Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 32. Number 1

Moscow
2026

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 32. Номер 1

Москва
2026

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2026. Volume 32. Number 1

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation

Subscription index in the catalogue of Ural-Press is 42046

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com
Website: https://logicalinvestigations.ru

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2026. Том 32. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 3 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Web of Science (Russian Science Citation Index)*, *Scopus*, *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «5.7 – философские науки»)

Подписной индекс каталога Урал-Пресс — 42046

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 426

Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`

Сайт: `https://logicalinvestigations.ru`

TABLE OF CONTENTS

В НОМЕРЕ

Ярослав Анатольевич
СЛИНИН
(31.01.1932–11.03.2026)

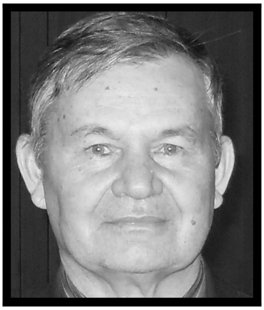
11 марта 2026 г. на 95-м году жизни не стало известного российского философа и логика, специалиста по истории логики и философии, почетного профессора Санкт-Петербургского государственного университета, доктора философских наук Ярослава Анатольевича Слинина.

Я.А. Слинин родился в Псковской обл. в семье выдающегося советского ученого-селекционера А.А. Слинина. Философией заинтересовался, обучаясь на радиотехническом факультете Ленинградского политехнического института, по окончании которого в 1956 г. работал инженером в одном из оборонных НИИ и учился на вечернем отделении философского факультета Ленинградского государственного университета, а затем — в аспирантуре на кафедре логики. В 1965 г. защитил кандидатскую диссертацию «Развитие новых идей в современной модальной логике», в 1981 г. — докторскую диссертацию «Алетическая модальная логика и ее философское значение». С 1966 г. работал на кафедре логики ЛГУ – СПбГУ, пройдя путь от ассистента до профессора, заведовал кафедрой с 1984 по 1999 г. С 1990 г. был организатором Петербургской логической конференции «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке», в 2001 г. основал журнал «Логико-философские штудии».

Научные результаты Я.А. Слинина в области логики связаны с ее историей, в особенности — с логикой Аристотеля и ее восприятием на разных этапах развития логической мысли. Я.А. Слинин стоял у истоков отечественной феноменологии, был специалистом по истории философии и логико-богословской мысли, научным руководителем более двух десятков кандидатских и докторских диссертаций.

Доброжелательный и рассудительный эрудит, знаток молодежной музыки, современной литературы, ценитель вин, прогрессивных взглядов, хитроумных головоломок и хороших шуток — таким мы запомним нашего дорогого коллегу и учителя.

Сектор логики Института философии РАН
и редколлегия журнала «Логические исследования»
выражают глубокие соболезнования семье и близким
Ярослава Анатольевича Слинина, его коллегам и ученикам.



Юрий Васильевич
ИВЛЕВ

Yuriy Vasilyevich
IVLEV

(21.12.1936 – 07.07.2024)

От Редколлегии

Два года назад, 7 июля 2024 г., неожиданно для всех умер Юрий Васильевич Ивлев. Неожиданно, потому что трудно было представить, что его когда-нибудь не станет. Для одних он был отцом, для других — коллегой по работе на кафедре логики МГУ, для третьих — учителем. И все относились к Юрию Васильевичу с большим уважением и любовью.

Настоящий номер журнала мы посвящаем памяти Ю.В. Ивлева. В нем заново опубликована статья, в которой он впервые изложил свой оригинальный подход к построению модальных логик. Юрий Васильевич развивал этот подход на протяжении всей своей творческой жизни и лишь ближе к ее концу получил заслуженое признание не только в России, но и за рубежом. Также в номере опубликованы статьи его коллег по кафедре логики МГУ и учеников. Зарубежные коллеги представлены статьей Алана Р. Антезаны и Марсело Е. Конильо.

Editor's note

Two years ago, on July 7, 2024, Yuri Vasilyevich Ivlev passed away unexpectedly. Unexpectedly, because it was hard to imagine that he would ever be gone. For some he was a father, for others a colleague at the Department of Logic at Moscow State University, and for others still a teacher. And everyone held Yuri Vasilyevich in great respect and affection.

We dedicate this issue of the journal to the memory of Yu.V. Ivlev. It republishes the paper in which he first set out his original approach to the construction of modal logics. Yuri Vasilyevich developed this approach throughout his entire creative life, and only toward the end of it received the well-deserved recognition, not only in Russia but also abroad. The issue also contains papers by his colleagues at the Department of Logic at Moscow State University and by his students. International colleagues are represented by a paper by Alan R. Antezana and Marcelo E. Coniglio.

Логические исследования
2026. Т. 32. № 1. С. 11–22
УДК 16

Logical Investigations
2026, Vol. 32, No. 1, pp. 11–22
DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-11-22

Неклассическая логика
Non-classical Logic

Ю.В. Ивлев

Табличное построение пропозициональной модальной логики*

Юрий Васильевич Ивлев
Кафедра логики МГУ имени М.В. Ломоносова (1978–2024).
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: -

Аннотация: Статья Ю.В. Ивлева «Табличное построение пропозициональной модальной логики» воспроизводится по изданию: *Ивлев Ю.В.* Табличное построение пропозициональной модальной логики // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 1973. № 6. С. 51–61.

Ключевые слова: модальная логика, таблицы истинности, алетическая модальность «необходимо», алетическая модальность «возможно»

Для цитирования: *Ивлев Ю.В.* Табличное построение пропозициональной модальной логики // Логические исследования / Logical Investigations. 2026. Т. 32. № 1. С. 11–22. DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-11-22.

Общеизвестно мнение о невозможности определения алетических понятий «необходимо» и «возможно» в терминах истины и лжи. Однако мы полагаем, что в некотором смысле эти понятия можно определить в терминах истины и лжи, если построить таблицы истинности определенным образом.

При построении таблиц истинности будем исходить из естественного смысла необходимости и возможности. Естественно считать, что если p — истинно, то p — возможно, т.е. что Mp — истинно, и если p — ложно, то p может быть как возможно, так и невозможно, т.е. Mp может быть истинно и может быть ложно. Если значения «истина» и «ложь» обозначить буквами $И$ и $Л$, то значение «может быть — истинно, а может быть — ложно» можно обозначить $\frac{И}{Л}$ или $\frac{Л}{И}$. Также естественно считать, что если p — ложно, то p — не необходимо, т.е. что Lp — ложно, и если p — истинно, то p может быть необходимо, а может быть и нет, т.е. что Lp имеет значение $\frac{И}{Л}$.

* Верстка статьи для настоящего издания подготовлена Пимановым А.С.

Исходя из сказанного, посртоим таблицы истинности для формул Mp и Lp.

p	Mp	Lp
И	И	$\frac{И}{Л}$
Л	$\frac{И}{Л}$	Л

Таблица истинности для формулы $L(p \supset q) \supset (Lp \supset q)$:

p	q	$L(p \supset q) \supset (Lp \supset q)$
И	И	$\frac{И}{Л}$ И И И И $\frac{И}{Л}$ И И И
И	Л	Л И Л Л И $\frac{И}{Л}$ И $\frac{Л}{И}$ Л
Л	И	$\frac{И}{Л}$ Л И И И Л Л И И
Л	Л	$\frac{И}{Л}$ Л И Л И Л Л И Л

Рассмотрим более подробно вторую строку таблицы.

p	q	$L(p \supset q) \supset (Lp \supset q)$
И	Л	Л И Л Л И $\frac{И}{Л}$ И $\frac{Л}{И}$ Л

Подформула Lp имеет значение $\frac{И}{Л}$, q — имеет значение Л. Так как подформула Lp может быть как истинной, так и ложной, то подформула $L(p \supset q)$ может быть ложной, если Lp — истинно, а q — ложно, и истинной, если Lp и q — ложно, т.е. вторая строка расщепляется на две строки:

p	q	$L(p \supset q) \supset (Lp \supset q)$
И	Л	Л И Л Л И И И Л Л
И	Л	Л И Л Л И Л И И Л

При расщеплении строк одна и та же формула должна иметь одно и то же значение, сколько бы раз она ни входила в исходную формулу. Поясним это на примере.

p	$Lp \supset MLp$
И	$\frac{И}{Л}$ И И $\frac{И}{Л}$ $\frac{И}{Л}$ И
Л	Л Л И $\frac{И}{Л}$ Л Л

Первая строка расщепляется на две строки:

p	$L\,p \supset M\,L\,p$
И	И И И И И И
И	Л И И $\frac{И}{Л}$ Л И

Вторая из полученных строк в свою очередь расщепляется на две строки, так что первая строка исходной таблицы фактически состоит из трех строк:

p	$L\,p \supset M\,L\,p$
И	И И И И И И
И	Л И И И Л И
И	Л И И Л Л И

Алетическая пропозициональная модальная логика $ЛМ_0$

При табличном построении логики $ЛМ_0$ не накладывается никаких ограничений на описанное построение таблиц истинности.

Тождественно-истинными являются формулы $p \supset Mp$ и $Lp \supset p$:

p	$p \supset M\,p$
И	И И И И
Л	Л И $\frac{И}{Л}$ Л

p	$L\,p \supset p$
И	$\frac{И}{Л}$ И И И
Л	Л Л И Л

Не тождественно-истинны формулы $Lp \supset \neg M \neg p$ и $Mp \supset \neg L \neg p$:

p	$L\,p \supset \neg\, M \neg\, p$
И	$\frac{И}{Л}$ И $\frac{И}{Л}$ $\frac{И}{Л}$ $\frac{И}{Л}$ Л И
Л	Л Л И Л И И Л

p	$M\,p \supset \neg\, L \neg\, p$
И	И И И И Л Л И
Л	$\frac{И}{Л}$ Л $\frac{И}{Л}$ $\frac{И}{Л}$ $\frac{И}{Л}$ И Л

Не является тождественно-истинной также формула:

p	q	$L\,(p \supset q) \supset (L\,p \supset L\,q)$
И	И	$\frac{И}{Л}$ И И И $\frac{И}{Л}$ $\frac{И}{Л}$ И $\frac{И}{Л}$ $\frac{И}{Л}$ И
И	Л	Л И Л Л И $\frac{И}{Л}$ И $\frac{Л}{И}$ Л Л
Л	И	$\frac{И}{Л}$ Л И И И Л Л И $\frac{И}{Л}$ И
Л	Л	$\frac{И}{Л}$ Л И Л И Л Л И Л Л

Логика $ЛМ_0$, несмотря на ее бедность, позволяет в некотором смысле определить понятия «необходимо» и «возможно» в двузначной логике, так как формулы $Lp \supset p$ и $p \supset Mp$ являются тождественно-истинными, а формулы $p \supset Lp$ и $Mp \supset p$ — нет. Построим таблицы истинности для двух последних формул:

p	$p \supset L\,p$
И	*И* $\frac{И}{Л}$ $\frac{И}{Л}$ *И*
Л	*Л И Л Л*

p	$M\,p \supset p$
И	*И И И И*
Л	$\frac{И}{Л}$ *Л* $\frac{И}{Л}$ *Л*

В этих таблицах каждая строка, в которой формула имеет значение $\frac{И}{Л}$, является сокращением для двух строк, в одной из которых формула в целом имеет значение *И*, а в другой — *Л*. Таблицы после расщепления строк выглядят так:

p	$p \supset L\,p$
И	*И И И И*
И	*И Л Л И*
Л	*Л И Л Л*

p	$M\,p \supset p$
И	*И И И И*
Л	*И Л Л Л*
Л	*Л Л И Л*

Таким образом, в таблицах $\frac{И}{Л}$ не является третьим значением, а излагаемая логика не является трехзначной. Система $ЛМ_0$ является более бедной, чем основная модальная логика Я. Лукасевича.

Алетическая пропозициональная модальная логика $ЛМ_2$

При построении таблиц истинности будем учитывать следующие особенности. *Во-первых*, будем строить особым образом таблицы истинности для формулы, в которой символ L относится к формуле, являющейся тавтологией. Построим таблицу истинности для формулы $L(p \supset p)$.

а) Строим обычным образом таблицу истинности для этой формулы:

p	$L\,(p \supset p)$
И	$\frac{И}{Л}$ *И И И*
Л	$\frac{И}{Л}$ *Л И Л*

б) Далее проверяем, есть ли в таблице истинности для формулы $p \supset p$ значение *Л*, являющееся значением для всей формулы $p \supset p$. Если такового не находим, то в значениях $\frac{И}{Л}$ везде вычеркиваем *Л*. Получаем:

p	$L\,(p\supset p)$
И	$\frac{И}{Л}$ *И И И*
Л	$\frac{И}{Л}$ *Л И Л*

В результате имеем таблицу:

p	$L\,(p\supset p)$
И	*И И И И*
Л	*И Л И Л*

Во-вторых, при построении таблиц истинности для формул вида MA, где A — противоречие, из значений $\frac{И}{Л}$ везде вычеркивается *И*.

Таблица истинности для формулы $M(p \wedge \neg p)$:

p	$M(p\wedge\neg p)$
И	$\frac{И}{Л}$ *И Л Л И*
Л	$\frac{И}{Л}$ *Л Л И Л*

В результате имеем:

p	$M(p\wedge\neg p)$
И	*Л И Л Л И*
Л	*Л Л Л И Л*

Эти особенности способа построения таблиц истинности кажутся естественными, так как всегда истинное — необходимо, а всегда ложное — невозможно.

В-третьих, естественно считать, что если положение дел p необходимо, то его отсутствие не является возможным и если положение дел p возможно, то его отсутствие не является необходимым. Чтобы это учесть, следует строить таблицы истинности таким образом, чтобы формулы Lp и $\neg M\neg p$, Mp и $\neg L\neg p$, $L\neg p$ и $\neg Mp$ и т.д. попарно принимали одно и то же значение при одном и том же значении переменной p. Этого можно достигнуть, если перед построением таблицы истинности для формулы, в которую входят как символ (символы) M, заменить в ней все вхождения подформул вида LB на формулы $\neg M\neg B$ или же все вхождения подформул вида MB

на формулы $\neg L \neg B$ и считать после построения таблицы истинности для полученной формулы, что эта таблица является таблицей истинности исходной формулы.

Пусть требуется построить таблицу истинности для формулы $\neg Mp \supset L\neg p$. Заменим в ней Mp и $\neg L\neg p$. Получаем формулу $\neg\neg L\neg p \supset L\neg p$. Очевидно, что эта формула тождественно-истинна, а в силу этого тождественно-истинна исходная формула.

Можно было бы пойти иным путем и строить таблицы истинности без осуществления описанной замены в формулах. Для этого необходимо заранее определить, какие пары формул являются взаимозависимыми, т.е. не могут быть вместе истинными при некотором наборе значений входящих в них переменных или не могут быть вместе ложными при некотором наборе значений входящих в них переменных.

Пусть определена следующая взаимозависимость формул Mp и $L\neg p$: они не могут быть обе истинными ни при каком значении переменной p и не могут быть обе ложными ни при каком значении переменной p. Сначала построим таблицу обычным способом:

	p	$\neg\, M\, p \supset L\, \neg\, p$
1	*И*	*Л И И И Л Л И*
2	*Л*	$\frac{И}{Л}\ \frac{И}{Л}$ *Л* $\frac{И}{Л}\ \frac{И}{Л}$ *И Л*

Вторая строка таблицы расщепляется на четыре строки:

	p	$\neg\, M\, p \supset L\, \neg\, p$
1	*И*	*Л И И И Л Л И*
$2'$	*Л*	*Л И Л И И И Л*
$2''$	*Л*	*Л И Л И Л И Л*
$2'''$	*Л*	*И Л Л И И И Л*
$2''''$	*Л*	*И Л Л Л Л И Л*

Так как по предшествующему определению формулы Mp и $L\neg p$ не могут быть обе истинными и обе ложными при одном и том же значении переменной p, то из таблицы следует вычеркнуть строки $2'$ и $2''''$. Получаем:

	p	$\neg M\,p \supset L \neg\, p$
1	*И*	*Л И И И Л Л И*
$2''$	*Л*	*Л И Л И Л И Л*
$2'''$	*Л*	*И Л Л И И И Л*

Формула является тождественно-истинной.

Алетическая пропозициональная модальная логика *ЛМ*$_3$

В логике *ЛМ*$_2$ не является тождественно-истинной формула $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$. Она принимает значение $\frac{И}{Л}$, когда переменные p и q имеют значение *И*. Попытаемся найти способ построения таблиц истинности, при котором эта формула оказалась бы тождественно-истинной, так как наша интуиция может считать ее приемлемой.

Рассмотрим более пристально строку таблицы истинности для формулы $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$, в которой формула в целом имеет значение $\frac{И}{Л}$.

p	q	$L\,(p \supset q) \supset (L\,p \supset L\,q)$
И	*И*	$\frac{И}{Л}$ *И И И* $\frac{И}{Л}$ $\frac{И}{Л}$ *И* $\frac{И}{Л}$ $\frac{И}{Л}$ *И*

Каков смысл того, что формула LA принимает значение $\frac{И}{Л}$ при истинности A? Очевидно, под этим понимается следующее: положение дел, описываемое формулой A, является необходимым или случайным. Обозначением необходимости будет служить H, а случайности — C. Введем также обозначение невозможности — $\overline{B}$.

Заменим в рассматриваемой строке таблицы значение переменных p и q (т.е. значение ri) на значение $\frac{H}{C}$ (необходимо или случайно):

p	q	$L(p \supset q) \supset (L\,p \supset Lq)$
$\frac{H}{C}$	$\frac{H}{C}$	$\frac{H}{C}$ $\frac{H}{C}$ $\frac{H}{C}$ $\frac{H}{C}$

Дадим табличное определение зависимости значений формул вида Mp, Lp, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \supset q$, $\neg p$ от значений H, C, $\overline{B}$ переменных p и q:

p	$\neg p$	Lp	Mp
H	$\overline{B}$	*И*	*И*
C	C	*Л*	*И*
$\overline{B}$	H	*Л*	*Л*

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \supset q$
$Н$	$Н$	$Н$	$Н$	$Н$
$Н$	$С$	$Н$	$С$	$С$
$Н$	$\overline{В}$	$Н$	$\overline{В}$	$\overline{В}$
$С$	$Н$	$Н$	$С$	$Н$
$С$	$С$	$С$	$С$	$С$
$С$	$\overline{В}$	$С$	$\overline{В}$	$С$
$\overline{В}$	$Н$	$Н$	$\overline{В}$	$Н$
$\overline{В}$	$С$	$С$	$\overline{В}$	$Н$
$\overline{В}$	$\overline{В}$	$\overline{В}$	$\overline{В}$	$Н$

В соответствии с изложенным рассматриваемая строка таблицы расщепляется на четыре строки. В первой строке пропозициональным переменным p и q задается значение $Н$, во второй, соответственно — $Н$ и $С$, в третьей, соответственно — $С$ и $Н$, в четвертой — $С$.

p	q	$L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$
$Н$	$Н$	$И\,Н\,Н\,Н\,И\,И\,Н\,И\,И\,Н$
$Н$	$С$	$Л\,Н\,С\,С\,И\,И\,Н\,Л\,Л\,С$
$С$	$Н$	$И\,С\,Н\,Н\,И\,Л\,С\,И\,И\,Н$
$С$	$С$	$Л\,С\,С\,С\,И\,Л\,С\,И\,Л\,С$

Таким образом оказывается, что формула является тождественно-истинной.

Сформулируем дополнение к способу построения таблиц истинности, описанному в предшествующем параграфе: если в таблице истинности имеется строка, в которой формула в целом получила значение $\frac{И}{Л}$, заменим в этой строке значение $И$ пропозициональных переменных или формул, перед которыми стоит оператор L на значения $\frac{Н}{С}$, а значения $Л$ пропозициональных переменных или формул, перед которыми стоит оператор M, на $\frac{\overline{В}}{С}$ и будем строить таблицы истинности, как это делалось выше.

Построим таблицу истинности для формулы $Lp \equiv \neg M \neg p$:

p	$L\,p \equiv \neg\, M \neg\, p$
$И$	$\frac{И}{Л}\,И\,\frac{И}{Л}\,\frac{И}{Л}\,\frac{И}{Л}\,Л\,И$
$Л$	$Л\,Л\,И\,Л\,И\,И\,Л$

Заменим в первой строке таблицы значение *И* переменной p на значение $\frac{Н}{С}$.

Имеем:

p	$L\,p \equiv \neg M \neg\, p$
$\frac{Н}{С}$	$\frac{Н}{С} \qquad\qquad \frac{Н}{С}$

Эта строка расщепляется на две строки:

p	$L\,p \equiv \neg\, M \neg\, p$
$Н$	$И\,Н\,И\,И\,Л\,\overline{В}\,Н$
$С$	$Л\,С\,И\,Л\,И\,С\,С$

Формула является тождественно-истинной.

При построении таблицы истинности для этой формулы значение *И* переменной p было заменено на $\frac{Н}{С}$. Результат не изменится, если начать с замены значения *Л* подформулы $\neg p$ на $\frac{\overline{В}}{С}$, так как в этом случае значением p при значении $\overline{В}$ формулы $\neg p$ является $Н$, а при значении $С$ — $С$.

Факт тождественной истинности формул $Lp \equiv \neg M \neg p$ и $Mp \equiv \neg L \neg p$ позволяет отказаться от необходимости преобразовывать при построении таблиц истинности формулы, содержащие как оператор L, так и оператор M, в формулы, содержащие только оператор L или только оператор M.

При расщеплении строк может оказаться, что модальный оператор стоит перед дизъюнкцией (конъюнкцией, импликацией), один из членов которой получил значение *И* (или *Л*), а другой — одно из значений $Н$, $\overline{В}$, $С$. Такие случаи затруднений не вызывают, т.е. в этих случаях значение определено.

Построим таблицу истинности для формулы $L(p \vee q) \supset (Lp \vee Lq)$:

p	q	$L\,(p \vee q) \supset (L\,p \vee L\,q)$
$И$	$И$	$\frac{И}{Л}\,И\,И\,И\,\frac{И}{Л}\,\frac{И}{Л}\,И\,\frac{И}{Л}\,\frac{И}{Л}\,И$
$И$	$Л$	$\frac{И}{Л}\,И\,И\,Л\,\frac{И}{Л}\,\frac{И}{Л}\,И\,\frac{И}{Л}\,Л\,Л$
$Л$	$И$	$\frac{И}{Л}\,Л\,И\,И\,\frac{И}{Л}\,Л\,Л\,\frac{И}{Л}\,\frac{И}{Л}\,И$
$Л$	$Л$	$Л\,Л\,Л\,Л\,Л\,Л\,Л\,Л\,Л\,Л$

Первая строка таблицы расщепляется на четыре строки:

p	q	$L(p\vee q)\supset(L\,p \vee L\,q)$
Н	*Н*	*И Н Н Н И И Н И И Н*
Н	*С*	*И Н Н С И И Н И Л С*
С	*Н*	*И С Н Н И Л С И И Н*
С	*С*	*Л С С С И Л С Л Л С*

Проанализируем вторую строку исходной таблицы. Заменим в ней значение *И* переменной p на $\frac{Н}{С}$:

p	q	$L(p\vee q)\supset(L\,p \vee L\,q)$
$\frac{Н}{С}$	*Л*	$\frac{Н}{С}$ *Л* $\frac{Н}{С}$ *Л Л*

Полученная строка расщепляется на две строки:

p	q	$L(p\vee q)\supset(L\,p \vee L\,q)$
Н	*Л*	*Н Л И Н И Л Л*
С	*Л*	*С Л Л С Л Л Л*

Какое значение имеет формула $p\vee q$, если p имеет значение *Н*, а q имеет значение *Л*? Какое значение имеет эта формула, если p имеет значение *С*, а q имеет значение *Л*? Вряд ли можно сомневаться, что в первом случае это — *Н*, а во втором случае — *С*. Полные строки выглядят так:

p	q	$L(p\vee q)\supset(L\,p \vee L\,q)$
Н	*Л*	*И Н Н Л И И Н И Л Л*
С	*Л*	*Л С С Л И Л С Л Л Л*

Определениями значений дизъюнкции, конъюнкции и импликации в случаях, когда значением одного их члена является одно из значений *И*, *Л*, а другого — одно из значений *Н*, $\overline{В}$, *С*, служат следующие таблицы:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \supset q$	$q \supset p$
Н	*Л*	*Н*	*Л*	*Л*	*Н*
$\overline{В}$	*Л*	*Л*	$\overline{В}$	*Н*	*И*
С	*Л*	*С*	*Л*	*С*	*И*

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \supset q$	$q \supset p$
$Н$	$И$	$Н$	$И$	$И$	$Н$
$\overline{В}$	$И$	$Н$	$\overline{В}$	$Н$	$Л$
$С$	$И$	$И$	$С$	$И$	$С$

Проанализировав третью строку таблицы для формулы $L(p \vee q) \supset (Lp \vee Lq)$, легко установить, что эта формула является тождественно-истинной. Заметим, что формула $L(p \vee \neg p) \supset (Lp \vee L\neg p)$ таковой не является.

Алетическая пропозициональная модальная логика *ЛМ*$_4$

Логику *ЛМ*$_4$ получим из логики *ЛМ*$_3$ путем: 1) исключения правила построения таблиц истинности для формул, в которых оператор M стоит перед противоречием, и формул, в которых оператор L стоит перед тавтологией, и 2) изменения таблицы зависимости значений формул $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \supset q$ от значений $Н$, $С$, $\overline{В}$ переменных p и q.

В измененном виде таблица имеет вид:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \supset q$
$Н$	$Н$	$Н$	$Н$	$Н$
$Н$	$С$	$Н$	$С$	$С$
$Н$	$\overline{В}$	$Н$	$\overline{В}$	$\overline{В}$
$С$	$Н$	$Н$	$С$	$Н$
$С$	$С$	$\frac{Н}{С}$	$\frac{\overline{В}}{С}$	$\frac{Н}{С}$
$С$	$\overline{В}$	$С$	$\overline{В}$	$С$
$\overline{В}$	$Н$	$Н$	$\overline{В}$	$Н$
$\overline{В}$	$С$	$С$	$\overline{В}$	$Н$
$\overline{В}$	$\overline{В}$	$\overline{В}$	$\overline{В}$	$Н$

В логике *ЛМ*$_4$ не являются тождественно-истинными формулы, имеющие L внешним оператором. Не являются также тождественно-истинными формулы $L(p \vee q) \supset (Lp \vee Lq)$ и $L(p \vee \neg p) \supset (Lp \vee L\neg p)$.

***

Изложенная содержательная семантика пропозициональной модальной логики может быть использована для анализа рассуждений естественного языка, для решения проблемы разрешения модальных исчислений и т.д.

Yuriy V. Ivlev

Tabular construction of propositional modal logic

Yuriy V. Ivlev
Department of Logic, Lomonosov Moscow State University (1978–2024),
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: -

Abstract: The paper of Yu.V. Ivlev "Tabular construction of propositional modal logic" is reproduced in the edition: *Ivlev Yu.V.* Tabular construction of propositional modal logic // Moscow University Bulletin. Series 7: Philosophy. 1973. No. 6. P. 51–61. (In Russian)

Keywords: modal logic, truth tables, aletic modality "necessary", aletic modality "possible"

For citation: Ivlev Yu.V. "Tablichnoe postroenie propozitsional'noi modal'noi logiki" [Tabular construction of propositional modal logic], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2026, Vol. 32, No. 1, pp. 11–22. DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-11-22. (In Russian)

Логические исследования
2026. Т. 32. № 1. С. 23–51
УДК 164.3

Logical Investigations
2026, Vol. 32, No. 1, pp. 23–51
DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-23-51

Н.Л. Архиереев

Кластерная семантика для модальной логики

Николай Львович Архиереев
МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Российская Федерация, 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, с. 1.
E-mail: arkh-nikolaj@yandex.ru

Аннотация: Одним из основных направлений исследований Ю.В. Ивлева было построение естественных («содержательных») семантик модальной логики. Предложенный им подход к анализу алетических модальных понятий предполагает различение фактических и логических модальностей и построение логических систем, описывающих их свойства. При построении систем с фактическими модальностями для выражения смысла модальных операторов и логических связок используется понятие квазифункции, являющееся нетривиальным обобщением понятия функции. На сегодняшний день квазифункциональные логики хорошо известны в мировой логической литературе. В силу специфики представляемых модальных понятий большинство квазифункциональных систем являются ненормальными. Для построения естественной теории логических модальностей Ю.В. Ивлевым была предложена идея дополнительной интерпретации пропозициональных переменных формулы с модальными операторами как обозначающих логически истинные, логически ложные, логически недетерминированные высказывания. Указанные интерпретации выполняют в теории логических модальностей роль, аналогичную роли квазифункций в системах с фактическими модальностями. В результате таких интерпретаций на основе исходного множества описаний состояний (о.с.) для формулы образуются конечные множества и системы множеств о.с., выполняющие роль модельных структур традиционных семантик возможных миров. Естественной формализацией теории логических модальностей оказалась известная система Льюиса **S5**. При помощи определенных модификаций стратегии построения семантики для **S5** могут быть построены семантики аналогичного типа для основных нормальных модальных логик **S4**, **Br**, **T**, **D**, **K**, а также для интуиционистской системы **Int**. В отличие от квазифункциональных логик, данное направление исследований Ю.В. Ивлева практически неизвестно. Описанию стратегии построения естественной семантики для указанных систем посвящена настоящая статья.

Ключевые слова: модальная логика, модельная структура, возможный мир, отношение достижимости, кластер, логическая необходимость, невозможность, недерминированность

Для цитирования: *Архиереев Н.Л.* Кластерная семантика для модальной логики // Логические исследования / Logical Investigations. 2026. Т. 32. № 1. С. 23–51. DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-23-51.

Введение

В основе предложенного Ю.В. Ивлевым подхода к исследованию алетических модальных понятий лежат идея различения фактических и логических модальных операторов и построение семантик, описывающих их свойства. При построении систем с фактическими модальностями модальные операторы и логические связки могут пониматься как квазифункции. Квазифункция — это соответствие, в силу которого некоторый объект из определенного подмножества некоторого множества соотносится с некоторым объектом из определенного подмножества того же самого или другого множества. В результате в общем случае ни объект, к которому применяется квазифункция, ни ее значение не определены однозначным образом. Известны только подобласть области определения, содержащая данный объект, и подобласть области значений квазифункции [Ивлев, 2018, с. 25]. Таким образом, если f — знак квазифункции, a — имя ее аргумента, то выражение $f(a)$ есть знак неопределенной дескрипции [Ивлев, 1991, с. 57].

Для построения естественных, «содержательных» семантик систем с логическими модальностями Ю.В. Ивлевым была предложена идея дополнительного истолкования пропозициональных переменных (предикатных констант), входящих в формулу с модальными операторами, как обозначающих логически истинные, логически ложные, логически недетерминированные высказывания. Указанные истолкования параметров формулы в терминах $\{N, I, C\}$ (логически необходимо, невозможно, случайно соответственно) выполняют роль, аналогичную роли квазифункций в системах с фактическими модальностями. В результате подобных истолкований из исходного множества описаний состояний (далее — о.с.) для формулы могут исключаться некоторые о.с., что ведет к образованию определенных классов эквивалентности — множеств и систем множеств о.с. (кластеров), объединенных общей трактовкой допустимых значений параметров формулы. Данные классы эквивалентности выполняют роль модельных структур семантик возможных миров.

Отличительной особенностью семантик предлагаемого типа является конечный, «конструктивный» характер всех вводимых понятий и процедур, а также использование только традиционных для логики понятий (логической) истинности, ложности, недетерминированности высказываний системы, их (не)совместимости по истинности, ложности и т.д.

На сегодняшний день квазифункциональные модальные логики хорошо известны в мировой логической литературе, а само словосочетание «Ivlev-like semantics», обозначающее соответствующий способ построения семантики модальных систем, стало нарицательным. В силу специфики моделируемых модальных понятий, подавляющее большинство квазифункциональных логик являются ненормальными, в частности, в них оказывается неприменимым правило Гёделя.

Естественной формализацией теории логических модальностей, предложенной Ю.В. Ивлевым, оказалась известная система Льюиса **S5**. В дальнейшем выяснилось, что при помощи определенных модификаций стратегии построения семантики для **S5** могут быть построены семантики указанного типа и для более «слабых», чем **S5**, нормальных модальных систем **S4**, **Br**, **T**, **D**, **K**, а также для основной интуиционистской системы **Int** при переводе ее формул в формулы системы **S4**, предложенном Дж. Маккинси и А. Тарским. В отличие от квазифункциональных логик, данное направление исследований Ю.В. Ивлева известно в гораздо меньшей степени. Предлагаемая статья призвана восполнить этот пробел.

1. Теория логических модальностей. Кластерная семантика для системы Льюиса S5

К логическим алетическим модальностям обычно относят модальные операторы, свойства которых зависят только от логических форм высказываний, к которым они применяются. (Утверждение о логической истинности некоторого высказывания будет истинным, если его логическая форма выражается общезначимой формулой; утверждение о логической возможности некоторой формулы будет истинным, если эта формула не тождественно-ложна; утверждение о логической ложности некоторой формулы будет истинным, если эта формула невыполнима.)

Традиционно считается, что наиболее точно смысл логических алетических модальностей выражает система Льюиса **S5**. Так, еще Р. Карнап, описывая особенности данной системы, отмечал, что произвольное высказывание p в этой системе с «модальной точки зрения» может оцениваться как необходимое, невозможное или случайное (логически недетерминированное) [Карнап, 1959, с. 260]. Система **S5** относится к классу нормальных модальных логик. В качестве необходимых условий принадлежности логической системы к данному классу обычно указывают наличие в ней аксиомы $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ и правила Гёделя.

На сегодняшний день наиболее распространенным инструментом содержательной интерпретации нормальных модальных систем являются реляционные и окрестностные семантики возможных миров, основанные на понятиях модельной структуры, возможного мира, отношения достижимости между мирами. Неоднократно отмечалось, что, несмотря на более чем полувековую традицию использования этих понятий при построении семантики модальной логики, смысл их, вообще говоря, остается до конца непроясненным (см.: [Войшвилло, 1983; Сидоренко, 2002; Priest, 2008]).

В ряде работ Ю.В. Ивлева была предложена оригинальная стратегия построения теории логических модальностей, не требующая использования указанных понятий. Адекватной формализацией полученной семантики оказалась система Льюиса **S5**.

Опишем данную стратегию более подробно.

В дальнейшем для простоты изложения ограничимся пропозициональными фрагментами соответствующих логических систем. В качестве исходных символов объектного языка будем использовать $\neg, \supset, \Box$ (отрицание, материальная импликация, оператор логической необходимости соответственно). Другие логические связки и понятие правильно построенной формулы определяются стандартным образом. Операторы логической возможности и случайности определяются, соответственно, как $\Diamond A \dot{\Leftrightarrow} \neg\Box\neg A$; $\nabla A \dot{\Leftrightarrow} \Diamond A \mathbin{\dot{\wedge}} \Diamond\neg A$.

Символы $\{N, I, C\}$, а также логические операторы с точкой $\dot{\Leftrightarrow}, \dot{\wedge}, \dot{\vee}, \dot{\veebar}, \dot{\forall}, \dot{\exists}, \dot{\in}$ — символы метаязыка, которые будут использоваться для записи утверждений о выражениях объектного языка соответствующих логических систем.

Будем иметь в виду следующую формулировку системы **S5**.

К аксиомам и правилам вывода классического исчисления высказываний (далее — К.И.В.) добавляются модальные аксиомы

$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$, $\Box A \supset A$, $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$,

а также правило Гёделя: $\vdash A \Rightarrow \vdash \Box A$.

Каждая пропозициональная переменная p_i, входящая в формулу с модальными операторами, получает дополнительную (мета)оценку в терминах $\{N, I, C\}$, т.е., интерпретируется как обозначающая логически истинное, ложное или случайное (недетерминированное) высказывание. В первом случае из исходного множества о.с. W для формулы исключаются все о.с., содержащие $\neg p_i$. Во втором — все о.с., содержащие p_i. В третьем случае итоговое множество W содержит последовательность о.с. с числом элементов больше 1, в которой p_i по крайней мере однажды меняет значение. Если, далее, две или более переменных рассматриваются в качестве логически недетерминированных, каждая их конъюнкция дополнительно рассматривается как логически случайное или логически невозможное высказывание, поскольку конъюнкция логически недетерминированных высказываний может оказаться логически невозможной («25.09.2036 астероид Апофис столкнется с Землей» и «25.09.2036 астероид Апофис не столкнется с Землей»). Получающиеся в итоге конструкции $\langle\Gamma; W'\rangle$ (в терминологии Ю.В. Ивлева — ОМОСы, ограниченные множества описаний состояний), где Γ — истолкование допустимых значений переменных формулы, а W' — итоговое множество о.с. для нее, оказываются аналогами модельных структур системы **S5**. В качестве возможного мира рассматривается классическое о.с. $\alpha \in W'$. Все о.с., принадлежащие некоторому множеству W' (объединенные общим истолкованием Γ), связаны отношением «достижимости» и образуют класс эквивалентности.

В дальнейшем изложении подобные множества о.с. W', а также конечные системы таких множеств, объединенные общим истолкованием допустимых значений переменных $\Gamma_d (d \geq 1)$, будем, вслед за К. Сегербергом, называть *кластерами* [Hughes, Cresswell, 1996, p. 130].

Формулам без модальных операторов истинностные значения приписываются обычным образом в отдельных о.с. Модальные операторы $\Box$, $\Diamond$ рассматриваются как кванторы $\forall$, $\exists$ соответственно, пробегающие по элементам множеств W'. Истолкования допустимых значений пропозициональных переменных в терминах $\{N, I, C\}$ также осуществляется относительно множеств W'. В результате в семантике рассматриваемого типа различают три типа оценок:

1. Двухзначные истинностно-функциональные оценки формул классической логики:

$|p|_\alpha = t \Leftrightarrow p \mathrel{\dot{\in}} \alpha$;

$|p|_\alpha = f \Leftrightarrow \neg p \mathrel{\dot{\in}} \alpha$;

$|A \supset B|_\alpha = t \Leftrightarrow |A|_\alpha = f \mathbin{\dot{\vee}} |B|_\alpha = t$;

$|A \supset B|_\alpha = f \Leftrightarrow |A|_\alpha = t \mathbin{\dot{\wedge}} |B|_\alpha = f$ и т.д.

2. Двухзначные не-истинностно-функциональные оценки формул с операторами $\Box$, $\Diamond$:

$|\Box B|_{W'} = t \Leftrightarrow \dot{\forall}\alpha(\alpha \mathrel{\dot{\in}} W' \Rightarrow |B|_\alpha = t)$;

$|\Diamond B|_{W'} = t \Leftrightarrow \dot{\exists}\alpha(\alpha \mathrel{\dot{\in}} W' \mathbin{\dot{\wedge}} |B|_\alpha = t)$ и т.д.

3. Трехзначные не-истинностно-функциональные оценки пропозициональных переменных в терминах $\{N, I, C\}$:

$|p|_{W'} = N \Leftrightarrow \dot{\forall}\alpha(\alpha \mathrel{\dot{\in}} W' \Rightarrow |p|_\alpha = t)$;

$|p|_{W'} = I \Leftrightarrow \dot{\forall}\alpha(\alpha \mathrel{\dot{\in}} W' \Rightarrow |p|_\alpha = f)$;

$|p|_{W'} = C \Leftrightarrow \dot{\exists}\alpha(\alpha \mathrel{\dot{\in}} W' \mathbin{\dot{\wedge}} |p|_\alpha = t) \mathbin{\dot{\wedge}} \dot{\exists}\alpha(\alpha \mathrel{\dot{\in}} W' \mathbin{\dot{\wedge}} |p|_\alpha = f)$.

В качестве кластеров W' — аналогов модельных структур — рассматриваются все непустые подмножества множества о.с. $W = 2^n$ для формулы: $W' \in 2^W$.

Формула $\Box B$ *логически выполнима*, е.т.е. B общезначима в некотором $W' \in 2^W$.

Формула $\Box B$ *логически общезначима*, е.т.е. B общезначима в каждом $W' \in 2^W$.

Формула $\Diamond B$ *логически общезначима*, е.т.е. формула B логически выполнима.

(Как известно, «существенными» в **S5** оказываются только 4 модальности первой степени $\Box, \Box\neg, \Diamond, \Diamond\neg$, к которым сводимы все итерированные модальности. В семантике рассматриваемого типа это означает, что любая исходная оценка пропозициональной переменной в терминах $\{N, I, C\}$ повторно может оцениваться только как необходимая. В результате для ограничений неэлементарных степеней $d > 1$ все множества W'_d оказываются одноэлементными, или, иными словами, итерированные модальности можно рассматривать как кванторы по переменным, не имеющим вхождений в формулу.)

