(\neg p) \wedge t < n$	из $(m1)$ и $(m9)$
$(m13) \Box(\neg p)$	MP: $(m11)$, $(m12)$
$(m14) \neg \Diamond(p)$	из $(m13)$ и того, что $\Box(p) \equiv \neg \Diamond(\neg p)$
$(m15) \neg \exists p(\Diamond(p) \wedge \neg \exists t(T_t(p)))$	из $(m5)$ и $(m14)$

В ходе анализа данного варианта реконструкции можно обратить внимание, что противоречие, возникающее в аргументе, возникает из-за наличия $\forall t(T_t(\neg p) \equiv \neg T_t(p))$, которое основано не на применении закона исключенного третьего, как считали рассмотренные нами ранее исследователи, а из характера утверждений, существование которых описывается в (M_3) . Если существует утверждение, которое возможно, но не является истинным ни в какой момент времени, то оно ложно. «Кажется, что существуют условно ложные предложения; то, что Никсон никогда не уйдет в отставку с поста президента, кажется именно таким предложением. Таким образом, при допущении, что p двузначно, $[M_3]$ утверждает нечто вполне разумное: то, что, судя по всему, является истинным» [Michael, 1976, с. 231]. Таким образом, использование закона исключенного третьего кажется излишним.

⁴Нумерация (M_1) и (M_3) обусловлена особенностями реконструкций аргумента Диодора. Согласно аргументу, существуют три выражения о связи времени и необходимости, которые не могут быть одновременно истинными. Особенность реконструкции Михаэля заключается в том, что он использует только два выражения — первое и третье.

В результате можно показать, что аргумент корректен, а детерминистические следствия преодолеваются за счет того, что утверждения, существование которых постулируется в M_3 , попросту ложны.

Возвращаясь к работам Смирнова, стоит обратить внимание на пример, который используется при обосновании понимания возможности как $\Diamond A \equiv PFA$. Он, на наш взгляд, как раз и отражает тот онтологический статус объектов, который описывает Михаэль в своей интерпретации (M_3). В примере Смирнов, как он пишет, исходит из некоторых «естественных» предпосылок, но при этом, осознанно или неосознанно, допускает интерпретацию, при которой, если мы при анализе историй сместимся в сторону прошлого, трактовка $\Diamond A$ действительно позволяет выражать такие овремененные высказывания, при которых нечто возможно, но при этом в будущем (относительно изначального момента) не является истинным ни в какой момент времени. Поэтому, как и в случае с описанными ранее выражениями Прайора, ослабление $A \rightarrow HFA$ в работах Смирнова за счет введения ($DF3$) имеет под собой серьезное логико-философское обоснование.

Как итог, рассмотрев основные идеи Смирнова в области временной логики и проанализировав их связь с имеющимися на текущий момент вопросами касательно проблематики детерминизма, мы хотим предложить одно возможное расширение, которое обозначим как систему BT_r . Она представляет собой систему K_b с добавлением аксиом условия r^5 . Выбор системы K_b в основе расширения обусловлен несколькими причинами. Данная система в минимальном приближении и достаточно просто отражает идею ветвящегося времени. Как минимум сам Смирнов прибегает к идее ветвления при рассмотрении предлагаемого им определения модальностей. Также логика ветвящегося времени традиционно выступает как один из стандартных подходов к пониманию детерминизма во временной логике. Мы подробно пытались показать, что основное логико-философское значение работ Смирнова так или иначе строится вокруг идеи ветвления. Уже предложенные Смирновым системы K_s и K_r линейны, и все изложенные нами ранее аспекты попросту не затрагивает. Язык и семантика системы BT_r задается тем же образом, что и для систем K_s и K_r .

⁵Система K_b достаточно широко известна. Она получается из K_t4 за счет добавления аксиомы $(PA \wedge PB) \rightarrow (P(A \wedge B) \vee P(A \wedge PB) \vee P(PA \wedge B))$.

Аксиоматическое исчисление системы BT_r :

Схемы аксиом КЛВ +	Правила вывода
• $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$	• Modus ponens
• $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$	• $Gen_1 : \frac{A}{HA}$
• $A \rightarrow PFA$	• $Gen_2 : \frac{A}{GA}$
• $A \rightarrow GPA$	
• $GA \rightarrow GGA$	
• $HA \rightarrow HHA$	
• $HA \rightarrow PA$	
• $FPA \rightarrow PA \vee A \vee FA$	
• $(PA \wedge PB) \rightarrow (P(A \wedge B) \vee P(A \wedge PB) \vee P(PA \wedge B))$	

Отдельный вопрос, который мы хотим поставить касательно предлагаемого расширения, связан с возможностью нахождения для него разрешающих процедур. Наличие у системы временной логики свойства разрешимости также связано с проблемой детерминизма.

Определение 1. Стандартная временная логика Λ является разрешимой, если разрешимой является проблема выполнимости в Λ (Λ — satisfiability problem).

Определение 2. Проблема выполнимости в Λ разрешима если можно построить алгоритм, позволяющий определить, является ли формула A выполнимой в M , где M — класс моделей M в Λ .

Данные определения являются эквивалентными следующим:

Определение 3. Стандартная временная логика Λ является разрешимой, если разрешима проблема общезначимости в Λ (Λ — validity problem).

Определение 4. Проблема общезначимости в Λ разрешима, если можно построить алгоритм, позволяющий определить, является ли формула A общезначимой в Λ .

Разрешимость позволяет в определенной степени сохранить позитивные следствия принятия позиции детерминизма, когда существует возможность для интерпретации событий нашего мира как результата некоторых необходимых причин [Пиманов, 2022]. Поэтому далее мы рассмотрим доказательство разрешимости предложенного расширения.

2. Системы Смирнова в контексте разрешимости

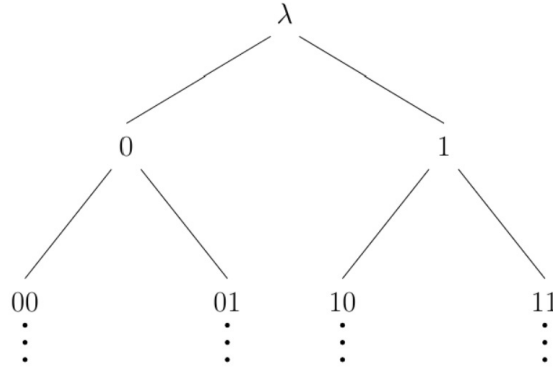
Доказательство разрешимости полученного расширения мы покажем известным методом интерпретации. Данный метод сводит доказательство наличия у системы свойства разрешимости к случаю, при котором это самое наличие является очевидным. Сведение в методе интерпретации происходит к известной Теореме Рабина [Rabin, 1969]. Данная теорема позволяет показать разрешимость так называемых структур SnS . В общем виде SnS представляет собой монадическую второпорядковую теорию древовидных структур бесконечной глубины, где каждый узел данной структуры имеет n последующих за ним узлов. Благодаря теореме Рабина метод интерпретации позволяет доказать наличие свойства разрешимости за счет построения интерпретации рассматриваемой нами системы как структуры SnS .

Определение 5 (SnS). Пусть $\mathcal{A}$ — конечное множество символов (алфавит). $\mathcal{A}^*$ — множество конечных последовательностей элементов алфавита (включая нулевую последовательность λ). $\leq$ (отношение начального сегмента) — отношение на $\mathcal{A}^*$, где $x \leq y$, если $y = xz$. Если $x \leq y$ и $x = y$, то $x < y$. Если $\mathcal{A}$ полностью упорядочено отношением $<_{\mathcal{A}}$, то $\preceq$ — лексиграфическое упорядочивание $\mathcal{A}^*$ индуцированное отношением $<_{\mathcal{A}}$. $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $x \leq y$ или $x = zau$ и $y = zbv$, где $a, b \in \mathcal{A}$ и $a <_{\mathcal{A}} b$. Для всякого $a \in \mathcal{A}$ верно, что $r_a : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ — функция a -го последователя — $r_a(x) = xa$. Для всякого n такого, что $n \in \mathbb{N}$ или $n = \omega$ верно, что $T = \{i \in \omega \mid i < n\}$. Тогда $\mathfrak{N}_n = \langle T_n, r_i, \leq, \preceq \rangle_{i < n}$ — счетно-бесконечная структура функций n -го последователя (SnS).

Каждая структура $\mathfrak{N}_n$ — бесконечное дерево, каждый узел которого имеет n непосредственных последователей. Рассмотрим случай, при котором $n = 1$. Тогда $\mathfrak{N}_1 = \langle \{0\}^*, r_0, \leq, \preceq \rangle$ — бесконечное дерево, каждый узел которого имеет ровно одного непосредственного последователя. Если же $n = 2$, то $\mathfrak{N}_2 = \langle \{0, 1\}^*, r_0, r_1, \leq, \preceq \rangle$ — бесконечное дерево, каждый узел которого имеет ровно одного непосредственного последователя.