Нетрудно заметить, что между понятиями из групп 2, 3 имеется следующая связь:

$$|\Box p|_{W'} = t \dot{\Leftrightarrow} |p|_{W'} = N;\ |\Box p|_{W'} = f \dot{\Leftrightarrow} |p|_{W'} = I \dot{\veebar} |p|_{W'} = C;$$

$$|\Diamond p|_{W'} = t \dot{\Leftrightarrow} |p|_{W'} = N \dot{\veebar} |p|_{W'} = C;\ |\Diamond p|_{W'} = f \dot{\Leftrightarrow} |p|_{W'} = I.$$

Учитывая эти соотношения, а также факт отсутствия в **S5** существенных модальностей неэлементарных степеней, уточним смысл собственной аксиомы системы **S5** $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ в данной семантике:

1. $(\Diamond p \supset \Box\Diamond p) \dot{\Leftrightarrow} (\neg\Diamond p \vee \Box\Diamond p)$ — в силу эквивалентности $p \supset p$ и $\neg p \vee p$;
2. $(\neg\Diamond p \vee \Box\Diamond p \dot{\Leftrightarrow} (\neg\Diamond p \vee \Diamond p)$ — в силу эквивалентности $\Box\Diamond p$ и $\Diamond p$ в S5;
3. $(\neg\Diamond p \vee \Diamond p) \dot{\Leftrightarrow} Ip \dot{\veebar} Cp \dot{\veebar} Np$ — в силу приведенных выше эквивалентностей между понятиями групп 2 и 3.

Оказывается, таким образом, что в данной семантике аксиома $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ естественным образом выражает приведенную выше мысль Р. Карнапа о том, что произвольное высказывание в **S5** может оцениваться как логически необходимое, невозможное или недетерминированное.

Исходное число кластеров для формулы с n пропозициональными переменными определяется выражением 3^n. Например, для формулы с единственной пропозициональной переменной p возможны три кластера $\langle \Gamma; W' \rangle$:

1. $\langle \{Np\}; \{\{p\}\} \rangle$;
2. $\langle \{Ip\}; \{\{\neg p\}\} \rangle$;
3. $\langle \{Cp\}; \{\{p\}, \{\neg p\}\} \rangle$.

Нетрудно убедиться, что, согласно приведенным выше определениям, формулы $\Box p \supset p$, $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ истинны в каждом из этих кластеров.

Для формулы с двумя переменными p, q исходно возможными будут следующие 9 кластеров:

1. $\langle\{Np, Nq\}; \{\{p, q\}\}\rangle$;
2. $\langle\{Np, Iq\}; \{\{p, \neg q\}\}\rangle$;
3. $\langle\{Ip, Nq\}; \{\{\neg p, q\}\}\rangle$;
4. $\langle\{Ip, Iq\}; \{\{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
5. $\langle\{Np, Cq\}; \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}\}\rangle$;
6. $\langle\{Ip, Cq\}; \{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
7. $\langle\{Cp, Nq\}; \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}\}\rangle$;
8. $\langle\{Cp, Iq\}; \{\{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
9. $\langle\{Cp, Cq; \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle$.

В последнем, девятом, кластере в качестве случайных оцениваются 2 переменные, поэтому он порождает целый набор дополнительных истолкований конъюнкций p и q:

9. $\langle\{Cp, Cq, C\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, C\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
10. $\langle\{Cp, Cq, I\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, C\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
11. $\langle\{Cp, Cq, C\{p \wedge q\}, I\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, C\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
12. $\langle\{Cp, Cq, C\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, I\{\neg p \wedge q\}, C\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
13. $\langle\{Cp, Cq, C\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, I\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}\rangle$;
14. $\langle\{Cp, Cq, I\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, I\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}\rangle$;

15. $\langle \{Cp, Cq, C\{p \wedge q\}, I\{p \wedge \neg q\}, I\{\neg p \wedge q\}, C\{\neg p \wedge \neg q\}\};$
$\{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle$.

Формула $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$ истинна в каждом из приведенных кластеров.

При большом числе n переменных в формуле количество исходных кластеров для нее удобно представлять в виде следующей арифметической функции:

$C_n^0 \times 2^n + C_n^1 \times 2^{n-1} + C_n^2 \times 2^{n-2} + \ldots + C_n^i \times 2^{n-i} + C_n^n \times 2^0 = 3^n$, где $C_n^i \times 2^{n-i}$ — биномиальный коэффициент. Слагаемое $C_n^i \times 2^{n-i}$ обозначает число кластеров, в каждом из которых в качестве логически недетерминированных интерпретируются i пропозициональных переменных. Исходные кластеры, принадлежащие этому классу эквивалентности, представляют собой 2^i-элементные множества о.с. Если, далее, в некотором кластере $i \geq 2$ (в качестве логически недетерминированных оцениваются две или более пропозициональные переменные) учитываются дополнительные истолкования конъюнкций таких переменных, задача организации пересчета подобных «индетерминистских» кластеров оказывается несколько более сложной.

При $i = n = 2$ число таких кластеров определяется элементарным выражением $2^W - 3^n$ (в приведенном выше списке кластеров для формулы с двумя переменными это семь кластеров — с 9-го по 15-й). Однако в случае $n > 2$ необходимо использовать предложенное ранее представление числа 3^n в виде арифметической функции.

При $n = 3$ указанная функция примет вид

$C_3^0 \times 2^3 + C_3^1 \times 2^2 + C_3^2 \times 2^1 + C_3^3 \times 2^0 = 3^3$.

Слагаемое $C_3^0 \times 2^3$ обозначает число кластеров, не содержащих истолкований C, слагаемое $C_3^1 \times 2^2$ обозначает число кластеров, содержащих ровно одно истолкование C, слагаемое $C_3^2 \times 2^1$ обозначает число кластеров, содержащих два истолкования C. При этом, как вытекает из примера для $n = 2$, *каждый* кластер из группы $C_3^2 \times 2^1$ будет порождать по 7 прозводных кластеров, содержащих дополнительные истолкования конъюнкций двух случайных переменных. В результате при $n = 3$ число различных ограничений на образование конъюнкций трех логически недетерминированных высказываний будет определяться выражением:

$$2^8 - \left[C_3^0 \times 2^3 + C_3^1 \times 2^2 + C_3^2 \times 2^1 \times 7 + C_3^3 \times 2^0\right] = 256 - 63 = 193.$$

Соответственно, при $n = 4$ число индетермининистских кластеров, содержащих дополнительные истолкования конъюнкций четырех логически случайных высказываний, будет определяться выражением:

$2^{16} - [C_4^0 \times 2^4 + C_4^1 \times 2^3 + C_4^2 \times 2^2 \times 7 + C_4^3 \times 2^1 \times 193 + C_4^4 \times 2^0] =$
$= 65536 - 1761 = 63775.$

Для $n = 5$ нужный алгоритм примет вид:

$2^{32} - [C_5^0 \times 2^5 + C_5^1 \times 2^4 + C_5^2 \times 2^3 \times 7 + C_5^3 \times 2^2 \times 193 + C_5^4 \times 2^1 \times 63775 +$
$+ C_5^5 \times 2^0] = 4294967296 - 646143 = 4294321153.$

Если, далее, символом $N(i)$ $(2 \leq i \leq n-1)$ обозначить число допустимых ограничений на образование конъюнкций i случайных переменных, то выражение, описывающее их общее число для формулы с произвольным конечным числом переменных n, примет вид:

$2^W - [C_n^0 \times 2^n + C_n^1 \times 2^{n-1} + C_n^2 \times 2^{n-2} \times N(2) + C_n^3 \times 2^{n-3} \times N(3) +$
$\ldots + C_n^i \times 2^{n-i} \times N(i) + \ldots + C_n^{n-1} \times 2^1 \times N(n-1) + C_n^n \times 2^0].$

Предложенная семантика непротиворечива и полна относительно исчисления **S5** Льюиса.

2. Кластерная семантика для системы Льюиса S4

Будем иметь в виду следующую формулировку **S4**. К аксиомам и правилам вывода К.И.В. добавляются модальные аксиомы

$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$, $\Box A \supset A$, $\Box A \supset \Box\Box A$ и правило Гёделя. Поскольку в **S4** и других более «слабых», чем **S5**, нормальных модальных системах отношение достижимости уже не является отношением эквивалентности (не каждый мир модельной структуры достижим из любого другого), интерпретации допустимых значений переменных в терминах $\{N, I, C\}$ осуществляются относительно «выделенных миров» — отдельных о.с. для формулы. Поскольку, далее, в этих системах имеются «собственные» итерированные модальности, не сводимые к модальностям первой степени, допустимыми оказываются определенные изменения исходных оценок переменных в терминах $\{N, I, C\}$. В результате аналогом модельной структуры для этих систем будет конструкция $\langle \Gamma_d; \alpha_i; W'_d \rangle$, $d \geq 1$ (в терминологии Ю.В. Ивлева — ОГОС, относительно ограниченное множество о.с.), где α_i — исходное о.с., «выделенный мир», Γ_d — истолкование допустимых значений переменных, W'_d — результирующий кластер, множество или конечная система множеств о.с., соответствующая данному истолкованию.

Как и в семантике для **S5**, в кластерной семантике для **S4** имеются оценки трех типов:

1. Двухзначные истинностно-функциональные оценки формул без модальных операторов.

2. Двухзначные не-истинностно-функциональные оценки формул с модальными операторами. При этом условия истинности/ложности формул

с модальностями первой степени совпадают с аналогичными определениями для формул системы **S5**. Значения формулам с итерированными модальностями приписываются в кластерах соответствующих степеней. Например:

$$|\Box\Diamond B|_{W_2} = t \dot{\Leftrightarrow} \dot{\forall} W_1(W_1 \dot{\in} W_2 \dot{\Rightarrow} |\Diamond B|_{W_1} = t);$$

$$|\Diamond\Box B|_{W_2} = t \dot{\Leftrightarrow} \dot{\exists} W_1(W_1 \dot{\in} W_2 \dot{\wedge} |\Box B|_{W_1} = t);$$

$$|\Box\Diamond\Box B|_{W_3} = t \dot{\Leftrightarrow} \dot{\forall} W_2(W_2 \dot{\in} W_3 \dot{\Rightarrow} |\Diamond\Box B|_{W_2} = t);$$

$$|\Diamond\Box\Diamond B|_{W_3} = t \dot{\Leftrightarrow} \dot{\exists} W_2(W_2 \dot{\in} W_3 \dot{\wedge} |\Box\Diamond B|_{W_2} = t);$$

$$|\Diamond\Box B|_{W_2} = f \dot{\Leftrightarrow} \dot{\forall} W_1(W_1 \dot{\in} W_2 \dot{\Rightarrow} |\Box B|_{W_1} = f);$$

$$|\Box\Diamond\Box B|_{W_3} = f \dot{\Leftrightarrow} \dot{\exists} W_2(W_2 \dot{\in} W_3 \dot{\wedge} |\Diamond\Box B|_{W_2} = f)$$

и т.д. (Для отрицательных модальностей определения аналогичны.)

3. Трехзначные не-истинностно-функциональные оценки — истолкования пропозициональных переменных в терминах $\{N, I, C\}$:

$$|p|_{W'} = N \dot{\Leftrightarrow} \dot{\forall}\alpha(\alpha \dot{\in} W' \dot{\Rightarrow} |p|_\alpha = t);$$

$$|p|_{W'} = I \dot{\Leftrightarrow} \dot{\forall}\alpha(\alpha \dot{\in} W' \dot{\Rightarrow} |p|_\alpha = f);$$

$$|p|_{W'} = C \dot{\Leftrightarrow} \dot{\exists}\alpha(\alpha \dot{\in} W' \dot{\wedge} |p|_\alpha = t) \dot{\wedge} \dot{\exists}\alpha(\alpha \dot{\in} W' \dot{\wedge} |p|_\alpha = f).$$

При построении кластеров первой степени в системе **S4** каждая переменная $p_i \in \alpha_i$ интерпретируется как имеющая свое значение по необходимости или случайно: $p_i \in \alpha_i \dot{\Rightarrow} Np_i \dot{\veebar} Cp_i$; $\neg p_i \in \alpha_i \dot{\Rightarrow} Ip_i \dot{\veebar} Cp_i$. Если две или более переменных получают истолкование C, то, как и в семантике для **S5**, рассматриваются все возможные ограничения на построение их конъюнкций.

При построении кластеров неэлементарных степеней в системе **S4** оценки N, I могут повторно оцениваться только как необходимые; оценка C может повторно оцениваться как необходимая или случайная:

$Np_i \dot{\Rightarrow} NNp_i$; $Ip_i \dot{\Rightarrow} NIp_i$; $Cp_i \dot{\Rightarrow} NCp_i \dot{\veebar} CCp_i$.

Если Γ_2 некоторого $\langle \Gamma_2; \alpha_i; W_2' \rangle$ содержит для переменной p_i истолкование NCp_i, то элементами W_2' будут только такие множества о.с. W_1', в каждом из которых p_i по крайней мере однажды меняет значение. Если же в Γ_2 содержится интерпретация CCp_i, то в W_2' она будет представлена тройкой множеств о.с., соответствующей истолкованию $Cp_i \dot{\veebar} Np_i \dot{\veebar} Ip_i$:

$$|p|_{W'_2} = NC \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\forall W'_1(W'_1 \mathrel{\dot\in} W'_2 \mathrel{\dot\Rightarrow} |p|_{W'_1} = C);$$

$$|p|_{W'_2} = CC \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\exists W'_1(W'_1 \mathrel{\dot\in} W'_2 \mathrel{\dot\wedge} |p|_{W'_1} = C) \mathrel{\dot\wedge}$$
$$\mathrel{\dot\wedge} \dot\exists W'_1(W'_1 \mathrel{\dot\in} W'_2 \mathrel{\dot\wedge} |p|_{W'_1} = N) \mathrel{\dot\wedge} \dot\exists W'_1(W'_1 \mathrel{\dot\in} W'_2 \mathrel{\dot\wedge} |p|_{W'_1} = I).$$

Соответственно, если Γ_3 некоторого $\langle \Gamma_3; \alpha_i; W'_3\rangle$ содержит для переменной p_i истолкование $NCCp_i$, то элементами W'_3 будут только такие множества о.с. W'_2, в каждом из которых p_i имеет значение CCp_i. Если же в Γ_3 содержится интерпретация $CCCp_i$, то в W'_3 она будет представлена тройкой множеств W'_2, соответствующей истолкованию $CCp_i \mathrel{\dot\veebar} NNp_i \mathrel{\dot\veebar} NIp_i$:

$$|p|_{W'_3} = NCC \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\forall W'_2(W'_2 \mathrel{\dot\in} W'_3 \mathrel{\dot\Rightarrow} |p|_{W'_2} = CC);$$

$$|p|_{W'_3} = CCC \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\exists W'_2 \mathrel{\dot\in} W'_3 \mathrel{\dot\wedge} |p|_{W'_2} = CC) \mathrel{\dot\wedge} \dot\exists W'_2(W'_2 \mathrel{\dot\in} W'_3 \mathrel{\dot\wedge} |p|_{W'_2} =$$
$$= NN) \mathrel{\dot\wedge} \dot\exists W'_2(W'_2 \mathrel{\dot\in} W'_3 \mathrel{\dot\wedge} |p|_{W'_2} = NI).$$

Пусть имеется множество о.с. W для произвольной формулы с двумя переменными: $\alpha_1 = \{p, q\}$, $\alpha_2 = \{p, \neg q\}$, $\alpha_3 = \{\neg p, q\}$, $\alpha_4 = \{\neg p, \neg q\}$.

При построении кластеров первой степени каждое о.с. рассматривается как «выделенный мир» некоторой модельной структуры, а входящие в о.с. переменные — как имеющие значения по необходимости или случайно.

В результате, к примеру, $\alpha_4 = \{\neg p, \neg q\}$ порождает 4 исходных кластера $\langle \Gamma_1; \alpha_4; W'_1\rangle$:

1. $\langle \{Ip, Iq\}; \{\neg p, \neg q\}; \{\{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
2. $\langle \{Ip, Cq\}; \{\neg p, \neg q\}; \{\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
3. $\langle \{Cp, Iq\}; \{\neg p, \neg q\}; \{\{\neg p, \neg q\}\{p, \neg q\}\}\rangle$;
4. $\langle \{Cp, Cq\}; \{\neg p, \neg q\}; \{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}\rangle$.

Число исходных кластеров $\langle \Gamma_1; \alpha_i; W'_1\rangle$ по отдельному α_i удобно в общем случае представлять в виде арифметической функции $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^i + \ldots + C_n^n = 2^n$. Слагаемое C_n^i $(0 \leq i \leq n)$ обозначает число кластеров, в каждом из которых какое-либо i переменных толкуются как случайные; исходное W'_1 каждого такого кластера есть 2^i — элементное множество о.с.

По каждому кластеру первой степени описанным выше образом строится множество кластеров $\langle \Gamma_2; \alpha_i; W'_2\rangle$ второй степени. К примеру, кластер 4 порождает следующие кластеры второй степени:

1. $\langle\{NCp, NCq\}; \{\neg p, \neg q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}\}\rangle$;

2. $\langle\{NCp, CCq\}; \{\neg p, \neg q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\};$
   $\{\{p, q\}\{\neg p, q\}\}; \{\{p, \neg q\}\{\neg p, \neg q\}\}\}\rangle$;

3. $\langle\{CCp, NCq\}; \{\neg p, \neg q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\};$
   $\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}; \{\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}\}\rangle$;

4. $\langle\{CCp, CCq\}; \{\neg p, \neg q\};$
   $\{1.\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\};$
   $2.\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\};$
   $3.\{\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\};$
   $4.\{\{p, q\}\{\neg p, q\}\};$
   $5.\{\{p, \neg q\}\{\neg p, \neg q\}\};$
   $6.\{\{p, q\}\};$
   $7.\{\{p, \neg q\}\};$
   $8.\{\{\neg p, q\}\};$
   $9.\{\{\neg p, \neg q\}\}\}\rangle$.

Кластер № 4 содержит 9 элементов — множеств о.с. W_1'.

Каждое множество W_1' с определенным номером в данном $\langle\Gamma_2; \alpha_i; W_2'\rangle$ соответствует элементу следующей строгой дизъюнкции (истолкованию допустимых значений p и q) с тем же номером:

$$1.Cp \mathbin{\dot\wedge} Cq \mathbin{\dot\veebar} 2.Np \mathbin{\dot\wedge} Cq \mathbin{\dot\veebar} 3.Ip \mathbin{\dot\wedge} Cq \mathbin{\dot\veebar} 4.Cp \mathbin{\dot\wedge} Nq \mathbin{\dot\veebar} 5.Cp \mathbin{\dot\wedge} Iq \mathbin{\dot\veebar}$$
$$\mathbin{\dot\veebar} 6.Np \mathbin{\dot\wedge} Nq \mathbin{\dot\veebar} 7.Np \mathbin{\dot\wedge} Iq \mathbin{\dot\veebar} 8.Ip \mathbin{\dot\wedge} Nq \mathbin{\dot\veebar} 9.Ip \mathbin{\dot\wedge} Iq.$$

Число кластеров второй степени по отдельному α_i в общем случае определяется выражением:

$C_n^0 \times 2^0 + C_n^1 \times 2^1 + C_n^2 \times 2^2 + \ldots + C_n^i \times 2^i + \ldots + C_n^n \times 2^n = 3^n$.

Слагаемое $C_n^i \times 2^i$ $(0 \leq i \leq n)$ представляет число конструкций $\langle\Gamma_2; \alpha_i; W_2'\rangle$, порожденных кластерами первой степени с i случайными переменными. Если все i переменных получают истолкование CC, то W_2' этого $\langle\Gamma_2; \alpha_i; W_2'\rangle$ будет представлять собой 3^i — элементное множество множеств о.с. с «размерностью» элементов от 2^n до 2^i — так, W_2' в последнем из вышеприведенных примеров представляет собой 9-элементное множество множеств о.с. При этом «размерность» его элементов варьируется от 2^n до 2^0.

Приведенных определений достаточно, чтобы продемонстрировать общезначимость формулы $\Box p \supset \Box\Box p$ и опровержимость формулы $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ в данной семантике.

Пусть $|\Box p|_{W_1'} = t$ в некотором $\langle \Gamma_1; \alpha_i; W_1' \rangle$. Это возможно только при истолковании Np, которое остается неизменным при построении кластеров более высоких степеней, что гарантирует истинность $\Box p \supset \Box\Box p$. При ложности $\Box p$ в исходном W_1' формула $\Box\Box p$ оказывается ложной, что также сохраняет истинность всей импликации. Таким образом, формула $\Box p \supset \Box\Box p$ оказывается истинной «по построению».

Пусть $|\Diamond p|_{W_1'} = t$ в некотором $\langle \Gamma_1; \alpha_i; W_1' \rangle$. Это возможно, если Γ_1 содержит истолкования Np или Cp.

В первом случае $|p|_\alpha = t$ для любого $\alpha \in W_1'$ и $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ истинна в каждом W_2', «прозводном» от такого W_1'. Во втором случае $\langle \Gamma_1; \alpha_i; W_1' \rangle$ примет вид $\langle \{Cp\}; \{p\}; \{\{p\}, \{\neg p\}\} \rangle$. Одним из кластеров второй степени, допустимом относительно такого W_1', будет конструкция:

$\langle \{CCp\}; \{p\}; \{\{\{p\}, \{\neg p\}\}; \{\{p\}\}; \{\{\neg p\}\}\} \rangle$.

$|\Box\Diamond p|_{W_2'} = t \Leftrightarrow \dot{\forall} W_1' (W_1' \dot{\in} W_2' \Rightarrow |\Diamond p|_{W_1'} = t)$.

Очевидно, однако, что в множестве $\{\{\neg p\}\}$ формула $\Diamond p$ ложна, поэтому во включающем его W_2' ложна и $\Box\Diamond p$. Таким образом, истинность $\Diamond p$ в некотором W_1' не гарантирует истинность $\Box\Diamond p$ во всех «производных» от него W_1' (в **S4** возможности могут исчезать).

Общее число кластеров третьей степени $\langle \Gamma_3; \alpha_i; W_3' \rangle$ по отдельному α_i описывается арифметической функцией вида $C_n^0 \times 3^0 + C_n^1 \times 3^1 + C_n^2 \times 3^2 + \ldots + C_n^i \times 3^i + \ldots + C_n^n \times 3^n = 4^n$, где слагаемое $C_n^i \times 3^i$ представляет число $\langle \Gamma_3; \alpha_i; W_3' \rangle$, порождаемых кластерами первой степени с i случайными переменными $(0 \le i \le n)$. Элементами таких W_3' будут объекты «предыдущего уровня», т.е. 3^i — элементные $(0 \le i \le n)$ множества множеств о.с. W_2'.

К примеру, интерпретация $CCCp, CCCq$ «разворачивается» в строгую дизъюнкцию:

$$1. CCp \dot{\wedge} CCq \dot{\veebar} 2. CCp \dot{\wedge} NNq \dot{\veebar} 3. CCp \dot{\wedge} NIq \dot{\veebar} 4. NNp \dot{\wedge} CCq \dot{\veebar}$$

$$\dot{\veebar} 5. NIp \dot{\wedge} CCq \dot{\veebar} 6. NNp \dot{\wedge} NNq \dot{\veebar} 7. NNp \dot{\wedge} NIq \dot{\veebar}$$

$$\dot{\veebar} 8. NIp \dot{\wedge} NNq \dot{\veebar} 9. NIp \dot{\wedge} NIq.$$

Она определяет построение кластера W_3', элементами которого будут множества множеств о.с. W_2', соответствующие элементам данной дизъюнкции:

$\langle\{CCCp, CCCq\}; \{\neg p, \neg q\}; \{1.\{\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\};$

$\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\};\ \{\{p,q\}\{\neg p,q\}\}; \{\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\}; \{\{p,\neg q\}\{\neg p,\neg q\}\};$

$\{\{p,q\}\}; \{\{p,\neg q\}\}; \{\{\neg p,q\}\}; \{\{\neg p,\neg q\}\}\};$

$2.\{\{\{p,q\}\{\neg p,q\}\}; \{\{p,q\}\}; \{\{\neg p,q\}\}\};$

$3.\{\{\{p,\neg q\}\{\neg p,\neg q\}\}; \{\{p,\neg q\}\}; \{\{\neg p,\neg q\}\}\};$

$4.\{\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\}; \{\{p,q\}\}; \{\{p,\neg q\}\}\};$

$5.\{\{\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\}; \{\{\neg p,q\}\}; \{\{\neg p,\neg q\}\}\};$

$6.\{\{\{p,q\}\}\}; 7.\{\{\{p,\neg q\}\}\}; 8.\{\{\{\neg p,q\}\}\}; 9.\{\{\{\neg p,\neg q\}\}\}\}\rangle.$

Сказанное о способе порождения конструкций $\langle\Gamma_d;\alpha_i;W'_d\rangle$, их общем числе, а также числе и типе их элементов можно обобщить следующим образом:

$\langle\Gamma_1;\alpha_i;W'_1\rangle : C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^i + \ldots + C_n^n = 2^n;$
$\langle\Gamma_2;\alpha_i;W'_2\rangle : C_n^0\times 2^0 + C_n^1\times 2^1 + C_n^2\times 2^2 + \ldots + C_n^i\times 2^i + \ldots + C_n^n\times 2^n = 3^n;$
$\langle\Gamma_3;\alpha_i;W'_3\rangle : C_n^0\times 3^0 + C_n^1\times 3^1 + C_n^2\times 3^2 + \ldots + C_n^i\times 3^i + \ldots + C_n^n\times 3^n = 4^n.$

Для кластеров прозвольной конечной степени $d \geq 1$ соответствующий алгоритм примет вид:

$$\langle\Gamma_d;\alpha_i;W'_d\rangle : C_n^0\times d^0 + C_n^1\times d^1 + C_n^2\times d^2 + \ldots + C_n^i\times d^i + \ldots + C_n^n\times d^n = (d+1)^n.$$

Как известно, в **S4** существует 12 «собственных» итерированных модальностей ненулевой степени: $\Box$, $\Box\neg$, $\Diamond$, $\Diamond\neg$, $\Box\Diamond$, $\Box\Diamond\neg$, $\Diamond\Box$, $\Diamond\Box\neg$, $\Box\Diamond\Box$, $\Box\Diamond\Box\neg$, $\Diamond\Box\Diamond$, $\Diamond\Box\Diamond\neg$. Все итерированные модальности степени выше 3 сводимы к каким-либо модальностям из приведенного списка.

Нетрудно убедиться, что, с учетом условий построения кластеров в системе **S4**, кластеры степени > 3 не несут никакой новой информации о допустимых значениях переменных и их конъюнктивных сочетаниях. Таким образом, факт отсутствия в **S4** собственных итерированных модальностей степени > 3 оказывается естественным следствием самого способа построения данной семантики [Архиереев, 2022].

Описанная семантика полна и непротиворечива относительно исчисления **S4**.

3. Кластерная семантика для системы Гейтинга Int

В основу дальнейшего изложения положим перевод интуиционистской системы А. Гейтинга в систему **S4**, предложенный в 1948 г. Дж. Маккинси и А. Тарским.

Пусть ψ — функция перевода. Тогда, в зависимости от степени сложности интуиционистской формулы, ее перевод в **S4** примет вид:

1) $\psi(p) = \Box p$, где p — пропозициональная переменная;

2) $\psi(\neg A) = \Box\neg\psi(A)$, где A — произвольная формула;

3) $\psi(A \wedge B) = \psi(A) \wedge \psi(B)$;

4) $\psi(A \vee B) = \psi(A) \vee \psi(B)$;

5) $\psi(A \supset B) = \Box(\psi(A) \supset \psi(B))$.

Произвольная формула А доказуема в системе Гейтинга, если только ее перевод $\psi(A)$ доказуем в системе **S4**.

Очевидно, что при данном переводе *все* формулы системы **Int**, включая элементарные, рассматриваются как модальные. Отрицание и импликация системы **Int** рассматриваются как модальные понятия второй степени.

Как и в семантике для **S4**, в кластерной семантике для **Int** различаются 3 типа оценок:

1. Двухзначные истинностно-функциональные оценки $\{t, f\}$ пропозициональных переменных в отдельных о.с. — в семантике для **Int** они служат исключительно для выражения смысла интуиционистских связок.

2. Трехзначные не-истинностно-функциональные оценки формул системы **Int** $\{T, R, F\}$ («достоверно истинно», «опровержимо», «достоверно ложно» соответственно).

3. Трехзначные не-истинностно-функциональные оценки пропозициональных переменных в терминах $\{N, I, C\}$.

Очевидно, что оценки типов 2, 3 осуществляются в кластерах — множествах $W'_d (d \geq 1)$.

Будем иметь в виду следующую формулировку **Int**: логические символы объектного языка $\sim, \rightarrow, \wedge, \vee$ — сильное отрицание, импликация, конъюнкция и дизъюнкция системы **Int** соответственно; символы метаязыка $\neg, \dot{\Rightarrow}, \dot{\Leftrightarrow}, \dot{\wedge}, \dot{\vee}, \dot{\underline{\vee}}, \dot{\supset}, \dot{\forall}, \dot{\exists}, \dot{\in}$, в котором формулируются условия истинности/ ложности формул системы **Int**; аксиомами системы будут все аксиомы К.И.В., за исключением $\sim\sim A \rightarrow A$, вместо которой вводится $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Правилами вывода **Int** являются правила вывода К.И.В.

Символ $\sim$ обозначает «интуиционистское» отрицание, которое является, по сути, модальным понятием: в семантике возможных миров для **Int** истинность $\sim A$ трактуется как «ложность A во всех мирах, достижимых из данного». Отрицанию $\sim$ соответствует значение F. Интуиционистские значения T, F обладают свойствами «прямой сохранности» (монотонности): истинное/ложное в «сильном» смысле высказывание сохраняет свое значение в любом мире, достижимом из исходного.

Символ метаязыка $\neg$ обозначает слабое (в терминологии Гейтинга — «фактическое») отрицание, которое может пониматься как отсутствие доказательства утверждения A на определенном этапе развития некоторой теории. Данному отрицанию соответствует значение R, которое не обладает свойством прямой, но обладает свойством «обратной сохранности»: все, что является недоказанным на нынешнем этапе развития теории, было таковым на всех предыдущих этапах [Шрамко, 2002].

Как и в семантике для **S4**, для построения кластеров в **Int** последовательно рассматриваются все исходные о.с. для формулы и возможные истолкования допустимых значений входящих в них переменных в терминах $\{N, I, C\}$. Если при этом в исходное о.с. переменная p_i входит без отрицания $\neg$, ей может приписываться только значение N. Если же в исходное о.с. переменная p_i входит с метаотрицанием, то ей могут приписываться значения I или C. В последнем случае, как и в семантике для **S4**, кластер W'_d содержит последовательность о.с., в которой p_i по крайней мере однажды меняет значение. Если две или более переменных получают оценку C, дополнительно рассматриваются все допустимые ограничения на образование конъюнкций таких переменных. Переменные, получившие истолкование C, в дальнейшем могут оцениваться как NC или CC.

Описанные выше кластеры для формул системы **S4**, построенные относительно о.с. $\{\neg p, \neg q\}$, можно рассматривать как примеры кластеров и для формул системы **Int** при интерпретации входящих в о.с. отрицаний как «фактических».

Пусть k — число переменных с «фактическими» отрицаниями в некотором о.с. α_i. Тогда число кластеров $\langle \Gamma_1; \alpha_i; W'_1 \rangle$, возможных относительно этого α_i, описывается выражением $C^0_k + C^1_k + C^2_k + C^i_k + \ldots + C^k_k = 2^k$, где $i(0 \leq i \leq k)$ — число истолкований C. Исходное W'_1 в этом случае содержит 2^i о.с.

Соответственно, число кластеров $\langle \Gamma_2; \alpha_i; W'_2 \rangle$, возможных относительно этого α_i, определяется выражением:

$$C^0_k \times 2^0 + C^1_k \times 2^1 + C^2_k \times 2^2 + \ldots + C^i_k \times 2^r + \ldots + C^k_k \times 2^k = 3^k,$$

где r $(0 \leq r \leq i)$ — число истолкований CC. W'_2 в этом случае представляют собой 3^r — элементные множества множеств о.с.

Число кластеров третьей степени определяется выражением:

$$C^0_k \times 3^0 + C^1_k \times 3^1 + C^2_k \times 3^2 + \ldots + C^m_k \times 3^m + \ldots + C^k_k \times 3^k = 4^k,$$

где m $(0 \leq m \leq r)$ — число истолкований CCC. Элементами кластеров W'_3 будут объекты «предыдущего уровня» — 3^r — элементные множества множеств о.с W'_2.

Соответственно, число кластеров прозвольной конечной степени d, возможных относительно некоторого о.с. с k слабыми отрицаниями, описывается выражением: $C_k^0 \times d^0 + C_k^1 \times d^1 + C_k^2 \times d^2 + \ldots + C_k^k \times d^k = (d+1)^k$.

Очевидно, что множество кластеров для формул системы **Int** есть собственное подмножество множества кластеров для формул системы **S4**.

Формулам системы **Int** следующим образом приписываются значения в данной семантике.

Пропозициональная переменная обычным образом принимает значение t или f в о.с. в зависимости от того, входит ли в о.с. она сама или ее метаотрицание: $|p|_\alpha = t \mathrel{\dot\Leftrightarrow} p \mathrel{\dot\in} \alpha$; $|p|_\alpha = f \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \neg p \mathrel{\dot\in} \alpha$.

1. $|A|_{W_1'} = T \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\forall\alpha(\alpha \mathrel{\dot\in} W_1' \mathrel{\dot\Rightarrow} |A|_\alpha = t)$;

2. $|A|_{W_1'} = R \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\exists\alpha(\alpha \mathrel{\dot\in} W_1' \mathrel{\dot\wedge} |A|_\alpha = f)$;

3. $|A|_{W_2'} = F \mathrel{\dot\Leftrightarrow} |\sim A|_{W_2'} = T \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\forall W_1'(W_1' \mathrel{\dot\in} W_2' \mathrel{\dot\Rightarrow} |A|_{W_1'} = R)$.

Таким образом, значения T и F в данной семантике «несимметричны»: если истинность некоторой формулы определяется в множестве уровня W_d', то ее (сильная) ложность определяется в множестве следующего уровня W_{d+1}'; в W_d' устанавливается только ее слабая ложность (опровержимость).

4. $|\sim A|_{W_2'} = R \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\exists W_1'(W_1' \mathrel{\dot\in} W_2' \mathrel{\dot\wedge} |A|_{W_1'} = T)$;

5. $|\sim A|_{W_3'} = F \mathrel{\dot\Leftrightarrow} |\sim\sim A|_{W_3'} = T \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\forall W_2'(W_2' \mathrel{\dot\in} W_3' \mathrel{\dot\Rightarrow} |\sim A|_{W_2'} = R)$.

Попытаемся продолжить процесс навешивания отрицаний:

$|\sim\sim A|_{W_3'} = R \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\exists W_2'(W_2' \mathrel{\dot\in} W_3' \mathrel{\dot\wedge} |\sim A|_{W_2'} = T)$;

$|\sim\sim A|_{W_4'} = F \mathrel{\dot\Leftrightarrow} |\sim\sim\sim A|_{W_4'} = T \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\forall W_3'(W_3 \mathrel{\dot\in} W_4' \mathrel{\dot\Rightarrow} \dot\exists W_2'(W_2' \mathrel{\dot\in} W_3' \mathrel{\dot\wedge}$
$\mathrel{\dot\wedge} |\sim A|_{W_2'} = T))$ — в силу принятых в классической логике правил удаления кванторов, последнее определение эквивалентно определению 3, поэтому «нет надобности рассматривать более двух последовательных отрицаний» [Гейтинг, 2010, р. 125].

6. $|A \wedge B|_{W_1'} = T \mathrel{\dot\Leftrightarrow} (|A|_{W_1'} = T \mathrel{\dot\wedge} |B|_{W_1'} = T)$;

7. $|A \wedge B|_{W_1'} = R \mathrel{\dot\Leftrightarrow} (|A|_{W_1'} = R \mathrel{\dot\vee} |B|_{W_1'} = R)$;

8. $|A \wedge B|_{W_2'} = F \mathrel{\dot\Leftrightarrow} |\sim (A \wedge B)|_{W_2'} = T \mathrel{\dot\Leftrightarrow} \dot\forall W_1'(W_1' \mathrel{\dot\in} W_2' \mathrel{\dot\Rightarrow}$
$\mathrel{\dot\Rightarrow} (|A|_{W_1'} = R \mathrel{\dot\vee} |B|_{W_1'} = R))$;

9. $|A \vee B|_{W_1'} = T \mathrel{\dot\Leftrightarrow} (|A|_{W_1'} = T \mathrel{\dot\vee} |B|_{W_1'} = T)$;

10. $|A \vee B|_{W_1'} = R \dot{\Leftrightarrow} (|A|_{W_1'} = R \mathbin{\dot{\wedge}} |B|_{W_1'} = R)$;

11. $|A \vee B|_{W_2'} = F \dot{\Leftrightarrow} |\sim (A \vee B)|_{W_2'} = T \dot{\Leftrightarrow} (|A|_{W_2'} = F \mathbin{\dot{\wedge}} |B|_{W_2'} = F) \dot{\Leftrightarrow}$
$\dot{\Leftrightarrow} (|\sim A|_{W_2'} = T \mathbin{\dot{\wedge}} |\sim B|_{W_2'} = T)$;

12. $|A \to B|_{W_2'} = T \dot{\Leftrightarrow} \dot{\forall} W_1'(W_1' \dot{\in} W_2' \dot{\Rightarrow} (|A|_{W_1'} = T \dot{\Rightarrow} |B|_{W_1'} = T))$ или, поскольку импликация $\dot{\Rightarrow}$ рассматривается как материальная:

$12'$. $|A \to B|_{W_2'} = T \dot{\Leftrightarrow} \dot{\forall} W_1'(W_1' \dot{\in} W_2' \dot{\Rightarrow} (|A|_{W_1'} = R \mathbin{\dot{\vee}} |B|_{W_1'} = T))$;

13. $|A \to B|_{W_2'} = R \dot{\Leftrightarrow} \dot{\exists} W_1'(W_1' \dot{\in} W_2' \mathbin{\dot{\wedge}} (|A|_{W_1'} = T \mathbin{\dot{\wedge}} |B|_{W_1'} = R))$;

14. $|A \to B|_{W_3'} = F \dot{\Leftrightarrow} |\sim (A \to B)|_{W_3'} = T \dot{\Leftrightarrow} \dot{\forall} W_2'(W_2' \dot{\in} W_3' \dot{\Rightarrow}$
$\dot{\Rightarrow} (|A \to B|_{W_2'} = R))$.

Формула **B** *выполнима в* **Int**, е.т.е. B принимает значение T в некотором W_d' $(d \geq 1)$.

Формула B *общезначима в* **Int**, е.т.е. B принимает значение T в каждом W_d' $(d \geq 1)$.

Приведенных определений достаточно, чтобы показать необщезначимость в **Int** ряда законов классической логики.

Все формулы вида $\sim A \vee A$ необщезначимы в **Int**. Рассмотрим $\langle \Gamma_1; \alpha_i; W_1' \rangle$ вида $\langle \{Cp\}; \{\neg p\}; \{\{\neg p\}\{p\}\} \rangle$ и один из возможных относительно него $\langle \Gamma_2; \alpha_i; W_2' \rangle$: $\langle \{CCp\}; \{\neg p\}; \{\{\{\neg p\}\{p\}\}; \{\{\neg p\}\}; \{\{p\}\}\} \rangle$.

Формула p опровержима в W_1', $\sim p$ опровержима в W_2', т.к. множество $\{\{p\}\} \in W_2'$ не содержит ни одного о.с., в котором p принимала бы значение f.

Формулы вида $\sim (A \wedge B) \to (\sim A \vee \sim B)$ не общезначимы в **Int**.

Рассмотрим «подстановочный» вариант формулы с переменными p, q:

$\sim (p \wedge q) \to (\sim p \vee \sim q)$.

Пусть исходным $\langle \Gamma_1; \alpha_i; W_1' \rangle$ является кластер:

$\langle \{Cp, Cq, I(p \wedge q), C(\neg p \wedge q), C(p \wedge \neg q), I(\neg p \wedge \neg q)\}; \{\neg p, \neg q\};$
$\{\{\neg p, q\}\{p, \neg q\}\} \rangle$.

Рассмотрим следующий $\langle \Gamma_2; \alpha_i; W_2' \rangle$, построенный на его основе:

$\langle \{CCp, CCq, NI(p \wedge q), CC(\neg p \wedge q), CC(p \wedge \neg q), NI(\neg p \wedge \neg q)\}; \{\neg p, \neg q\};$
$\{\{\{\neg p, q\}\{p, \neg q\}\}; \{\{\neg p, q\}\}; \{\{p, \neg q\}\}\} \rangle$.

В каждом элементе данного W_2' формула $p \wedge q$ опровержима, т.е.

$|\sim (p \wedge q)|_{W_2'} = T$, но при этом $|\sim p|_{W_2'} = R$,$|\sim q|_{W_2'} = R$.

Формула $(A \to B) \to (\sim A \vee B)$ необщезначима в **Int** (интуиционистская импликация не выразима через суперпозицию сильного отрицания и дизъюнкции).

Рассмотрим формулу данного вида, содержащую две пропозициональные переменные p, q:

$(p \to q) \to (\sim p \vee q)$.

Одной из допустимых конструкций $\langle \Gamma_1; \alpha_i; W'_1 \rangle$ для нее является следующий кластер:

$\langle \{Cp, Cq, C(p \wedge q), I(\neg p \wedge q), I(p \wedge \neg q), C(\neg p \wedge \neg q)\}; \{\neg p, \neg q\};$
$\{\{p, q\}\{\neg p, \neg q\}\} \rangle$.

Рассмотрим следующий $\langle \Gamma_2; \alpha_i; W'_2 \rangle$, построенный на его основе:

$\langle \{CCp, CCq, CC(p \wedge q), NI(\neg p \wedge q), NI(p \wedge \neg q), CC(\neg p \wedge \neg q)\}; \{\neg p, \neg q\};$
$\{\{\{p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}; \{\{p, q\}\}; \{\{\neg p, \neg q\}\}\} \rangle$.

Формула $p \to q$ принимает значение T во множестве

$W'_2 = \{\{\{p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}; \{\{p, q\}\}; \{\{\neg p, \neg q\}\}\}$ ($p \to q$ истинна в каждом $W'_1 \in W'_2$). Однако в том же W'_2 формула $\sim p$ опровержима (опровергающее множество о.с. — $\{\{p, q\}\}$), а в исходном $W'_1 = \{\{p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}$ опровержима формула q, таким образом, формула $\sim p \vee q$ опровержима в данном W'_2.

Нетрудно убедиться, что все формулы вида $(\sim A \vee \sim B) \to \sim (A \wedge B)$, $(\sim A \vee B) \to (A \to B)$, $\sim A \to (A \to B)$ общезначимы в кластерной семантике для **Int**.

Семантика полна и непротиворечива относительно исчисления **Int**.

4. Кластерная семантика для системы Br

Будем иметь в виду следующую формулировку системы **Br**. К аксиомам и правилам вывода К.И.В. добавляются модальные аксиомы

$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$, $\Box A \supset A$, $A \supset \Box\Diamond A$
и правило Гёделя.

Как и в предыдущих случаях, в кластерной семантике для **Br** различают три типа оценок:

1) двухзначные истинностно-функциональные оценки формул без модальных операторов;

2) двухзначные не-истинностно-функциональные оценки формул с модальными операторами;

3) трехзначные не-истинностно-функциональные оценки — истолкования пропозициональных переменных в терминах $\{N, I, C\}$.

Как и в системе **S4**, при построении кластеров первой степени в системе **Br** каждая переменная $p_i \in \alpha_i$ интерпретируется как имеющая свое значение по необходимости или случайно: $p_i \dot{\in} \alpha_i \dot{\Rightarrow} Np_i \dot{\veebar} Cp_i$; $\neg p_i \dot{\in} \alpha_i \dot{\Rightarrow} Ip_i \dot{\veebar} Cp_i$. Если две или более переменных получают истолкование C, то рассматриваются все возможные ограничения на построение их конъюнкций.

При построении кластеров неэлементарных степеней в системе **Br** оценки N, I могут повторно интерпретироваться как необходимые или случайные, а оценка C — только как необходимая: $Np_i \dot{\Rightarrow} NNp_i \dot{\veebar} CNp_i$; $Ip_i \dot{\Rightarrow} NIp_i \dot{\veebar} CIp_i$; $Cp_i \dot{\Rightarrow} NCp_i$.

Оценкам CN, CI соответствуют следующие кластеры:

$$|p|_{W_2'} = CN \dot{\Leftrightarrow} \dot{\exists} W_1'(W_1' \dot{\in} W_2' \dot{\wedge} |p|_{W_1'} = C) \dot{\wedge} \dot{\exists} W_1'(W_1' \dot{\in} W_2' \dot{\wedge} |p|_{W_1'} = N);$$

$$|p|_{W_2'} = CI \dot{\Leftrightarrow} \dot{\exists} W_1'(W_1' \dot{\in} W_2' \dot{\wedge} |p|_{W_1'} = C) \dot{\wedge} \dot{\exists} W_1'(W_1' \dot{\in} W_2' \dot{\wedge} |p|_{W_1'} = I).$$

Правила образования кластеров неэлементарных степеней в **Br** оказываются аналогом свойства симметричности отношения достижимости и являются, таким образом, необходимым условием общезначимости собственной аксиомы системы Br $A \supset \Box\Diamond A$ или эквивалентной ей аксиомы $\Diamond\Box A \supset A$.

Пусть переменная p является элементом некоторого исходного о.с. α_i: $p_i \dot{\in} \alpha_i$. Возможными оказываются два кластера первой степени:

1. $\langle\{Np\}; \{p\}; \{\{p\}\}\rangle$.
2. $\langle\{Cp\}; \{p\}; \{\{p\}, \{\neg p\}\}\rangle$.

На основе первого кластера получаем два кластера второй степени:

1a. $\langle\{NNp\}; \{p\}; \{\{\{p\}\}\}\rangle$.

1b. $\langle\{CNp\}; \{p\}; \{\{\{p\}\}; \{\{p\}, \{\neg p\}\}\}\rangle$.

В каждом из этих кластеров истинно утверждение $p \supset \Box\Diamond p$, поскольку $\dot{\forall} W_1(W_1 \dot{\in} W_2 \dot{\Rightarrow} |\Diamond p|_{W_1} = t)$.

Если, далее, мы допустим интерпретацию CC, то на основе кластера $\langle\{Cp\}; \{p\}; \{\{p\}, \{\neg p\}\}\rangle$ получим два следующих кластера второй степени:

2a. $\langle\{NCp\}; \{p\}; \{\{\{p\}, \{\neg p\}\}\}\rangle$.

2b. $\langle\{CCp\}; \{p\}; \{\{\{p\}, \{\neg p\}\}; \{\{p\}\}; \{\{\neg p\}\}\}\rangle$.

В последнем кластере формула $p \supset \Box\Diamond p$ опровержима, поскольку $p \dot{\in} \alpha_i$, но в множестве $\{\{\neg p\}\}$ формула $\Diamond p$ ложна.

Пусть $\neg p \dot{\in} \alpha_i$. При допущении истолкований CC одним из кластеров второй степени, возможным относительно этого α_i, оказывается конструкция $\langle\{CCp\}; \{\neg p\}; \{\{\{p\}, \{\neg p\}\}; \{\{p\}\}; \{\{\neg p\}\}\}\rangle$ — по сути, кластер 2b с другим исходным о.с. $\{\neg p\}$. Формула $\Diamond\Box p$ истинна в W_2 этого кластера, поскольку $\Box p$ истинна в его элементе $\{\{p\}\}$, но p ложна в исходном α_i. Следовательно, $\Diamond\Box p \supset p$ опровержима в данном кластере.

Опровержимой в кластере 2b оказывается и формула $\Diamond\Box p \supset \Box\Diamond p$, которая считается «характеристической» теоремой системы **Br**.

Число кластеров первой степени по отдельному α_i в системе **Br** определяется простой суммой биномиальных коэффициентов $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^i +$

$\ldots + C_n^n = 2^n$, где слагаемое $C_n^i (0 \leq i \leq n)$ обозначает число кластеров, в каждом из которых какое-либо i переменных интерпретируются как случайные. Число кластеров более высоких степеней по отдельному кластеру предыдущего уровня определяется выражением 2^{n-i}, где i $(0 \leq i \leq n)$ — число интепретаций C в кластере предыдущего уровня.

5. Кластерная семантика для системы T

Будем иметь в виду следующую формулировку системы **T**.

К аксиомам и правилам вывода К.И.В. добавляются модальные аксиомы $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$, $\Box A \supset A$ и правило Гёделя.

Как и ранее, в кластерной семантике для **T** различаются три типа оценок:

1) двухзначные истинностно-функциональные оценки формул без модальных операторов;

2) двухзначные не-истинностно-функциональные оценки формул с модальными операторами;

3) трехзначные не-истинностно-функциональные оценки — истолкования пропозициональных переменных в терминах $\{N, I, C\}$.

При построении кластеров первой степени в системе **T** каждая переменная $p_i \in \alpha_i$ интерпретируется как имеющая свое значение по необходимости или случайно: $p_i \dot{\in} \alpha_i \dot{\Rightarrow} Np_i \dot{\veebar} Cp_i$; $\neg p_i \dot{\in} \alpha_i \dot{\Rightarrow} Ip_i \dot{\veebar} Cp_i$. В результате для любого $\langle \Gamma_1; \alpha_i; W_1' \rangle$ верно: $\alpha_i \dot{\in} W_1$ — «выделенный мир» является элементом результирующего кластера W_1. Очевидно, что данное требование является аналогом свойства рефлексивности отношения достижимости / необходимым условием общезначимости аксиомы $\Box p \supset p$ или эквивалентной ей формулы $p \supset \Diamond p$. Пусть $p \dot{\in} \alpha_i$; тогда эта переменная может иметь одно из двух метаистолкований N, C. В первом случае $|\Box p|_{W_1} = t$, т.к. $\dot{\forall} \alpha(\alpha \dot{\in} W_1 \dot{\Rightarrow} |p|_\alpha = t)$ и формула $\Box p \supset p$ истинна в кластере. Во втором случае $|\Diamond p|_{W_1} = t$, т.к. $\dot{\exists} \alpha(\alpha \dot{\in} W_1 \dot{\wedge} |p|_\alpha = t)$ и формула $p \supset \Diamond p$ истинна в соответствующем кластере.

При построении кластеров неэлементарных степеней в **T** любая предшествующая оценка переменной в терминах $\{N, I, C\}$ может повторно оцениваться как необходимая или случайная: $Np_i \dot{\Rightarrow} NNp_i \dot{\veebar} CNp_i$; $Ip_i \dot{\Rightarrow} NIp_i \dot{\veebar} CIp_i$; $Cp_i \dot{\Rightarrow} NCp_i \dot{\veebar} CCp_i$.

Например, оценка $\Gamma_2 = CNp, CNq$, возможная относительно

$\alpha_i = \{p, q\}$, «разворачивается» в строгую дизъюнкцию

1. $Np \dot{\wedge} Nq \dot{\veebar}$ 2. $Np \dot{\wedge} Cq \dot{\veebar}$ 3. $Cp \dot{\wedge} Nq \dot{\veebar}$ 4. $Cp \dot{\wedge} Cq$, которая определяет построение следующего кластера W_2:

$\{$1. $\{\{p, q\}\}$, 2. $\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}$, 3. $\{\{p, q\}\{\neg p, q\}\}$,

4. $\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}\}$.

Поскольку, далее, $CCN = CN \dot{\veebar} NN \dot{\veebar} NC$, истолкование

$\Gamma_3 = CCNp, CCNq$ «разворачивается» в строгую дизъюнкцию

1. $CNp \dot{\wedge} CNq \dot{\veebar}$ 2. $CNp \dot{\wedge} NNq \dot{\veebar}$ 3. $CNp \dot{\wedge} NCq \dot{\veebar}$ 4. $NNp \dot{\wedge} CNq \dot{\veebar}$
$\dot{\veebar}$ 5. $NCp \dot{\wedge} CNq \dot{\veebar}$ 6. $NNp \dot{\wedge} NNq \dot{\veebar}$ 7. $NNp \dot{\wedge} NCq \dot{\veebar}$
$\dot{\veebar}$ 8. $NCp \dot{\wedge} NNq \dot{\veebar}$ 9. $NCp \dot{\wedge} NCq$, которая задает построение следующего кластера W_2:

$\{1.\ \{\{\{p,q\}\},\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\},\{\{p,q\}\{\neg p,q\}\},$
$\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\}\};$
$2.\ \{\{\{\{p,q\}\},\{\{p,q\}\{\neg p,q\}\}\};$
$3.\ \{\{p,q\}\{p,\neg q\}\},\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\}\};$
$4.\ \{\{\{p,q\}\},\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\}\};$
$5.\ \{\{\{p,q\}\{\neg p,q\}\},\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\}\};$
$6.\ \{\{\{p,q\}\}\};$
$7.\ \{\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\}\};$
$8.\ \{\{\{p,q\}\{\neg p,q\}\}\};$
$9.\ \{\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\}\}.$

Еще одним кластером $\langle \Gamma_2; \alpha_i; W_2' \rangle$, допустимым в системе **T** относительно $\alpha_i = \{p,q\}$, будет следующая конструкция:

$\langle \{NCp, NCq\}; \{p,q\}; \{\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\}\} \rangle.$

Оценка $CNCp, CNCq$ «разворачивается» в строгую дизъюнкцию 1.$NCp \dot{\wedge} NCq \dot{\veebar}$ 2.$NCp \dot{\wedge} CCq \dot{\veebar}$ 3.$CCp \dot{\wedge} NCq \dot{\veebar}$ 4.$CCp \dot{\wedge} CCq$, которая определяет построение следующего кластера:

$\{1.\ \{\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\}\};$
$2.\ \{\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\},\{\{p,q\}\{\neg p,q\}\},\{\{p,\neg q\}\{\neg p,\neg q\}\}\};$
$3.\ \{\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\},\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\},\{\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\}\};$
$4.\ \{\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\},\{\{p,q\}\{\neg p,q\}\},\{\{p,\neg q\}\{\neg p,\neg q\}\},$
$\{\{p,q\}\{p,\neg q\}\},\{\{\neg p,q\}\{\neg p,\neg q\}\},$
$\{\{p,q\}\},\{\{p,\neg q\}\},\{\{\neg p,q\}\},\{\{\neg p,\neg q\}\}\}.$

Поскольку каждая переменная, входящая в некоторое α_i, трактуется как имеющая свое значение по необходимости или случайно, а каждое из исходных истолкований переменной в терминах $\{N, I, C\}$ также оценивается как необходимое или случайное, число кластеров степени $d+1$ по произвольному кластеру степени d определяется в **T** элементарной формулой 2^n.

Описанная семантика полна и непротиворечива относительно исчисления **T**.

6. Кластерная семантика для систем K, D

Будем иметь в виду следующие формулировки систем **K**, **D**.

Система **K** строится путем добавления к аксиомам и правилам вывода К.И.В. единственной модальной аксиомы $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ и правила Гёделя. Система **D** есть результат добавления к системе **K** аксиомы $\Box A \supset \Diamond A$.

В силу своей технической простоты, система **K** обычно рассматривается в качестве базовой нормальной модальной логики. В реляционной семантике для **K** на отношение достижимости не налагается никаких ограничений, в частности, допускается существование так называемых тупиковых миров — миров, из которых не достижимы никакие элементы модельной структуры, в том числе и сами эти миры. Исходя из условий истинности/ложности формул с модальными операторами, для таких миров принимается следующее соглашение: все формулы вида $\Box A$ истинны, а все формулы вида $\Diamond A$ ложны в тупиковых мирах. В пользу приемлемости подобного соглашения обычно предлагаются следующие аргументы.

Формула $\Box A$ истинна в некотором исходном мире, если только формула A истинна в каждом достижимом из него мире. Поскольку формула A не может быть опровергнута ни в одном мире, достижимом из тупикового, так как таких миров просто не существует, все формулы вида $\Box A$ в тупиковом мире можно считать тривиальным образом истинными. Формула $\Diamond A$ истинна в исходном мире, если только существует хотя бы один достижимый из него мир, в котором формула A истинна. Поскольку миров, достижимых из тупикового, не существует, все формулы вида $\Diamond A$ оказываются в тупиковом мире тривиальным образом ложными.

Очевидно, что с чисто технической точки зрения подобное соглашение обеспечивает универсальную общезначимость модальной аксиомы $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ и корректность применения правила Гёделя во всех возможных мирах. При этом, однако, в тупиковых мирах формулы вида $\Box(A \wedge \neg A)$ оказываются истинными, а формулы вида $\Diamond(A \vee \neg A)$ — соответственно, ложными. Последнее, в свою очередь, означает отсутствие в **K** любых теорем вида $\Diamond A$. Все это делает крайне проблематичной содержательную интерпретацию операторов $\Box, \Diamond$ в данной системе.

Как и ранее, в кластерной семантике для **K** различают три типа оценок:

1) двухзначные истинностно-функциональные оценки формул без модальных операторов;

2) двухзначные не-истинностно-функциональные оценки формул с модальными операторами;

3) трехзначные не-истинностно-функциональные оценки пропозициональных переменных в терминах $\{N, I, C\}$.

При построении кластеров первой степени в системах $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ переменная, входящая в исходное о.с., может получать любую оценку из множества $\{N, I, C\}$:

$p_i \dot{\in} \alpha_i \dot{\Rightarrow} Np_i \dot{\veebar} Cp_i \dot{\veebar} Ip_i$; $\neg p_i \dot{\in} \alpha_i \dot{\Rightarrow} Np_i \dot{\veebar} Cp_i \dot{\veebar} Ip_i$.

Соответственно, результирующее множество W_1 может и не содержать исходного о.с., что отражает нерефлексивность отношения достижимости в $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$. Кроме того, в системе $\mathbf{K}$ интерпретации допустимых значений переменной в терминах $\{N, I, C\}$ могут вообще отсутствовать. Это ведет к построению пустого множества W_1, представляющего собой простейший пример тупикового мира. В общем случае тупиковый мир есть пустое множество $W_{d \geq 1}$, являющееся результатом обрыва истолкования допустимых значений переменных формулы в терминах $\{N, I, C\}$ на некотором шаге $d \geq 1$.

Так, для формулы с единственной переменной p относительно каждого ее о.с. $\alpha_1 = \{p\}, \alpha_2 = \{\neg p\}$ возможными будут $3^n + 1$ кластера первой степени:

1. $\langle\{Np\}; \{p\}; \{\{p\}\}\rangle$;
2. $\langle\{Ip\}; \{p\}; \{\{\neg p\}\}\rangle$;
3. $\langle\{Cp\}; \{p\}; \{\{p\}, \{\neg p\}\}\rangle$;
4. $\langle\{\emptyset\}; \{p\}; \{\{\emptyset\}\}\rangle$;

1′. $\langle\{Np\}; \{\neg p\}; \{\{p\}\}\rangle$;
2′. $\langle\{Ip\}; \{\neg p\}; \{\{\neg p\}\}\rangle$;
3′. $\langle\{Cp\}; \{\neg p\}; \{\{p\}, \{\neg p\}\}\rangle$;
4′. $\langle\{\emptyset\}; \{\neg p\}; \{\{\emptyset\}\}\rangle$.

Очевидно, что формула $\Box p \supset p$ опровержима в кластере $1'$, формула $p \supset \Diamond p$ опровержима в кластере 2, а формула $\Box p \supset \Diamond p$ опровержима в кластерах 4, $4'$ — аналогах тупиковых миров. Из этого немедленно следует, что, в случае отказа от построения кластеров с пустым W_1, формула $\Box p \supset \Diamond p$ оказывается общезначимой в семантике данного типа — она истинна в каждом из непустых приведенных кластеров. Таким образом, аксиома $\Box A \supset \Diamond A$, предполагающая условие связности отношения достижимости, является формальным выражением запрета на существование тупиковых миров в семантике модальной системы.

Очевидно, что относительно каждого о.с. для формулы с произвольным числом переменных в системе $\mathbf{K}$ будут возможны $3^n + 1$, а в системе $\mathbf{D}$ — 3^n кластеров первой степени. Все ранее приведенные кластеры системы $\mathbf{S5}$ для формулы с двумя переменными будут в $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ возможны относительно каждого о.с. $\alpha_1 = \{p, q\}, \alpha_2 = \{p, \neg q\}, \alpha_3 = \{\neg p, q\}, \alpha_4 = \{\neg p, \neg q\}$. В системе $\mathbf{K}$ к каждому из этих наборов добавляется пустой кластер.

При построении кластеров неэлементарных степеней в системах **K**, **D** допустимы любые переинтерпретации исходных оценок переменных в терминах $\{N, I, C\}$: $Np_i \dot{\Rightarrow} NNp_i \dot{\veebar} CNp_i \dot{\veebar} INp_i$; $Ip_i \dot{\Rightarrow} NIp_i \dot{\veebar} CIp_i \dot{\veebar} IIp_i$; $Cp_i \dot{\Rightarrow} NCp_i \dot{\veebar} CCp_i \dot{\veebar} ICp_i$.

Каждая из интерпретаций INp_i, IIp_i, ICp_i порождает по *два* различных кластера второй степени, поскольку последовательно «заменяет» исходную оценку p_i в терминах $\{N, I, C\}$ одним из двух других значений из этого множества и оценивает каждую такую замену как необходимую: $INp_i = NIp_i \dot{\veebar} NCp_i$; $IIp_i = NNp_i \dot{\veebar} NCp_i$; $ICp_i = NNp_i \dot{\veebar} NIp_i$.

Соответственно, некоторая интерпретация третьей степени с «внешней» оценкой I порождает три кластера: $INCp_i \dot{\Rightarrow} NICp_i \dot{\veebar} NCCp_i \dot{\Rightarrow} NNNp_i \dot{\veebar} NNIp_i \dot{\veebar} NCCp_i$ и т.д.

Данный факт отражает нерефлексивность отношения достижимости в **K**, **D**. При этом, как уже отмечалось, в кластерной семантике для **K** возможны «обрывы» истолкований допустимых значений переменных в терминах $\{N, I, C\}$, что ведет к образованию пустых кластеров — аналогов тупиковых миров.

В общем случае число кластеров степени $d (d \geq 1)$ по отдельному кластеру предыдущего уровня будет в семантике для **K** определяться выражением:

$$C_n^0 \times 2^n \times d^0 + C_n^1 \times 2^{n-1} \times d^1 + C_n^2 \times 2^{n-2} \times d^2 + \ldots + C_n^i \times 2^{n-i} \times d^i + \ldots + C_n^n \times 2^0 \times d^n + 1.$$

Слагаемое $C_n^i \times 2^{n-i} \times d^i$ обозначает число кластеров степени d, порождаемых наборами интерпретаций, содержащих ровно i $(0 \leq i \leq n)$ «внешних» оценок I.

В семантике для **D** в этой формуле просто отбрасывается единица, обозначающая тупиковый мир.

Описанная семантика полна и непротиворечива относительно исчислений **K**, **D**.

Заключение

Как отмечалось в начале настоящей статьи, предлагаемая стратегия построения семантик для основных нормальных модальных систем позволяет естественным образом истолковать базовые понятия семантики возможных миров в сугубо традиционных для логики терминах (логической) истинности/ложности/недетерминированности высказываний системы, их совместимости/несовместимости по истинности и т.д. При данном подходе модельная структура оказывается кластером — конечным множеством о.с. или конечной системой таких множеств, возникающей в результате истолкования допустимых значений переменных формулы в терминах $\{N, I, C\}$. Подобные истолкования выполняют функцию отношения достижимости между мирами, объединяя миры в классы эквивалентности $W_{d \geq 1}$. Наконец, возможный мир оказывается классическим о.с., которое рассматривается как элемент соответствующего W_1. Еще одним существенным преимуществом предлагаемых семантик, помимо содержательной оправданности используемых понятий, является конечный, «конструктивный» характер рассматриваемых процедур, обеспечивающий возможность исчерпывающего пересчета всех кластеров для некоторой формулы.

Согласно предложенному Ю.В. Ивлевым подходу, переход от классической логики, моделирующей отношения по формам между ассерторическими высказываниями, к неклассической может осуществляться одним из трех основных способов: 1) моделируются отношения между высказываниями иных типов (например, между модальными); 2) наряду с ассерторическими в систему включаются высказывания иных типов (модальные); 3) в системе используются нестандартные модели логических функций. Разумеется, возможны различные комбинации указанных способов построения неклассических логик [Ивлев, 2018, с. 22].

Нормальные модальные логики, относящиеся ко второму из указанных типов систем, являются своего рода «гибридными»: наряду с «чисто классической», истинностно-функциональной частью, они содержат собственно модальную, не-истинностно-функциональную часть. Инструментом создания модального уровня системы оказывается истолкование пропозициональных переменных в терминах $\{N, I, C\}$, основанное на следующих принципах:

1. Принцип трехзначности: каждое элементарное высказывание получает дополнительное истолкование степени $d \geq 1$ в терминах $\{N, I, C\}$.

2. Принцип непротиворечия: при каждом подобном истолковании степени $d \geq 1$ элементарное высказывание не может иметь более одного значения из множества $\{N, I, C\}$.

3. Принцип исключенного четвертого: при каждом истолковании степени $d \geq 1$ элементарное высказывание обязательно принимает какое-то значение из множества $\{N, I, C\}$.

4. Принцип тождества: в каждом кластере степени $d \geq 1$ одно и то же элементарное высказывание имеет одно и то же значение из множества $\{N, I, C\}$.

Поскольку в системе **K** не выполняется принцип исключенного четвертого (функция интерпретации переменных в терминах $\{N, I, C\}$ оказывается не всюду определенной), модальные операторы $\Box, \Diamond$ данной системы нельзя рассматривать как определения понятий необходимости и возможности в сколько-нибудь действительном смысле.

Нетрудно заметить, что объединение принципов построения кластерных семантик для **Br** и **S4** означает, что каждая исходная оценка некоторой переменной в терминах $\{N, I, C\}$ оказывается неизменной, т.е. может повторно интерпретироваться только как имеющая оценку N. В сочетании со специальным условием для кластерной семантики системы **T** (для любого $\langle \Gamma_1; \alpha_i; W_1' \rangle$ верно, что $\alpha_i \in W_1$) это делает излишним понятие исходного о.с. (выделенного мира). В результате объединение принципов построения кластерной семантики для систем **T**, **Br**, **S4** оказывается естественной основой построения предложенной Ю.В. Ивлевым теории логических модальностей, адекватной формализацией которой является система **S5**.

Литература

Архиереев, 2022 – *Архиереев Н.Л.* Кластерные семантики для некоторых модальных и интуиционистских систем // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2022. № 70. С. 20–38.

Войшвилло, 1983 – *Войшвилло Е.К.* Содержательный анализ модальностей S4 и S5 // Философские науки. 1983. № 3. С. 76–80.

Гейтинг, 2010 – *Гейтинг А.* Интуиционизм. М.: Изд-во Книжный дом «Либроком», 2010. 160 с.

Ивлев, 1991 – *Ивлев Ю.В.* Модальная логика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 221 с.

Ивлев, 2018 – *Ивлев Ю.В.* Квазиматричная (квазифункциональная) логика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2018. 126 с.

Карнап, 1959 – *Карнап Р.* Значение и необходимость. М.: Изд-во иност. лит-ры, 1959. 383 с.

Сидоренко, 2002 – *Сидоренко Е.А.* Логика, парадоксы, возможные миры. М.: Едиториал УРСС, 2002. 312 с.

Шрамко, 2002 – *Шрамко Я.В.* Обобщенные истинностные значения: решетки и мультирешетки // Логические исследования. 2002. Вып. 9. С. 264–291.

Hughes, Cresswell, 1996 – *Hughes G.E., Cresswell M.J.* A New Introduction to Modal Logic. London; New York: Routledge, 1996. 421 p.

Priest, 2008 – *Priest G.* An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is. New York: Cambridge University Press, 2008. 613 p.

Nickolay L. Arkhiereev

Cluster semantics for modal logic

Nickolay L. Arkhiereev
Bauman Moscow State Technical University,
5/1 Baumanskaya 2-ya St., Moscow, 105005, Russian Federation.
E-mail: `arkh-nikolaj@yandex.ru`

Abstract: One of the main branches of Yu.V. Ivlev's scientific research was construction of natural semantics for modal logics. The approach to the analysis of alethic modal notions proposed by Yu.V. Ivlev was based on the idea of differentiation of factual and logical modalities and construction of logical systems, characterizing their features. The pivotal instrument of factual modalities modelling is a notion of so-called quasi-function (quasi-matrix), which is non-trivial generalization of the well-known notion of function. Up to this time quasi-functional logics have been widely acknowledged in the world's logical literature. Due to the nature of the represented modal notions the systems of quasi-functional logic are mainly non-normal. With a view to constructing natural theory of logical modalities Yu.V. Ivlev presented an idea of additional interpretation of propositional variables occurring in formulas with modal operators as denoting logically true, logically false or logically indeterminate propositions. The function of such interpretations in the theory of logical modalities is the same as the function of quasi-matrices in systems with factual modalities. The interpretations of this kind lead to the construction of finite sets of state-descriptions (or finite systems of such sets), substituting model structures of traditional semantics of possible worlds. The well-known Lewis' system **S5** proved to be a natural formalization of the proposed theory of logical modalities. As it has turned out recently by means of certain modifications of the initial strategy the semantics of the same kind can be constructed for the other normal modal systems **S4**, **Br**, **T**, **D**, **K** as well as for the intuitionistic system **Int**. In contrast with quasi-functional logics this branch of Yu.V. Ivlev's research is known to a much lesser extent. The proposed article aims to outline general strategy of semantics construction for the above-mentioned logical systems.

Keywords: modal logic, model structure, possible world, accessibility relation, cluster, logical necessity, impossibility, indeterminacy

For citation: Arkhiereev N.L. "Klasternaya semantika dlya modal'noi logiki" [Cluster semantics for modal logic], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2026, Vol. 32, No. 1, pp. 23–51. DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-23-51. (In Russian)

References

Arkhiereev, 2022 – Arkhiereev, N.L. *Klasternye semantiki dlya nekotorykh modalnykh i intuitzionistskikh system* [Cluster semantics for some modal and intuitionistic systems, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta* [Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science], 2022, No. 70, pp. 20–38. (In Russian)

Voishvillo, 1983 – Voishvillo, E.K. *Soderzhatelny analiz modal'nostei S4 i S5* [Meaningful analysis of modalities S4 and S5], *Filosofskie nauki* [Philosophical sciences], 1983, No. 3, pp. 76–80. (In Russian)

Heyting, 1983 – Heyting, A. *Intuitsionizm* [Intuitionism]. Moscow: Knizhni dom "Librokom" Publ., 2010. 160 pp. (In Russian)

Ivlev, 1991 – Ivlev, Yu.V. *Modal'naya logica* [Modal logic]. Moscow: Moscow St. Univ. Publ., 1991. 221 pp. (In Russian)

Ivlev, 2018 – Ivlev, Yu.V. *Kvazimatrichnaya (kvazifunktsional'naya) logika* [Quasimatrix (quasifunctional) logic]. Moscow: Moscow St. Univ. Publ., 2018. 126 pp. (In Russian)

Karnap, 1959 – Carnap, R. *Znatchenie i neobkhodimost* [Meaning and necessity]. Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1959. 383 pp. (In Russian)

Sidorenko, 2002 – Sidorenko, E.A. *Logica, paradoksi, vozmozhnie miri* [Logic, paradoxes, possible worlds]. Moscow: Editorial URSS, 2002. 312 pp. (In Russian)

Shramko, 2002 – Shramko, Ya.V. *Obobshennyie istinnostnyie znatchenya: reshetki i mul'tireshetki* [Generelized truth-values: lattices and multilattices], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2002, No. 9, pp. 264–291.

Hughes, Cresswell, 1996 – Hughes, G.E., Cresswell, M.J. *A New Introduction to Modal Logic*. London; New York: Routledge, 1996. 421 pp.

Priest, 2008 – Priest, G. *An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is*. New York: Cambridge University Press, 2008. 613 pp.

Логические исследования
2026. Т. 32. № 1. С. 52–79
УДК 164.3+510.643

Logical Investigations
2026, Vol. 32, No. 1, pp. 52–79
DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-52-79

Alan R. Antezana, Marcelo E. Coniglio

Actuality without possible-worlds: Ivlev-like versions of Crossley and Humberstone's logics of actuality

Alan R. Antezana
Institute of Philosophy and the Humanities (IFCH),
Centre for Logic, Epistemology and the History of Science (CLE).
State University of Campinas (UNICAMP),
Sérgio Buarque de Holanda 251, Campinas, SP, 13083-859, Brazil.
E-mail: a.r.antezana@gmail.com

Marcelo E. Coniglio
Institute of Philosophy and the Humanities (IFCH),
Centre for Logic, Epistemology and the History of Science (CLE).
State University of Campinas (UNICAMP),
Sérgio Buarque de Holanda 251, Campinas, SP, 13083-859, Brazil.
E-mail: coniglio@unicamp.br

Abstract: The notion of actuality is historically dependent on the notion of possible world. This paper contains a novel approach to logics of actuality, viz. we will develop an account of actuality that does not depend on possible worlds. We do so by utilizing the non-deterministic generalization of logic matrices known as non-deterministic matrices (Nmatrices, for short). By following the pioneering ideas of Ivlev, we propose a non-normal version of the well-known modal system of actuality **S5A**, introduced in 1977 by Crossley and Humberstone. Our system, called $T45Am$, is presented by means of a 6-valued Nmatrix. The 6 elements (truth-values) of this Nmatrix, as well as its multifunctions for the connectives, admit an intuitive interpretation in terms of swap structures. Soundness and completeness of a Hilbert calculus for $T45Am$ is obtained w.r.t. its Nmatrix. One interesting feature of our system is that the actuality operator is hyperintensional, allowing us to analyze questions about actuality under a new formal perspective.

Keywords: Logics of actuality, actuality operators, Ivlev-like modal logics, non-normal modal logics, non-deterministic semantics, swap structures, hyperintensionality, metaphysics

For citation: Antezana A.R., Coniglio M.E. "Actuality without possible-worlds: Ivlev-like versions of Crossley and Humberstone's logics of actuality", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2026, Vol. 32, No. 1, pp. 52–79. DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-52-79.

1. Introducion

This paper aims to contribute with a novel approach to actuality logic[1]. These logics were originally developed between the 1960s and 1970s. Mostly, they focus on the logical treatment of the adverb "actually", in contrast to the philosophical concepts of actuality. In this introduction, we elaborate on both uses.

Furthermore, we aim in this paper to establish (i) an alternative semantics to possible world semantics for the modal logic of actuality. We do so by (ii) inducing Ivlev-like logics from swap structures and truth tables and providing characterization results to show their adequacy.

1.1. Metaphysics of Actuality

We start with some of the most prominent philosophical stances of actuality and their relation to actuality logics. This section tries to depict some simplified positions about how reality (which is here considered an undefined property) is represented through possible world semantics and modal metaphysics. The most well-known stances of the philosophical debate may be found in the works of David Lewis [Lewis, 1970], Alvin Plantinga [Plantinga, 1974], Robert Adams [Adams, 1974], and others[2].

The philosophical question about what distinguishes the actual world from the non-actual worlds, and what we may infer from the statement of actuality of a sentence, occurs as a logical and philosophical consequence of the development of possible world semantics. The result is a philosophical literature that rescues Leibnizian-inspired concepts to discuss the meaning of actuality within this framework.

From David Lewis' conceptualization in his papers "Anselm on Actuality" [Lewis, 1970] and "Possible Worlds" [Loux, 1979, pp. 182–190], we start with the metaphysical stance of modal realism, which implies a view called *indexicalism* in relation to actuality. Modal realism argues for the reality of possibly actual worlds, and, therefore, worlds that are not actual in the sense of Robert Adams [Adams, 1974] (i.e. they are not absolutely and uniquely real). In Lewis' conception, these nonactual worlds are actual in an indexical sense: they are actual (therefore, *real*) for those who inhabit them.

David Kaplan supports his own version of a logic of actuality in a temporal interpretation of *actual* (A) in a context c. Given that the propositional variables p stand for utterances, and not for sentences nor propositions, $\mathsf{A}p$ uttered

[1] By actuality logic we mean what is commonly called the logic of "actually" [Crossley, Humberstone, 1977].

[2] For more references, see Michael J. Loux's introduction in "The Possible and the Actual" [Loux, 1979].

in context c is true if, and only if, p is true in the actual instant of the moment of c. One consequence of this is that $\mathsf{A}p \equiv p$ is a valid formula, although this logic is hyperintensional (non-self-extensional), i.e. the substitution of equivalents does not hold irrestrictedly.

Robert Adams, in "Theories of Actuality" [Adams, 1974], supports the view of a possible world as a maximal collection of descriptions of states of affairs, or *world story*. The distinctive aspect of his approach is the stance of disbelief in the reality of non-actual possible worlds: a standpoint which we call *actualism* with respect to possible worlds.

Alvin Plantinga, in "Actualism and Possible Worlds" [Plantinga, 1976], also supports his own version of actualism while making a critique to what he calls the *Canonical Conception* of the actual world. There, he describes that, according to this conception, the actual world @[3] is a state-of-affairs that includes every instantiated (or actual) state-of-affairs (including itself[4]), and does not include anything else.

For the purposes of the creation of a propositional modal logic of actuality, it is sufficient for us to divide those who consider actuality as something necessary or contingent. Traditionally, an indexicalist would consider actuality a contingent property, while an actualist would not.

1.2. Logics of Actuality

Given the seemingly parallel developments of modal logic and contemporary modal metaphysics, several discrepancies are evident not only between the varieties of philosophical readings, but also in several logical formalizations in the 1970s. A discrepancy that is immediately evident is whether an actual proposition should be necessarily actual or contingently actual.

Nevertheless, the first modal systems with actuality operators (that we know of) were found in Crossley & Humberstone's "The Logic of 'Actually'" [Crossley, Humberstone, 1977] and David Kaplan's "On the Logic of Demonstratives" [Kaplan, 1979]. Further developments on this topic may be found in [Hazen et al., 2013].

Given that, in the literature on modal logics of actuality, Crossley & Humberstone's paper "The Logic of 'Actually'" is a landmark. They extend a specific normal modal logic, **S5**, introducing a system called **S5A**, with the intention of reproducing the logical value of the adverb *actually* by means of a new modal operator A.

[3] In the paper, the actual world is designated by the greek letter α.

[4] This is one of the main reasons why a possible world to modal metaphysics is not conceived as a set.

Drawing upon Crossley & Humberstone's **S5A**, Hazen, Rin and Wehmeier develop a method of extending propositional normal modal logics as to include an actuality operator [Hazen et al., 2013]. These extensions are quasi-normal modal logics, according to the terminology in [Segerberg, 1971], and they argue for the innocuous character of the actuality operator in a propositional modal language [Hazen et al., 2013]. The problem consists in the distinction of truth and validity in the works of Hazen, Rin and Wehmeier, whose systems identify validity with being true at an actual world [Hanson, 2006].

1.3. Structure

The systems developed in this paper address the alternative of resolving the question of the meaning of actuality by offering systematic semantics without reference to possible worlds. Therefore, we not only distinguish truth from validity but offer a solution to the formal property of equivalence between a formula and its actualization with a hyperintensional operator of actuality. A desired result, syntactically described, is a set of ground rules for the inferential behavior of an actuality operator which does not make it innocuous. A novel semantics is given through the technique of swap structures.

Section 2 recalls some preliminary notions on Tarskian logics, matrices and, finally, non-deterministic matrices, while Section 3 introduces Ivlev-like modal logics. Section 4 introduces Crossley & Humberstone's actuality logic **S5A**, introducing its semantics and Hilbert-style axiomatic system. Section 5 introduces an Ivlev-like version of the previous logic called $T45Am$, along with an axiomatic system and its representation through swap structures. Truth tables and characterization results are provided through swap structures that immediately induce the truth tables. Section 6 introduces a system weaker than $T45Am$, associated to the weaker Crossley & Humberstone's system **S5AR**, while also showing characterizability results and specific formal properties. A more detailed analysis of logics of actuality, as well as other formal proposals using Ivlev-like systems, can be found in the PhD Thesis [Antezana, 2025].

2. Preliminary notions

Along this section, some basic technical notions will be recalled.

A *propositional signature* is a denumerable family $\Theta = (\Theta_n)_{n\geq 0}$ of pairwise disjoint sets. The elements of each set Θ_n are called *n-ary connectives.* When $|\Theta| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\geq 0} \Theta_n$ is finite then, when there is no risk of confusion about the arity of the connectives, Θ will be identified with $|\Theta|$.

An *algebra over* Θ is a pair $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{O}\rangle$ such that A is a non-empty set and, if $\# \in \Theta_n$, then $\mathcal{O}(\#)$ is a function from A^n to A.

The (absolutely) free algebra over Θ generated by a denumerable set $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \ldots\}$ of propositional variables is called *the algebra of formulas over* Θ, and will be denoted by $For(\Theta)$ in the sequel.

A *substitution* over Θ is a function $\sigma : \mathcal{P} \to For(\Theta)$. Since $For(\Theta)$ is absolutely free, there exists a unique homomorphism $\hat{\sigma} : For(\Theta) \to For(\Theta)$ extending a substitution σ.

A logic $\mathbf{L} = \langle For, \vdash_{\mathbf{L}} \rangle$ with set of formulas For and consequence relation $\vdash_{\mathbf{L}}$ is said to be *Tarskian* if it satisfies the following properties: (1) if $\alpha \in \Gamma$ then $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$; (2) if $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ and $\Gamma \subseteq \Delta$ then $\Delta \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$; and (3) if $\Delta \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ and $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \beta$ for every $\beta \in \Delta$ then $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$. A Tarskian logic $\mathbf{L}$ is said to be *finitary* if it satisfies, in addition, the following: (4) if $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ then $\Gamma_0 \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$, for some finite subset Γ_0 of Γ. Finally, $\mathbf{L}$ is *structural* if $For = For(\Theta)$ for some signature Θ, and $\Gamma \vdash \varphi$ implies that $\hat{\sigma}(\Gamma) \vdash \hat{\sigma}(\varphi)$ for every substitution σ over Θ.