λ — корневой узел; r_0 — отношение первого последователя (first daughter relation); r_1 — отношение второго последователя (second daughter relation); $\leq$ — отношение прямого следования (dominates relation), то есть можно найти x , если двигаться строго вверх от y ; $\preceq$ — отношение прямого следования влево (dominates-or-to-the-left-of relation), то есть можно найти x , если двигаться строго вверх и влево от y . Соответственно $\mathfrak{N}_\omega$ — бесконечное дерево, каждый узел которого имеет ω непосредственных последователя.

Свойства структур SnS можно описать посредством второпорядкового монадического языка (MSOL). Данный язык содержит в себе множество

Рис. 2. Внутренний сегмент структуры $\mathfrak{N}_2$

функциональных символов — $r_0, r_1, \dots, r_\omega$ для описания функций 1-го, 2-го, $\dots$, ω -го последователя соответственно; множество индивидуальных переменных — $x, y, z, u, \dots$; множество одноместных предикатных переменных — $P, Q, S, \dots$. Синтаксис и семантика второпорядкового монадического языка задается стандартным образом.

Теорема. Для любого натурального числа n или $n = \omega$ верно, что SnS — разрешима

Теперь нашей задачей становится проинтерпретировать исследуемую систему, как систему SnS . Пусть Λ_M — множество счетно-бесконечных моделей Λ . Тогда необходимо построить для любой формулы A второпорядковую монадическую формулу $Sat - \Lambda(A)$, для которой верно следующее:

- (1) Формула $Sat - \Lambda(A)$ должна иметь в себе всю необходимую информацию о формуле A с точки зрения ее перевода во второпорядковый монадический язык (MSOL).
- (2) Формула $Sat - \Lambda(A)$ должна определять множество подструктур $\mathfrak{N}_n$, являющихся изоморфными копиями моделей M .
- (3) Формула $Sat - \Lambda(A)$ должна быть построена таким образом, что она выполнима в $\mathfrak{N}_n$ тогда и только тогда, когда результат перевода формулы φ выполним в определенной подструктуре $\mathfrak{N}_n$, изоморфной модели $\mathfrak{M}$ в M тогда и только тогда, когда φ выполнима в M .

Как мы уже отмечали ранее, рассматриваемое нами расширение представляет собой систему K_b с соблюдением условий сопряженности между

прошлым и будущим r . Как и другие системы логики ветвящегося времени, данная система тесно связана с теорией деревьев.

Определение 6.

Дерево T — пару $\langle T, R \rangle$, где T есть множество моментов времени, R — транзитивное и необязательно рефлексивное отношение на множестве T .

Ветка b некоторого $t \in T$ — максимальное линейно упорядоченное подмножество множества $\{t' \mid R(t, t')\}$.

Множество всех веток B дерева обозначается как $B(T)$.

История h — максимальные линейно упорядоченные подмножества множества

Пусть M — бесконечное множество моделей $\mathfrak{M}$ системы K_b . Пусть $\langle W, R \rangle$ временная структура некоторой модели $\mathfrak{M}$ из M . Данную временную структуру можно представить в виде дерева $\langle T, R \rangle$. Для любого $\langle T, R \rangle$ не существует ограничения на ветвление из момента времени. Следовательно, чтобы развернуть каждую временную структуру $\langle W, R \rangle$, возможности структуры $\mathfrak{N}_n$ оказывается недостаточно и необходимо использовать структуру $\mathfrak{N}_\omega$

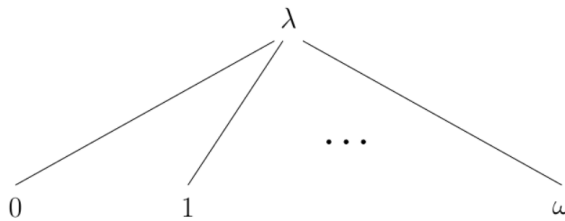


Рис. 3. Внутренний сегмент структуры $\mathfrak{N}_\omega$

Для того, чтобы проще доказать разрешимость системы BT_r , предварительно необходимо доказать разрешимость исходной системы K_b . Для того, чтобы доказать наличие у системы K_b свойства разрешимости, необходимо построить формулу $Sat - K_b$. Для этого необходимо определить перевод во второпорядковый монадический язык и определить множество

подструктур $\mathfrak{N}_\omega$, являющихся изоморфными копиями моделей из M . Чтобы построить корректный изоморфизм системы K_b в структуру $\mathfrak{N}_\omega$, воспользуемся широко известным методом развертки. Для начала введем следующие вспомогательные определения.