A *logical matrix* over Θ is a triple $\mathcal{M} = \langle A, D, \mathcal{O} \rangle$ such that $\langle A, \mathcal{O} \rangle$ is an algebra over Θ and $\emptyset \neq D \subseteq A$ is the set of *designated values*. It defines a Tarskian and structural logic by means of the following relation: $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi$ if, for every valuation v, if the formulas in Γ have a value in D, then φ necessarily have a value in D. The valuations are functions $v : For(\Theta) \to A$ such that $v(\#(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = \mathcal{O}(\#)(v(\varphi_1), \ldots, v(\varphi_n))$, where $\#$ is an n-ary connective.

Finite logical matrices offer decision procedures for the logics they characterize. But not all logics may be characterized by a finitely valued logical matrix: for example, neither intuitionistic logic, nor the usual normal modal logic studied in the literature (such as **K**, **KT**, **S4** and **S5**) can be characterized by a finite valued logical matrix. In addition, some paraconsistent logics known as *Logics of Formal Inconsistency* (*LFI*s) are also not characterized by a finite matrix.

A. Avron and I. Lev introduced in [Avron, Lev, 2001] the notion of non-deterministic matrix, or Nmatrix for short. The Nmatrices are a generalization of the usual concept of logical matrix. The main characteristic of the Nmatrices is that the connectives are interpreted through non-deterministic functions (or multifunctions). In symbols:

Definition 1. A non-deterministic matrix (or Nmatrix) over Θ is a triple $\mathcal{M} = \langle A, D, \mathcal{O} \rangle$ such that $D \subseteq A$ are non-empty sets, and $\mathcal{O}$ is a function that assigns, to each n-ary connective $\# \in \Theta$, a function $\mathcal{O}(\#) : A^n \to \wp(A)_+$ (here, $\wp(A)_+$ is the set of non-empty subsets of A).

A pair $\mathcal{M} = \langle A, \mathcal{O} \rangle$ as in Definition 1 is called a *non-deterministic algebra*, or a *hyperalgebra*.

Definition 2. Let $\mathcal{M} = \langle A, D, \mathcal{O} \rangle$ be an Nmatrix over Θ. A valuation over $\mathcal{M}$ is a function $v : For(\Theta) \to A$ such that $v(\#(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) \in \mathcal{O}(\#)(v(\varphi_1), \ldots, v(\varphi_n))$.

This means that a valuation in an Nmatrix attributes to each complex formula a truth value that can be chosen *non-deterministically* from a certain non-empty set of options. An Nmatrix $\mathcal{M}$ defines a consequence relation in a same way as logical matrices, by using the corresponding notion of valuations. As in the case of logical matrices, the induced logic is Tarskian and structural. It is also finitary, provided that its domain A is finite.

3. Ivlev-like modal logics

Although Avron and his collaborators had formalized (and systematically applied) the Nmatrices for the first time, these semantic structures already had made an appearance in the literature as a proposal from some authors to specific cases. The most notorious (and most relevant for our research) are the modal logics studied by Yu. Ivlev from 1973 onward.

With the aim of considering systems of modal logic in which the necessitation rule is not valid, viz., non-normal modal logics, Ivlev proposed in the 1970s several modal systems that were semantically characterized by finite Nmatrices (see, for instance, [Ivlev, 1973; Ivlev, 1986; Ivlev, 1988; Ivlev, 2013; Ivlev, 2024]). Thus, Ivlev's proposal anticipated Avron and Lev's ideas in several decades. Another feature of Ivlev's logics is that the modalities are hyperintensional, i.e., do not preserve logical equivalences in general. As we shall see in the following, this feature will be useful to our approach to actuality operators.

Ivlev's work was revised and extended in [Coniglio et al., 2015; Omori, Skurt, 2016; Coniglio, Golzio, 2019; Coniglio et al., 2020; Coniglio et al., 2022]. In particular, [Coniglio et al., 2015] introduced Ivlev-like versions of the modal systems **KT**, **T4**, **T45** and **TB**, respectively called Tm, $T4m$, $T45m$ and TBm. Each of these systems was characterized both by a Hilbert calculus and by a 4-valued Nmatrix with domain $A_m = \{T, t, f, F\}$, where $D_m = \{T, t\}$ is the set of designated values. In Ivlev's perspective, these values have the following intuitive interpretation:

- T means 'necessarily true'
- t means 'true but not necessarily true'
- f means 'false but not necessarily false'; and
- F means 'necessarily false (or impossible)'

The logic Tm (introduced by Ivlev under the name Sa^+) is defined as follows:

Definition 3 (Nmatrix for Tm)**.** Consider the signature $\Sigma_m = \{\to, \neg, \Box\}$. The modal logic Tm is given by the Nmatrix $\mathcal{M}_T = \langle A_m, D_m, \mathcal{O}_T\rangle$ over Σ_m such that $A_m = \{T, t, f, F\}$, $D_m = \{T, t\}$, and the multioperators $\mathcal{O}(\#) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\#}$ are defined as follows:

$\hat{\to}$	T	t	f	F
T	$\{T\}$	$\{t\}$	$\{f\}$	$\{F\}$
t	$\{T\}$	$\{T,t\}$	$\{f\}$	$\{f\}$
f	$\{T\}$	$\{T,t\}$	$\{T,t\}$	$\{t\}$
F	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$

φ	$\hat{\neg}\varphi$	$\hat{\Box}\varphi$
T	$\{F\}$	$\{T,t\}$
t	$\{f\}$	$\{f,F\}$
f	$\{t\}$	$\{f,F\}$
F	$\{T\}$	$\{f,F\}$

A conjunction and a disjunction can be defined in Tm as it is done in classical logic, namely: $\varphi \wedge \psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\varphi \to \neg\psi)$ and $\varphi \vee \psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\varphi \to \psi$. The corresponding tables are displayed below.

$\hat{\wedge}$	T	t	f	F
T	$\{T\}$	$\{t\}$	$\{f\}$	$\{F\}$
t	$\{t\}$	$\{t\}$	$\{F,f\}$	$\{F\}$
f	$\{f\}$	$\{F,f\}$	$\{F,f\}$	$\{F\}$
F	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$

$\hat{\vee}$	T	t	f	F
T	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$
t	$\{T\}$	$\{T,t\}$	$\{T,t\}$	$\{t\}$
f	$\{T\}$	$\{T,t\}$	$\{f\}$	$\{f\}$
F	$\{T\}$	$\{t\}$	$\{f\}$	$\{F\}$

As it was done in [Coniglio et al., 2015], the modal (multi)operator of Tm can be strengthened so as to satisfy the following standard axioms:

(4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

(5) $\neg\Box\neg\Box\varphi \to \Box\varphi$

The resulting logic, called $T45m$, is characterized by the non-deterministic truth-tables of Tm, but where $\Box$ is now interpreted deterministically as follows:

φ	$\Box_1\varphi$
T	$\{T\}$
t	$\{F\}$
f	$\{F\}$
F	$\{F\}$

Let $\mathcal{M}_{45}$ be the Nmatrix for $T45m$ as described above.

Definition 4 (Hilbert calculus for Tm and $T45m$)**.**
(1) The Hilbert calculus for the logic Tm over signature Σ_m is defined as follows:
Axiom schemas:

(CL1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(CL2) $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$

(CL3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$

(K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

(K1) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\neg\psi \to \Box\neg\varphi))$

(K2) $\Box\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\neg\psi)$

(M1) $(\Box\neg\varphi \vee \Box\psi) \to \Box(\varphi \to \psi)$

(T) $\Box\varphi \to \varphi$

(DN1) $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\neg\neg\varphi$

Inference rule:

MP : $$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

(2) The Hilbert calculus for the logic $T45m$ over signature Σ_m is obtained from the one for Tm by adding the following schema axioms:

(4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

(5) $\neg\Box\neg\Box\varphi \to \Box\varphi$

Theorem 1 (Soundness and completeness of Tm and $T45m$ w.r.t. their corresponding Nmatrix)**.** *For* $\mathbf{L} \in \{Tm, T45m\}$*, let us denote by* $\models_{\mathbf{L}}$ *and* $\vdash_{\mathbf{L}}$ *the consequence relation of* $\mathbf{L}$ *w.r.t. its Nmatrix and its Hilbert calculus, respectively. Then:* $\Gamma \models_{\mathbf{L}} \varphi$ *if and only if* $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$*, for every* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq For(\Sigma_m)$*.*

The respective Nmatrix for several Ivlev-like modal systems, including Tm and $T45m$, was presented analytically in terms of swap structures in [Coniglio, Golzio, 2019]. Swap structures, introduced in [Carnielli, Coniglio, 2016, Ch. 6], are a way to define Nmatrices in an analytical way. For a comprehensive description of swap structures, see [Coniglio, 2025b].

Specifically, in [Coniglio, Golzio, 2019] there were considered Nmatrices (swap structures) whose domains are formed by triples (called *snapshots*). The coordinates z_1, z_2, z_3 of each snapshot z represent, respectively, a 0-1 truth value for the formulas φ, $\Box\varphi$ and $\Box\neg\varphi$. The intended meaning of the snapshots is that they represent *states*, i.e., truth-values composed by a triple of 0-1 values assigned to the respective components of the state assigned to a given formula φ. Since axiom (T): $\Box\varphi \to \varphi$ is valid in Tm, it follows that $z_2 \leq z_1$, and $z_3 \leq {\sim}z_1$, that is, $z_1 \sqcap z_3 = 0$[5]. This leads us to the following set of snapshots:

$$V_m = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2} \ : \ z_2 \leq z_1 \ \text{ and } \ z_1 \sqcap z_3 = 0\} \simeq \{T, t, f, F\}$$

such that $T \simeq (1,1,0)$, $t \simeq (1,0,0)$, $f \simeq (0,0,0)$ and $F \simeq (0,0,1)$. The following analytical definition for the multioperators in the Nmatrix for Tm was given in [Coniglio, Golzio, 2019], and it corresponds to the axioms of Tm[6]:

(i) $z \hat{\to} w = \{u \in V_m \ : \ u_1 = z_1 \Rightarrow w_1, \ u_3 = z_2 \sqcap w_3, \ z_3 \sqcup w_2 \leq u_2 \leq (z_2 \Rightarrow w_2) \sqcap (w_3 \Rightarrow z_3)\}$;

(ii) $\hat{\neg} z = \{({\sim}z_1, z_3, z_2)\}$;

(iii) $\hat{\Box} z = \{u \in V_m \ : \ u_1 = z_2\}$.

Recalling that $\varphi \wedge \psi$ and $\varphi \vee \psi$ as abbreviations for $\neg(\varphi \to \neg\psi)$ and $\neg\varphi \to \psi$, respectively, the following additional descriptions can be obtained:

(iv) $z \hat{\wedge} w = \{u \in V_m \ : \ u_1 = z_1 \sqcap w_1, \ u_2 = z_2 \sqcap w_2, \ z_3 \sqcup w_3 \leq u_3 \leq (z_2 \Rightarrow w_3) \sqcap (w_2 \Rightarrow z_3)\}$;

(v) $z \hat{\vee} w = \{u \in V_m \ : \ u_1 = z_1 \sqcup w_1, \ u_3 = z_3 \sqcap w_3, \ z_2 \sqcup w_2 \leq u_2 \leq (z_3 \Rightarrow w_2) \sqcap (w_3 \Rightarrow z_2)\}$.

The set of designated values is $D_m = \{z \in V_m \ : \ z_1 = 1\} \simeq \{T, t\}$. The reader can easily check that the multioperators above give origin to the Nmatrix of Definition 3.

In moving from Tm to $T45m$, the only change is in the interpretation of $\Box$. This interpretation can be described in terms of swap structures as follows:

(iii)' $\Box_1 z = \{(z_2, z_2, {\sim}z_2)\}$.

Once again, this definition reflects the axioms of $T45m$ (in this case, axioms (T), (4) and (5)). The multioperators of the swap structures for Tm and $T45m$ can be presented in a more compact way as *formal specifications* defined as follows:

[5] Recall that z_1, z_2, z_3 are elements of the 2-element Boolean algebra $\mathbf{2} \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1\}$. From now on, the Boolean operations on $\mathbf{2}$ (infimum, supremum, Boolean complement and Boolean implication) will be denoted, respectively, by $\sqcap$, $\sqcup$, $\sim$, and $\Rightarrow$.

[6] A method for obtaining, under certain assumptions, swap structures from a Hilbert calculus (and vice versa) is explained with full details in [Coniglio, 2025b].

$$z\hat{\to}w = (z_1 \Rightarrow w_1,\ z_3 \sqcup w_2 \leq \_ \leq (z_2 \Rightarrow w_2) \sqcap (w_3 \Rightarrow z_3), z_2 \sqcap w_3)$$

$$z\hat{\wedge}w = (z_1 \sqcap w_1,\ z_2 \sqcap w_2,\ z_3 \sqcup w_3 \leq \_ \leq (z_2 \Rightarrow w_3) \sqcap (w_2 \Rightarrow z_3))$$

$$z\hat{\vee}w = (z_1 \sqcup w_1,\ z_2 \sqcup w_2 \leq \_ \leq (z_3 \Rightarrow w_2) \sqcap (w_3 \Rightarrow z_2), z_3 \sqcap w_3)$$

$$\hat{\neg}z = ({\sim}z_1, z_3, z_2)$$

$$\hat{\Box}z = (z_2, \_, \_)$$

$$\Box_1 z = (z_2, z_2, {\sim}z_2)$$

where the symbol '_' denotes that the respective position of the snapshot can be freely filled out, provided that it satisfies the given restrictions, and that the resulting triple belongs to V_m.

4. Crossley and Humberstone's logic S5A of actuality

In [Crossley, Humberstone, 1977] Crossley and Humberstone propose a (normal) modal system for dealing with an actuality operator, denoted by A. The system they propose, called **S5A**, is defined as follows:

Definition 5 (The logic **S5A**). The logic **S5A** is defined by means of a Hilbert calculus over signature $\Sigma_m^{\mathsf{A}} = \{\to, \neg, \Box, \mathsf{A}\}$ obtained by adding to the usual calculus for **S5** the following schema axioms:

(Ax1) $\mathsf{A}(\mathsf{A}\varphi \to \varphi)$

(Ax2) $\mathsf{A}(\varphi \to \psi) \to (\mathsf{A}\varphi \to \mathsf{A}\psi)$

(Ax3) $\mathsf{A}\neg\varphi \leftrightarrow \neg\mathsf{A}\varphi$

(Ax4) $\Box\varphi \to \mathsf{A}\varphi$

(Ax5) $\mathsf{A}\varphi \to \Box\mathsf{A}\varphi$

Definition 6. The semantics for **S5A** is given by Kripke models $M = \langle W, @, V\rangle$ such that W is a non-empty set (of *possible worlds*), $@ \in W$ is the *actual world* and $V : \mathcal{P} \times W \to \{0, 1\}$ assigns to each propositional variable $p \in \mathcal{P}$ and world $w \in W$ a truth-value $V(p, w) \in \{0, 1\}$. The semantics over the **S5** fragment is defined inductively as usual (where $M, w \Vdash p$ iff $V(p, w) = 1$), and

$$M, w \Vdash \mathsf{A}\varphi \quad \text{if and only if} \quad M, @ \Vdash \varphi.$$

It is immediate to see that the necessitation rule for A is derived in **S5A**: indeed, if φ is a theorem of **S5A** so is $\Box\varphi$, by the necessitation rule for $\Box$. But then, by axiom (Ax4) and MP, it follows that $\mathsf{A}\varphi$ is a theorem of **S5A**.

As expected, a formula φ is valid in **S5A** (w.r.t. Kripke models) if $M, w \Vdash \varphi$ for every model $M = \langle W, @, V\rangle$ and world w in W. From the results presented in [Crossley, Humberstone, 1977] the following holds:

Theorem 2 (Soundness and completeness of **S5A** w.r.t. Kripke Semantics). *For every formula φ over Σ_m^{A}: $\vdash_{\mathbf{S5A}} \varphi$ if and only if $\models_{\mathbf{S5A}} \varphi$.*

5. An Ivlev-like version of S5A

Recall from the previous section that **S5A** is an expansion of the normal modal logic **S5** by adding an actuality modal operator. In this section, we propose an Ivlev-like version of **S5A**. To this end, we consider an expansion of the Ivlev-like modal logic $T45m$ by adding an actuality operator A satisfying axioms $(\mathsf{Ax1})$–$(\mathsf{Ax5})$, as well as other axioms which are valid in **S5A**. This system will be called $T45Am$. The semantics for $T45Am$ will be given by an Nmatrix analytically defined by means of a swap structure. This swap structure will be defined from the one for $T45m$ described in Section 3, by analyzing the axioms and relevant properties of A in **S5A**.

The snapshots for $T45Am$ will be now quadruples z such that their coordinates z_1, z_2, z_3, z_4 represent a 0-1 truth value for the formulas φ, $\Box\varphi$, $\Box\neg\varphi$, and $\mathsf{A}\varphi$. Hence, $z_2 \leq z_4$, by axiom $(\mathsf{Ax4})$. In turn, by $(\mathsf{Ax4})$ and $(\mathsf{Ax3})$, it follows that $z_3 \sqcap z_4 = 0$. Indeed, $\Box\neg\varphi \to \mathsf{A}\neg\varphi$ and $\mathsf{A}\neg\varphi \to \neg\mathsf{A}\varphi$ are provable in $T45Am$, by $(\mathsf{Ax4})$ and $(\mathsf{Ax3})$. Therefore, $\Box\neg\varphi \to \neg\mathsf{A}\varphi$ is provable in $T45Am$, which leads to the condition $z_3 \sqcap z_4 = 0$. From these considerations, we obtain the following domain:

$$\begin{aligned} V_m^{\mathsf{A}} &= \{z \in \{0,1\}^4 \ : \ z_2 \leq z_1, \ z_1 \sqcap z_3 = 0, \ z_2 \leq z_4 \ \text{ and } \ z_3 \sqcap z_4 = 0\} \\ &\simeq \{\bar{T}, t_1, t_0, f_1, f_0, \bar{F}\} \end{aligned}$$

such that $\bar{T} = (1,1,0,1)$, $t_1 = (1,0,0,1)$, $t_0 = (1,0,0,0)$, $f_1 = (0,0,0,1)$, $f_0 = (0,0,0,0)$ and $\bar{F} = (0,0,1,0)$. The set of designated values is $D_m^{\mathsf{A}} = \{z \in V_m^{\mathsf{A}} \ : \ z_1 = 1\} = \{\bar{T}, t_1, t_0\}$.

By following the general technique proposed in [Coniglio, 2025b], the definition of the multioperators of the Nmatrix for $T45Am$ will be obtained from the axioms satisfied by the corresponding Hilbert calculus. Thus, behind the axioms already given in **S5A**, it will be convenient to derive some formulas, valid in **S5A**, which contain information about $\mathsf{A}(\varphi \to \psi)$, $\mathsf{A}\Box\varphi$, $\mathsf{A}\mathsf{A}\varphi$ and $\Box\mathsf{A}\varphi$, among others, in terms of the formulas represented by the components of the snapshots for φ and ψ.

A first fundamental observation obtained from Definition 6 is that, for every Kripke model M for **S5A**, and for every world w in M (including the actual world @), the behavior of the connectives $\neg$ and $\to$ is classical. Hence,

$M, w \Vdash \neg\neg\varphi$ iff $M, w \Vdash \varphi$; $M, w \Vdash \neg\varphi$ implies that $M, w \Vdash \varphi \to \psi$; and $M, w \Vdash \psi$ implies that $M, w \Vdash \varphi \to \psi$. In turn, by $(\mathsf{Ax3})$, $\mathsf{A}\neg\varphi$ is equivalent to $\neg\mathsf{A}\varphi$ in **S5A**. Taking also into account that $M, w \Vdash \mathsf{A}\varphi$ iff $M, @ \Vdash \varphi$, and the equivalence between $\neg\mathsf{A}\varphi$ and $\mathsf{A}\neg\varphi$, the following formulas are valid in **S5A**:

$(\mathsf{AxNB@})$ $\neg\mathsf{A}\varphi \to \Box\neg\mathsf{A}\varphi$

$(\mathsf{AxD@})$ $\mathsf{A}\varphi \to \mathsf{AA}\varphi$

$(\mathsf{Ax@1})$ $\neg\mathsf{A}\varphi \to \mathsf{A}(\varphi \to \psi)$

$(\mathsf{Ax@2})$ $\mathsf{A}\psi \to \mathsf{A}(\varphi \to \psi)$

This observation leads us to the following:

Definition 7 (The logic $T45Am$)**.** Let $T45Am$ be the logic induced by the Hilbert calculus over Σ_m^{A} obtained by extending the calculus for $T45m$ (recall Definition 4) with axiom schemas $(\mathsf{Ax1})$–$(\mathsf{Ax5})$ from **S5A** (recall Definition 5) plus $(\mathsf{AxNB@})$, $(\mathsf{AxD@})$, $(\mathsf{Ax@1})$ and $(\mathsf{Ax@2})$. The only inference rule in $T45Am$ is MP.

Remark 1. Recall that $\varphi \wedge \psi$ and $\varphi \vee \psi$ are abbreviations for $\neg(\varphi \to \neg\psi)$ and $\neg\varphi \to \psi$, respectively, and $\varphi \leftrightarrow \psi$ stands for $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$, as usual. From this, and taking into account that $T45Am$ contains classical logic over the signature $\{\neg, \to\}$ (and so over the signature $\{\neg, \to, \wedge, \vee\}$), the following hold: $\varphi \wedge \psi$ is provable in $T45Am$ iff both φ and ψ are provable in $T45Am$; and if both $\neg\varphi \to \gamma$ and $\psi \to \gamma$ are provable in $T45Am$, so is $(\neg\varphi \vee \psi) \to \gamma$, and so $(\varphi \to \psi) \to \gamma$ is also provable in $T45Am$.

Using the properties observed above, it is possible to obtain the following theorems of $T45Am$, which will be useful to define the multioperators of the corresponding Nmatrix semantics:

Proposition 1. The following schemas are provable in $T45Am$ (and so in **S5A**):

(1) $\Box\mathsf{A}\varphi \leftrightarrow \mathsf{A}\varphi$;

(2) $\mathsf{A}\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$;

(3) $\mathsf{AA}\varphi \leftrightarrow \mathsf{A}\varphi$;

(4) $\mathsf{A}(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\mathsf{A}\varphi \to \mathsf{A}\psi)$;

(5) $\mathsf{A}(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\mathsf{A}\varphi \wedge \mathsf{A}\psi)$;

(6) $\mathsf{A}(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\mathsf{A}\varphi \vee \mathsf{A}\psi)$.

(7) $\mathsf{A}\neg\neg\varphi \leftrightarrow \mathsf{A}\varphi$.

(8) $\Box\neg\mathsf{A}\varphi \leftrightarrow \neg\mathsf{A}\varphi$.

Proof. (1) is an immediate consequence of axioms (T) and $(\mathsf{Ax5})$. Concerning (2): $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$, by $(\mathsf{4})$, and $\Box\Box\varphi \to \mathsf{A}\Box\varphi$, by $(\mathsf{Ax4})$, which allows us to infer $\Box\varphi \to \mathsf{A}\Box\varphi$, by transitivity of implication. To prove the converse, it was observed above that $\Box\neg\varphi \to \neg\mathsf{A}\varphi$ is a theorem of $T45Am$. In particular, $\Box\neg\Box\varphi \to \neg\mathsf{A}\Box\varphi$ is provable in $T45Am$. But $\Box\neg\Box\varphi$ is equivalent in $T45Am$ to $\neg\Box\varphi$, hence $\neg\Box\varphi \to \neg\mathsf{A}\Box\varphi$ is provable in $T45Am$. By contraposition, $\mathsf{A}\Box\varphi \to \Box\varphi$ is provable in $T45Am$. With respect to (3), $(\mathsf{Ax2})$ produces $\mathsf{A}(\mathsf{A}\varphi \to \varphi) \to (\mathsf{AA}\varphi \to \mathsf{A}\varphi)$ and so, by MP with $(\mathsf{Ax1})$, it follows $\mathsf{AA}\varphi \to \mathsf{A}\varphi$. The converse holds by $(\mathsf{AxD@})$. Property (4) follows easily from axioms $(\mathsf{Ax2})$, $(\mathsf{Ax@1})$ and $(\mathsf{Ax@2})$ and Remark 1. For (5) observe that $\mathsf{A}\varphi \wedge \mathsf{A}\psi = \neg(\mathsf{A}\varphi \to \neg\mathsf{A}\psi)$ implies $\neg(\mathsf{A}\varphi \to \mathsf{A}\neg\psi)$, by $(\mathsf{Ax3})$, which implies $\neg\mathsf{A}(\varphi \to \neg\psi)$, by $(\mathsf{Ax2})$ and contraposition. But the later implies $\mathsf{A}\neg(\varphi \to \neg\psi) = \mathsf{A}(\varphi \wedge \psi)$, by $(\mathsf{Ax3})$. The proof for (6) is analogous. For (7), observe that, in $T45Am$, $\varphi \equiv \psi$ implies that $\neg\varphi \equiv \neg\psi$, and $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$. From this, and using $(\mathsf{Ax3})$, it follows that $\mathsf{A}\neg\neg\varphi \equiv \neg\mathsf{A}\neg\varphi \equiv \neg\neg\mathsf{A}\varphi \equiv \mathsf{A}\varphi$. In order to prove (8) observe first that, by $(\mathsf{Ax4})$ and $(\mathsf{Ax3})$, $\Box\neg\varphi \to \mathsf{A}\neg\varphi$ and $\mathsf{A}\neg\varphi \to \neg\mathsf{A}\varphi$ are provable in $T45Am$, so is $\Box\neg\varphi \to \neg\mathsf{A}\varphi$, for every φ. In particular, $\Box\neg\mathsf{A}\varphi \to \neg\mathsf{AA}\varphi$ is provable in $T45Am$, hence $\Box\neg\mathsf{A}\varphi \to \neg\mathsf{A}\varphi$ is provable as well, by item (3). The converse follows from $(\mathsf{AxNB@})$. ■

The theorems of $T45Am$ stated in the previous proposition, together with the intended meaning given to the snapshots, lead us to consider the following multioperators over V_m^{A}:

(I) $z \hat{\to} w = \{u \in V_m^{\mathsf{A}} \ : \ u_1 = z_1 \Rightarrow w_1,\ u_3 = z_2 \sqcap w_3,\ u_4 = z_4 \Rightarrow w_4,$
$z_3 \sqcup w_2 \leq u_2 \leq (z_2 \Rightarrow w_2) \sqcap (w_3 \Rightarrow z_3)\};$

(II) $\hat{\neg} z = \{(\sim z_1, z_3, z_2, \sim z_4)\};$

(III) $\hat{\Box} z = \{(z_2, z_2, \sim z_2, z_2)\};$

(IV) $\hat{\mathsf{A}} z = \{(z_4, z_4, \sim z_4, z_4)\}.$

Given that $\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$ and $\varphi \vee \psi = \neg\varphi \to \psi$, the following multioperators are also obtained:

(V) $z \hat{\wedge} w = \{u \in V_m^{\mathsf{A}} \ : \ u_1 = z_1 \sqcap w_1,\ u_2 = z_2 \sqcap w_2,\ u_4 = z_4 \sqcap w_4,$
$z_3 \sqcup w_3 \leq u_3 \leq (z_2 \Rightarrow w_3) \sqcap (w_2 \Rightarrow z_3)\};$

(VI) $z \hat{\vee} w = \{u \in V_m^{\mathsf{A}} \ : \ u_1 = z_1 \sqcup w_1,\ u_3 = z_3 \sqcap w_3,\ u_4 = z_4 \sqcup w_4,$
$z_2 \sqcup w_2 \leq u_2 \leq (z_3 \Rightarrow w_2) \sqcap (w_3 \Rightarrow z_2)\}.$

The definition of the multioperators above can be described in a more compact way as follows:

$$z \hat{\to} w = (z_1 \Rightarrow w_1,\ z_3 \sqcup w_2 \leq \_ \leq (z_2 \Rightarrow w_2) \sqcap (w_3 \Rightarrow z_3), z_2 \sqcap w_3,\ z_4 \Rightarrow w_4)$$

$$z \hat{\wedge} w = (z_1 \sqcap w_1,\ z_2 \sqcap w_2,\ z_3 \sqcup w_3 \leq \_ \leq (z_2 \Rightarrow w_3) \sqcap (w_2 \Rightarrow z_3),\ z_4 \sqcap w_4)$$

$$z \hat{\vee} w = (z_1 \sqcup w_1,\ z_2 \sqcup w_2 \leq \_ \leq (z_3 \Rightarrow w_2) \sqcap (w_3 \Rightarrow z_2), z_3 \sqcap w_3,\ z_4 \sqcup w_4)$$

$$\hat{\neg} z = ({\sim} z_1, z_3, z_2, {\sim} z_4)$$

$$\hat{\Box} z = (z_2, z_2, {\sim} z_2, z_2)$$

$$\hat{\mathsf{A}} z = (z_4, z_4, {\sim} z_4, z_4).$$

Remark 2. Let $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$, defined as usual. Then, for every $z \in V_m^{\mathsf{A}}$ (and by using a functional notation, taking into account that $\hat{\neg}$ and $\hat{\Box}$ are deterministic):

$$\hat{\Diamond} z = \hat{\neg}\hat{\Box}\hat{\neg} z = \hat{\neg}\hat{\Box}({\sim} z_1, z_3, z_2, {\sim} z_4) = \hat{\neg}(z_3, z_3, {\sim} z_3, z_3) = ({\sim} z_3, {\sim} z_3, z_3, {\sim} z_3).$$

Observe that $\varphi \to \Diamond\varphi$ and $\mathsf{A}\varphi \to \Diamond\varphi$ are valid in $T45Am$, while the converses are not.

This produces the following tables:

$\hat{\to}$	$\bar{T}$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}$
$\bar{T}$	$\bar{T}$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}$
t_1	$\bar{T}$	$\bar{T}, t_1$	t_0	f_1	f_0	f_0
t_0	$\bar{T}$	$\bar{T}, t_1$	$\bar{T}, t_1$	f_1	f_1	f_1
f_1	$\bar{T}$	$\bar{T}, t_1$	t_0	$\bar{T}, t_1$	t_0	t_0
f_0	$\bar{T}$	$\bar{T}, t_1$	$\bar{T}, t_1$	$\bar{T}, t_1$	$\bar{T}, t_1$	t_1
$\bar{F}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$

z	$\hat{\neg} z$	$\hat{\Box} z$	$\hat{\mathsf{A}} z$	$\hat{\Diamond} z$
$\bar{T}$	$\bar{F}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$
t_1	f_0	$\bar{F}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$
t_0	f_1	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{T}$
f_1	t_0	$\bar{F}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$
f_0	t_1	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{T}$
$\bar{F}$	$\bar{T}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$

$\hat{\wedge}$	$\bar{T}$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}$
$\bar{T}$	$\bar{T}$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}$
t_1	t_1	t_1	t_0	f_1	$\bar{F}, f_0$	$\bar{F}$
t_0	t_0	t_0	t_0	$\bar{F}, f_0$	$\bar{F}, f_0$	$\bar{F}$
f_1	f_1	f_1	$\bar{F}, f_0$	f_1	$\bar{F}, f_0$	$\bar{F}$
f_0	f_0	$\bar{F}, f_0$	$\bar{F}, f_0$	$\bar{F}, f_0$	$\bar{F}, f_0$	$\bar{F}$
$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$	$\bar{F}$

$\hat{\vee}$	$\bar{T}$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}$
$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$
t_1	$\bar{T}$	$\bar{T}, t_1$	$\bar{T}, t_1$	$\bar{T}, t_1$	$\bar{T}, t_1$	t_1
t_0	$\bar{T}$	$\bar{T}, t_1$	t_0	$\bar{T}, t_1$	t_0	t_0
f_1	$\bar{T}$	$\bar{T}, t_1$	$\bar{T}, t_1$	f_1	f_1	f_1
f_0	$\bar{T}$	$\bar{T}, t_1$	t_0	f_1	f_0	f_0
$\bar{F}$	$\bar{T}$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}$

Definition 8 (Nmatrix for $T45Am$)**.** Let $\mathcal{M}_{45A}$ be the Nmatrix over Σ_m^{A} with domain V_m^{A}, multioperators defined by means of clauses (I)–(IV) above and set of designated values $D_m^{\mathsf{A}} = \{z \in V_m^{\mathsf{A}} \ :\ z_1 = 1\} = \{\bar{T}, t_1, t_0\}$.

Theorem 3 (Soundness of $T45Am$ w.r.t. $\mathcal{M}_{45A}$)**.**
Let $\Gamma \cup \{\varphi\}$ be a set of formulas over signature Σ_m^{A}. Then: $\Gamma \vdash_{T45Am} \varphi$ implies that $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_{45A}} \varphi$.

Proof. Assume that $\Gamma \vdash_{T45Am} \varphi$. By means of a standard argument, it is enough to prove that, if δ is an instance of an axiom of $T45Am$ and v is a valuation over $\mathcal{M}_{45A}$ then $v(\delta)_1 = 1$, where $v(\delta)_1$ denotes the first coordinate of $v(\delta)$ (i.e., $v(\delta) \in D_m^{\mathsf{A}}$). Indeed, from this, and given that $v(\delta) \in D_m^{\mathsf{A}}$ and $v(\delta \to \psi) \in D_m^{\mathsf{A}}$ implies that $v(\psi) \in D_m^{\mathsf{A}}$, the result will follow by induction on the length of a given derivation of φ from Γ in $T45Am$. Thus, let δ be an instance of an axiom of $T45Am$, and let v be a given valuation over $\mathcal{M}_{45A}$.

(1) If δ is an instance of one of the axioms $(\mathsf{CL1})$–$(\mathsf{CL3})$ of CPL, it is easy to see that $v(\delta)_1 = 1$, by definition of the multioperations in $\mathcal{M}_{45A}$. Indeed, since $v(\psi \to \gamma) \in v(\psi)\hat{\to}v(\gamma)$, then $v(\psi \to \gamma)_1 = v(\psi)_1 \Rightarrow v(\gamma)_1$. By reasoning analogously, $v(\neg\psi)_1 = {\sim}v(\psi)_1$. From this, $v(\psi \wedge \gamma)_1 = v(\psi)_1 \sqcap v(\gamma)_1$, and $v(\psi \vee \gamma)_1 = v(\psi)_1 \sqcup v(\gamma)_1$. Then, from the fact that δ is a tautology of CPL, then $v(\delta)_1 = 1$. For instance, $v(\varphi \to (\psi \to \varphi))_1 = v(\varphi)_1 \Rightarrow (v(\psi)_1 \Rightarrow v(\varphi)_1)$, which is always 1 in $\mathbf{2}$ for any value $v(\varphi)$ and $v(\psi)$ in V_m^{A}.

(2) Concerning the modal axioms of $T45m$ (that is, the axioms for $\Box$), observe first that $v(\Box\psi)_1 = v(\psi)_2$, and $v(\Box\neg\psi)_1 = v(\psi)_3$. Thus, let $\delta = \Box(\psi \to \gamma) \to (\Box\psi \to \Box\gamma)$ be an instance of axiom (K). Since $v(\psi \to \gamma) \in v(\psi)\hat{\to}v(\gamma)$, it follows that $v(\Box(\psi \to \gamma))_1 = v(\psi \to \gamma)_2 \leq v(\psi)_2 \Rightarrow v(\gamma)_2 = v(\Box\psi)_1 \Rightarrow v(\Box\gamma)_1 = v(\Box\psi \to \Box\gamma)_1$, and so $v(\delta)_1 = 1$. Using an analogous argument, we infer that $v(\Box(\psi \to \gamma))_1 \leq v(\Box\neg\gamma \to \Box\neg\psi)_1$, showing that every instance of $(\mathsf{K1})$ is valid. The proof of validity of $(\mathsf{K2})$ is analogous. Now, since $v(\psi) \in V_m^{\mathsf{A}}$, it follows that $v(\Box\psi)_1 = v(\psi)_2 \leq v(\psi)_1$, and so every instance of (T) is valid in $\mathcal{M}_{45A}$. For $(\mathsf{DN1})$, we have that $v(\Box\neg\neg\psi)_1 = v(\neg\psi)_3 = v(\psi)_2 = v(\Box\psi)_1$.

(3) Finally, consider the axioms for the actuality operator A. We have that

$$v(\mathsf{A}(\mathsf{A}\varphi \to \varphi))_1 = v(\mathsf{A}\varphi \to \varphi)_4 = v(\mathsf{A}\varphi)_4 \Rightarrow v(\varphi)_4 = v(\varphi)_4 \Rightarrow v(\varphi)_4 = 1,$$

hence $(\mathsf{Ax1})$ is valid. The proof of validity of $(\mathsf{Ax2})$ is similar to the one for (K). For $(\mathsf{Ax3})$, note that $v(\mathsf{A}\neg\varphi)_1 = v(\neg\varphi)_4 = {\sim}v(\varphi)_4 = {\sim}v(\mathsf{A}\varphi)_1 = v(\neg\mathsf{A}\varphi)_1$. Since $v(\psi) \in V_m^{\mathsf{A}}$, it follows that $v(\Box\psi)_1 = v(\psi)_2 \leq v(\psi)_4 = v(\mathsf{A}\psi)_1$. From this, $(\mathsf{Ax4})$ is valid in $\mathcal{M}_{45A}$. Now, note that $v(\mathsf{A}\psi)_1 = v(\psi)_4 = v(\mathsf{A}\psi)_2 = v(\Box\mathsf{A}\psi)_1$. This shows that $(\mathsf{Ax5})$ is valid in $\mathcal{M}_{45A}$. In turn, $v(\neg\mathsf{A}\psi)_1 = {\sim}v(\mathsf{A}\psi)_1 = {\sim}v(\psi)_4 = v(\mathsf{A}\psi)_3 = v(\Box\neg\mathsf{A}\psi)_1$, showing the validity of axiom $(\mathsf{AxNB@})$. The validity of $(\mathsf{AxD@})$ is also easily proven: $v(\mathsf{A}\psi)_1 = v(\psi)_4 = v(\mathsf{A}\psi)_4 = v(\mathsf{AA}\psi)_1$. Finally, observe that $v(\neg\mathsf{A}\varphi)_1 = {\sim}v(\mathsf{A}\varphi)_1 = {\sim}v(\varphi)_4 \leq {\sim}v(\varphi)_4 \sqcup v(\psi)_4 = v(\varphi)_4 \Rightarrow v(\psi)_4 = v(\varphi \to \psi)_4 = v(\mathsf{A}(\varphi \to \psi))_1$. A similar argument shows that $v(\mathsf{A}\psi)_1 \leq v(\mathsf{A}(\varphi \to \psi))_1$, proving that axioms $(\mathsf{Ax@1})$ and $(\mathsf{Ax@2})$ are valid.

This completes the proof. $\blacksquare$

The proof of completeness requires, as usual, the use of φ-saturated sets. We will adapt the argument given in [Coniglio, 2025a] for the six-valued Ivlev-like modal logic $IvFDE_T$, which is related (in some sense) to $T45Am$. Let us recall some standard notions and results from Tarskian finitary logics (see Section 2).

Given a Tarskian and finitary logic $\mathbf{L}$ and a set of formulas $\Delta \cup \{\varphi\}$ of $\mathbf{L}$, Δ is said to be *φ-saturated in* $\mathbf{L}$ if: (1) $\Delta \nvdash_{\mathbf{L}} \varphi$; and (2) if $\psi \notin \Delta$ then $\Delta, \psi \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$.

Remark 3. It is an immediate consequence of the definition that, given a Tarskian logic $\mathbf{L}$, any φ-saturated set Δ in $\mathbf{L}$ is a closed theory in $\mathbf{L}$, i.e.: $\psi \in \Delta$ iff $\Delta \vdash_{\mathbf{L}} \psi$. In turn, it is well-known that, if $\mathbf{L}$ is Tarskian and finitary and $\Gamma \nvdash_{\mathbf{L}} \varphi$ then there exists a φ-saturated set Δ such that $\Gamma \subseteq \Delta$ (see, for instance, [Wójcicki, 1984, Theorem 22.2] or [Carnielli, Coniglio, 2016, Theorem 2.2.6]). Given that the logic $T45Am$ is Tarskian and finitary, the latter result holds for this logic.

Proposition 2. The following properties hold in the logic $T45Am$:
(1) $\theta_{\bar{T}}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \Box\varphi$ is equivalent to $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$;
(2) $\theta_{t_1}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$;
(3) $\theta_{t_0}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$;
(4) $\theta_{f_1}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \neg\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\neg\varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$;
(5) $\theta_{f_0}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \neg\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\neg\varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$;
(6) $\theta_{\bar{F}}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \Box\neg\varphi$ is equivalent to $\neg\varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \Box\neg\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$.

Proof. (1) By (T), $(\mathsf{Ax4})$ and by classical logic it follows that $\Box\varphi$ is equivalent to $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$. In turn, $\Box\neg\varphi \to \neg\mathsf{A}\varphi$ holds in $T45Am$, by $(\mathsf{Ax4})$ and $(\mathsf{Ax3})$, hence $\mathsf{A}\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$ holds in $T45Am$. By classical logic, $\mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\mathsf{A}\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi$. By combining both equivalences, and by classical logic, $\Box\varphi$ is equivalent to $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$. The proof of the other items is analogous. ■

It is worth noting that each formula $\theta_a(p)$ as above characterizes the truth-value a in the following sense: for every formula φ and for every valuation v over the Nmatrix $\mathcal{M}_{45A}$, $v(\theta_a(\varphi)) \in D_m^{\mathsf{A}}$ iff $v(\varphi) = a$.

Proposition 3. Let Δ be a δ-saturated set in $T45Am$. Then, it satisfies the following properties:
(1) Δ is a closed theory in $T45Am$, that is: $\psi \in \Delta$ iff $\Delta \vdash_{T45Am} \psi$.
(2) $\neg\psi \in \Delta$ iff $\psi \notin \Delta$.
(3) $\psi \wedge \gamma \in \Delta$ iff $\psi \in \Delta$ and $\gamma \in \Delta$.
(4) $\psi \vee \gamma \in \Delta$ iff either $\psi \in \Delta$ or $\gamma \in \Delta$.
(5) $\psi \to \gamma \in \Delta$ iff either $\psi \notin \Delta$ or $\gamma \in \Delta$.

(6) If $\Box\varphi \in \Delta$ then $\varphi \in \Delta$.
(7) $\Box\varphi \in \Delta$ iff $\Box\neg\neg\varphi \in \Delta$.
(8) $\Box(\varphi \wedge \psi) \in \Delta$ iff $\Box\varphi \in \Delta$ and $\Box\psi \in \Delta$.
(9) If $\Box\varphi \in \Delta$ or $\Box\psi \in \Delta$ then $\Box(\varphi \vee \psi) \in \Delta$.
(10) If $\Box(\varphi \to \psi) \in \Delta$ then $\Box\varphi \to \Box\psi \in \Delta$ and $\Box\neg\psi \to \Box\neg\varphi \in \Delta$.
(11) $\Box\neg(\varphi \vee \psi) \in \Delta$ iff $\Box\neg\varphi \in \Delta$ and $\Box\neg\psi \in \Delta$.
(12) If $\Box\neg\varphi \in \Delta$ or $\Box\psi \in \Delta$ then $\Box(\varphi \to \psi) \in \Delta$.
(13) If $\Box\neg\varphi \in \Delta$ or $\Box\neg\psi \in \Delta$ then $\Box\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Delta$.
(14) $\Box\neg(\varphi \to \psi) \in \Delta$ iff $\Box\varphi \in \Delta$ and $\Box\neg\psi \in \Delta$.
(15) If $\mathsf{A}(\varphi \to \psi) \in \Delta$ then $\mathsf{A}\varphi \to \mathsf{A}\psi \in \Delta$.
(16) $\mathsf{A}\neg\varphi \in \Delta$ iff $\mathsf{A}\varphi \notin \Delta$.
(17) If $\Box\varphi \in \Delta$ then $\mathsf{A}\varphi \in \Delta$.
(18) If $\mathsf{A}\varphi \in \Delta$ then $\Box\mathsf{A}\varphi \in \Delta$.
(19) $\mathsf{A}\neg\neg\varphi \in \Delta$ iff $\mathsf{A}\varphi \in \Delta$.
(20) If $\mathsf{A}\varphi \notin \Delta$ or $\mathsf{A}\psi \in \Delta$ then $\mathsf{A}(\varphi \to \psi) \in \Delta$.
(21) For every ψ, exactly one of the formulas $\theta_a(\psi)$ belongs to Δ, for $a \in \{\bar{T}, t_1, t_0, f_1, f_0, \bar{F}\}$.

Proof. Item (1) holds by Remark 3. In turn, items (2)–(20) are a direct consequence of the axioms and rules of the Hilbert calculus for $T45Am$ (see Definition 7). In order to prove item (21), let ψ be a formula. The following cases can be considered:
1: $\Box\psi \in \Delta$. Thus, $\theta_{\bar{T}}(\psi) \in \Delta$.
2: $\Box\psi \notin \Delta$. By item (2), $\neg\Box\psi \in \Delta$. Consider the following subcases:
2.1: $\psi \in \Delta$.
2.1.1: $\mathsf{A}\psi \in \Delta$. By item (3), $\psi \wedge \neg\Box\psi \wedge \mathsf{A}\psi \in \Delta$ and so $\theta_{t_1}(\psi) \in \Delta$.
2.1.2: $\mathsf{A}\psi \notin \Delta$. By items (2) and (3), $\theta_{t_0}(\psi) \in \Delta$.
2.2: $\psi \notin \Delta$. By item (2), $\neg\psi \in \Delta$.
2.2.1: $\Box\neg\psi \in \Delta$. Hence, $\theta_{\bar{F}}(\psi) \in \Delta$.
2.2.2: $\Box\neg\psi \notin \Delta$. By item (2) it follows that $\neg\Box\neg\psi \in \Delta$.
2.2.2.1: $\mathsf{A}\psi \in \Delta$. By item (3), $\theta_{f_1}(\psi) \in \Delta$.
2.2.2.2: $\mathsf{A}\psi \notin \Delta$. By items (2) and (3), $\theta_{f_0}(\psi) \in \Delta$.

Thus, for every ψ, it holds that $\theta_a(\psi) \in \Delta$ for some $a \in \{\bar{T}, t_1, t_0, f_1, f_0, \bar{F}\}$. By Proposition 2, if $\theta_a(\psi) \in \Delta$ and $\theta_b(\psi) \in \Delta$ then $a = b$, given that Δ is non-trivial, hence it does not contain any contradiction. This completes the proof. ■

Definition 9. For $x \in \{0, 1\}$ and a formula φ, let $L_x(\varphi)$ be the formula defined as follows:

$$L_0(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \neg\varphi, \quad \text{and} \quad L_1(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi.$$

Remark 4. Let $\gamma_1(p) \stackrel{\text{def}}{=} p$, $\gamma_2(p) \stackrel{\text{def}}{=} \Box p$, $\gamma_3(p) \stackrel{\text{def}}{=} \Box\neg p$, and $\gamma_4(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{A}p$, where p is a propositional variable. Then, for every $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in V_m^{\mathsf{A}}$ it follows that $\theta_a(\varphi)$ is equivalent, in $T45Am$, to the formula $\bigwedge_{i=1}^{4} L_{a_i}(\gamma_i(\varphi))$.

The proof of completeness depends on the following result:

Proposition 4 (Truth lemma for $T45Am$)**.** Let Δ be a δ-saturated set in $T45Am$. Let $v_\Delta : For(\Sigma) \to V_m^{\mathsf{A}}$ be a function defined as follows: $v_\Delta(\psi) = a$ iff $\theta_a(\psi) \in \Delta$. Then, v_Δ is a well-defined function, and it is a valuation over the Nmatrix $\mathcal{M}_{45A}$ such that, for every formula ψ, $v_\Delta(\psi) \in D_m^{\mathsf{A}}$ iff $\psi \in \Delta$.

Proof. The function v_Δ is well-defined, because of Proposition 3(21). By definition, by Remark 4 and by Proposition 3(3), $v_\Delta(\varphi) = a$ iff, for $1 \leq i \leq 4$ $L_{a_i}(\gamma_i(\varphi)) \in \Delta$. Hence, by Proposition 3(2),

$$v_\Delta(\varphi) = a \ \text{ iff, for } 1 \leq i \leq 4\text{:} \ \ \gamma_i(\varphi) \in \Delta \ \text{ iff } \ a_i = 1.$$

Next, we must show that v_Δ is a valuation over the Nmatrix $\mathcal{M}_{45A}$.
(Negation $\neg$): Let $v_\Delta(\varphi) = a$ and $v_\Delta(\neg\varphi) = b$. Then, by recalling Remark 4:

- $\gamma_1(\neg\varphi) = \neg\varphi = \neg\gamma_1(\varphi)$, hence $\gamma_1(\neg\varphi) \in \Delta$ iff $\gamma_1(\varphi) \notin \Delta$. From this, $b_1 = {\sim}a_1$.
- $\gamma_2(\neg\varphi) = \Box\neg\varphi = \gamma_3(\varphi)$, hence $\gamma_2(\neg\varphi) \in \Delta$ iff $\gamma_3(\varphi) \in \Delta$. Thus, $b_2 = a_3$.
- $\gamma_3(\neg\varphi) = \Box\neg\neg\varphi \equiv \Box\varphi = \gamma_2(\varphi)$ (by $\mathsf{(DN1)}$), and so $\gamma_3(\neg\varphi) \in \Delta$ iff $\gamma_2(\varphi) \in \Delta$. This implies that $b_3 = a_2$.
- $\gamma_4(\neg\varphi) = \mathsf{A}\neg\varphi$ and $\gamma_4(\varphi) = \mathsf{A}\varphi$. By Proposition 3(16), $\gamma_4(\neg\varphi) \in \Delta$ iff $\gamma_4(\varphi) \notin \Delta$. This implies that $b_4 = {\sim}a_4$.

Thus, $v_\Delta(\neg\varphi) \in \hat{\neg} v_\Delta(\varphi)$.
(Actuality operator A): Let $v_\Delta(\varphi) = a$ and $v_\Delta(\mathsf{A}\varphi) = b$. Then, by reasoning as above:

- $\gamma_1(\mathsf{A}\varphi) = \mathsf{A}\varphi = \gamma_4(\varphi)$, hence $b_1 = a_4$.
- $\gamma_2(\mathsf{A}\varphi) = \Box\mathsf{A}\varphi \equiv \mathsf{A}\varphi = \gamma_4(\varphi)$ (by Proposition 1(1)), hence $b_2 = a_4$.
- $\gamma_3(\mathsf{A}\varphi) = \Box\neg\mathsf{A}\varphi \equiv \neg\mathsf{A}\varphi = \neg\gamma_4(\varphi)$ (by Proposition 1(8)), hence $b_3 = {\sim}a_4$.
- $\gamma_4(\mathsf{A}\varphi) = \mathsf{A}\mathsf{A}\varphi \equiv \mathsf{A}\varphi = \gamma_4(\varphi)$ (by Proposition 1(3)), hence $b_4 = a_4$.

This shows that $v_\Delta(\mathsf{A}\varphi) \in \hat{\mathsf{A}} v_\Delta(\varphi)$.

(Necessity $\Box$): Let $v_\Delta(\varphi) = a$ and $v_\Delta(\Box\varphi) = b$. Then:

- $\gamma_1(\Box\varphi) = \Box\varphi = \gamma_2(\varphi)$, hence $b_1 = a_2$.
- $\gamma_2(\Box\varphi) = \Box\Box\varphi \equiv \Box\varphi = \gamma_2(\varphi)$ (by $\mathsf{(4)}$ and $\mathsf{(T)}$), hence $b_2 = a_2$.
- $\gamma_3(\Box\varphi) = \Box\neg\Box\varphi \equiv \neg\Box\varphi = \neg\gamma_2(\varphi)$ (by $\mathsf{(5)}$ and $\mathsf{(T)}$), hence $b_3 = {\sim}a_2$.
- $\gamma_4(\Box\varphi) = \mathsf{A}\Box\varphi \equiv \Box\varphi = \gamma_2(\varphi)$ (by Proposition 1(2)), hence $b_4 = a_2$.

This shows that $v_\Delta(\Box\varphi) \in \hat{\Box} v_\Delta(\varphi)$.
(Implication $\to$): Let $v_\Delta(\varphi) = a$, $v_\Delta(\psi) = b$ and $v_\Delta(\varphi \vee \psi) = c$. Thus:

- $\gamma_1(\varphi \to \psi) = \varphi \to \psi = \gamma_1(\varphi) \to \gamma_1(\psi)$, and so $c_1 = a_1 \Rightarrow b_1$.
- $\gamma_2(\varphi \to \psi) = \Box(\varphi \to \psi)$. Note that $(\Box\neg\varphi \vee \Box\psi) \to \Box(\varphi \to \psi) \in \Delta$ and $\Box(\varphi \to \psi) \to ((\Box\varphi \to \Box\psi) \wedge (\Box\neg\psi \to \Box\neg\varphi)) \in \Delta$, given that they are provable in $T45Am$. This means that $(\gamma_3(\varphi) \vee \gamma_2(\psi)) \to \gamma_2(\varphi \to \psi) \in \Delta$, and $\gamma_2(\varphi \to \psi) \to ((\gamma_2(\varphi) \to \gamma_2(\psi)) \wedge (\gamma_3(\psi) \to \gamma_3(\varphi))) \in \Delta$. From this, $a_3 \sqcup b_2 \leq c_2 \leq (a_2 \Rightarrow b_2) \sqcap (b_3 \Rightarrow a_3)$.
- $\gamma_3(\varphi \to \psi) = \Box\neg(\varphi \to \psi) \equiv \Box\varphi \wedge \Box\neg\psi = \gamma_2(\varphi) \wedge \gamma_3(\psi)$ (by $\mathsf{(K2)}$), hence $c_3 = a_2 \sqcap b_3$.
- $\gamma_4(\varphi \to \psi) = \mathsf{A}(\varphi \to \psi) \equiv \mathsf{A}\varphi \to \mathsf{A}\psi = \gamma_4(\varphi) \to \gamma_4(\psi)$ (by Proposition 1(4)), thus $c_4 = a_4 \Rightarrow b_4$.

This shows that $v_\Delta(\varphi \to \psi) \in v_\Delta(\varphi) \hat{\to} v_\Delta(\psi)$.

From the facts proven above, it follows that the function v_Δ is, indeed, a valuation over the Nmatrix $\mathcal{M}_{45A}$. In addition, and as an immediate consequence of the definitions, $v_\Delta(\psi) \in D^{\mathsf{A}}_m$ iff $\psi \in \Delta$, for every formula ψ. ■

Now we are ready to prove completeness:

Theorem 4 (Completeness of $T45Am$ w.r.t. $\mathcal{M}_{45A}$).
Let $\Gamma \cup \{\varphi\}$ be a set of formulas over signature Σ^{A}_m. Then: $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_{45A}} \varphi$ implies that $\Gamma \vdash_{T45Am} \varphi$.

Proof. Assume that $\Gamma \nvdash_{T45Am} \varphi$. Then, by Remark 3, there exists a set Δ that is φ-saturated in $T45Am$ and such that $\Gamma \subseteq \Delta$. Consider the valuation v_Δ over the Nmatrix $\mathcal{M}_{45A}$ defined as in Proposition 4. Then, $v_\Delta(\psi) \in D^{\mathsf{A}}_m$ for every $\psi \in \Gamma$ (since $\Gamma \subseteq \Delta$), but $v_\Delta(\varphi) \notin D^{\mathsf{A}}_m$ (since $\Delta \nvdash_{T45Am} \varphi$). From this, $\Gamma \nvDash_{T45Am} \varphi$. ■

The logic $T45Am$ can be seen as a non-normal version of **S5A**, thanks to the following result:

Corollary 1. Let $T45Am^+$ be the logic obtained from $T45Am$ by adding the global rule

$$(Nec\Box)\ \frac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$$

(that is, the rule can only be applied to premisses already proven as theorems). Then, $T45Am^+$ coincides with **S5A**. In other words, $T45Am$ is a non-normal version of **S5A**.

Proof. It is enough to prove that $\vdash_{T45Am^+} \varphi$ if and only if $\vdash_{\mathbf{S5A}} \varphi$, for every formula φ. Clearly, $\vdash_{T45Am^+} \varphi$ implies that $\vdash_{\mathbf{S5A}} \varphi$, since every axiom and rule of $T45Am^+$ can be derived in **S5A**. The converse is proven by a similar argument, taking into consideration that **S5A**, as a Hilbert calculus, is contained in $T45Am^+$. ■

6. An Ivlev-like version of the weaker system S5AR

In [Crossley, Humberstone, 1977, Section 5] the authors introduced a modified version of **S5A** called **S5AR**. The basic idea is to consider Kripke models $M = \langle W, R, @, V\rangle$ such that $\langle W, @, V\rangle$ is a Kripke model for **S5A** as in Definition 6, and R is an equivalence relation over W. Since the normal modal logic underlying **S5A** is **S5**, the reduct without the A operator remains unchanged: as it is well known, **S5** is characterized either by Kripke models $\langle W, V\rangle$ or by Kripke models of the form $\langle W, R, V\rangle$, where R is an equivalence relation over W. However, because of the actual world $@ \in W$ and the fact that $M, w \Vdash \mathsf{A}\varphi$ iff $M, @ \Vdash \varphi$, axiom $(\mathsf{Ax4})$ is no longer valid with this semantics. Given that $(\mathsf{Ax4})$ is crucial to derive the necessitation rule for A, as observed in Section 4, the following Hilbert calculus for the proposed semantics was considered in [Ibid.]:

Definition 10 (The logic **S5AR**)**.** The logic **S5AR** is defined by means of a Hilbert calculus over signature Σ_m^{A} obtained by the Hilbert calculus for **S5A** (recall Definition 5) by removing axiom schema $(\mathsf{Ax4})$ and by adding the following global rule:

$$(Nec\mathsf{A})\ \frac{\vdash \varphi}{\vdash \mathsf{A}\varphi}$$

(that is, the rule above can only be applied to premisses already proven as theorems).

Definition 11. The semantics for **S5AR** is given by Kripke models $M = \langle W, R, @, V\rangle$ such that W is a non-empty set, R is an equivalence relation over W, $@ \in W$ is the *actual world* and $V : \mathcal{P} \times W \to \{0,1\}$. The semantics over the **S5** fragment is defined inductively as usual, where $M, w \Vdash \Box\varphi$ iff $M, w' \Vdash \varphi$ for every w' such that wRw', and $M, w \Vdash \mathsf{A}\varphi$ iff $M, @ \Vdash \varphi$.

From [Crossley, Humberstone, 1977] we get the following result:

Theorem 5 (Soundness and completeness of **S5AR** w.r.t. Kripke Semantics)**.** *For every formula φ over Σ_m^{A}: $\vdash_{\mathbf{S5AR}} \varphi$ if and only if $\models_{\mathbf{S5AR}} \varphi$.*

It is immediate to see, by using Definition 11, that not only axiom $(\mathsf{Ax4})$, but also property (2) of Proposition 1 is not valid anymore. Indeed,

Proposition 5. None of the following schemas hold in **S5AR**:

$$(i)\ \Box\varphi \to \mathsf{A}\varphi \qquad (ii)\ \Box\neg\varphi \to \neg\mathsf{A}\varphi \qquad (iii)\ \Box\varphi \to \mathsf{A}\Box\varphi \qquad (iv)\ \mathsf{A}\Box\varphi \to \Box\varphi$$

From all the considerations above, the Ivlev-like version of **S5AR**, which will be called $T45ARm$, requires some adjustments to be made to the logic $T45Am$ introduced in Section 5. First observe that, since $(\mathsf{Ax4})$ does not hold in **S5AR**, by Proposition 5 (i) and (ii), the restrictions on the snapshots $z_2 \leq z_4$ and $z_3 \sqcap z_4 = 0$, which are a direct consequence of $(\mathsf{Ax4})$, are no longer valid in $T45ARm$. From this, the domain of the swap structure for $T45ARm$ will be the following:

$$V_m^{\mathsf{A}R} = \{z \in \{0,1\}^4 \ :\ z_2 \leq z_1 \ \text{ and } \ z_1 \sqcap z_3 = 0\} \simeq \{\bar{T}_1, \bar{T}_0, t_1, t_0, f_1, f_0, \bar{F}_1, \bar{F}_0\}$$

such that $\bar{T}_1 = (1,1,0,1)$, $\bar{T}_0 = (1,1,0,0)$, $\bar{F}_1 = (0,0,1,1)$ and $\bar{F}_0 = (0,0,1,0)$ (and the other values, t_1, t_0, f_1, f_0, are as in V_m^{A}).

Definition 12 (The logic $T45ARm$)**.** Let $T45ARm$ be the logic induced by the Hilbert calculus over Σ_m^{A} obtained by removing axiom schema $(\mathsf{Ax4})$ from the calculus for $T45Am$ (recall Definition 7). In other words, $T45ARm$ is obtained by extending the calculus for $T45m$ (recall Definition 4) with axiom schemas $(\mathsf{Ax1})$–$(\mathsf{Ax3})$ and $(\mathsf{Ax5})$ from **S5A** (recall Definition 5) plus $(\mathsf{AxNB@})$, $(\mathsf{AxD@})$, $(\mathsf{Ax@1})$ and $(\mathsf{Ax@2})$. Thus, MP is only inference rule in $T45ARm$.

Because of Proposition 5 and Definition 12, the only changes to be introduced in the formal definition of the multioperators over $\mathcal{M}_{45AR}$, the Nmatrix for $T45ARm$ with domain $V_m^{\mathsf{A}R}$, concern the multioperator $\Box$.

Definition 13. Let $\mathcal{M}_{45AR}$ be the Nmatrix over Σ_m^{A} with domain $V_m^{\mathsf{A}R}$, set of designated values $D_m^{\mathsf{A}R} = \{z \in V_m^{\mathsf{A}R} \ :\ z_1 = 1\} = \{\bar{T}_1, \bar{T}_0, t_1, t_0\}$ and multioperators defined by means of clauses below.

$$\text{(I')}\quad z\bar{\rightarrow}w = \{u \in V_m^{\mathsf{A}R} \;:\; u_1 = z_1 \Rightarrow w_1,\ u_3 = z_2 \sqcap w_3,\ u_4 = z_4 \Rightarrow w_4,\ z_3 \sqcup w_2 \leq u_2 \leq (z_2 \Rightarrow w_2) \sqcap (w_3 \Rightarrow z_3)\};$$

$$\text{(II')}\quad \bar{\neg} z = \{(\sim z_1, z_3, z_2, \sim z_4)\};$$

$$\text{(III')}\quad \bar{\Box} z = \{u \in V_m^{\mathsf{A}R} \;:\; u_1 = u_2 = z_2,\ u_3 = \sim z_2\};$$

$$\text{(IV')}\quad \bar{\mathsf{A}} z = \{(z_4, z_4, \sim z_4, z_4)\}.$$

From this the following multioperators are obtained:

$$\text{(V')}\quad z\hat{\wedge}w = \{u \in V_m^{\mathsf{A}R} \;:\; u_1 = z_1 \sqcap w_1,\ u_2 = z_2 \sqcap w_2,\ u_4 = z_4 \sqcap w_4,\ z_3 \sqcup w_3 \leq u_3 \leq (z_2 \Rightarrow w_3) \sqcap (w_2 \Rightarrow z_3)\};$$

$$\text{(VI')}\quad z\hat{\vee}w = \{u \in V_m^{\mathsf{A}R} \;:\; u_1 = z_1 \sqcup w_1,\ u_3 = z_3 \sqcap w_3,\ u_4 = z_4 \sqcup w_4,\ z_2 \sqcup w_2 \leq u_2 \leq (z_3 \Rightarrow w_2) \sqcap (w_3 \Rightarrow z_2)\}.$$

Observe that the formal specifications of the multioperators in $\mathcal{M}_{45AR}$ are as in $\mathcal{M}_{45A}$, with the following difference:

$$\bar{\Box} z = (z_2, z_2, \sim z_2, \_).$$

The possibility multioperator $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$ has the following form in $\mathcal{M}_{45AR}$, for every $z \in V_m^{\mathsf{A}R}$:

$$\bar{\Diamond} z = \bar{\neg}\bar{\Box}\bar{\neg} z = \bar{\neg}\bar{\Box}(\sim z_1, z_3, z_2, \sim z_4) = \bar{\neg}(z_3, z_3, \sim z_3, \_) = (\sim z_3, \sim z_3, z_3, \_).$$

This produces the following tables:

$\hat{\rightarrow}$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$
$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$
$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	t_1	t_1	f_1	f_1	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_1$
t_1	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_0, t_0$	f_1	f_0	f_1	f_0
t_0	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_1, t_1$	f_1	f_1	f_1	f_1
f_1	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_0, t_0$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_0, t_0$	t_1	t_0
f_0	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_1, t_1$	t_1	t_1
$\bar{F}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$
$\bar{F}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$

z	$\hat{\neg} z$	$\hat{\Box} z$	$\hat{\mathsf{A}} z$	$\hat{\Diamond} z$
$\bar{T}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{T}_1, \bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1, \bar{T}_0$
$\bar{T}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{T}_1, \bar{T}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{T}_1, \bar{T}_0$
t_1	f_0	$\bar{F}_1, \bar{F}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1, \bar{T}_0$
t_0	f_1	$\bar{F}_1, \bar{F}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{T}_1, \bar{T}_0$
f_1	t_0	$\bar{F}_1, \bar{F}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1, \bar{T}_0$
f_0	t_1	$\bar{F}_1, \bar{F}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{T}_1, \bar{T}_0$
$\bar{F}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{F}_1, \bar{F}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{F}_1, \bar{F}_0$
$\bar{F}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{F}_1, \bar{F}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1, \bar{F}_0$

$\hat{\wedge}$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$
$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$
$\bar{T}_0$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_0$	t_0	t_0	f_0	f_0	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$
t_1	t_1	t_0	t_1	t_0	$\bar{F}_1, f_1$	$\bar{F}_0, f_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$
t_0	t_0	t_0	t_0	t_0	$\bar{F}_0, f_0$	$\bar{F}_0, f_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$
f_1	f_1	f_0	$\bar{F}_1, f_1$	$\bar{F}_0, f_0$	$\bar{F}_1, f_1$	$\bar{F}_0, f_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$
f_0	f_0	f_0	$\bar{F}_0, f_0$	$\bar{F}_0, f_0$	$\bar{F}_0, f_0$	$\bar{F}_0, f_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$
$\bar{F}_1$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$
$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$

$\hat{\vee}$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$
$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$
$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$
t_1	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_1, t_1$	t_1	t_1
t_0	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_0, t_0$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_0, t_0$	t_1	t_0
f_1	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_1, t_1$	f_1	f_1	f_1	f_1
f_0	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1, t_1$	$\bar{T}_0, t_0$	f_1	f_0	f_1	f_0
$\bar{F}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	t_1	t_1	f_1	f_1	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_1$
$\bar{F}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	t_1	t_0	f_1	f_0	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$

It is immediate to see that the following formulas are valid w.r.t. $\mathcal{M}_{45AR}$:

(i) $\mathsf{A}(\mathsf{A}\varphi \leftrightarrow \varphi)$ (iii) $\Box\mathsf{A}\varphi \leftrightarrow \mathsf{A}\varphi$

(ii) $\mathsf{A}\mathsf{A}\varphi \leftrightarrow \mathsf{A}\varphi$ (iv) $\Box\neg\mathsf{A}\varphi \leftrightarrow \neg\mathsf{A}\varphi$

In turn, the following formulas do not hold w.r.t. $\mathcal{M}_{45AR}$:

(v) $\Box\varphi \to \mathsf{A}\varphi$ (vii) $\mathsf{A}\Box\varphi \to \Box\varphi$

(vi) $\Box\varphi \to \mathsf{A}\Box\varphi$

In order to see this take $\varphi = p$ (a propositional variable) and consider the following[7]:

1. for (v), a valuation v over $\mathcal{M}_{45AR}$ such that $v(p) = \bar{T}_0$. Then $v(\Box p) \in \{\bar{T}_1, \bar{T}_0\}$ and $v(\mathsf{A}p) = \bar{F}_0$. From this, $v(\Box p \to \mathsf{A}p) = \bar{F}_{1-i}$, where $v(\Box p) = \bar{T}_i$ $(i = 0, 1)$.

2. for (vi), a valuation v over $\mathcal{M}_{45AR}$ such that $v(p) \in \{\bar{T}_1, \bar{T}_0\}$ and $v(\Box p) = \bar{T}_0$. Then, $v(\mathsf{A}\Box p) = \bar{F}_0$, and so $v(\Box p \to \mathsf{A}\Box p) = \bar{F}_1$.

3. for (vii), a valuation v over $\mathcal{M}_{45AR}$ such that $v(p) \notin \{\bar{T}_1, \bar{T}_0\}$ and $v(\Box p) = \bar{F}_1$. Then, $v(\mathsf{A}\Box p) = \bar{T}_1$, and so $v(\mathsf{A}\Box p \to \Box p) = \bar{F}_1$.

By simplifying the corresponding proof of Theorem 3 for $T45Am$, the following result is obtained:

Theorem 6 (Soundness of $T45ARm$ w.r.t. $\mathcal{M}_{45AR}$)**.**
Let $\Gamma \cup \{\varphi\}$ be a set of formulas over signature Σ_m^{A}. Then: $\Gamma \vdash_{T45ARm} \varphi$ implies that $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_{45AR}} \varphi$.

[7] It is worth noting that the countermodels given below are the unique ones that refute (v)–(vii). They were obtained, along with the truth tables for $T45Am$ and $T45ARm$, using a simple PROLOG program that we developed by adapting the one in [Coniglio, 2025a, Appendix].

The proof of completeness of $T45ARm$ w.r.t. $\mathcal{M}_{45AR}$ will also be obtained by adapting the corresponding one for $T45Am$. However, since the snapshots of the Nmatrix $\mathcal{M}_{45AR}$ are different to the ones for $\mathcal{M}_{45A}$ (since (Ax4) is no longer derivable), Propositions 2, 3 and 4 require small adjustments.

Proposition 6. In $T45ARm$ the following holds:
(1) $\bar{\theta}_{\bar{T}_1}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \Box\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$;
(2) $\bar{\theta}_{\bar{T}_0}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \Box\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$;
(3) $\bar{\theta}_{t_1}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$;
(4) $\bar{\theta}_{t_0}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$;
(5) $\bar{\theta}_{f_1}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \neg\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\neg\varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$;
(6) $\bar{\theta}_{f_0}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \neg\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\neg\varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$;
(7) $\bar{\theta}_{\bar{F}_1}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \Box\neg\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\neg\varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \Box\neg\varphi \wedge \mathsf{A}\varphi$;
(8) $\bar{\theta}_{\bar{F}_0}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \Box\neg\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$ is equivalent to $\neg\varphi \wedge \neg\Box\varphi \wedge \Box\neg\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\varphi$.

Proof. It is easily obtained from the one for Proposition 2, with suitable adaptations. ∎

Proposition 7. Let Δ be a δ-saturated set in $T45ARm$. Then, it satisfies the properties of a δ-saturated set in $T45Am$ stated in Proposition 3 with exception of (17) (which does not hold in general in $T45ARm$) and (1) and (21), which now are stated as follows:
(1') Δ is a closed theory in $T45ARm$, that is: $\psi \in \Delta$ iff $\Delta \vdash_{T45ARm} \psi$.
(21') For every ψ, exactly one of the formulas $\bar{\theta}_a(\psi)$ belongs to Δ, for $a \in V_m^{\mathsf{AR}}$.

Proof. The proof follows from that of Proposition 3, with suitable adaptations (which require considering a few additional cases for item (21')). ∎

Remark 5. Recall the formulas $\gamma_i(p)$ introduced in Remark 4, as well as the formulas $L_x(\varphi)$ given in Definition 9. By Proposition 7 it follows that, for every $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in V_m^{\mathsf{AR}}$, $\bar{\theta}_a(\varphi)$ is equivalent, in $T45ARm$, to the formula $\bigwedge_{i=1}^4 L_{a_i}(\gamma_i(\varphi))$.

Proposition 8 (Truth lemma for $T45ARm$)**.** Let Δ be a δ-saturated set in $T45ARm$. Let $\bar{v}_\Delta : For(\Sigma) \to V_m^{\mathsf{AR}}$ be a function defined as follows: $\bar{v}_\Delta(\psi) = a$ iff $\bar{\theta}_a(\psi) \in \Delta$. Then, $\bar{v}_\Delta$ is a well-defined function, and it is a valuation over the Nmatrix $\mathcal{M}_{45AR}$ such that, for every formula ψ, $\bar{v}_\Delta(\psi) \in D_m^{\mathsf{AR}}$ iff $\psi \in \Delta$.

Proof. It follows easily by adapting the proof of Proposition 4. Indeed, the function $\bar{v}_\Delta$ is well-defined, now as a consequence of Proposition 7(21'). By Remark 5 and by Proposition 7,

$$\bar{v}_\Delta(\varphi) = a \text{ iff, for } 1 \leq i \leq 4\text{: } \gamma_i(\varphi) \in \Delta \text{ iff } a_i = 1.$$

From this, the proof that $\bar{v}_\Delta$ is a valuation over the Nmatrix $\mathcal{M}_{45AR}$ follows by adapting the one given above for Proposition 4, just by modifying the case of $\Box$, the only multioperator of $\mathcal{M}_{45A}$ which was modified. Thus, let $\bar{v}_\Delta(\varphi) = a$ and $\bar{v}_\Delta(\Box\varphi) = b$. As in the proof of Proposition 4, we obtain that $b_1 = a_2$, $b_2 = a_2$, and $b_3 = {\sim}a_2$. From this, it follows that $\bar{v}_\Delta(\Box\varphi) \in \bar{\Box}\bar{v}_\Delta(\varphi)$. Therefore the function $\bar{v}_\Delta$ is, indeed, a valuation over the Nmatrix $\mathcal{M}_{45AR}$ such that $\bar{v}_\Delta(\psi) \in D_m^{\mathsf{AR}}$ iff $\psi \in \Delta$, for every formula ψ. ∎

Using the latter result the completeness theorem can be easily proven, by adapting the proof for $T45Am$:

Theorem 7 (Completeness of $T45ARm$ w.r.t. $\mathcal{M}_{45AR}$)**.**
Let $\Gamma \cup \{\varphi\}$ be a set of formulas over signature Σ_m^{A}. Then: $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_{45AR}} \varphi$ implies that $\Gamma \vdash_{T45ARm} \varphi$.

As in the case of $T45Am$, it is easy to prove that $T45ARm$ is, in fact, a non-normal version of **S5AR**:

Corollary 2. Let $T45ARm^+$ be the logic obtained from $T45ARm$ by adding the global rules

$$(Nec\Box)\ \frac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi} \qquad\qquad (Nec\mathsf{A})\ \frac{\vdash \varphi}{\vdash \mathsf{A}\varphi}$$

Then, $T45ARm^+$ coincides with **S5AR**. In other words, $T45ARm$ is a non-normal version of **S5AR**.

7. Concluding remarks

This paper intends to contribute to the discussion about actuality from the point of view of formal logic, based on a novel perspective: that of Ivlev-like modal logics. Thus, we propose two systems, $T45Am$ and $T45ARm$, each one with an intuitive semantics based on a 6-valued Nmatrix, which constitute non-normal and hyperintensional versions of two well-known systems for actuality proposed in 1977 by Crossley and Humberstone. The systems proposed here demonstrate that it is possible to provide an alternative to possible-world semantics for the modal logic of actuality. This shows that it is relevant to consider objective alternatives to modal semantics without possible worlds[8].

These systems, which combine technical simplicity with expressive richness, demonstrate the fruitfulness of Ivlev's innovative ideas in modal logic. His legacy in formal logic and philosophy is yet to be fully appreciated and explored.

Acknowledgements. We would like to thank the anonymous referee for the valuable feedback, which helped us improve the clarity and quality of this paper. Antezana was supported by a PhD scholarship from the São Paulo Research Foundation (FAPESP, Brazil), grant 2021/01458-7. Coniglio acknowledges support by an individual research grant from the National Council for Scientific and Technological Development (CNPq, Brazil), grant 309830/2023-0. Both authors were supported by the São Paulo Research Foundation (FAPESP, Brazil), thematic project *Rationality, logic and probability – RatioLog*, grant 2020/16353-3.

References

Adams, 1974 – Adams, R.M. "Theories of actuality", *Noûs*, 1974, Vol. 8, No. 3, pp. 211–231.

Antezana, 2025 – Antezana, A. *Actuality modal operators without Kripke semantics: a non-deterministic approach.* Doctoral Thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Brazil, 2025.

Avron, Lev, 2001 – Avron, A., Lev, I. "Canonical propositional Gentzen-type systems", in: *Proceedings of the First International Joint Conference on Automated Reasoning (IJCAR '01).* London: Springer-Verlag, 2001, pp. 529–544.

Carnielli, Coniglio, 2016 – Carnielli, W.A., Coniglio, M.E. *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation.* Volume 40 of *Logic, Epistemology, and the Unity of Science* series. Cham: Springer, 2016. 398+xxiv pp.

Coniglio, 2025a – Coniglio, M.E. "Combining swap structures: the case of Paradefinite Ivlev-like modal logics based on FDE", *Studia Logica*, 2025, Vol. 113, No. 2, pp. 273–324.

Coniglio, 2025b – Coniglio, M.E. "Ivlev-like modal logics of formal inconsistency obtained by fibring swap structures", *Studia Logica*, 2025, Vol. 113, No. 4, pp. 955–1024.

Coniglio et al., 2015 – Coniglio, M.E., Fariñas del Cerro, L., Peron, N.M. "Finite non-deterministic semantics for some modal systems", *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 2015, Vol. 25, No. 1, pp. 20–45.

Coniglio et al., 2020 – Coniglio, M.E., Fariñas del Cerro, L., Peron, N.M. "Modal Logic With Non-deterministic Semantics: Part I — Propositional Case", *Logic Journal of the IGPL*, 2020, Vol. 28, No. 3, pp. 281–315.

[8]This fact may have significant philosophical consequences in terms of ontological commitment and, consequently, the underlying metaphysics concerning the contemporary notion of truth. By this we mean: to be true may possibly not be a instantiated state-of-affairs in the actual world.

Coniglio et al., 2022 – Coniglio, M.E., Fariñas del Cerro, L., Peron, N.M. "Modal Logic With Non-deterministic Semantics: Part II — Quantified Case", *Logic Journal of the IGPL*, 2022, Vol. 30, No. 5, pp. 695–727.

Coniglio, Golzio, 2019 – Coniglio, M.E., Golzio, A.C. "Swap structures semantics for Ivlev-like modal logics", *Soft Computing*, 2019, Vol. 23, No. 7, pp. 2243–2254.

Crossley, Humberstone, 1977 – Crossley, J.N., Humberstone, L. "The logic of 'actually'", *Reports on Mathematical Logic*, 1977, Vol. 8, No. 1, pp. 11–29.

Hanson, 2006 – Hanson, W.H. "Actuality, necessity, and logical truth", *Philosophical Studies*, 2006, Vol. 130, No. 3, pp. 437–459.

Hazen et al., 2013 – Hazen, A.P., Rin, B.G., Wehmeier, K.F. "Actuality in Propositional Modal Logic", *Studia Logica*, 2013, Vol. 101, No. 3, pp. 487–503.

Ivlev, 1973 – Ivlev, Yu.V. "Tablitznoe postrojenie propozicionalnoj modalnoj logiki" [Truth-tables for systems of propositional modal logic], *Vest. Mosk. Univ., Seria Filosofia*, 1973, Vol. 6. (In Russian)

Ivlev, 1986 – Ivlev, Yu.V. Soderzhatel'naya semantika modal'noy logiki [Content semantics for modal logic]. Doctoral thesis, defended at Lomonossov Moscow State University. Moscow, 1986. (In Russian)

Ivlev, 1988 – Ivlev, Yu.V. "A semantics for modal calculi", *Bulletin of the Section of Logic*, 1988, Vol. 17, No. 3/4, pp. 114–121.

Ivlev, 2013 – Ivlev, Yu.V. "Generalization of Kalmar's method for quasi-matrix logic", *Logical Investigations*, 2013, Vol. 19, pp. 281–307.

Ivlev, 2024 – Ivlev, Ju.V. "Quasi-matrix (quasi-functional) logic", in: M.E. Coniglio, E. Kubishkina, and D. Zaitsev (eds.), *Many-valued Semantics and Modal Logics: Essays in Honor to Yu.V. Ivlev*, pages 3–51. Volume 485 of *Synthese Library — Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science Series.* Cham: Springer Nature, 2024.

Kaplan, 1979 – Kaplan, D. On the Logic of Demonstratives, *Journal of Philosophical Logic*, 1979, Vol. 8, No. 1, pp. 81–98.

Lewis, 1970 – Lewis, D. Anselm and actuality, *Noûs*, 1970, Vol. 4, No. 2, pp. 175–188.

Loux, 1979 – Loux, M.J. (ed.) *The Possible and the Actual: Readings in the Metaphysics of Modality.* Cornell University Press, Ithaca, N.Y., 1979.

Omori, Skurt, 2016 – Omori, H., Skurt, D. "More modal semantics without possible worlds", *IfCoLog Journal of Logics and their Applications*, 2016, Vol. 3, No. 5, pp. 815–846.

Plantinga, 1974 – Plantinga, A. *The Nature of Necessity.* Clarendon Press, Oxford, England, 1974.

Plantinga, 1976 – Plantinga, A. "Actualism and possible worlds", *Theoria*, 1976, Vol. 42, No. 1–3, pp. 139–160.

Segerberg, 1971 – Segerberg, K. *An Essay in Classical Modal Logic.* Doctoral Thesis, Stanford University, 1971.