S — исходное поддерево $\mathfrak{N}_\omega$ тогда и только тогда, когда если $y \in S$ и $x \leq y$, то $x \in S$. Фрейм $\langle \vec{W}, \vec{R} \rangle$ — развертка некоторого счетного фрейма $\langle W, R \rangle$ вокруг некоторого возможного мира ω . R^* — рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\vec{R}$ такое, что если существует x , существует y и верно, что $\vec{R}(x, y)$, то $R^*(x, y)$. Тогда фрейм $\langle \vec{W}, R^* \rangle$ изоморфен фрейму $\langle S, \leq_S \rangle$.

Определение 7. Пусть f определяет корень фрейма $\langle \vec{W}, R^* \rangle$ к λ , где λ — начальный элемент структуры $\mathfrak{N}_\omega$. Тогда если $\vec{u} \in \vec{W}$, то $f(\vec{u}) = m$, и верно, что $\{\vec{s} \in \vec{W} \mid R(\vec{u}, \vec{s})\}$

Если $\vec{s}$ — i -й элемент пересчета, то верно $f(\vec{s}) = r_i(m)$. Это означает, что последователь $\vec{u}$, который является i -м последователем нашего пересчета, определяется как i -й в последовательности m . Таким образом структура $\mathfrak{N}_\omega$ позволяет вместить в себя любое поддерево K_b . Таким образом можно определить перевод во второпорядковый монадический язык. Для этого осталось уточнить следующее:

- (I) $x = y$ тогда и только тогда, когда $x \preceq y$ и $y \preceq x$,
- (II) $Root(x)$ тогда и только тогда, когда $\neg \exists y(y < x)$,
- (III) $Isubtree(S)$ тогда и только тогда, когда $\exists y(Root(y) \wedge S(y)) \wedge \forall z \forall u((S(z) \wedge u \leq z) \rightarrow S(u))$,
- (IV) $x \leq_S y$ тогда и только тогда, когда $S(x) \wedge S(y) \wedge x \leq y$,
- (V) T^ω — перевод формул языка системы K_b во второпорядковый монадический язык:

$$\begin{array}{lll}
 (i) & T_{x,S}^\omega(p) & = P(x) \\
 (ii) & T_{x,S}^\omega(\neg A) & = \neg T_{x,S}^\omega(A) \\
 (iii) & T_{x,S}^\omega(A \wedge B) & = T_{x,S}^\omega(A) \wedge T_{x,S}^\omega(B) \\
 (iv) & T_{x,S}^\omega(A \vee B) & = T_{x,S}^\omega(A) \vee T_{x,S}^\omega(B) \\
 (v) & T_{x,S}^\omega(A \rightarrow B) & = \neg T_{x,S}^\omega(A) \vee T_{x,S}^\omega(B) \\
 (vi) & T_{x,S}^\omega(PA) & = \exists y(y \leq_S x \wedge T_{y,S}^\omega(A)) \\
 (vii) & T_{x,S}^\omega(HA) & = \forall y(y \leq_S x \rightarrow T_{y,S}^\omega(A)) \\
 (viii) & T_{x,S}^\omega(FA) & = \exists y(x \leq_S y \wedge T_{y,S}^\omega(A)) \\
 (ix) & T_{x,S}^\omega(GA) & = \forall y(x \leq_S y \rightarrow T_{y,S}^\omega(A))
 \end{array}$$

Теперь, осуществив построение изоморфизма и определив перевод во второпорядковый монадический язык, можно определить формулу $Sat - K_b(A)$:

$$\exists S \exists P_1 \dots \exists P_n \exists x (Isubtree(S) \wedge \forall z (P_1(z) \rightarrow S(z)) \wedge \dots \wedge \forall z (P_n(z) \rightarrow S(z)) \wedge S(x) \wedge T_{x,S}^\omega(A).$$

Таким образом видно, что система K_b может быть проинтерпретирована как структура $S_\omega S$. Это в свою очередь означает, что согласно теореме Рабина система K_b является разрешимой. Тогда для того, чтобы проинтерпретировать BT_r как структуру SnS , необходимо проинтерпретировать как SnS системы DBT_r и FBT_r . Для этого необходимо построить формулы $Sat - DBT_r$ и $Sat - FBT_r$ соответственно. Построение изоморфизма аналогично построению изоморфизма для формулы $Sat - K_b$. Перевод же претерпит определенные изменения.