Wójcicki, 1984 – Wójcicki, R. *Lectures on propositional calculi.* Wrocław: Ossolineum, Poland, 1984.

Алан Р. Антезана, Марсело Э. Конильо

Действительность без возможных миров: версии логик действительности Кроссли и Хамберстоуна в стиле Ивлева

Алан Р. Антезана
Institute of Philosophy and the Humanities (IFCH),
Centre for Logic, Epistemology and the History of Science (CLE).
State University of Campinas (UNICAMP),
Sérgio Buarque de Holanda 251, Campinas, SP, 13083-859, Brazil.
E-mail: a.r.antezana@gmail.com

Марсело Э. Конильо
Institute of Philosophy and the Humanities (IFCH),
Centre for Logic, Epistemology and the History of Science (CLE).
State University of Campinas (UNICAMP),
Sérgio Buarque de Holanda 251, Campinas, SP, 13083-859, Brazil.
E-mail: coniglio@unicamp.br

Аннотация: Понятие действительности исторически зависимо от понятия возможного мира. Эта статья содержит новый подход к логикам действительности, а именно, мы разработаем описание действительности, которое не зависит от возможных миров. Мы делаем это, применяя недетерминистическое обобщение логических матриц, известное как недетерминистические матрицы (сокращенно — Nматрицы). Следуя новаторским идеям Ивлева, мы предлагаем ненормальную версию хорошо известной системы логики действительности **S5A**, предложенной в 1977 г. Кроссли и Хамберстоуном. Наша система, названная $T45Am$, представлена посредством шестизначной Nматрицы. Шесть элементов (истинностных значений) этой Nматрицы, как и ее мультифункции для связок, допускают интуитивную интерпретацию посредством swap-структур. Установлена непротиворечивость и полнота Гильбертовского исчисления для $T45Am$ относительно ее Nматрицы. Одно из интересных свойств нашей системы состоит в том, что оператор действительности гиперинтенсионален, что позволяет анализировать вопросы, касающиеся действительности, с новой формальной точки зрения.

Ключевые слова: логики действительности, операторы действительности, модальные логики в стиле Ивлева, ненормальные модальные логики, недетерминистические семантики, swap-структуры, гиперинтенсиональность, метафизика

Логические исследования
2026. Т. 32. № 1. С. 80–96
УДК 16

Logical Investigations
2026, Vol. 32, No. 1, pp. 80–96
DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-80-96

Х.К. Кадыг-оол

Истинностные значения в квазифункциональной логике: обобщенный исторический обзор*

Хулербен Кок-оолович Кадыг-оол
Тувинский государственный университет.
Российская Федерация, 667001, г. Кызыл, ул. Колхозная, д. 125а.
E-mail: `hoolerben@yandex.ru`

Аннотация: В статье исследуется история формирования истинностных значений как часть развития квазифункциональной логики. Проанализированы работы Ханса Райхенбаха, Зигмунта Завирского, Николаса Решера, Юрия Васильевича Ивлева, а также некоторых других. Исходной точкой для развития указанного направления логики, очевидно, стал многосторонний анализ проблемы детерминизма. Райхенбах предложил подход на основе математической теории вероятностей и многозначной логики. Истинностные значения получили вероятностную трактовку, впоследствии была введена новая импликация — квазиимпликация, которая определялась с помощью третьего истинностного значения — «недетерминированно». Завирский предложил ограничиться двумя классическими значениями — 1 и 0, при этом фактически сформулировал особое истинностное значение «1 или 0». Впоследствии Н. Решером, Ю.В. Ивлевым, Д. Кернсом были независимо друг от друга предложены разные варианты квазифункциональной логики, во всех концепциях важную роль занимал анализ истинности высказываний. Также в работе рассматриваются релевантные идеи Л. Виттгенштейна, Л. Годдарда. Помимо результатов исторического анализа заявленной темы, в заключении сформулировано несколько вопросов для дальнейшего обсуждения.

Ключевые слова: Юрий Васильевич Ивлев, Ханс Райхенбах, Зигмунт Завирский, Николас Решер, Джон Кернс, квазифункциональная логика, истинностные значения, история логики, вероятностная логика, многозначная логика, модальная логика

Для цитирования: *Кадыг-оол Х.К.* Истинностные значения в квазифункциональной логике: обобщенный исторический обзор // Логические исследования / Logical Investigations. 2026. Т. 32. № 1. С. 80–96. DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-80-96.

* Автор выражает благодарность редакции журнала «Логические исследования», в особенности Н.Е. Томовой, за возможность участия в специальном номере, посвященном памяти моего дорогого, уважаемого Учителя — Юрия Васильевича Ивлева. Также хотелось бы поблагодарить анонимного рецензента за работу над рукописью.

Введение

Оригинальные системы квазифункциональной логики были сформулированы в результате исследований выдающегося отечественного логика, профессора, доктора философских наук Юрия Васильевича Ивлева (1936–2024) ([Ивлев, 1973; Ивлев, 1991] и др.). История квазиматричной логики в той или иной степени освещена в ряде работ ([Ивлев, 2018; Ивлев, 2021; Кадыг-оол, 2013; Кадыг-оол, 2017] и др.), в частности, во многих работах специального сборника [Coniglio et al., 2024] представлены обзоры ее развития.

Настоящая статья представляет собой исследование по истории логики. Целью является рассмотрение формирования и развития одной из ключевых идей квазифункциональной логики — особых истинностных значений, которые, с одной стороны, очевидно, отличаются от истинностных значений в классической логике, с другой — в некотором роде отличаются и от истинностных значений в многозначной или иных направлениях неклассической логики (например, нечеткой). Задачей настоящей работы является историко-логический анализ соответствующих фрагментов логических теорий Ханса Райхенбаха, Зигмунта Завирского, Николаса Решера, Юрия Васильевича Ивлева, а также некоторых других. Выбор указанных ученых продиктован особенностью исторического развития квазифункциональной логики. При этом основной упор будет сделан именно на рассмотрение истинностных значений.

В работе Н. Решера «Многозначная логика» [Rescher, 1969] имеется фрагмент, посвященный квазифункциональным логическим системам. Американский логик указывает на то, что основополагающие принципы подобных систем были сформулированы до него Х. Райхенбахом и З. Завирским. При этом, как указывает Решер, когда он сам пришел к схожим идеям, ему не были знакомы разработки указанных исследователей. Таким образом, можно утверждать, что основные принципы квазифункциональной логики были разработаны Райхенбахом и Завирским (последнему были известны работы немца). Затем они были независимо открыты Н. Решером и Ю.В. Ивлевым. В довольно поздних работах Юрий Васильевич в кратких исторических обзорах также упоминал о вкладе Райхенбаха и Завирского [Ивлев, 2001; Ивлев, 2018], подчеркивая при этом: в трудах указанных исследователей не были сформулированы собственно логические системы, соответствующие понятия были продемонстрированы с помощью примеров [Ивлев, 2018, с. 38], что, несомненно, является справедливым утверждением. Что касается приоритета среди исследований Решера и Ивлева, последний высказал мнение, что именно системы квазифункциональной логики были сформулированы в его работах [Там же, с. 82].

При этом было бы неверно утверждать, что лишь указанные выше ученые развивали рассматриваемое направление. Довольно близкие концепты, определения, термины и т.д. появлялись в работах большего количества исследователей [Goddard, 1960; Kearns, 1981]. Общеизвестно, что детерминизм стал объектом для изучения едва ли не одновременно с появлением философии. Довольно очевидным представляется тот факт, что интенсивное развитие в первой половине XX в. философии, науки в целом и логики в частности стало одной из причин пересмотра многих «старых» проблем, не стал исключением и анализ детерминизма. Так, по моему мнению, можно объяснить появление множества относительно сходных идей, которые впоследствии стали основой для отдельного нового направления — квазифункциональной логики.

Методами настоящего исследования явились историко-логический анализ работ, метод семантических таблиц при определении логических связок, метод представления логических систем в виде аксиоматических исчислений при анализе систем квазифункциональной логики. Также использовались элементы формализованных языков классической пропозициональной логики и пропозициональной алетической модальной логики. Определяются они стандартным образом. Иные требуемые определения приводятся по ходу изложения материала.

Квазифункциональная, или недетерминистская (non-deterministic),[1] логика во второй половине XX в. и в наши дни является объектом разнообразных исследований для множества ученых ([Avron, Zamansky, 2011; Coniglio, Da Cruz Silvestrini, 2014; Omori, Skurt, 2016; da Costa, Alves 1977] и мн. др.), отдельно хотелось бы еще раз отметить специальный сборник, посвященный трудам Ю.В. Ивлева [Coniglio et al., 2024].

1. Ханс Райхенбах и Зигмунт Завирский

В своей монографии «Квазиматричная (квазифунциональная) логика» Ю.В. Ивлев так определил принцип квазифункциональности (квазидетерминизма, ограниченного детерминизма):

> ...в природе, социуме, познании между явлениями имеет место не только отношение однозначной обусловленности, но и отношение неоднозначной обусловленности, т.е., в частности, определенная причина может вызывать не только определенное следствие, но и, при одних и тех же условиях, в одном случае, одно

[1] Договоримся понятия «квазиматричная логика», «квазифунциональная логика» и «недетерминистская логика» в настоящей статье использовать как синонимичные [Grigoryev, Pethrukhin, 2024, p. 93].

> определенное, из нескольких возможных, следствие, а в другом случае — другое [Ивлев, 2018, с. 3].

Как было указано ранее, истоки квазифункциональной логики стоит искать в работах Х. Райхенбаха и З. Завирского. Так, с философско-методологической и логико-методологической точек зрения необходимость новой логики в трудах указанных ученых ожидаемо вытекала из анализа проблемы детерминизма. В результате исследований Райхенбах и Завирский предложили разные подходы.

Немецкий ученый в своем выступлении на Международном философском конгрессе (2–7 сентября 1934 г., Прага, сборник был выпущен в 1936 г.) отметил: представление о том, что все природные события происходят по строгим, заранее известным правилам, является вымыслом. Так, законы природы выражаются в форме импликаций $A \to B$, при этом полное знание условий антецедента, т.е. A, «совершенно невозможно» [Reichenbach, 1936, p. 163]. Таким образом, исследователи могут лишь устанавливать вероятностную причинность между A и B, при том что нет никакой гарантии, что указанная вероятность может достигать в природе значения 1 [Ibid., p. 164–165].

Второй источник появления понятия «вероятности» в процессе познания — индукция (на основе опытных данных). Чем больше выборка наблюдаемых случаев, тем выше вероятность корректности вывода по индукции. Тем не менее по своей сути подобное рассуждение всегда остается «вероятностно-теоретическим способом умозаключения» [Ibid., p. 165]. Невероятностными в подобной трактовке могут быть только лишь те события, которые достоверно случились в прошлом[2] [Ibid.].

Указанная теория вывода не может быть формализована средствами обычной двузначной логики. 1 и 0 должны быть заменены шкалой значений истинности, соответствующей вероятности [Ibid., p. 167].

Вскоре после рассмотренного доклада Х. Райхенбах выпустил несколько работ, в которых более подробно рассматривается вероятностная логика ([Reichenbach, 1934; Reichenbach, 1937] и др.). Немецкий логик указал на теснейшую связь математических и логических «фрагментов» в новом исчислении. Судя по всему, в связи с обозначенной выше проблемой соотношения импликации и реальных событий определена «вероятностная импликация»: 1) $\forall x, y(x \in A \to_p y \in B)$, что в естественном языке можно записать, как «для всяких x и y: если x является элементом множества A,

[2] При этом, как тут же указывает сам Райхенбах, и события прошлого могут вызывать сомнения и быть по своей сути вероятностными [Ibid.].

то с вероятностью p y является элементом B». Указанное определение можно задать еще двумя способами: 2) $A \to_p B$ и 3) $P(A, B) = p$. Последнее может быть прочитано, как «вероятность от A до B равна p». Определения 1–3 — эквивалентны [Reichenbach, 1937, p. 276].

Выше вскользь упоминалось о тесной связи математических и логических аспектов нового исчисления. Переход от математики к логике происходит через понимание «вероятности» как обобщения истины, поскольку последняя, в свою очередь, является свойством высказываний [Ibid., p. 322]. Наконец, встает вопрос о соотношении вероятностной логики и классической, двузначной. Райхенбах утверждал, что можно выбрать два пограничных вероятностных значения, например, p_1 и p_2. Так, высказывания, чья вероятность выше или равна p_1, могли бы считаться истинными. Соответственно, высказывания с вероятностью ниже или равной p_2 могли бы являться ложными. Высказывания с вероятностью меньше p_1 и выше p_2 игнорируются [Ibid., p. 330] (если требуется двузначная логика). Также последние высказывания являются недетерминированными [Ibid.].

Райхенбах высказал мнение, что двузначная логика всегда является приблизительной:

> ...двузначная логика... применима исключительно в контексте аппроксимации. Эпистемология, которая упускает это из виду, рискует споткнуться о безлюдные высоты чистой идеализации [Ibid., p. 333].

По мнению немца, «система знаний написана на языке вероятностной логики» [Ibid.].

В дальнейших работах указанные идеи получили развитие. Была рассмотрена особая логическая связка — квазиимпликация. Ее введение, как указывал Райхенбах, вытекает из анализа квантовой механики. Допустим, имеется импликация двух высказываний: «выполнено измерение m_p» и «прибор показал значение p_1», т.е. $m_p \to p_1$. Если антецедент и консеквент будет связывать обычная импликация, сложное высказывание может быть истинным даже при ложном m_p (т.е. получается, что прибор может показать некое значение, даже если измерение не выполнено). Подобные высказывания может связывать только особенная связка, ее определение (обозначим ее «$\to_q$»):

$\to_q$	T	F
T	T	F
F	I	I

Таким образом, квазиимпликация Райхенбаха исключает описанную выше возможность, а также случай, когда оба высказывания являются ложными [Reichenbach, 1944, p. 168]. Несмотря на то, что простые высказывания имеют два истинностных значения, третье является необходимым для определения квазиимпликации.

Вероятностная логика Х. Райхенбаха подверглась критическому анализу в работах Зигмунта Завирского[3]. Идеи, связанные с особыми истинностными оценками, были опубликованы в рамках доклада в сборнике трудов Международного конгресса философии науки[4] [Zawirsky, 1935].

Польский логик указывал на одну из возможностей построения вероятностной логики: без введения дополнительных истинностных значений, т.е. без многозначности. Так, каждое высказывание в n-значной логике должно рассматриваться как один класс $n-1$ двузначных высказываний.

Например, сформулирована пятизначная логика со значениями $\{0, 1/4, 2/4, 3/4, 1\}$. Пусть $p, q = 2/4$. Тогда могут быть несколько вариантов соответствующих классов, в которых будут лишь классические значения 1 и 0 (далее использована оригинальная нотация З. Завирского):

1) $p = (0, 0, 1, 1)$, $q = (0, 0, 1, 1)$;

2) $p = (1, 1, 0, 0)$, $q = (0, 0, 1, 1)$;

3) $p = (0, 0, 1, 1)$, $q = (1, 0, 1, 0)$.

Допустим, требуется определить дизъюнкцию. Тогда, очевидно, возможны три варианта:

1) $p \vee q = (0 \vee 0, 0 \vee 0, 1 \vee 1, 1 \vee 1) = (0, 0, 1, 1)$;

2) $p \vee q = (1 \vee 0, 1 \vee 0, 0 \vee 1, 0 \vee 1) = (1, 1, 1, 1)$;

3) $p \vee q = (0 \vee 1, 0 \vee 0, 1 \vee 1, 1 \vee 0) = (1, 0, 1, 1)$.

Значение дизъюнкции в первом случае с помощью значений вышеуказанной пятизначной логики может быть представлено как $2/4$, во втором — 1, в третьем — $3/4$.

В определенном смысле, на мой взгляд, можно утверждать о формировании двух парадигм формализации недетерминированных высказываний (прежде всего описывающих природные процессы). Обе являются вероятностными по своей сути. При этом в первой (Х. Райхенбаха) истинностные оценки классической логики по факту оказались упрощением, далеким от реальности. Во второй (З. Завирского) утверждалось о достаточности 1 и 0 для выражения истинности любого высказывания.

[3] Стоит отметить, что исследования немецкого ученого вызвали заметную дискуссию, в том числе обширную критику [Eberhardt, Glymour, 2011, p. 377].

[4] Далее буду опираться на перевод указанного доклада на английский язык в [Szumilewicz-Lachman, 1994].

2. Николас Решер

В статье 1962 г. «Квази-истинностные функциональные системы пропозициональной логики» [Rescher, 1962] Н. Решер представил квазиистинностные функциональные системы пропозициональной логики. Анализируя высказывания вроде «Если $x > 5$, то $x > 3$», американский логик пришел к выводу, что единственного истинностного значения в таблице истинности для оценки приведенного утверждения недостаточно. Таким образом, в новой логике в некоторых местах в табличном определении могут быть несколько истинностных оценок как бы одновременно.

Как было упомянуто выше, Решер не был знаком с трудами Райхенбаха и Завирского, поэтому он указал в статье, что подобные логики никогда ранее не были представлены [Ibid., p. 2].

В рамках системы Q были определены разные варианты импликации с учетом особенных истинностных оценок. Например, два варианта импликации:

$p \to q$	1	0
1	1	0
0	$(1,0)$	$(1,0)$

Истинностные значения в скобках означают, что одно из них может быть присвоено переменной в различных конкретных случаях, в зависимости от обстоятельств. Второе возможное определение импликации:

$p \to q$	1	0
1	$(1,0)$	0
0	$(1,0)$	$(1,0)$

Определения остальных связок, по мнению Решера, очевидны. Автор привел несколько примеров. Пусть $p = (1,0)$, $q = 1$, $r = 0$. Тогда $\neg p = (1,0)$, $p \wedge q = (1,0)$, $p \wedge r = 0$, $p \vee q = 1$, $p \vee r = (1,0)$. Нетрудно заметить сходство определений с подходом З. Завирского. Позднее на это обратил внимание и сам Решер[5] [Rescher, 1969, p. 168]. Также американец указал на практически идентичность своего первого определения импликации и квазиимпликации Райхенбаха (см. таблицы выше).

Наконец, Решер сформулировал многозначные логики с истинностным значением I (indeterminate, недетерминированный). Определения логических связок в трехзначной системе M:

[5] По мнению Решера, Завирский, сформулировав свои предложения в докладе, не стал заниматься дальнейшими исследованиями по данному направлению, поэтому его идеи не принесли значимых результатов [Rescher, 1969, p. 168].

p	$\neg p$	$p \wedge q$	T	I	F
T	F	T	T	I	F
I	I	I	I	I	F
F	T	F	F	F	F

$p \vee q$	T	I	F	$p \to q$	T	I	F
T	T	T	T	T	T	I	F
I	T	I	I	I	I	I	I
F	T	I	F	F	I	I	I

Если значение I заменить на $(1,0)$, то получится система Q.

3. Юрий Васильевич Ивлев

Ю.В. Ивлев в своей первой работе по квазифункциональной логике [Ивлев, 1973] поставил задачу определить табличным способом алетические модальности — для этого нужно было сформулировать «естественный смысл» операторов «возможно, что» и «необходимо, что». Потребовалось особое истинностное значение — «может быть истинно, а может быть — ложно», сокращенно: «и/л».

В статье были приведены следующие пояснения:

— если p истинно, то p — возможно, отсюда высказывание $\Diamond p$ будет истинным, также в данном случае p может быть необходимым или ненеобходимым, т.е. $\Box p =$ и/л;

— если p ложно, то $\Diamond p =$ и/л, при этом $\Box p$ будет ложным.

Указанные пояснения и явились, согласно версии Ю.В. Ивлева, «естественным смыслом» операторов «возможно, что» и «необходимо, что» [Там же, с. 51]. Соответственно, были даны табличные определения:

p	$\Diamond p$	$\Box p$
и	и	и/л
л	и/л	л

Далее была сформулирована пропозициональная модальная логика $ЛM_0$. При анализе формул составное истинностное значение «и/л» как бы расщепляет таблицу на дополнительные строки, когда требуется рассмотреть отдельно случаи для «истины» и «лжи».

Юрий Васильевич отдельно подчеркнул, что значение «и/л» не является третьим истинностным значением, соответственно, $ЛM_0$ не является многозначной логикой [Там же, с. 54]. В данном случае, на мой взгляд, можно указать на определенную схожесть с идеями З. Завирского. Таким образом, в $ЛМ_0$ возможно не только табличным способом определять модальные операторы, но и использовать при этом только два истинностных значения: 1 и 0.

Довольно похожее табличное определение оператора «возможности» было приведено в работе Леонарда Годдарда [Goddard, 1960]. На мой взгляд, уместно упомянуть, что одним из главных объектов логических изысканий австралийского ученого были парадоксы, решение которых, по мнению Годдарда, можно было достичь вне пределов классической логики [Sylvan, 1992, p. 7]. Помимо этого, он указывал на проблемы выявления логической формы высказываний в естественном языке. Более конкретно Годдард указывал на несостоятельность, по его мнению, идеи, что логическая форма является репрезентацией структуры факта (эмпирического или иного) [Sylvan, 1992, p. 38]. В действительности нахождение логической формы является отображением одной языковой структуры в другую. Австралиец назвал подобный подход метафизическим. Соответственно, поиск корректной логической формы сводится к поиску корректных условий истинности. Так, неверно полагать, что логическая форма детерминирует истинность конкретных высказываний. Разные высказывания, которые на первый взгляд имеют одинаковую логическую форму, содержательно могут приводить и к корректным, и к некорректным рассуждениям по одним и тем же схемам. Логическая форма подобных высказываний зависит каждый раз от некоторого контекста [Goddard, 1960, p. 97]. Таким образом, по моему мнению, Годдард в своих исследованиях также отталкивался от проблем, связанных с детерминизмом, при этом делая основной упор на несколько иные аспекты (в отличие от исследователей, упомянутых выше), а именно — на поиске способов наиболее адекватной формализации выражений о реальности.

В частности, австралийский логик сформулировал табличное определение оператора «возможности», исследуя определенные аспекты строгой дизъюнкции. Он обратил внимание, что данной связкой могут быть связаны разные высказывания: в некоторых случаях высказывания по факту могут быть совместимыми по истинности, в иных — это невозможно[6]. Во втором случае в табличном определении связки исключается строчка,

[6]К примеру, имеются два строго-дизъюнктивных высказывания: «Смит намазал на хлеб либо сливочное масло, либо варенье» и «Ваши домашние туфли либо в спальне, либо в ванной». Соответственно, в каждом из приведенных высказываний по свойствам логической связки подразумевается лишь один из вариантов. При этом очевидно, что в первом случае в действительности ничего не мешает Смиту намазать на хлеб оба продукта, если он так и поступит, соответствующее высказывание становится ложным [Goddard, 1960, p. 97].

в которой оба простых высказывания истинны (Годдард использовал символ “$\circ$”):

$p \circ q$		
$\cancel{T}$	$\cancel{F}$	$\cancel{T}$
T	T	F
F	T	T
F	F	F

Австралийский исследователь указал, что «$\circ$» не является истинностно-функциональной константой[7]. Далее Годдард привел «квазиистинностно-

[7]Годдард указал на идеи Л. Виттгенштейна как основу для формулировки приведенных определений [Wittgenstein, 1929]. В данной статье австрийский философ сделал упор на анализе так называемых атомарных высказываний в естественном языке, среди которых могут быть псевдовысказывания, т.е. такие, где используемые термины могут иметь множественные значения. Учитывая данный факт, корректным анализом является логическое исследование самих явлений (a posteriori). У атомарных высказываний не может быть единственной формы, а применяемые методы нахождения логической формы являются довольно грубым представлением выражений естественного языка, когда разнообразие описаний отображается в виде несколько заведомо сформулированных конструкций (в некотором роде априорных). В частности, Виттгенштейн утверждал, что в структуру атомарных высказываний должны входить возможные количественные характеристики некоторого свойства. К примеру, имеются два высказывания: «Браун сейчас сидит в этом кресле» и «Джонс сейчас сидит в этом кресле». Если соединить обычной конъюнкцией две пропозициональные переменные, которыми обозначены приведенные высказывания, то получится такая же обычная соответствующая таблица истинности для конъюнктивной формулы. Если же в переменных учитывать время и место (обозначу тогда оба высказывания вслед за Виттгенштейном переменными «БМВ», «ДМВ», где «Б» и «Д» — сокращения для Брауна и Джонса, соответственно, «М» и «В» — сокращения для характеристик «место» и «время»), тогда получится иная таблица [Ibid., p. 170]:

БМВ	ДМВ
И	Л
Л	И
Л	Л

Первая строчка из обычной таблицы для конъюнкции в данном случае должна быть удалена, поскольку в действительности это невозможно (очевидно, имеется в виду то, что два человека не могут одновременно сидеть в одном и том же кресле). Новая таблица подразумевает, что если Браун сейчас сидит в этом кресле, соответственно, ДМВ = 0. Если БМВ = 0, то возможны два варианта: ДМВ = 1 или ДМВ = 0. Легко заметить, что данная таблица фактически подразумевает истинностное значение «1 или 0». Таким образом, судя по всему, Виттгенштейну принадлежит первая попытка формализовать выражения о явлениях реального мира в духе возникшей заметно позже квазифункциональной логики. Также, вероятно, стоит отметить, что целью в данном случае было функциональное определение» [Goddard, 1960, p. 99] оператора «возможности»:

p	$\Diamond p$
T	T
F	T
$\cancel{T}$	$\cancel{F}$
F	F

Таким образом, $\Diamond p$ при $p = 0$ может быть истинным или ложным. Очевидно, что данное определение, как было указано ранее, практически совпадает с определением Ю.В. Ивлева.

Очередной вариант (самый «поздний» из рассматриваемых) квазифункциональных систем с особыми истинностными значениями был представлен Джоном Кернсом [Kearns, 1981]. В статье была поставлена цель сформулировать семантику для модальной логики без понятия «возможный мир». Для этого автор выделил четыре истинностных значения: «истина» и «ложь» в некотором роде распадаются на «необходимо истинные» (T), «случайно истинные» (t), «необходимо ложные» (или невозможные) (F) и «случайно ложные» (f). Исходные логические связки: отрицание, дизъюнкция и оператор «необходимости» (остальные связки и оператор вводятся через стандартные определения). Поскольку очевидно, что определения бинарных связок являются громоздкими, приведу лишь определения для модальных операторов (определение для отрицания является стандартным) [Ibid.]:

A	$\Box A$	$\Diamond A$
T	T, t	T, t
t	f, F	T, t
f	f, F	T, t
F	f, F	f, F

Заключение

Особые истинностные значения переменных как важный элемент систем квазифункциональной логики были представлены в работах Х. Райхенбаха и З. Завирского, затем — независимо в работах Л. Годдарда, Н. Решера, Ю.В. Ивлева, Д. Кернса. При этом схожие идеи, в некотором роде предваряющие наработки указанных ученых, были высказаны Л. Виттгенштейном.

формулирование условий для логического анализа событий в действительности (как бы эта сама «действительность» ни понималась).

Своеобразной методологической аксиомой для развития квазифункционального направления стала концепция о недетерминированности реальных, природных событий. Соответственно, для их формализации требовалась новая логика, которая должна была стать более адекватной, по сравнению с классической, для указанной цели. На мой взгляд, данный подход может быть в общих чертах описан цитатой из статьи Л. Виттгенштейна:

> ...высказывание "достигает реальности", и под этим я подразумевал, что формы сущностей содержатся в форме высказывания, которое относится к этим сущностям [Wittgenstein, 1929, p. 169].

Исследователи, внесшие вклад в формирование недетерминистской логики, продемонстрировали определенное многообразие подходов при решении указанной абзацем выше проблемы. Так, Х. Райхенбах осуществил своеобразный синтез теоретико-вероятностного раздела математики и логики. При этом под последней понимались и относительно новые (на тот момент) направления, в частности, многозначная логика. З. Завирский предложил ограничиться «классическими» значениями 1 и 0, предвосхитив особые истинностные значения в последующих исследованиях. Впоследствии, как это было указано ранее, множество значимых результатов в конечном итоге привело к появлению отдельного направления в логике.

Переход от анализа истории формирования истинностных значений к более масштабным логико-методологическим исследованиям квазиматричных систем может предполагать, на мой взгляд, ряд интересных проблем. В теории доказательств одним из важнейших является вопрос о том, насколько больше становится известно об истинном суждении после его доказательства [Трулстра, 1983, с. 7]. Переформулирую его суть относительно квазифункциональной логики. В несколько упрощенном виде проблему можно представить следующим образом: являются ли логический закон, а также доказанное (в одной из систем квазифункциональной логики) истинное суждение детерминированными? В зависимости от ответа, возникают следующие вопросы: «Возможно ли, чтобы высказывание, логическая форма которого является тождественно-истинной формулой некоторой системы недетерминистской логики, как бы перестало быть (при некоторых обстоятельствах неустановленного характера) истинным? Соответственно, может ли теорема стать не-теоремой (при существующем корректном доказательстве)?» И снова, в зависимости от ответа, вытекает следующий вопрос о том, что такое «доказательство» в квазифункциональной логике.

Литература

Ивлев, 1973 – *Ивлев Ю.В.* Табличное построение пропозициональной модальной логики // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 1973. № 6. С. 51–61.

Ивлев, 1991 – *Ивлев Ю.В.* Модальная логика. М.: Изд-во МГУ, 1991. 221 с.

Ивлев, 2001 – *Ивлев Ю.В.* Квазиматричная логика — основа теории фактических (физических) модальностей // Логические исследования: ежегодник. 2001. № 9. С. 103–113.

Ивлев, 2018 – *Ивлев Ю.В.* Квазиматричная (квазифункциональная) логика. М.: Изд-во МГУ, 2018. 191 с.

Ивлев, 2021 – *Ивлев Ю.В.* Квазифункциональные отношения в логике и других областях знания // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2021. № 63. С. 214–235.

Кадыг-оол, 2013 – *Кадыг-оол Х.К.* Истоки квазиматричной логики // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение общественных наук. 2013. № 2. С. 71–74.

Кадыг-оол, 2017 – *Кадыг-оол Х.К.* Матричные и кввазиматричные системы алетической модальной логики. Кызыл: Тип. Аныяк, 2017. 100 с.

Трулстра, 1983 – *Трулстра А.С.* Введение // Справочная книга по математической логике. Ч. IV. Теория доказательств и конструктивная математика. М.: Наука, 1983. С. 7–8.

Avron, Zamansky, 2011 – *Avron A., Zamansky A.* Non-deterministic semantics for logical systems // Handbook of philosophical logic. Vol. 16 / Ed. by D.M. Gabbay, F. Guenthner. Dordrecht; Heidelgerg; London; New York: Springer, 2011. P. 227–304.

Coniglio, Da Cruz Silvestrini, 2014 – *Coniglio M., Da Cruz Silvestrini L.H.* An alternative approach for quasi–truth // Logic Journal of IGPL. 2014. No. 22. P. 387–410.

da Costa, Alves 1977 – *da Costa N.C.A., Alves E.H.* A semantical analysis of the calculi Cn // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1977. Vol. 18. No. 4. P. 621–630.

Eberhardt, Glymour, 2011 – *Eberhardt F., Glymour C.* Hans Reichenbach's probability logic // Handbook of the History of Logic. Volume 10: Inductive Logic / Ed. by S. Hartmann, D.M. Gabbay, J. Woods. Amsterdam: Elsevier, 2011. P. 357–388.

Goddard, 1960 – *Goddard L.* The exclusive 'Or' // Analysis. 1960. Vol. 20. No. 5. P. 97–105.

Grigoryev, Pethrukhin, 2024 – *Grigoryev O., Petrukhin Ya.* Non-deterministic Logic of Generalized Classical Truth Values // Many-valued semantics and modal logics: essays in honour of Yuriy Vasilievich Ivlev / Ed. by M.E. Coniglio, E. Kubyshkina, D. Zaitsev. Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science. Vol. 485. Cham: Springer, 2024. P. 93–109.

Kearns, 1981 – *Kearns J.T.* Modal semantics without possible worlds // Journal of Symbolic Logic. 1981. Vol. 46. No. 1. P. 77–86.

Coniglio et al., 2024 – *Many–valued semantics and modal logics: essays in honour of Yuriy Vasilievich Ivlev* // Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science. Vol. 485 / Ed. by M.E. Coniglio, E. Kubyshkina, D. Zaitsev. Cham: Springer, 2024. 323 p.

Omori, Skurt, 2016 – *Omori H., Skurt D.* More modal semantics without possible worlds // IfCoLog Journal of Logics and Their Applications. 2016. Vol 3. No. 5. P. 815–846.

Reichenbach, 1934 – *Reichenbach H.* Sur les fondements logiques de la probabilitè // Recherches philosophiques. 1934. No. 4. P. 361–370.

Reichenbach, 1936 – *Reichenbach H.* Die bedeutung des wahrscheinlichkeitsbegriffes für die erkenntnis // Actes du huitième Congrès International de Philosophie à Prague, 2–7 septembre 1934. Prague, 1936. P. 163–169.

Reichenbach, 1937 – *Reichenbach H.* Les fondements logiques du calcul des probabilités // Annales de l'I. H. P. 1937. T. 7. No. 5. P. 267–348.

Reichenbach, 1944 – *Reichenbach H.* Philosophic Foundations of Quantum Mechanics. Berkeley and Los Angeles: Univ. of California Press, 1944. 182 p.

Rescher, 1962 – *Rescher N.* Quasi-Truth-Functional Systems of Propositional Logic / The Journal of Symbolic Logic. 1962. Vol. 27. No. 1. P. 1–10.

Rescher, 1969 – *Rescher N.* Many-valued logic. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969. 288 p.

Sylvan, 1992 – *Sylvan R.* Significant moments in the development of Australian logic: in critical appreciation of Leonard Goddard's major contribution // Logique et Analyse. 1992. Vol. 35. No. 137/138. P. 5–44.

Szumilewicz-Lachman, 1994 – *Szumilewicz-Lachman I.* Zygmunt Zawirski: his life and work. With Selected Writings on Time, Logic and The Methodology of Science. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1994. 383 p.

Wittgenstein, 1929 – *Wittgenstein L.* Some Remarks on Logical Form // Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes. 1929. Vol. 9, Knowledge, Experience and Realism. P. 162–171.

Zawirsky, 1935 – *Zawirsky Z.* Les rapports de la logique polyvalente avec le calcul des probabilités // Actes du Congrès international de philosophie scientifique, Sorbonne, Paris, 1935: IV. Induction et probabilité. Paris: Hermann et cie, 1936. P. 40–45.

Khulerben K. Kadyg-ool

Truth values of quasi-functional logic: generalized historical review

Khulerben K. Kadyg-ool
Tuvan State University,
125a Kolkhoznaya, Kyzyl, 667001, Russian Federation.
E-mail: hoolerben@yandex.ru

Abstract: The article is concerned with the historical analysis of special truth values forming within the development of quasi-functional logic. Thus, it implies the review of the works of Hans Reichenbach, Zygmunt Zawirsky, Nicholas Rescher, Yuriy Vasilievich Ivlev and those of some others. Reichenbach's background was a probabilistic approach and many-valued logic. Truth values were interpreted in a probabilistic way, later new implication was presented — quasi-implication, which definition needed third truth value — "indetermined". Zawirsky proposed an approach within two classic logic values – 1 and 0, actually defining special truth value "1 or 0". Later N. Rescher, Yu.V. Ivlev, J. Kearns independently formulated various quasi-functional logics, all of them were concerned with an analysis of an important role of the propositions' truth. Relevant ideas of L. Wittgenstein and L. Goddard are also reviewed. Beyond the results of the analysis of the presented theme, some questions for further research are being formulated in the conclusion.

Keywords: Yuriy Vasilievich Ivlev, Hans Reichenbach, Zygmunt Zawirsky, Nicholas Rescher, John Kearns, quasi-functional logic, truth value, history of logic, probabilistic logic, many-valued logic, modal logic

For citation: Kadyg-ool Kh.K. "Istinnostnye znacheniya v kvazifunktsional'noi logike: obobshchennyi istoricheskii obzor" [Truth values of quasi-functional logic: generalized historical review], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2026, Vol. 32, No. 1, pp. 80–96. DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-80-96. (In Russian)

References

Avron, Zamansky, 2011 – Avron, A., Zamansky, A. "Non-deterministic semantics for logical systems", in: *Handbook of philosophical logic*. Vol. 16, ed. by D.M. Gabbay, F. Guenthner. Dordrecht; Heidelgerg; London; New York: Springer, 2011, pp. 227–304.

Coniglio, Da Cruz Silvestrini, 2014 – Coniglio, M., Da Cruz Silvestrini, L.H. "An alternative approach for quasi–truth", *Logic Journal of IGPL*, 2014, Vol. 22, No. 22, pp. 387–410.

da Costa, Alves 1977 – da Costa, N.C.A., Alves, E.H. "A semantical analysis of the calculi Cn", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1977, Vol. 18, No. 4, pp. 621–630.

Eberhardt, Glymour, 2011 – Eberhardt, F., Glymour, C. "Hans Reichenbach's probability logic", in: *Handbook of the History of Logic. Volume 10: Inductive Logic*, ed. by S. Hartmann, D.M. Gabbay, J. Woods. Amsterdam: Elsevier, 2011, pp. 357–388.

Goddard, 1960 – Goddard, L. "The exclusive 'Or'", *Analysis*, 1960, Vol. 20, No. 5, pp. 97–105.

Grigoryev, Pethrukhin, 2024 – Grigoryev, O., Petrukhin, Ya. "Non-deterministic Logic of Generalized Classical Truth Values", in: *Many-valued semantics and modal logics: essays in honour of Yuriy Vasilievich Ivlev*, ed. by M.E. Coniglio, E. Kubyshkina, D. Zaitsev. Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Vol. 485, Cham: Springer, 2024. pp. 93–109.

Ivlev, 1973 – Ivlev, Yu.V. "Tablichnoe postroenie propozicional'noj modal'noj logiki" [Tabular construction of propositional modal logic], *Vestnik Moskovskogo universiteta. Serija 7: Filosofija.* [Moscow University Bulletin. Series 7: Philosophy], 1973, No. 6, pp. 51–61. (In Russian)

Ivlev, 1991 – Ivlev, Yu.V. *Modal'naja logika.* [Modal logic]. Moscow: Izd-vo MGU, 1991. 221 pp. (In Russian)

Ivlev, 2001 – Ivlev, Yu.V. "Kvazimatrichnaya logika — osnova teorii fakticheskih (fizicheskih) modal'nostej" [Quasi-matrix logic — the basis of the theory of factual (physical) modalities], *Logicheskie issledovaniya: ezhegodnik* [Logical investigations: annual], 2001, No. 9, pp. 103–113.

Ivlev, 2018 – Ivlev, Yu.V. *Kvazimatrichnaja (kvazifunkcional'naja) logika* [Quasimatrix (quasi-functional) logic]. Moscow: Izd-vo MGU, 2018. 191 pp. (In Russian)

Ivlev, 2021 – Ivlev, Yu.V. "Kvazifunkcional'nye otnoshenija v logike i drugih oblastjah znanija" [Quasi-functional relations in logic and other spheres of knowledge], *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofija. Sociologija. Politologija* [Bulletin of Tomsk State University. Philosophy. Sociology. Political Science], 2021, No. 63, pp. 214–235. (In Russian)

Kadyg-ool, 2013 – Kadyg-ool, Kh.K. "Istoki kvazimatrichnoj logiki" [Sources of quasimatrix logic], *Izvestija Akademii nauk Respubliki Tadzhikistan. Otdelenie obschestvennyh nauk* [News of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. Department of Social Sciences], 2013, No. 2, pp. 71–74.

Kadyg-ool, 2017 – Kadyg-ool, Kh.K. *Matrichnye i kvazimatrichnye sistemy aleticheskoj modal'noj logiki* [Matrix and quasi-matrix systems of alethic modal logic]. Kyzyl: Tip. Anyjak, 2017. 100 pp.

Kearns, 1981 – Kearns, J.T. "Modal semantics without possible worlds", *Journal of Symbolic Logic*, 1981, Vol. 46, No. 1, pp. 77–86.

Coniglio et al., 2024 – "Many-valued semantics and modal logics: essays in honour of Yuriy Vasilievich Ivlev", *Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science*, Vol. 485, ed. by M.E. Coniglio, E. Kubyshkina, D. Zaitsev. Cham: Springer, 2024. 323 pp.

Omori, Skurt, 2016 – Omori, H., Skurt, D. "More modal semantics without possible worlds", *IfCoLog Journal of Logics and Their Applications*, 2016, Vol. 3, No. 5, pp. 815–846.

Reichenbach, 1934 – Reichenbach, H. "Sur les fondements logiques de la probabilité" [On the logical foundations of probability], *Recherches philosophiques*, 1934, No. 4, pp. 361–370.

Reichenbach, 1936 – Reichenbach, H. "Die bedeutung des wahrscheinlichkeitsbegriffes für die erkenntnis" [The significance of the concept of probability for knowledge], in: *Actes du huitième Congrès International de Philosophie à Prague, 2–7 septembre 1934* [Proceedings of the Eighth International Congress of Philosophy, Prague, September 2–7, 1934]. Prague, 1936, pp. 163–169.