Для DBT_r :

$$\begin{aligned} (i) \quad T_{x,S}^\omega(p) &= P(x) \\ (ii) \quad T_{x,S}^\omega(\neg A) &= \neg T_{x,S}^\omega(A) \\ (iii) \quad T_{x,S}^\omega(A \wedge B) &= T_{x,S}^\omega(A) \wedge T_{x,S}^\omega(B) \\ (iv) \quad T_{x,S}^\omega(A \vee B) &= T_{x,S}^\omega(A) \vee T_{x,S}^\omega(B) \\ (v) \quad T_{x,S}^\omega(A \rightarrow B) &= \neg T_{x,S}^\omega(A) \vee T_{x,S}^\omega(B) \\ (vi) \quad T_{x,S}^\omega(PA) &= \exists y (y \leq_S x \wedge T_{y,S}^\omega(A)) \\ (vii) \quad T_{x,S}^\omega(HA) &= \forall y (y \leq_S x \rightarrow T_{y,S}^\omega(A)) \end{aligned}$$

Для FBT_r :

$$\begin{aligned} (i) \quad T_{x,S}^\omega(p) &= P(x) \\ (ii) \quad T_{x,S}^\omega(\neg A) &= \neg T_{x,S}^\omega(A) \\ (iii) \quad T_{x,S}^\omega(A \wedge B) &= T_{x,S}^\omega(A) \wedge T_{x,S}^\omega(B) \\ (iv) \quad T_{x,S}^\omega(A \vee B) &= T_{x,S}^\omega(A) \vee T_{x,S}^\omega(B) \\ (v) \quad T_{x,S}^\omega(A \rightarrow B) &= \neg T_{x,S}^\omega(A) \vee T_{x,S}^\omega(B) \\ (vi) \quad T_{x,S}^\omega(FA) &= \exists y (x \leq_S y \wedge T_{y,S}^\omega(A)) \\ (vii) \quad T_{x,S}^\omega(GA) &= \forall y (x \leq_S y \rightarrow T_{y,S}^\omega(A)) \end{aligned}$$

Непосредственное определение формулы $Sat - DBT_r$ и $Sat - FBT_r$ аналогично построению формулы $Sat - K_b$. Таким образом систему DBT_r и систему FBT_r можно проинтерпретировать как структуру $S_\omega S$, что в свою очередь означает, что по теореме Рабина обе системы являются разрешимыми. Это в свою очередь означает, что сама система BT_r является разрешимой.

Заключение

Как итог, можно заметить, что развитие подхода, предложенного Смирновым в 80-е гг., представляет интерес. Его идеи являются не просто техническим решением задачи о представлении ряда модальных систем как фрагментов временной логики, но имеют под собой серьезное логико-философское обоснование. Сама возможность построения нового класса систем, наличие у них свойства разрешимости позволяет определить перспективы для решения некоторых важных текущих задач в логике ветвящегося времени. Отдельный интерес представляет возможность построение на базе подобных расширений новых вариантов семантики логики ветвящегося времени с выделением линии актуального будущего. Необходимо проверить, могут ли альтернативное понимание возможности и новые условия сопряженности между прошлым и будущим позволить преодолеть трудности, с которыми сталкиваются имеющиеся сейчас варианты подобных семантик. Это, на наш взгляд, может стать предметом дальнейшего исследования темы.

Литература

- Пиманов, 2022 – *Пиманов А.С.* Детерминизм и его влияние на временные онтологии // Ценности и смыслы. 2022. Т. 78. № 2. С. 28–46.
- Смирнов, 2002 – *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 264 с.
- Смирнов, 2010а – *Смирнов В.А.* Логика с модальными временными операторами // Логико-философские труды В.А. Смирнова / Под ред. В.И. Шалака. М.: URSS, 2010. С. 179–182.
- Смирнов, 2010b – *Смирнов В.А.* Логические системы с модальными временными операторами // Логико-философские труды В.А. Смирнова / Под ред. В.И. Шалака. М.: URSS, 2010. С. 202–210.
- Смирнов, 2010с – *Смирнов В.А.* Определение модальных операторов через временные // Логико-философские труды В.А. Смирнова / Под ред. В.И. Шалака. М.: URSS, 2010. С. 187–202.
- Belnap, 1992 – *Belnap N.* Branching space-time // *Synthese*. 1992. Vol. 92. No. 3. P. 385–434.
- Belnap, Green, 1994 – *Belnap N., Green M.* Indeterminism and the Thin Red Line // *Philosophical Perspectives*. 1994. Vol. 8. P. 365–388.
- Belnap, 2001 – *Belnap N.* Facing the Future: Agents and Choices in Our Indeterminist World. Oxford: Oxford University Press, 2001. 520 p.
- Belnap, Placek, 2012 – *Belnap N., Placek T.* Indeterminism is a modal notion: branching spacetimes and Earman's pruning // *Synthese*. 2012. Vol. 187. P. 441–469.

- Belnap et al., 2021 – *Belnap N., Muller T., Placek T.* New Foundations for Branching Space-Times // *Studia Logica*. 2021. Vol. 109. P. 239–284.
- Brauner et al., 2000 – *Brauner T., Hasle P., Ohrstrom P.* Determinism and the Origins of Temporal Logic // *Advances in Temporal Logic. Applied Logic Series*. 2000. Vol. 16. P. 185–206.
- Burgess, 1978 – *Burgess J.* The Unreal Future // *Theoria*. 1978. Vol. 44. No. 3. P. 157–179.
- Malpass, Wawer, 2012 – *Malpass A., Wawer J.* A future for the thin red line // *Synthese*. 2012. Vol. 188. No. 1. P. 117–142.
- Michael, 1976 – *Michael F.S.* What Is the Master Argument of Diodorus Cronus? // *American Philosophical Quarterly*. 1976. Vol. 13. No. 3. P. 229–235.
- Muller, 2015 – *Muller T.* Time and Determinism // *Journal of Philosophical Logic*. 2015. Vol. 44. P. 729–740.
- Ohrstrom, 1984 – *Ohrstrom P.* Anselm, Ockham and Leibniz on Divine Foreknowledge and Human Freedom // *Erkenntnis*. 1984. Vol. 21. No. 2. P. 209–222.
- Ohrstrom, Hasle, 1995 – *Ohrstrom P., Hasle P.* Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. 424 p.
- Ohrstrom, 2009 – *Ohrstrom P.* In Defence of the Thin Red Line: A Case for Ockhamism // *Humana Mente*. 2009. Vol. 8. P. 17–32.
- Ohrstrom, 2014 – *Ohrstrom P.* What William of Ockham and Luis de Molina would have said to Nuel Belnap: a discussion of some arguments against “The Thin Red Line” // *Nuel Belnap on indeterminism and free action* / Ed. by T. Muller. Dordrecht: Springer, 2014. P. 175–190.
- Ploug, Ohrstrom, 2014 – *Ploug T., Ohrstrom P.* Branching time, indeterminism and tense logic // *Synthese*. 2012. Vol. 188. No. 3. P. 367–379.
- Prior, 1955 – *Prior A.N.* Diodoran Modalities // *The Philosophical Quarterly*. 1955. Vol. 20. No. 5. P. 205–213.
- Prior, 1967 – *Prior A.N.* Past, Present and Future. Oxford: Clarendon Press, 1967. 227 p.
- Rabin, 1969 – *Rabin M.O.* Decidability of second-order theories and automata on infinite trees // *Transactions of the American Mathematical Society*. 1969. Vol. 141. P. 1–35.
- Rumberg, 2016 – *Rumberg A.* Transition Semantics for Branching Time // *Journal of Logic, Language and Information*. 2016. Vol. 25. P. 77–108.
- Rumberg, Zanardo, 2019 – *Rumberg A., Zanardo A.* First-Order Definability of Transition Structures // *Journal of Logic, Language and Information*. 2019. Vol. 28. No. 3. P. 459–488.
- Wawer, 2014 – *Wawer J.* The Truth About the Future // *Erkenntnis*. 2014. Vol. 79. No. 53. P. 365–401.
- Wawer, Malpass, 2020 – *Wawer J., Malpass A.* Back to the Actual Future // *Synthese*. 2020. Vol. 197. No. 5. P. 2193–2213.

ARTEM S. PIMANOV

Extensions of V.A. Smirnov's temporal logic systems in the context of determinism

Artem S. Pimanov

Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: dillabunturmemoria@gmail.com

Abstract: The article is related to the consideration of a possible extension of V.A. Smirnov's systems in the context of the problem of determinism. The problem of determinism is traditionally closely connected with various systems of temporal logic. The considerations about determinism can be seen in the early works of Aristotle as well as in Prior's works on the foundations of temporal logic. The idea of branching time has a special place in temporal logic. It stands as one of the standard approaches to understanding determinism in temporal logic. At the present time there are several approaches to branching time logic. Each of them is not complete and has certain logico-philosophical limitations. This gives us a reason to appeal to some of Smirnov's works. In the 1980s, he proposed an alternative understanding of the logic of branching time, which allows us to eliminate some undesirable deterministic consequences in the interpretation of temporal statements. Smirnov's understanding of possibility is especially interesting. It allows us to display the ontological status of objects that Seymour Michael describes in his reconstruction of Diodorus Kronos' deterministic argument — if we shift to the past when we analyze histories, the $\Diamond A$ interpretation allows us to say that something is possible, but is not true at any point in the future. The paper discusses in detail Smirnov's original ideas in temporal logic as well as several systems proposed by him — K_s and K_r . As a result, a possible extension of Smirnov's systems is proposed, the decidability of this extension is shown, and prospects for further study of the problem are identified.