Reichenbach, 1937 – Reichenbach, H. "Les fondements logiques du calcul des probabilités" [The logical foundations of probability calculus], *Annales de l'I. H. P.* [Annals of the I. H. P.], 1937, Vol. 7. No. 5, pp. 267–348.

Reichenbach, 1944 – Reichenbach, H. *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics.* Berkeley and Los Angeles: Univ. of California Press, 1944. 182 pp.

Rescher, 1962 – Rescher, N. "Quasi-Truth-Functional Systems of Propositional Logic", *The Journal of Symbolic Logic*, 1962, Vol. 27, No. 1, pp. 1–10.

Rescher, 1969 – Rescher, N. *Many-valued logic.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1969. 288 pp.

Sylvan, 1992 – Sylvan, R. "Significant moments in the development of Australian logic: in critical appreciation of Leonard Goddard's major contribution", *Logique et Analyse*, 1992, Vol. 35, No. 137/138, pp. 5–44.

Szumilewicz-Lachman, 1994 – Szumilewicz-Lachman, I. *Zygmunt Zawirski: his life and work. With Selected Writings on Time, Logic and The Methodology of Science.* Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1994. 383 pp.

Trulstra, 1983 – Trulstra, A.S. "Vvedenie" [Introduction], in: *Spravochnaja kniga po matematicheskoj logike. Ch. IV. Teorija dokazatel'stv i konstruktivnaja matematika* [Handbook of mathematical logic. Vol. 4. Proof Theory and Constructive Mathematics]. Moscow: Nauka, 1983, pp. 7–8. (In Russian)

Wittgenstein, 1929 – Wittgenstein L. "Some Remarks on Logical Form", *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes*, 1929, Vol. 9, Knowledge, Experience and Realism. pp. 162–171.

Zawirsky, 1935 – Zawirsky Z. "Les rapports de la logique polyvalente avec le calcul des probabilités" [The relationship between general-purpose logic and the calculus of probabilities], in: *Actes du Congrès international de philosophie scientifique, Sorbonne, Paris, 1935: IV. Induction et probabilité* [Proceedings of the International Congress of Scientific Philosophy, Sorbonne, Paris, 1935: IV. Induction and Probability]. Paris: Hermann et cie, 1936, pp. 40–45.

Логические исследования
2026. Т. 32. № 1. С. 97–111
УДК 16

Logical Investigations
2026, Vol. 32, No. 1, pp. 97–111
DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-97-111

Традиционная логика
Traditional Logic

В.И. Маркин

Система силлогистики, адекватная предложенному Ю.В. Ивлевым переводу категорических высказываний в логику предикатов

Владимир Ильич Маркин
МГУ имени М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: markin@philos.msu.ru

Аннотация: В статье рассматривается система чистой позитивной силлогистики, которая адекватна предложенному Ю.В. Ивлевым переводу категорических высказываний в язык логики предикатов. Согласно этому переводу, при пустом субъекте частные высказывания истинны, а общие ложны. В силлогистическом языке формулируется аксиоматическое исчисление **СИ**. Доказывается метатеорема о рекурсивной эквивалентности данного исчисления и системы фундаментальной силлогистики **ФС**. С этой целью задаются два перевода (из **СИ** в **ФС** и из **ФС** в **СИ**) и обосновываются утверждения о том, что эти переводы являются погружающими операциями. Далее доказывается метатеорема о том, что перевод Ивлева погружает силлогистику **СИ** в классическое исчисление предикатов. Исследуются дедуктивные особенности системы **СИ**. Установлено, что в ней являются валидными 21 модус простого категорического силлогизма, законы диагоналей и законы подчинения логического квадрата, обращения с ограничением для общих высказываний, закон силлогистического тождества для частноутвердительных высказываний. Неправомерными оказываются 3 модуса силлогизма IV фигуры, чистые обращения и закон силлогистического тождества для общеутвердительных высказываний.

Ключевые слова: силлогистика, Ю.В. Ивлев, аксиоматическое исчисление, погружающая операция, логика предикатов, категорические высказывания.

Для цитирования: *Маркин В.И.* Система силлогистики, адекватная предложенному Ю.В. Ивлевым переводу категорических высказываний в логику предикатов // Логические исследования / Logical Investigations. 2026. Т. 32. № 1. С. 97–111. DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-97-111.

1. Введение

В своем первом учебнике по логике, вышедшем в 1976 г. [Ивлев, 1976, с. 108–109], Юрий Васильевич Ивлев предложил следующую интерпретацию категорических высказываний в рамках классической логики предикатов:

$SaP \longmapsto \forall x(Sx \supset Px) \wedge \exists x(Sx \wedge Px)$,
$SeP \longmapsto \forall x(Sx \supset \neg Px) \wedge \exists x(Sx \wedge \neg Px)$,
$SiP \longmapsto \exists x(Sx \wedge Px) \vee \forall x(Sx \supset Px)$,
$SoP \longmapsto \exists x(Sx \wedge \neg Px) \vee \forall x(Sx \supset \neg Px)$.

Она основана на достаточно распространенной трактовке кванторов: квантор общности понимается как «всякий, и хотя бы один», а квантор существования как «хотя бы один, или же всякий».

Эта интерпретация может быть переформулирована эквивалентным образом, но в более простом виде, а также распространена на сложные силлогистические формулы. В результате мы получим перевод $^{\odot}$ формул языка чистой позитивной силлогистики в язык логики предикатов:

$SaP^{\odot} = \forall x(Sx \supset Px) \wedge \exists xSx$,
$SeP^{\odot} = \forall x(Sx \supset \neg Px) \wedge \exists xSx$,
$SiP^{\odot} = \exists x(Sx \wedge Px) \vee \neg\exists xSx$,
$SoP^{\odot} = \exists x(Sx \wedge \neg Px) \vee \neg\exists xSx$,
$(\neg A)^{\odot} = \neg A^{\odot}$,
$(A \bigtriangledown B)^{\odot} = A^{\odot} \bigtriangledown B^{\odot}$, где $\bigtriangledown$ — бинарная пропозициональная связка.

Перевод $^{\odot}$ позволяет явным образом выделить важные семантические особенности трактовки Ю.В. Ивлевым категорических высказываний. При пустом субъекте общие высказывания (SaP и SeP) оказываются ложными, а частные высказывания (SiP и SoP) истинными. Эти условия истинности и ложности существенно отличаются от интерпретаций категорических высказываний в известных силлогистических теориях. Так, в фундаментальной силлогистике принимается нечто противоположное: там при пустом субъекте все общие высказывания истинны, а все частные ложны. В аристотелевско-оккамовском варианте силлогистики ложными оказываются утвердительные высказывания данного типа, а истинными — отрицательные. В силлогистике Больцано высказывания всех четырех типов с пустым субъектом ложны, а в традиционной версии силлогистики предпосылка о непустоте всех терминов принимается изначально.

Таким образом, силлогистика, которую можно построить на основе предложенной Ю.В. Ивлевым интерпретации, весьма оригинальна с семантической точки зрения. В данной работе будет предложено силлогистическое исчисление, адекватное этой интерпретации. В более точных терминах, в силлогистическом языке будет сформулировано аксиоматическое исчисление, которое погружается в классическое одноместное исчисление предикатов посредством перевода $^{\odot}$. Также будут выявлены дедуктивные особенности этого силлогистического исчисления в сравнении с иными системами чистой позитивной силлогистики, в особенности с традиционной силлогистикой.

2. Силлогистика Ивлева и ее связь с фундаментальной силлогистикой

Сформулируем аксиоматическую систему чистой позитивной силлогистики (назовем ее **СИ**), для которой в дальнейшем будет доказана адекватность предложенной Ю.В. Ивлевым интерпретации категорических высказываний.

Аксиомами **СИ** являются формулы следующих типов:

И0. Аксиомы классического исчисления высказываний,
И1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$,
И2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$,
И3. $SaP \supset SiP$,
И4. $(SeP \wedge PaP) \supset PeS$,
И5. $SaP \supset SaS$,
И6. $SeP \supset SaS$,
И7. $(SiP \wedge SaS) \supset PaP$,
И8. $SeP \equiv \neg SiP$,
И9. $SoP \equiv \neg SaP$.

Единственным правилом вывода в **СИ** является *modus ponens*.

Установим сначала метатеоретические отношения между исчислением **СИ** и известной системой **СФ** [Бочаров, Маркин, 2010, с. 66–67], формализующей чистый позитивный фрагмент так называемой фундаментальной силлогистики.

Дедуктивными постулатами **СФ** являются аксиомы следующих типов:

Ф1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$,
Ф2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$,
Ф3. $SeP \supset PeS$,
Ф4. SaS,
Ф5. $SiP \supset SiS$,
Ф6. $SoP \supset SiS$,
Ф7. $SeP \equiv \neg SiP$,
Ф8. $SoP \equiv \neg SaP$,

а также правило вывода *modus ponens*.

Покажем, что исчисления **СИ** и **СФ**, построенные в одном и том же языке, рекурсивно эквивалентны, т.е. погружаются друг в друга. Будем использовать при этом критерий, сформулированный В.А. Смирновым [Смирнов, 2001, с. 393–394]. Согласно данному критерию, нужно задать два перевода — ψ_1 (из **СИ** в **СФ**) и ψ_2 (из **СФ** в **СИ**) — и доказать для них четыре утверждения:

(i) ψ_1-перевод любой теоремы **СИ** доказуем в **СФ**;

(ii) ψ_2-перевод любой теоремы **СФ** доказуем в **СИ**;

(iii) формула $A \equiv \psi_2(\psi_1(A))$ доказуема в **СИ** для любого A;

(iv) формула $A \equiv \psi_1(\psi_2(A))$ доказуема в **СФ** для любого A.

Перевод ψ_1 из **СИ** в **СФ** определим следующим образом:

$\psi_1(SaP) = SaP \wedge SiS$,
$\psi_1(SeP) = SeP \wedge SiS$,
$\psi_1(SiP) = SiP \vee \neg SiS$,
$\psi_1(SoP) = SoP \vee \neg SiS$,
$\psi_1(\neg A) = \neg \psi_1(A)$,
$\psi_1(A \bigtriangledown B) = \psi_1(A) \bigtriangledown \psi_1(B)$, где $\bigtriangledown$ — любая бинарная связка.

Обратный перевод из **СФ** в **СИ** зададим так:

$\psi_2(SaP) = SaP \vee \neg SaS$,
$\psi_2(SeP) = SeP \vee \neg SaS$,
$\psi_2(SiP) = SiP \wedge SaS$,
$\psi_2(SoP) = SoP \wedge SaS$,
$\psi_2(\neg A) = \neg \psi_2(A)$,
$\psi_2(A \bigtriangledown B) = \psi_2(A) \bigtriangledown \psi_2(B)$.

Лемма 1. *Для любой формулы A верно, что если **СИ** $\vdash A$, то **СФ** $\vdash \psi_1(A)$.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, во-первых, что ψ_1-переводы всех аксиом **СИ** доказуемы в **СФ**, а во-вторых, что если ψ_1-переводы формул $A \supset B$ и A доказуемы в **СФ**, то и $\psi_1(B)$ доказуема в **СФ**.

И0. ψ_1-переводы аксиом исчисления высказываний сохраняют данный статус и поэтому содержатся в Ф0.

И1. $\psi_1((MaP \wedge SaM) \supset SaP) = (MaP \wedge MiM \wedge SaM \wedge SiS) \supset (SaP \wedge SiS)$. Выводится из Ф1 $((MaP \wedge SaM) \supset SaP)$ с использованием законов классического исчисления высказываний (КИВ).

И2. $\psi_1((MeP \wedge SaM) \supset SeP) = (MeP \wedge MiM \wedge SaM \wedge SiS) \supset (SeP \wedge SiS)$. Выводится из Ф2 $((MeP \wedge SaM) \supset SeP)$ с использованием законов КИВ.

И3. $\psi_1(SaP \supset SiP) = (SaP \wedge SiS) \supset (SiP \vee \neg SiS)$.

1. $(PeS \wedge SaP) \supset SeS$	Ф2
2. $SeP \supset PeS$	Ф3
3. $(SaP \wedge SeP) \supset SeS$	1,2; КИВ
4. $(SaP \wedge \neg SeS) \supset \neg SeP$	3; КИВ
5. $SeP \equiv \neg SiP$	Ф7
6. $SeS \equiv \neg SiS$	Ф7
7. $(SaP \wedge SiS) \supset SiP$	4,5,6; КИВ
8. $(SaP \wedge SiS) \supset (SiP \vee \neg SiS)$	7; КИВ

И4. $\psi_1((SeP \wedge PaP) \supset PeS) = ((SeP \wedge SiS \wedge PaP \wedge PiP) \supset (PeS \wedge PiP)$. Выводится из Ф3 ($SeP \supset PeS$) с использованием законов КИВ.

И5. $\psi_1(SaP \supset SaS) = (SaP \wedge SiS) \supset (SaS \wedge SiS)$. Выводится из Ф4 ($SaS$) с использованием законов КИВ.

И6. $\psi_1(SeP \supset SaS) = (SeP \wedge SiS) \supset (SaS \wedge SiS)$. Выводится из Ф4 ($SaS$) с использованием законов КИВ.

И7. $\psi_1((SiP \wedge SaS) \supset PaP) = ((SiP \vee \neg SiS) \wedge SaS \wedge SiS) \supset (PaP \wedge PiP)$.

1. $((PiS \vee \neg SiS) \wedge SaS \wedge SiS) \supset (PiS \wedge SaS \wedge SiS)$	теорема КИВ
2. $PiS \supset PiP$	Ф5
3. PaP	Ф4
4. $(PiS \wedge SaS \wedge SiS) \supset (PaP \wedge PiP)$	2,3; КИВ
5. $((PiS \vee \neg SiS) \wedge SaS \wedge SiS) \supset (PaP \wedge PiP)$	1,4; КИВ
6. $PeS \supset SeP$	Ф3
7. $\neg SeP \supset \neg PeS$	6; КИВ
8. $SeP \equiv \neg SiP$	Ф7
9. $PeS \equiv \neg PiS$	Ф7
10. $SiP \supset PiS$	7,8,9; КИВ
11. $((SiP \vee \neg SiS) \wedge SaS \wedge SiS) \supset (PaP \wedge PiP)$	5,10; КИВ

И8. $\psi_1(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \wedge SiS) \equiv \neg(SiP \vee \neg SiS)$. Выводится из Ф7 ($SeP \equiv \neg SiP$) с использованием законов КИВ.

И9. $\psi_1(SoP \equiv \neg SaP) = (SoP \vee \neg SiS) \equiv \neg(SaP \wedge SiS)$. Выводится из Ф8 ($SoP \equiv \neg SaP$) с использованием законов КИВ.

Modus ponens. Если **СФ** $\vdash \psi_1(A \supset B)$ и **СФ** $\vdash \psi_1(A)$, то **СФ** $\vdash \psi_1(B)$. Утверждение справедливо, поскольку $\psi_1(A \supset B) = \psi_1(A) \supset \psi_1(B)$, а *modus ponens* является правилом вывода в **СФ**. ■

Лемма 2. *Для любой формулы A верно, что если **СФ** $\vdash A$, то **СИ** $\vdash \psi_2(A)$.*

Доказательство. Доказывается тем же методом, что и предыдущая лемма.

Ф0. ψ_2-переводы аксиом исчисления высказываний сохраняют данный статус и поэтому содержатся в И0.

Ф1. $\psi_2((MaP \wedge SaM) \supset SaP) = ((MaP \vee \neg MaM) \wedge (SaM \vee \neg SaS)) \supset (SaP \vee \neg SaS)$[1].

1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$	И1
2. $(MaP \wedge SaM) \supset (SaP \vee \neg SaS)$	1; КИВ
3. $SaM \supset MaM$	теорема **СИ**
4. $(SaM \wedge \neg MaM) \supset (SaP \vee \neg SaS)$	3; КИВ
5. $\neg SaS \supset (SaP \vee \neg SaS)$	теорема КИВ
6. $((MaP \vee \neg MaM) \wedge (SaM \vee \neg SaS)) \supset (SaP \vee \neg SaS)$	2,4,5; КИВ

Ф2. $\psi_2((MeP \wedge SaM) \supset SeP) = ((MeP \vee \neg MaM) \wedge (SaM \vee \neg SaS)) \supset (SeP \vee \neg SaS)$.

1. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$	И2
2. $(MeP \wedge SaM) \supset (SeP \vee \neg SaS)$	1; КИВ
3. $SaM \supset MaM$	теорема **СИ**
4. $(SaM \wedge \neg MaM) \supset (SeP \vee \neg SaS)$	3; КИВ
5. $\neg SaS \supset (SeP \vee \neg SaS)$	теорема КИВ
6. $((MeP \vee \neg MaM) \wedge (SaM \vee \neg SaS)) \supset (SeP \vee \neg SaS)$	2,4,5; КИВ

Ф3. $\psi_2(SeP \supset PeS) = (SeP \vee \neg SaS) \supset (PeS \vee \neg PaP)$.

1. $(SeP \wedge PaP) \supset PeS$	И4
2. $SeP \supset (PeS \vee \neg PaP)$	1; КИВ
3. $(PiS \wedge PaP) \supset SaS$	И7
4. $\neg SaS \supset (\neg PiS \vee \neg PaP)$	3; КИВ
5. $PeS \equiv \neg PiS$	И8
6. $\neg SaS \supset (PeS \vee \neg PaP)$	4,5; КИВ
7. $(SeP \vee \neg SaS) \supset (PeS \vee \neg PaP)$	2,6; КИВ

Ф4. $\psi_2(SaS) = SaS \vee \neg SaS$. Теорема КИВ.

Ф5. $\psi_2(SiP \supset SiS) = (SiP \wedge SaS) \supset (SiS \wedge SaS)$. Выводится из И3 $(SaS \supset SiS)$ с использованием законов КИВ.

Ф6. $\psi_2(SoP \supset SiS) = (SoP \wedge SaS) \supset (SiS \wedge SaS)$. Выводится из И3 $(SaS \supset SiS)$ с использованием законов КИВ.

Ф7. $\psi_2(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \vee \neg SaS) \equiv \neg(SiP \wedge SaS)$. Выводится из И8 $(SeP \equiv \neg SiP)$ с использованием законов КИВ.

Ф8. $\psi_2(SoP \equiv \neg SaP) = (SoP \wedge SaS) \equiv \neg(SaP \vee \neg SaS)$. Выводится из И9 $(SoP \equiv \neg SaP)$ с использованием законов КИВ.

Modus ponens. Если **СИ** $\vdash \psi_2(A \supset B)$ и **СИ** $\vdash \psi_2(A)$, то **СИ** $\vdash \psi_2(B)$. Обосновывается так же, как в Лемме 1. ■

[1] Формула на шаге 3 доказывается в **СИ** с использованием $SaM \supset SiM$ (И3), $SaM \supset SaS$ (И5) и $(SiM \wedge SaS) \supset MaM$ (И7).

Лемма 3. *Для любой формулы A верно, что* ***СИ*** $\vdash A \equiv \psi_2(\psi_1(A))$.

Доказательство. Доказательство ведется возвратной индукцией по числу пропозициональных связок в формуле A. Сначала рассмотрим четыре базисных случая (когда A — элементарная формула).

(1) $A \eqcirc SaP$.

Тогда $\psi_2(\psi_1(SaP)) = \psi_2(SaP \wedge SiS) = (SaP \vee \neg SaS) \wedge SiS \wedge SaS$.

1. $SaP \supset (SaP \vee \neg SaS)$	теорема КИВ
2. $SaP \supset SaS$	И5
3. $SaS \supset SiS$	И3
4. $SaP \supset ((SaP \vee \neg SaS) \wedge SiS \wedge SaS)$	1,2,3; КИВ
5. $((SaP \vee \neg SaS) \wedge SiS \wedge SaS) \supset SaP$	теорема КИВ
6. $SaP \equiv \psi_2(\psi_1(SaP))$	4,5; КИВ

(2) $A \eqcirc SeP$.

Тогда $\psi_2(\psi_1(SeP)) = \psi_2(SeP \wedge SiS) = (SeP \vee \neg SaS) \wedge SiS \wedge SaS$.

1. $SeP \supset (SeP \vee \neg SaS)$	теорема КИВ
2. $SeP \supset SaS$	И6
3. $SaS \supset SiS$	И3
4. $SeP \supset ((SeP \vee \neg SaS) \wedge SiS \wedge SaS)$	1,2,3; КИВ
5. $((SeP \vee \neg SaS) \wedge SiS \wedge SaS) \supset SeP$	теорема КИВ
6. $SaP \equiv \psi_2(\psi_1(SeP))$	4,5; КИВ

(3) $A \eqcirc SiP$.

Тогда $\psi_2(\psi_1(SiP)) = \psi_2(SiP \vee \neg SiS) = (SiP \wedge SaS) \vee \neg(SiS \wedge SaS)$. Сводится к случаю (2) в силу И8 и законов КИВ.

(4) $A \eqcirc SoP$.

Тогда $\psi_2(\psi_1(SoP)) = \psi_2(SoP \vee \neg SiS) = (SoP \wedge SaS) \vee \neg(SiS \wedge SaS)$. Сводится к случаю (1) в силу И9 и законов КИВ.

Далее для обоснования индуктивного перехода принимаем допущение о том, что теорема верна для всех формул, содержащих меньше связок, чем A.

(5) $A \eqcirc \neg B$.

1. $B \equiv \psi_2(\psi_1(B))$	индукт. доп.
2. $\neg B \equiv \neg\psi_2(\psi_1(B))$	1; КИВ
3. $\neg\psi_2(\psi_1(B)) = \psi_2(\psi_1(\neg B))$	опр. ψ_1 и ψ_2
4. $\neg B \equiv \psi_2(\psi_1(\neg B))$	2,3

(6) $A \rightleftharpoons B \wedge C$.

1. $B \equiv \psi_2(\psi_1(B))$	индукт. доп.
2. $C \equiv \psi_2(\psi_1(C))$	индукт. доп.
3. $(B \wedge C) \equiv (\psi_2(\psi_1(B)) \wedge \psi_2(\psi_1(C)))$	1,2; КИВ
4. $(\psi_2(\psi_1(B)) \wedge \psi_2(\psi_1(C)) = \psi_2(\psi_1(B \wedge C))$	опр. ψ_1 и ψ_2
5. $(B \wedge C) \equiv \psi_2(\psi_1(B \wedge C))$	3,4

Остальные случаи, когда A — сложная формула, рассматриваются аналогично. ■

Лемма 4. *Для любой формулы A верно, что* $\boldsymbol{C\Phi} \vdash A \equiv \psi_1(\psi_2(A))$.

Доказательство. Доказательство осуществляется тем же способом, что и в предыдущей лемме.

Обоснуем два базисных случая.

(1) $A \rightleftharpoons SaP$.

Тогда $\psi_1(\psi_2(SaP)) = \psi_1(SaP \vee \neg SaS) = (SaP \wedge SiS) \vee \neg(SaS \wedge SiS)$.

Формула $SaP \supset ((SaP \wedge SiS) \vee \neg(SaS \wedge SiS))$ является пропозициональной тавтологией, а значит и теоремой КИВ.

Докажем в **СФ** обратную импликацию:

1. $(SaP \wedge SiS) \supset SaP$	теорема КИВ
2. $SoP \supset SiS$	Ф6
3. $SoP \equiv \neg SaP$	Ф8
4. $\neg SiS \supset SaP$	2,3; КИВ
5. SaS	Ф4
6. $SiS \equiv (SaS \wedge SiS)$	5; КИВ
7. $\neg(SaS \wedge SiS) \supset SaP$	4,6; КИВ
8. $((SaP \wedge SiS) \vee \neg(SaS \wedge SiS)) \supset SaP$	1,7; КИВ

(2) $A \rightleftharpoons SeP$.

Тогда $\psi_1(\psi_2(SeP)) = \psi_1(SeP \vee \neg SaS) = (SeP \wedge SiS) \vee \neg(SaS \wedge SiS)$.

Формула $SeP \supset ((SeP \wedge SiS) \vee \neg(SaS \wedge SiS))$ является пропозициональной тавтологией, а значит, и теоремой КИВ.

Докажем в **СФ** обратную импликацию:

1. $(SeP \wedge SiS) \supset SeP$	теорема КИВ
2. $SiP \supset SiS$	Ф5
3. $SeP \equiv \neg SiP$	Ф7
4. $\neg SiS \supset SeP$	2,3; КИВ
5. SaS	Ф4
6. $SiS \equiv (SaS \wedge SiS)$	5; КИВ
7. $\neg(SaS \wedge SiS) \supset SeP$	4,6; КИВ
8. $((SeP \wedge SiS) \vee \neg(SaS \wedge SiS)) \supset SeP$	1,7; КИВ

Остальные рассуждения совершенно аналогичны приведенным при доказательстве Леммы 3. ■

С использованием доказанных лемм можно получить важные результаты, касающиеся метатеоретических отношений между силлогистиками **СИ** и **СФ**.

Теорема 1. *Перевод ψ_1 погружает систему **СИ** в **СФ**.*

Доказательство. Из Лемм 1, 2 и 3, согласно вышеупомянутому критерию Смирнова, следует, что **СИ** $\vdash A$, если и только если **СФ** $\vdash \psi_1(A)$ для любой формулы A. Иными словами, ψ_1 — операция, погружающая **СИ** в **СФ**. ■

Теорема 2. *Перевод ψ_2 погружает систему **СФ** в **СИ**.*

Доказательство. Из Лемм 2, 1 и 4, согласно критерию Смирнова, следует, что для любой формулы A **СФ** $\vdash A$, если и только если **СИ** $\vdash \psi_2(A)$. Иными словами, ψ_2 — операция, погружающая **СФ** в **СИ**. ■

Таким образом, мы продемонстрировали рекурсивную эквивалентность силлогистик **СИ** и **СФ**.

3. Силлогистика Ивлева и исчисление предикатов

Известно [Бочаров, Маркин, 2010, с. 67–76], что система фундаментальной силлогистики **СФ** погружается в классическое одноместное исчисление предикатов (**КИП**) посредством функции *, определяемой следующим образом:

$SaP^* = \forall x(Sx \supset Px)$,

$SeP^* = \forall x(Sx \supset \neg Px)$,

$SiP^* = \exists x(Sx \wedge Px)$,

$SoP^* = \exists x(Sx \wedge \neg Px)$,

$(\neg A)^* = \neg A^*$,

$(A \bigtriangledown B)^* = A^* \bigtriangledown B^*$, где $\bigtriangledown$ — бинарная пропозициональная связка.

Покажем, что подобный результат имеет место для системы **СИ** и перевода $^\odot$ формул языка чистой позитивной силлогистики в язык логики предикатов.

Теорема 3. *Перевод $^\odot$ погружает систему **СИ** в классическое одноместное исчисление предикатов.*

Доказательство. Ранее мы доказали справедливость следующего утверждения (Теорема 1):

(1) для любой формулы A силлогистического языка верно, что **СИ** $\vdash A$, если и только если **СФ** $\vdash \psi_1(A)$.

Погружаемость **СФ** в **КИП** означает, что:

(2) для любой формулы A силлогистического языка верно, что **СФ** $\vdash A$, если и только если **КИП** $\vdash A^*$.

Поскольку ψ_1-переводы формул силлогистического языка принадлежат этому же языку, в качестве следствия из (2) получаем:

(3) для любой формулы A силлогистического языка верно, что **СФ** $\vdash \psi_1(A)$, если и только если **КИП** $\vdash \psi_1(A)^*$.

Из (1) и (3) очевидным образом вытекает, что композиция переводов ψ_1 и * погружает систему **СИ** в **КИП**:

(4) для любой формулы A силлогистического языка верно, что **СИ** $\vdash A$, если и только если **КИП** $\vdash \psi_1(A)^*$.

Несложно продемонстрировать эквивалентность в исчислении предикатов формул видов $A^{\odot}$ и $\psi_1(A)^*$ (используя индукцию по числу связок в формуле A, а также определения $^{\odot}$, ψ_1 и *):

(5) для любой формулы A силлогистического языка верно, что **КИП** $\vdash A^{\odot} \equiv \psi_1(A)^*$.

Наконец, из (4) и (5) следует:

(6) для любой формулы A силлогистического языка верно, что **СИ** $\vdash A$, если и только если **КИП** $\vdash A^{\odot}$.

Таким образом, **СИ** погружается в **КИП** посредством перевода $^{\odot}$. ■

Доказанная метатеорема свидетельствует о том, что силлогистическое исчисление **СИ** является адекватной формализацией семантики категорических высказываний, которая была предложена Ю.В. Ивлевым.

4. Дедуктивные особенности силлогистики СИ

В заключительном разделе статьи рассмотрим вопрос о том, какие известные законы и правила традиционной силлогистики валидны в системе **СИ**, а какие нет. Утверждение о валидности силлогистической формулы в **СИ** может быть обосновано напрямую — построением ее доказательства в данной системе. В то же время, в силу Теоремы 3, вопрос о валидности формулы A может быть сведен к вопросу о доказуемости ее перевода $A^{\odot}$ в **КИП**. Последний же, в силу корректности и полноты **КИП**, равносилен вопросу об общезначимости $A^{\odot}$ в классической логике предикатов.

В традиционной силлогистике принимаются так называемые *законы силлогистического тождества*: SaS и SiS. В аристотелевско-оккамовской силлогистике и силлогистике Больцано оба этих закона отвергаются, а в фундаментальной силлогистике принимается только первый из них. В системе **СИ**, напротив, валиден SiS, но отвергается SaS.

Приведем доказательство формулы SiS в **СИ**:

1. $SeS \supset SaS$	И6
2. $SaS \supset SiS$	И3
3. $SeS \equiv \neg SiS$	И8
4. $\neg SiS \supset SiS$	1,2,3; КИВ
5. SiS	4; КИВ

Закон тождества в виде SaS не является валидным в **СИ**, поскольку его $^{\odot}$-перевод — формула $\forall x(Sx \supset Px) \wedge \exists xSx$ — ложна в моделях с пустым S.

Законы диагоналей логического квадрата — $SeP \equiv \neg SiP$ и $SoP \equiv \neg SaP$, — являются аксиомами системы **СИ** (И8 и И9).

Законы подчинения также валидны в **СИ**: $SaP \supset SiP$ — аксиома И3, а $SeP \supset SoP$ доказывается так:

1. $SaP \supset SiP$	И3
2. $\neg SiP \supset \neg SaP$	1; КИВ
3. $SeP \equiv \neg SiP$	И8
4. $SoP \equiv \neg SaP$	И9
5. $SeP \supset SoP$	2,3,4; КИВ

Рассмотрим далее вопрос о валидности в **СИ** *законов обращения*. Напомним, что в традиционной силлогистике справедливы законы чистого обращения $SiP \supset PiS$ и $SeP \supset PeS$, а также обращения с ограничением $SaP \supset PiS$ и $SeP \supset PoS$; высказывания формы SoP не обращаются.

Несложно убедиться в том, что $^{\odot}$-перевод $SiP \supset PiS$ — формула $(\exists x(Sx \wedge Px) \vee \neg \exists xSx) \supset (\exists x(Px \wedge Sx) \vee \neg \exists xPx)$ — необщезначима в логике предикатов (при пустом S и непустом P она ложна). Аналогично обстоит дело с $^{\odot}$-переводом $SeP \supset PeS$: формула $(\forall x(Sx \supset \neg Px) \wedge \exists xSx) \supset (\forall x(Px \supset \neg Sx) \wedge \exists xPx)$ ложна при непустом S и пустом P. Согласно Теореме 3, отсюда следует, что сами формулы $SiP \supset PiS$ и $SeP \supset PeS$ не доказуемы в **СИ**.

Вместе с тем обращения с ограничением $SaP \supset PiS$ и $SeP \supset PoS$ оказываются валидными в **СИ**. Эти формулы доказуемы в данной системе.

$SaP \supset PiS$.

1. $(PeS \wedge SaP) \supset SeS$	И2
2. $\neg SeS \supset (SaP \supset \neg PeS)$	1; КИВ
3. $SeS \equiv \neg SiS$	И8

4. $PeS \equiv \neg PiS$ И8
5. $SiS \supset (SaP \supset PiS)$ 2,3,4; КИВ
6. SiS теорема **СИ** (доказана выше)
7. $SaP \supset PiS$ 5,6; m.p.

$SeP \supset PoS$.

1. $(SeP \wedge PaS) \supset PeP$ И2
2. $\neg PeP \supset (SeP \supset \neg PaS)$ 1; КИВ
3. $PeP \equiv \neg PiP$ И8
4. $PoS \equiv \neg PaS$ И9
5. $PiP \supset (SeP \supset PoS)$ 2,3,4; КИВ
6. PiP теорема **СИ** (доказана выше)
7. $SeP \supset PoS$ 5,6; m.p.

Наиболее важным является вопрос о валидности в **СИ** модусов простого категорического силлогизма. Известно, что в традиционной, а также в аристотелевско-оккамовской силлогистике валидны 24 модуса (по 6 на каждую из четырех фигур силлогизма). В фундаментальной силлогистике некоторые из этих модусов (а именно те, в которых обе посылки общие, а заключение частное) валидными не являются. В силлогистике Больцано отвергаются 2 модуса из упомянутых 24-х — *aee* и *aeo* IV фигуры.

В силлогистике **СИ** не валидны 3 модуса, корректных с точки зрения традиционной силлогистики. Это модусы *aee*, *iai* и *eio* IV фигуры. Продемонстрируем их невалидность с использованием Теоремы 3. Для каждого из упомянутых модусов подберем модель логики предикатов, в которой $^{\odot}$-переводы посылок истинны, а $^{\odot}$-перевод заключения ложен.

Модус *aee*. $PaM^{\odot} = \forall x(Px \supset Mx) \wedge \exists xPx$, $MeS^{\odot} = \forall x(Mx \supset \neg Sx) \wedge \exists xMx$, $SeP^{\odot} = \forall x(Sx \supset \neg Px) \wedge \exists xSx$. Рассмотрим модель с универсумом $\{1,\ 2\}$, в которой значением P является множество $\{1\}$, значением M — множество $\{1,\ 2\}$, а значением S — пустое множество. Несложно убедиться в том, что первая и вторая формулы в этой модели истинны, а третья ложна.

Модус *iai*. $PiM^{\odot} = \exists x(Px \wedge Mx) \vee \neg\exists xPx$, $MaS^{\odot} = \forall x(Mx \supset Sx) \wedge \exists xMx$, $SiP^{\odot} = \exists x(Sx \wedge Px) \vee \neg\exists xSx$. Контрмоделью, в которой первая и вторая формулы истинны, а третья ложна, будет, например, модель с универсумом $\{1,\ 2\}$, в которой значением P является пустое множество, значением M — множество $\{1\}$, а значением S — множество $\{1,\ 2\}$.

Модус *eio*. $PeM^{\odot} = \forall x(Px \supset \neg Mx) \wedge \exists xPx$, $MiS^{\odot} = \exists x(Mx \wedge Sx) \vee \neg\exists xMx$, $SoP^{\odot} = \exists x(Sx \wedge \neg Px) \vee \neg\exists xSx$. Нужная контрмодель имеет универсум $\{1,\ 2\}$, значением P является множество $\{1,\ 2\}$, значением M — пустое множество, а значением S — множество $\{1\}$.

Остальной 21 модус традиционной силлогистики (включая отвергаемый в силлогистике Больцано модус *aeo* IV фигуры) валиден в **СИ**.

Валидность упомянутого модуса обоснуем построением доказательства в **СИ** соответствующей формулы $(PaM \wedge MeS) \supset SoP$:

1. $(MeS \wedge PaM) \supset PeS$ И2
2. $PeS \supset SoP$ теорема **СИ** (доказана ранее)
3. $(PaM \wedge MeS) \supset SoP$ 1,2; КИВ

В качестве примера покажем, как можно обосновать валидность в **СИ** шести стандартных модусов I фигуры.

Модус *aaa*. Формула $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$ является аксиомой И1 данной системы.

Модус *eae*. Формула $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$ — аксиома И2.

Модус *aai*. Формула $(MaP \wedge SaM) \supset SiP$ выводится из $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$ (И1) и $SaP \supset SiP$ (И3) по законам КИВ.

Модус *eao*. Формула $(MeP \wedge SaM) \supset SoP$ выводится из $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$ (И2) и доказанной ранее теоремы $SeP \supset SoP$ по законам КИВ.

Модус *aii*. Формулу $(MaP \wedge SiM) \supset SiP$ можно доказать в данной системе, но ее валидность проще обосновать, опираясь на Теорему 3. Покажем, что $((MaP \wedge SiM) \supset SiP)^{\odot}$ — общезначимая в логике предикатов формула. $((MaP \wedge SiM) \supset SiP)^{\odot} = ((\forall x(Mx \supset Px) \wedge \exists xMx) \wedge (\exists x(Sx \wedge Mx) \vee \neg\exists xSx)) \supset (\exists x(Sx \wedge Px) \vee \neg\exists xSx)$. Рассмотрим произвольную модель, в которой истинен антецедент данной формулы $((\forall x(Mx \supset Px) \wedge \exists xMx) \wedge (\exists x(Sx \wedge Mx) \vee \neg\exists xSx)$. Его истинность означает, во-первых, что объем термина M включается в объем P, и при этом он не пуст. Во-вторых, в объемах S и M содержится общий элемент, или же объем S пуст. Если у объемов S и M есть общий элемент, то этот элемент принадлежит также и объему P (ведь все элементы объема M содержатся в объеме P). Тогда общий элемент есть и у объемов S и P, и формула $\exists x(Sx \wedge Px) \vee \neg\exists xSx$ в данной модели истинна. Если же объем S пуст, то последняя формула тоже истинна. Итак, предположив истинность антецедента ${}^{\odot}$-перевода формулы $(MaP \wedge SiM) \supset SiP$, мы пришли к выводу, что и консеквент является истинным.

Модус *eio*. $((MeP \wedge SiM) \supset SoP)^{\odot} = ((\forall x(Mx \supset \neg Px) \wedge \exists xMx) \wedge (\exists x(Sx \wedge Mx) \vee \neg\exists xSx)) \supset (\exists x(Sx \wedge \neg Px) \vee \neg\exists xSx)$. Покажем, что эта формула общезначима в логике предикатов. Рассмотрим произвольную модель, в которой истинен антецедент данной формулы. В этой модели, во-первых, объемы терминов M и P не имеют общих элементов, и при этом объем M не пуст. Во-вторых, в объемах S и M содержится общий элемент, или же объем S пуст. Если у объемов S и M есть общий элемент, то этот элемент не принадлежит объему P (ведь эти множества несовместимы). Тогда в универсуме найдется объект, принадлежащий объему S и не принадлежащий объему P, и формула $\exists x(Sx \wedge \neg Px) \vee \neg\exists x Sx$ в данной модели истинна. Если же объем S пуст, то последняя формула тоже истинна. В любом случае консеквент $^{\odot}$-перевода формулы $((MeP \wedge SiM) \supset SoP)$ истинен.

В том же духе можно продемонстрировать валидность всех стандартных модусов других фигур, за исключением трех упомянутых выше модусов IV фигуры.

Таким образом, силлогистика, основанная на предложенной Ю.В. Ивлевым интерпретации категорических высказываний, по своим дедуктивным возможностям хотя и уступает традиционной версии силлогистики, но вполне сравнима с силлогистикой Больцано и заметно превосходит фундаментальную силлогистику.

Литература

Бочаров, Маркин, 2010 – *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М.: Прогресс-Традиция, 2010. 336 с.

Ивлев, 1976 – *Ивлев Ю.В.* Логика. М.: Академия МВД СССР, 1976. 144 с.

Смирнов, 2001 – *Смирнов В.А.* Логический анализ научных теорий и отношений между ними // Логико-философские труды В.А. Смирнова. М.: Эдиториал УРСС, 2001. С. 381–401.

Vladimir I. Markin

Syllogistic adequate to Yu.V. Ivlev's interpretation of categorical propositions in first-order logic

Vladimir I. Markin
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: markin@philos.msu.ru

Abstract: The article examines the system of pure positive syllogistic, which is adequate to the Yu.V. Ivlev's translation of categorical propositions into the language of first-order logic. According to this translation, particular propositions are true and general propositions are false if their subjects are empty. In syllogistic language we formulate the axiomatic calculus and prove that this calculus is recursively equivalent to the system of fundamental syllogistic. For this purpose, we define two translations: one of them embeds Ivlev's syllogistic into fundamental, and the other embeds the second system into the first. We further proved a metatheorem that the axiomatic syllogistic calculus is embedded into the classical first-order logic through Ivlev's translation. The deductive features of the Ivlev's syllogistic are investigated. It has been established that 21 modes of simple categorical syllogism, the laws of diagonals and the laws of subordination of the logical square, the conversion with restriction for general statements, the law of syllogistic identity for particular affirmative propositions are valid in it. The three modes of the syllogism of the fourth figure, pure conversions and the law of syllogistic identity for universal affirmative statements, are found to be invalid.