Keywords: non-classical logic, temporal logic, branching time logic, determinism, decidability, modalization of temporal statements

For citation: Pimanov A.S. “Rasshireniya sistem vremennoi logiki V.A. Smirnova v kontekste determinizma” [Extensions of V.A. Smirnov's temporal logic systems in the context of determinism], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2025, Vol. 31, No. 2, pp. 169–190. DOI: 10.21146/2074-1472-2025-31-2-169-190. (In Russian)

References

- Belnap, 1992 – Belnap, N. “Branching space-time”, *Synthese*, 1992, Vol. 92, No. 3, pp. 385–434.
- Belnap, Green, 1994 – Belnap, N., Green, M. “Indeterminism and the Thin Red Line”, *Philosophical Perspectives*, 1994, Vol. 8, pp. 365–388.

- Belnap, 2001 – Belnap, N. *Facing the Future: Agents and Choices in Our Indeterminist World*. Oxford: Oxford University Press, 2001. 520 pp.
- Belnap, Placek, 2012 – Belnap, N., Placek, T. “Indeterminism is a modal notion: branching spacetimes and Earman’s pruning”, *Synthese*, 2012, Vol. 187, pp. 441–469.
- Belnap et al., 2021 – Belnap, N., Muller, T., Placek, T. “New Foundations for Branching Space-Times”, *Studia Logica*, 2021, Vol. 109, pp. 239–284.
- Brauner et al., 2000 – Brauner, T., Hasle, P., Ohrstrom, P. “Determinism and the Origins of Temporal Logic”, in: *Advances in Temporal Logic. Applied Logic Series*, ed. by H. Barringer et al. Dordrecht: Springer, 2000, pp. 185–206.
- Burgess, 1978 – Burgess, J. “The Unreal Future”, *Theoria*, 1978, Vol. 44, No. 3, pp. 157–179.
- Malpass, Wawer, 2012 – Malpass, A., Wawer, J. “A future for the thin red line”, *Synthese*, 2012, Vol. 188, No. 1, pp. 117–142.
- Michael, 1976 – Michael, F.S. “What Is the Master Argument of Diodorus Cronus?”, *American Philosophical Quarterly*, 1976, Vol. 13, No. 3, pp. 229–235.
- Muller, 2015 – Muller, T. “Time and Determinism”, *Journal of Philosophical Logic*, 2015, Vol. 44, pp. 729–740.
- Ohrstrom, 1984 – Ohrstrom, P. “Anselm, Ockham and Leibniz on Divine Foreknowledge and Human Freedom”, *Erkenntnis*, 1984, Vol. 21, No. 2, pp. 209–222.
- Ohrstrom, Hasle, 1995 – Ohrstrom, P., Hasle, P. *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. 424 pp.
- Ohrstrom, 2009 – Ohrstrom, P. “In Defence of the Thin Red Line: A Case for Ockhamism”, *Humana Mente*, 2009, Vol. 8, pp. 17–32.
- Ohrstrom, 2014 – Ohrstrom, P. “What William of Ockham and Luis de Molina would have said to Nuel Belnap: a discussion of some arguments against ‘The Thin Red Line’”, in: *Nuel Belnap on indeterminism and free action*, ed. by T. Müller. Dordrecht: Springer, 2014, pp. 175–190.
- Pimanov, 2022 – Pimanov, A.S. “Determinizm i ego vliyaniye na vremennyye ontologii” [Determinism and its influence on temporal ontologies], *Tsennosti I Smysly* [Values and Meanings], 2022, Vol. 78, No. 2, pp. 28–46.
- Ploug, Ohrstrom, 2014 – Ploug, T., Ohrstrom, P. “Branching time, indeterminism and tense logic”, *Synthese*, 2012, Vol. 188, No. 3, pp. 367–379.
- Prior, 1955 – Prior, A.N. “Diodoran Modalities”, *The Philosophical Quarterly*, 1955, Vol. 20, No. 5, pp. 205–213.
- Prior, 1967 – Prior, A.N. *Past, Present and Future*. Oxford: Clarendon Press, 1967. 227 pp.
- Rabin, 1969 – Rabin, M.O. “Decidability of second-order theories and automata on infinite trees”, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1969, Vol. 141, pp. 1–35.
- Rumberg, 2016 – Rumberg, A. “Transition Semantics for Branching Time”, *Journal of Logic, Language and Information*, 2016, Vol. 25, pp. 77–108.

- Rumberg, Zanardo, 2019 – Rumberg, A., Zanardo, A. “First-Order Definability of Transition Structures”, *Journal of Logic, Language and Information*, 2019, Vol. 28, No. 3, pp. 459–488.
- Smirnov, 2002 – Smirnov, V.A. *Logicheskie metody analiza nauchnogo znaniya* [Logical methods of analyzing scientific knowledge]. Moscow: Editorial URSS, 2002. 264 pp. (In Russian)
- Smirnov, 2010a – Smirnov, V.A. “Logiki s modal’nymi vremennymi operatorami” [Logics with modal time operators], in: *Logiko-filosofskie trudy V.A. Smirnova* [Logico-philosophical works of V.A. Smirnov], ed. by V.I. Shalack. Moscow: URSS, 2010, pp. 179–182. (In Russian)
- Smirnov, 2010b – Smirnov, V.A. “Logicheskie sistemy s modal’nymi vremennymi operatorami” [Logical systems with modal temporal operators], in: *Logiko-filosofskie trudy V.A. Smirnova* [Logico-philosophical works of V.A. Smirnov], ed. by V.I. Shalack. Moscow: URSS, 2010, pp. 202–210. (In Russian)
- Smirnov, 2010c – Smirnov, V.A. “Opredelenie modal’nykh operatorov cherez vremennye” [Definition of modal operators via temporal] in: *Logiko-filosofskie trudy V.A. Smirnova* [Logico-philosophical works of V.A. Smirnov], ed. by V.I. Shalack. Moscow: URSS, 2010, pp. 187–202. (In Russian)
- Wawer, 2014 – Wawer, J. “The Truth About the Future”, *Erkenntnis*, 2014, Vol. 79, No. 53, pp. 365–401.
- Wawer, Malpass, 2020 – Wawer J., Malpass, A. “Back to the Actual Future”, *Synthese*, 2020, Vol. 197, No. 5, pp. 2193–2213.

Информация для авторов

- Журнал «Логические исследования» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики см. на сайте журнала <http://logicalinvestigations.ru>)
- Все статьи, планируемые к публикации в журнале «Логические исследования», проходят процедуру анонимного рецензирования.
- Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.
- Плата за опубликование рукописей не взимается.
- Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$
- При подготовке рукописи в $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ необходимо использовать стилевой класс `LIarticle.cls` и шаблон `LI_template.tex` (если рукопись на русском языке) или `LI_template_eng.tex` (если рукопись на английском языке), которые размещены в правилах предоставления рукописей на сайте <http://logicalinvestigations.ru>. Здесь же размещены подробные рекомендации по подготовке рукописи.
- Объем рукописи не должен превышать 25 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, списки литературы, аннотации (на русском и английском языках).

Статьи следует направлять в электронном виде в редакцию через сайт
<http://logicalinvestigations.ru>

Information for authors

- *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: <http://logicalinvestigations.ru>)
- All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process.
- The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.
- Authors are not charged for the publication.
- Papers should be submitted electronically in the $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ format.
- While typesetting a paper, the class file `LIarticle.cls` and the template `LI_template_eng.tex` should be used; both files can be accessed at <http://logicalinvestigations.ru>. Here you can also find detailed guidelines for preparing your paper.
- Papers should not exceed 25 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

Submissions should be sent in electronic form through the website:

<http://logicalinvestigations.ru>

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations

2025. Том 31. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015

Главный редактор: *В.И. Шалак*

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технический редактор: *Е.А. Морозова*

Корректор: *Е.М. Пушкина*

Художники: *Н.Н. Попов, С.Ю. Растегина*

Подписано в печать с оригинал-макета 10.11.2025.

Формат 70 x 100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.

Для набора греческого текста использован пакет Teubner.

Усл. печ. л. 13,79. Уч.-изд. л. 9,5. Тираж 1 000 экз. Заказ № 25.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Разработка L^AT_EX-класса стилового оформления оригинал-макета: *А.Е. Коньков*

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН

109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:

<http://logicalinvestigations.ru>