Keywords: syllogistic, Yu.V. Ivlev, axiomatic calculus, embedding function, first-order logic, categorical propositions.

For citation: Markin V.I. "Sistema sillogistiki, adekvatnaya predlozhennomu Yu.V. Ivlevy'm perevodu kategoricheskix vy'skazy'vanij v logiku predikatov" [Syllogistic adequate to Yu.V. Ivlev's interpretation of categorical propositions in first-order logic], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2026, Vol. 32, No. 1, pp. 97–111. DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-97-111. (In Russian)

References

Bocharov, Markin, 2010 – Bocharov, V.A., Markin, V.I. *Sillogisticheskie teorii* [Syllogistic Theories]. Moscow: Progress-Tradiciya Publ., 2010. 336 p. (In Russian)

Ivlev, 1976 – Ivlev, Yu.V. *Logika* [Logic]. Moscow: Akademiya MVD SSSR Publ., 1976. 144 p. (In Russian)

Smirnov, 2001 – Smirnov, V.A. "Logicheskij analiz nauchny'x teorij i otnoshenij mezhdu nimi" [Logical analysis of scientific theories and the relations among them], *Logiko-filosofskie trudy V.A. Smirnova* [Logical and Philosophical Issues of V.A. Smirnov]. Moscow: Editorial URSS Publ., 2001, pp. 381–401. (In Russian)

Логические исследования
2026. Т. 32. № 1. С. 112–136
УДК 162.1+514::510.645

Logical Investigations
2026, Vol. 32, No. 1, pp. 112–136
DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-112-136

О.В. Черкашина

Логический многоугольник: выведение логических отношений между высказываниями о многоместных отношениях

Оксана Викторовна Черкашина
МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, с. 1.
E-mail: Ch.O.Logic@zohomail.com

Аннотация: Настоящая работа продолжает исследование, целью которого является создание аналога силлогистических теорий, но для высказываний об отношениях, а не о свойствах. Цель настоящей статьи — обосновать правила, сформулированные нами ранее и позволяющие для данного высказывания об n-местном отношении, где n — натуральное число, $n \geqslant 1$, найти высказывания того же вида, находящиеся с данным высказыванием в отношениях контрарности и субконтрарности. Основываясь на этих правилах, а также на правилах для контрадикторности и подчинения, возможно также дать немедленный ответ о том, в каких логических отношениях состоят два выбранных высказывания. Названные правила являются алгоритмами, которые позволяют вывести логические отношения между рассматриваемыми высказываниями из количественных и качественных характеристик высказываний без необходимости применять логику предикатов. В настоящей работе доказываются две теоремы, следствия которых показывают связь этих характеристик с отношениями между высказываниями. Основываясь на этих правилах, мы построили диаграмму, «логический многоугольник», являющуюся аналогом логического квадрата, но для высказываний об n-местных отношениях (а не о свойствах, как квадрат). В отличие от логического квадрата, наш многоугольник не только иллюстрирует, но также позволяет выводить логические отношения между высказываниями. Логический многоугольник был построен нами ранее с опорой на семантические и геометрические соображения. В настоящей статье мы представляем доказательства, основанные на логической форме самих высказываний. Настоящая работа, вместе с другими статьями ее автора, может быть одним из исходных пунктов в новом направлении исследования — построении и изучении аналогов силлогистических теорий, но для высказываний об отношениях.

Ключевые слова: высказывания об отношениях, n-местный предикат, аристотелевы отношения, логический многоугольник, логический квадрат, расширения логического квадрата, диаграммы, силлогистические теории. Ивлев

Бочаров, Маркин, 2010 – Бочаров В.А., Маркин В.И. Силлогистические теории. М.: Прогресс-Традиция, 2010. 336 с.
Ивлев, 1976 – Ивлев Ю.В. Логика. М.: Академия МВД СССР, 1976. 144 с.
Смирнов, 2001 – Смирнов В.А. Логический анализ научных теорий и отношений между ними // Логико-философские труды В.А. Смирнова. М.: Эдиториал УРСС, 2001. С. 381–401.

Для цитирования: *Черкашина О.В.* Логический многоугольник: выведение логических отношений между высказываниями о многоместных отношениях // Логические исследования / Logical Investigations. 2026. Т. 32. № 1. С. 112–136. DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-112-136.

Введение

В настоящей статье[1] мы показываем, что контрадикторность, подчинение, контрарность и субконтрарность (так называемые аристотелевы отношения) между высказываниями об n-местных отношениях (отношениях между n группами объектов, n — натуральное число, $n \geqslant 1$) могут быть выведены при помощи ряда правил, использующих комбинации количественных и качественных характеристик этих высказываний. Эти правила можно считать более простыми, чем применение логики предикатов для определения того, могут ли соответствующие высказывания быть одновременно истинными, могут ли они быть одновременно ложными, зависит ли истинность или ложность одного из них от истинности или ложности другого. Говоря о простоте, мы имеем в виду, что применение названных правил представляет собой короткий алгоритм — сопоставление каждого элемента характеристики одного высказывания с соответствующим ему (находящимся на той же позиции) элементом характеристики другого высказывания. Характеристики выражены явным образом в формальной записи самих высказываний. Результат сопоставления имеет в рамках системы однозначную интерпретацию — одно из логических отношений между высказываниями (одно из аристотелевых отношений либо отношение независимости). Ситуации, когда, несмотря на корректное следование правилам системы, результат не был бы достигнут, не возникает.

Правила, представленные в настоящей статье, могут быть использованы для построения логического многоугольника (см., напр.: [Черкашина, 2024a]), который, в свою очередь, может рассматриваться в качестве визуализации применения этих правил.

Высказывания, о которых идет речь в настоящей работе, подобны тем, для которых построен логический квадрат и которые рассматриваются в силлогистических теориях (см., напр.: [Бочаров, Маркин, 2010, с. 11]), с той разницей, что первые посвящены отношениям, а не свойствам. Например: «Каждый юрист знает некоторого логика». Нас будут интересовать логические отношения внутри групп ассерторических (не модальных) высказываний, в которых у всех высказываний данной группы субъекты и предикат одинаковы, и каждый субъект находится на определенном месте предиката — данный субъект стоит на одном и том же месте предиката в каждом высказывании (например, субъект S_f всегда стоит на f-м месте предиката R). Каждый субъект квантифицирован как общий или частный. Внут-

[1]Нам хотелось бы поблагодарить Hans Smessaert за его глубокие комментарии и вопросы, которые он сформулировал в 2020 г. применительно к нашей предшествующей работе над логическими диаграммами. Настоящая статья в большой степени является результатом размышлений над этими вопросами.

ренняя структура терминов не принимается во внимание, однако допускается отрицание предиката. Сложные высказывания, полученные благодаря пропозициональным связкам, не рассматриваются. Все термины непусты и неуниверсальны, единичные термины рассматриваются как общие (a рассматривается как «Все то, что есть a»).

Логический многоугольник аналогичен логическому квадрату. Разница состоит в том, что квадрат выражает отношения между высказываниями о свойствах (с одним субъектом и одноместным предикатом), а многоугольник — между высказываниями об отношениях (с n субъектов и n-местным предикатом)[2]. Логический квадрат может рассматриваться как частный случай логического многоугольника для $n = 1$.

Проблема построения геометрических фигур для выражения логических отношений между высказываниями об n-местных отношениях, где n — натуральное число, $n \geqslant 3$, и соединения таких фигур для разных n в одну была сформулирована[3] Ю.В. Ивлевым и решена автором настоящей работы[4]. Сейчас эта проблема испытывает интерес со стороны зарубежных исследователей (см., напр.: [Nilsson, 2020], где строится диаграмма, подобная созданной ранее Ю.В. Ивлевым, но теперь для «компьютерной обработки естественного языка для создания основанных на содержании поисковых систем») — как это уже было с квазифункциональной логикой, работы Юрия Васильевича опередили развитие науки на десятилетия.

Ю.В. Ивлев классифицировал высказывания об отношениях, сформулировал правила их отрицания и представил логические отношения между

---

[2]Когда такие высказывания (и в случае квадрата, и в случае многоугольника) записываются на языке логики предикатов первого порядка, каждому субъекту соответствует квантифицированная переменная. Конечно, возможно рассматривать высказывание, где предикат выражает отношение между n объектов, но вместо n переменных он применяется, например, к $n-1$ переменных и одной индивидной константе, как в примере «Некоторые люди любят логику», где «логика» формализуется как индивидная константа, которая не квантифицируется. В таком случае мы рассматриваем предикат как $(n-1)$-местный (в нашем примере предикат будет не двухместным «... любит ...», а одноместным — «... любит логику»). При таком подходе местность предиката совпадает с количеством квантифицированных переменных, представляющих субъекты. Так мы и будем рассматривать местность предикатов.

Hans Smessaert отметил в дискуссии, что, поскольку возможно помыслить местность предиката как общее число и переменных, и констант, к которым он применен, имеет смысл подчеркнуть не местность, а «количество *квантифицированных* позиций» предиката. В самом деле, в разных источниках встречаются определения местности предиката и как количества именно переменных, и как количества вообще термов, к которым он применен.

[3]См., напр.: [Ивлев, 1988, с. 43, 44]; [Ивлев, 2008, с. 40]. Есть и более ранние работы Ю.В. Ивлева в этой сфере. Насколько нам известно, самой ранней была: [Ивлев, 1976].

[4]См., напр.: [Черкашина, 2024a; Черкашина, 2018a; Cherkashina, 2018b].

высказываниями о двухместных отношениях в виде фигуры, которую он назвал «логический квазишестиугольник»[5].

Некоторые аспекты построения логического многоугольника описаны в [Черкашина, 2019a; Cherkashina, 2019b] и других работах. Настоящая статья продолжает исследование из [Черкашина, 2024a], но может также быть понята независимо от той работы. Здесь мы не будем концентрироваться на графической стороне проблемы (детали можно найти здесь: [Там же]), но, чтобы сделать рассуждение максимально ясным без отсылок к той статье, рассмотрим здесь некоторые наиболее общие вопросы графической стороны.

Следуя классификации Ю.В. Ивлева, мы разграничиваем высказывания разного качества (утвердительные и отрицательные) и количества. Утвердительное высказывание выражает мысль о том, что его субъекты находятся в некотором отношении, отрицательное — что его субъекты не находятся в некотором отношении. Высказывания с одним субъектом (и, в языке логики предикатов, с ровно одним квантором) могут быть с точки зрения количества либо общими (имеющими квантор общности, например: «Все кошки хорошие»), либо частными (имеющими квантор существования, например: «Некоторые кошки очень вороватые»). Для высказываний с n субъектов количественная характеристика состоит из n частей, по одной для каждого субъекта, и каждая из этих частей может быть или «общее», или «частное». Например: «Все люди любят некоторые книги», где $n = 2$, является обще-частным утвердительным высказыванием; «Некоторые люди не предпочитают некоторые книги никаким сладостям», $n = 3$, частно-частно-общее отрицательное. Мы будет использовать сокращения: «О» для общих и «Ч» для частных высказываний, «Утв.» для утвердительных, «Отр.» для отрицательных.

Логический многоугольник для высказываний об n-местных отношениях можно описать как соединенные между собой два элемента — многоугольники с 2^n вершинами каждый, один — выражающий отношения подчинения между утвердительными высказываниями, а другой — между отрицательными. Каждая вершина каждого из многоугольников соединена с ровно одной вершиной другого многоугольника линией, выражающей отношение контрадикторности. Так же, как в логическом квадрате, каждая вершина логического многоугольника соответствует одной из возможных комбинаций количественных и качественных характеристик высказывания — т.е. одной из возможных форм высказываний.

[5]См., напр.: [Ивлев, 1992, с. 56–57]; [Ивлев, 2008, с. 31–32, 38–41, 47–48, 118].

Пример. Рис. 1 (базовая версия логического многоугольника для $n = 2$) показывает отношения подчинения (стрелки) и контрадикторности (тонкие диагональные линии). Обозначения каждой вершины показаны ее расположением на пересечении вертикали для качественной характеристики и горизонтали для количественной характеристики. Например, вершина «обще-частное (ОЧ), утвердительное» на рис. 1 соответствует высказываниям формы ОЧ, утвердительное, таким как «Каждый юрист знает некоторого логика». Эта вершина, показанная здесь белым кругом, находится на пересечении вертикали «Утвердительные» и горизонтали «ОЧ».

Базовая версия логического многоугольника, показанная для $n = 2$ на рис. 1, содержит (отчасти в скрытом виде) всю информацию о том, какие аристотелевы отношения имеют место. Они могут быть выражены и в явном виде, как на рис. 2 (полная версия логического многоугольника для $n = 2$), включая отношения контрарности (показаны пунктирными линиями) и субконтрарности (двойные линии), которые можно вывести из отношений подчинения и контрадикторности.

Для каждого следующего n диаграммы становятся все более сложными, так что отображение всей информации при помощи меньшего числа линий помогает сохранить графическое представление одновременно ясным и выразительным.

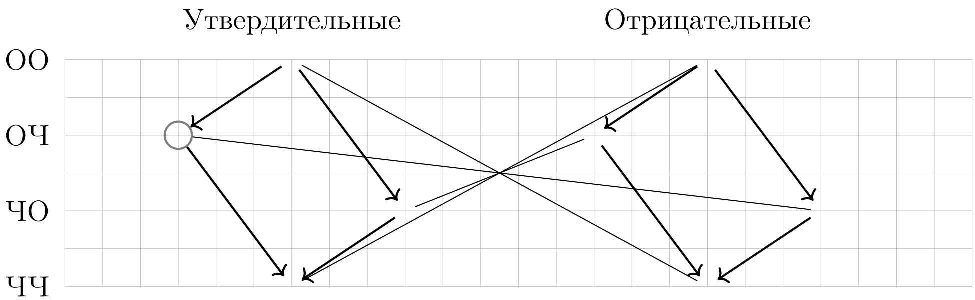


Рис. 1. Базовая версия логического многоугольника для $n = 2$

Обе версии эквивалентны квазишестиугольнику Ю.В. Ивлева для $n = 2$ ([Ивлев, 2008, с. 40]) в том смысле, что они все содержат одинаковую информацию. Но часть ее скрыта в многоугольнике, в том числе в его полной версии. Чтобы всю информацию показать в явном виде, нам понадобилось бы добавить на рис. 2 линии, которые показывали бы отсутствие всех четырех аристотелевых отношений (или, что то же самое, отношение независимости).

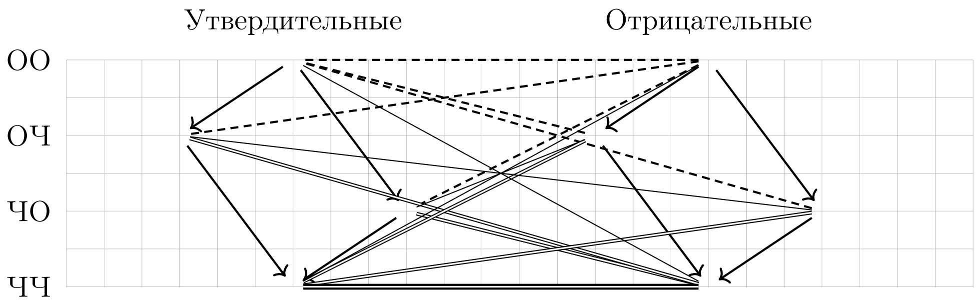


Рис. 2. Полная версия логического многоугольника для $n = 2$

Цель настоящей статьи в том, чтобы обосновать правила, позволяющие вывести контрарность и субконтрарность между высказываниями об отношениях напрямую из количественных и качественных характеристик этих высказываний. Чтобы это сделать, нам нужно вывести логические отношения из комбинаций других логических отношений этих высказываний[6].

Полученные правила позволяют для данного высказывания об n-местном отношении, где n — натуральное число и $n \geqslant 1$, найти высказывания, находящиеся в отношениях контрарности и субконтрарности с данным. (Мы также вкратце рассматриваем отношения контрадикторности и подчинения.) Основываясь на этих правилах, можно также сразу выявить[7] для двух данных высказываний, каково логическое отношение между ними.

Основными частями настоящей работы являются параграфы «Взаимодействие контрадикторности и подчинения. Теоремы» и «Аристотелевы отношения, описанные в терминах количественной и качественной характеристик находящихся в них высказываний».

Рассмотрим теперь правила для каждого из отношений. Некоторые из них уже обоснованы, другие — подлежат обоснованию в настоящей работе.

[6]Мы выводим контрарность и субконтрарность из контрадикторности и подчинения. После написания настоящей статьи мы встретили работы Fabien Schang, в которых, для других целей и другим способом, решена похожая проблема: из контрадикторности и контрарности выводятся субконтрарность и подчинение — см.: [Schang, 2016; Schang, 2018].

[7]Существуют некоторые особые случаи, рассмотренные нами в других работах: [Черкашина, 2022; Черкашина, 2023].

1. Контрадикторность

Отношение контрадикторности имеет место между высказыванием и его отрицанием, по определению контрадикторности.

Поскольку мы имеем дело с классической логикой, каждое высказывание имеет в точности один результат отрицания, а результат двойного отрицания исходного высказывания есть исходное высказывание. Значит, имеются пары высказываний, внутри которых каждое высказывание является результатом отрицания для другого из них, эти высказывания состоят друг с другом в отношении контрадикторности, и никакое третье высказывание не находится в этом отношении ни с одним из них. Среди высказываний тех видов, которые рассматриваются в данной работе, для любого высказывания имеется в точности одно высказывание — такое, что они не могут быть ни одновременно истинными, ни одновременно ложными (такое, что они контрадикторны друг другу).

Мы принимаем в качестве доказанного правило для отрицания: при отрицании качественная и все элементы количественной характеристики отрицаемого высказывания меняются на противоположные (О на Ч, Ч на О, утвердительное на отрицательное и отрицательное на утвердительное). Это правило взято из работы Ю.В. Ивлева ([Ивлев, 2008, с. 41]).

2. Подчинение

Подчинение имеет место между двумя высказываниями, подчиняющим и подчиненным. Если подчиняющее истинно, тогда (но не только тогда) подчиненное ему высказывание тоже истинно. Отсюда, по контрапозиции, если подчиненное ложно, тогда подчиняющее его высказывание тоже ложно. Это отношение имеет место между высказываниями с одними и теми же субъектами в обоих случаях и одним и тем же предикатом, с одинаковой качественной характеристикой и с количественными характеристиками, которые отвечают ровно одному из следующих двух условий.

Первое условие состоит в том, что сопоставляемые количественные характеристики различаются в точности одной буквой, которая стоит на k-м месте характеристик. Высказывание, у которого на k-м месте находится «О», является подчиняющим для высказывания, у которого на k-м месте стоит «Ч». (Например, ОЧЧОО утвердительное является подчиняющим для ОЧЧОЧ утвердительного, здесь $k = 5$.) Это условие основано на том, что характеристика «частное», обозначаемое буквой «Ч», может рассматриваться как дизъюнкция, где одним из элементов является характеристика «общее»: «некоторый» означает «все или хотя бы один».

Отношение подчинения транзитивно. Отсюда второе условие, согласно которому разница между количественными характеристиками двух высказываний должна состоять более, чем в одной букве, при этом на каждом месте, в котором они различаются, одна из характеристик имеет только буквы «О». (Конечно, у другой на этих местах будут тогда только «Ч».) В противном случае, высказывания одного качества будут логически независимы друг от друга.

Контрарность и субконтрарность могут быть выражены при помощи контрадикторности и подчинения[8].

3. Контрарность

Высказывания в отношении контрарности не могут быть одновременно истинными, но могут быть одновременно ложными. Это можно выразить при помощи контрадикторности и подчинения.

Выберем произвольно некоторое высказывание и найдем результат его отрицания — будем называть их, соответственно, «выбранное» и «противоречащее» высказывания. Если выбранное высказывание истинно, то противоречащее ложно; ложны и все высказывания, подчиняющие противоречащее высказывание. Они все не могут быть истинными, когда выбранное истинно.

Пример. На рис. 3 пример для $n = 2$, рассматриваемый слева направо, начиная с предположения, что обще-частное (ОЧ), утвердительное высказывание истинно. Толстая двойная стрелка показывает отношение контрадикторности, простые стрелки — подчинение, “T” — «истинно», “F” — «ложно». Выбранное высказывание здесь ОЧ, утвердительное; противоречащее — ЧО, отрицательное. Стрелка с двойной линией показывает, что если ЧО, отрицательное, ложно, то ложны и его подчиняющие высказывания — здесь это только одно, ОО, отрицательное. Эта «передача ложности» — одно из проявлений отношения подчинения, само отношение показано простой стрелкой. Стрелка с двойной линией только подчеркивает это проявление, но не выражает никакого дополнительного отношения.

Проверим в обратном направлении. Предположим, что по крайней мере одно из высказываний, подчиняющих противоречащее высказывание,

[8] В более ранней работе [Черкашина, 2024a] мы рассмотрели вопрос о выразимости некоторых логических отношений через другие и отметили, что намерены отдельно опубликовать формальное доказательство тех утверждений, которые рассмотрены там преимущественно с графической точки зрения. Настоящая статья содержит это доказательство. Чтобы сделать данную статью независимой от предыдущей, повторим определения и некоторые из основных идей той работы здесь, в коротких параграфах «контрарность» и «субконтрарность». Те, кому знакомы эти идеи, могут пропустить названные параграфы, сразу перейдя к параграфу «Взаимодействие контрадикторности и подчинения. Теоремы», содержащему само доказательство.

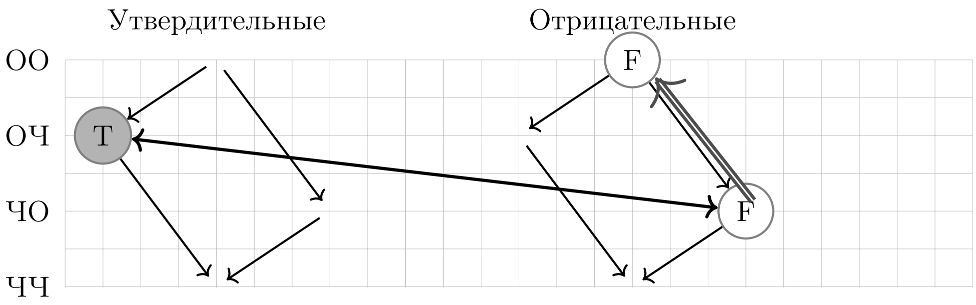


Рис. 3. Высказывания, которые не могут быть одновременно истинными (слева направо)

истинно. Тогда результат отрицания такого подчиняющего высказывания ложен. Этот результат является подчиненным для исходного, выбранного, высказывания (мы доказываем это ниже), поэтому выбранное высказывание в таком случае тоже будет ложным.

Итак, выбранное высказывание и подчиняющие противоречащего высказывания не могут быть одновременно истинными.

Пример. Проверяем в обратную сторону — рис. 4, справа налево, начиная с предположения, что ОО, отрицательное высказывание, истинно. Тогда результат его отрицания, ЧЧ, утвердительное, ложно. Стрелки с двойными линиями показывают, что если ЧЧ, утвердительное, ложно, то ложны и все его подчиняющие высказывания, включая выбранное высказывание, ОЧ, утвердительное. Эти стрелки показывают это проявление отношения подчинения, в то время как само отношение не изображено здесь для простоты и ясности рисунка (иначе было бы четыре простых стрелки, каждая параллельна одной из стрелок с двумя линиями, но указывающих в противоположном направлении).

Могут ли они быть одновременно ложными? Да, иначе они не могли бы быть одновременно истинными и не могли бы быть одновременно ложными, т.е. были бы друг с другом в отношении контрадикторности, и тогда у выбранного высказывания было бы больше, чем один результат отрицания, а это невозможно в классической логике[9].

[9]Здесь мы не рассматриваем высказываний, эквивалентных имеющимся (кроме самих имеющихся высказываний). Поэтому если в качестве результата отрицания выбранного высказывания имеются два высказывания, то последние не эквивалентны между собой, а полученный результат содержит противоречие.

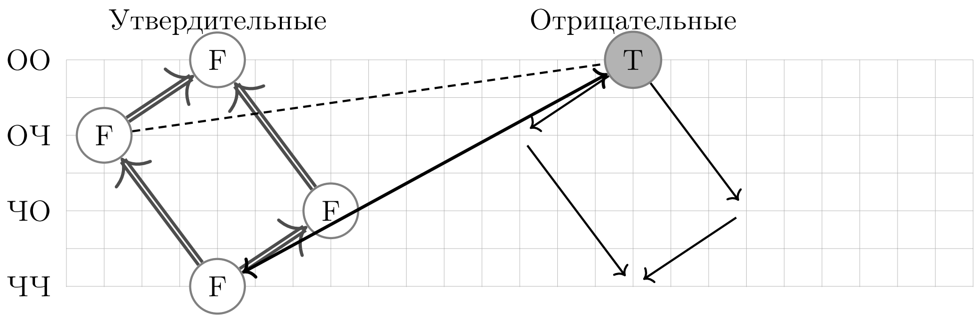


Рис. 4. Высказывания, которые не могут быть одновременно истинными (справа налево)

Таким образом, выбранное высказывание и подчиняющие противоречащее ему высказывание находятся в отношении контрарности. (Рис. 4 показывает пример отношения контрарности пунктирной линией.)

4. Субконтрарность

Высказывания в отношении субконтрарности могут быть одновременно истинными, но не могут быть одновременно ложными. Это можно выразить при помощи контрадикторности и подчинения.

Предположим, что выбранное высказывание ложно. Тогда противоречащее ему высказывание истинно, истинны и все подчиненные относительно этого противоречащего высказывания.

Пример. Рис. 5. Выбрано высказывание «ОЧ», утвердительное. Предположим, что оно ложно. Стрелкой с пунктирной линией показано, что если противоречащее ему высказывание, «ЧО», отрицательное, истинно, то истинны и подчиненные последнему высказывания. Стрелка с пунктиром только подчеркивает это проявление отношения подчинения и не выражает никакого дополнительного отношения.

Но если бы эти подчиненные были ложными (рис. 6), то результаты их отрицания были бы истинными, а поскольку эти результаты отрицания являются подчиняющими для исходного, выбранного, высказывания (мы доказываем это ниже), то выбранное высказывание было бы истинным. Итак, выбранное высказывание и подчиненные его противоречащего высказывания не могут быть одновременно ложными, но могут быть одновременно истинными (последнее верно, иначе у выбранного высказывания было бы больше одного результата отрицания, чего не может быть), и они находятся в отношении субконтрарности с выбранным высказыванием.

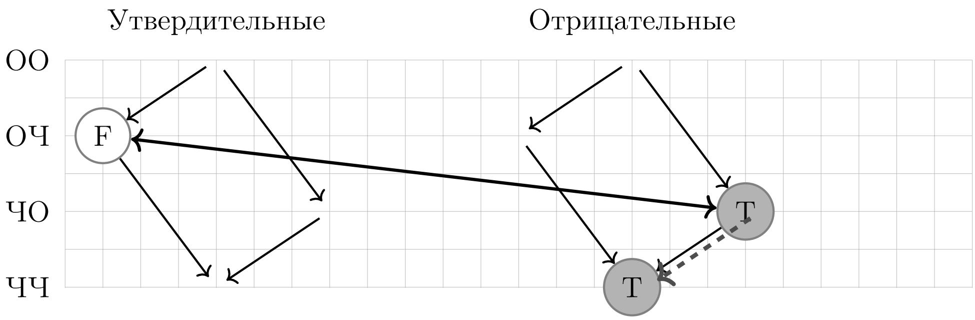


Рис. 5. Высказывания, которые не могут быть одновременно ложными (слева направо)

Пример. Рис. 6. Двойная линия показывает отношение субконтрарности. Предположим, что ЧЧ, отрицательное, ложно. Стрелки с пунктиром показывают, что если контрадикторное ему высказывание, ОО, утвердительное, истинно, то истинны и подчиненные последнему высказывания, включая и выбранное высказывание, ОЧ, утвердительное. Эти стрелки подчеркивают это проявление отношения подчинения; само отношение не показано в части многоугольника для утвердительных высказываний.

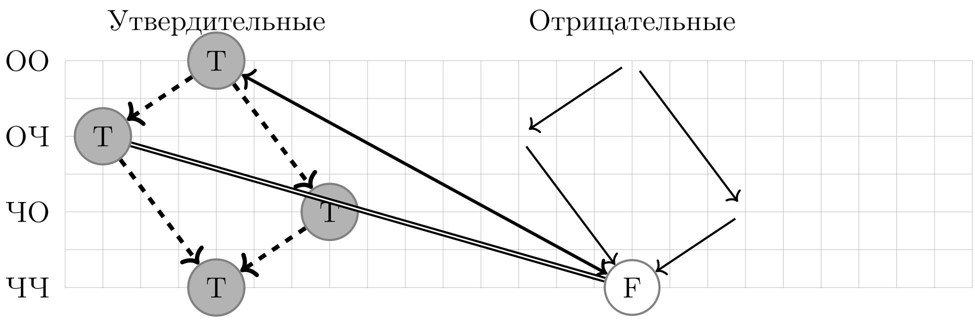


Рис. 6. Высказывания, которые не могут быть одновременно ложными (справа налево)

Таким образом, выбранное высказывание и подчиненные его противоречащему высказыванию находятся в отношении субконтрарности. (Рис. 6 показывает пример отношения субконтрарности двойной линией.)

5. Взаимодействие контрадикторности и подчинения. Теоремы

Теперь нам нужно доказать следующие две теоремы:

Теорема 1. *Для контрарности. Для любого высказывания рассматриваемого вида, если взять высказывание, контрадикторное по отношению к данному, для этого контрадикторного проследить все подчиняющие его высказывания (если такие существуют) и для этих подчиняющих найти контрадикторные им высказывания, каждое из найденных в итоге высказываний будет подчиненным для исходного высказывания.*

Теорема 2. *Для субконтрарности. Для любого высказывания рассматриваемого вида, если взять высказывание, контрадикторное по отношению к данному, для этого контрадикторного проследить все подчиненные ему высказывания (если такие существуют) и для этих подчиненных найти контрадикторные им высказывания, каждое из найденных в итоге высказываний будет подчиняющим для исходного высказывания.*

Доказательство.

Доказательства для этих двух теорем похожи и могут осуществляться параллельно. В то же время у каждого доказательства есть три типа случаев, в зависимости от вида выбранного исходного высказывания, для которых доказательсто идет разными путями. Выбранное высказывание может иметь количественную характеристику...

1. ...со всеми буквами «О» (будем называть его «сугубо общим» высказыванием), или
2. ...со всеми буквами «Ч» («сугубо частное» высказывание), или
3. ...с некоторыми буквами «Ч» и некоторыми «О» (высказывание смешанного количества).

В каждом случае выбранное высказывание может быть утвердительным или отрицательным, может иметь количественную характеристику разной длины, но эти различия не влияют на доказательство. Качество высказываний имеет значение, но поскольку в данных рассуждениях применяются в точности два отрицания, а отрицание — единственный способ изменения качественной характеристики, на последнем шаге мы получим высказывания с той же качественной характеристикой, что и у исходного высказывания. Все высказывания в рамках одного рассуждения относятся к тем же субъектам и к тому же предикату с тем же количеством квантифицированных позиций, что и исходное высказывание, и субъекты остаются на одних и тех же местах предиката — эти характеристики всегда неизменны в рамках доказательства каждой из теорем.

Высказывание, с которого мы начинаем рассмотрение, в каждом случае будем по-прежнему называть выбранным высказыванием, а высказывание, контрадикторное для выбранного, будем назвать противоречащим[10] высказыванием.

Рассмотрим для начала случаи сугубо общих и сугубо частных высказываний, начав с теоремы для контрарности.

***Доказательство.* Случаи сугубо общих и сугубо частных высказываний для контрарности.**

Если выбранное высказывание — **сугубо общее**, тогда его противоречащее высказывание будет сугубо частным, по правилу отрицания (параграф «Контрадикторность» настоящей статьи). Количество подчиняющих для сугубо частных высказываний с n-местным предикатом — $2^n - 1$, поскольку все высказывания с той же качественной характеристикой, что у противоречащего, кроме него самого, будут его подчиняющими высказываниями, т.е. у них у всех будет по крайней мере одно «О» там, где у его количественной характеристики находится «Ч», и у них не будет ни одного «Ч» там, где у него «О» (у сугубо частного высказывания, конечно, нет «О», это условие сформулировано в общем виде для высказываний всех типов). Все эти подчиняющие высказывания — или смешанного количества, или сугубо общие. Контрадикторные им высказывания будут, соответственно, или смешанного количества, или сугубо частными и будут обладать той же качественной характеристикой, что и исходное, выбранное, высказывание. Каждое из этих полученных высказываний будет подчиненным для исходного, сугубо общего, высказывания по определению отношения подчинения. Мы доказали теорему для контрарности для случая сугубо общих высказываний.

Рассмотрим случай **сугубо частных** высказываний для контрарности. Отрицание выбранного сугубо частного высказывания дает сугубо общее

[10]Конечно, «противоречие» — это другое название отношения контрадикторности, но для ясности мы в настоящей работе будем называть «противоречащим» в каждом случае только то высказывание, которые находится в отношении контрадикторности именно с выбранным высказыванием, и никакое другое. Итак, для пар наиболее интересующих нас в дальнейшем рассуждении высказываний мы в каждом случае будем использовать термины «выбранное» и «противоречащее» в названных смыслах. А для отношения, в котором находятся некоторое высказывание и его отрицание, мы продолжим последовательно использовать именно термин «контрадикторность».

высказывание. Сугубо общее высказывание не имеет подчиняющих высказываний. Теорема для контрарности не относится к таким случаям. ■

***Доказательство.* Случаи сугубо общих и сугубо частных высказываний для субконтрарности.**

Для субконтрарности, где нас интересуют высказывания, подчиненные противоречащему, а не подчиняющие его, ситуация симметрична.

Для **сугубо общего** высказывания противоречащее высказывание — сугубо частное, и у последнего нет подчиненных. Теорема для субконтрарности не относится к таким случаям.

Если выбранное высказывание — **сугубо частное**, то противоречащее высказывание — сугубо общее, и для последнего все высказывания того же качества, кроме него самого, являются подчиненными. Эти подчиненные — или высказывания смешанного количества, или сугубо частные, а контрадикторные им высказывания, соответственно, смешанного количества или сугубо общие; качественная характеристика этих контрадикторных высказываний — такая же, как у выбранного высказывания. Они все являются подчиняющими для выбранного исходного, сугубо частного, высказывания, по определению подчинения. Мы доказали теорему для субконтрарности для случая сугубо частных высказываний. ■

Таблица 1

Пример для сугубо общих высказываний: $n = 5$, выбрано высказывание ООООО, утвердительное. На Шаге 3.а есть «О» на месте по крайней мере одного из «?», на Шаге 4.а есть «Ч» на месте по крайней мере одного из «?»

Шаг	Характ-ка/позиция	1	2	3	4	5	Кач-во
Шаг 1	Хар. исходного выск.	О	О	О	О	О	Утв.
Шаг 2	Хар. противоречащего выск.	Ч	Ч	Ч	Ч	Ч	Отр.
Шаг 3.а	Хар. **подчиняющих** прот-щего	?	?	?	?	?	Отр.
Шаг 4.а	Хар. отрицания подчиняющих	?	?	?	?	?	Утв.
Шаг 3.б	Хар. **подчиненнных** прот-щего	–					

Мы используем таблицы, но только для иллюстрации (табл. 1 для контрарности и субконтрарности и сугубо общих высказываний, табл. 2 для контрарности и субконтрарности и сугубо частных высказываний, табл. 3 для контрарности и смешанных высказываний, табл. 4 для субконтрарности и смешанных высказываний). Само рассуждение не зависит от конкретных характеристик выбранного высказывания.

Таблица 2

Пример для сугубо частных высказываний: $n = 5$, выбрано высказывание ЧЧЧЧЧ, отрицательное (для разнообразия). На Шаге 3.б есть «Ч» на месте по крайней мере одного из «?», на Шаге 4.б есть «О» на месте по крайней мере одного из «?»

Шаг	Характ-ка/позиция	1	2	3	4	5	Кач-во
Шаг 1	Хар. исходного выск.	Ч	Ч	Ч	Ч	Ч	Отр.
Шаг 2	Хар. противоречащего выск.	О	О	О	О	О	Утв.
Шаг 3.а	Хар. **подчиняющих** прот-щего	–					
Шаг 3.б	Хар. **подчиненных** прот-щего	?	?	?	?	?	Утв.
Шаг 4.б	Хар. отрицания подчиненных	?	?	?	?	?	Отр.

Теперь обратимся к случаям, когда выбрано **высказывание смешанного количества**. В любом возможном высказывании у предиката имеется n квантифицированных позиций, мы можем пронумеровать их, от первой до n-й. Количественная характеристика соответствующего высказывания будет иметь n упорядоченных элементов, отражающих квантификацию субъектов на каждом месте предиката. Благодаря этой связи можно говорить о позициях количественной характеристики.

Доказательство. **Случаи смешанных высказываний для контрарности и субконтрарности.**

Начнем с произвольного выбранного высказывания смешанного количества.

Затем перейдем к высказыванию, контрадикторному ему. У полученного противоречащего высказывания количественная характеристика тоже смешанная, по определению отрицания, при этом у него буквы «Ч» на тех позициях, где у выбранного «О», и наоборот.

Для **контрарности** (пример см. в табл. 3) нас интересуют высказывания, подчиняющие противоречащее высказывание. Их количественные характеристики можно получить, сохраняя неизменными все «О» в характеристике противоречащего высказывания и заменяя все или только некоторые из «Ч» в этой характеристике на «О» — по определению подчинения. Полные количественные характеристики известны для каждого подчиняющего высказывания, но мы будем использовать обобщенное описание, абстрагируясь от индивидуальных характеристик и сохраняя лишь часть, общую для всех высказываний. Позиция, на которой характеристики по крайней мере некоторых из этих подчиняющих высказываний различаются, мы обозначим при помощи «?». В то время как отдельные характеристики не могут включать в свой состав знак вопроса, обобщенное представление для ряда этих характеристик — может. (Можно рассматривать его как часть метаязыка.)

Количественная характеристика этих подчиняющих высказываний будет включать «О» на тех местах, где у противоречащего высказывания было «О», потому что «О» сохранялись при переходе от противоречащего высказывания к подчиняющим его. Но поскольку характеристики подчиняющих высказываний вообще включают одно или более «О» там, где у их подчиненных имеется «Ч», в данном рассуждении тоже подчиняющие противоречащего высказывания отличаются от него в своих характеристиках по крайней мере в одной позиции (у них есть «дополнительные» «О» при том же общем количестве позиций).

Посмотрим на результаты отрицания для каждого высказывания, подчиняющего противоречащее (пример — см. Шаг 4 табл. 3).

Их количественные характеристики изменятся на противоположные на каждой позиции, по определению отрицания.

Результат отрицания для подчиняющих высказываний тоже можно записать в обобщенном виде, при том что для каждого отдельного подчиняющего высказывания есть в точности один результат отрицания с определенной характеристикой. Каждая количественная характеристика, рассматриваемая по отдельности, имеет по крайней мере одно «Ч» на каком-то из мест, обозначенных знаком вопроса, поскольку высказывание, к которому на Шаге 3 было применено отрицание, имело «дополнительные» (по сравнению с имевшимися на Шаге 2) «О».

Полученные в итоге после всех шагов высказывания будут все подчиненными по отношению к исходному высказыванию. В самом деле, их количественные характеристики будут включать «Ч» на каждой позиции, где у исходного было «Ч», так что их характеристики могут отличаться от характеристики исходного только там, где у исходного было «О». Полученные высказывания могут на этих позициях иметь «Ч» или «О», но, как мы только что видели, останется по крайней мере одна позиция, где будет «Ч», в отличие от «О» в характеристике исходного высказывания. Так что между исходным выбранным высказыванием и каждым полученным в итоге высказыванием будет разница на одной или более позиций количественной характеристики. И на каждой позиции, где есть различие, у исходного высказывания будет «О», а у полученного — «Ч». То есть каждое из полученных высказываний будет (по определению отношения подчинения) подчиненным для исходного.

Мы доказали то, что требовалось, для контрарности и случаев, когда выбрано высказывание смешанного количества.

Рассуждение аналогично для **субконтрарности**. Начинаем с выбранного высказывания, переходим к противоречащему высказыванию, количественная (и качественная) характеристика которого обратна характеристике выбранного высказывания, по определению контрадикторности. Далее нас интересуют высказывания, подчиненные противоречащему, так что мы сохраняем неизменными те части его характеристики, где находятся «Ч», и меняем все или только некоторые «О» противоречащего высказывания на «Ч», так что на Шаге 3 каждое из высказываний имеет по крайней мере на одно «Ч» больше, чем противоречащее (при сохранении общего количества позиций неизменным). Можно записать результат в обобщенном виде, с «?» на позициях, на которых может быть любая из букв («О» или «Ч»), при этом имея в виду, что индивидуальные (не обобщенные) характеристики каждого высказывания будут включать «Ч» на по крайней мере одной из позиций, обозначенных при помощи «?». Теперь произведем отрицание всех подчиненных противоречащего высказывания и запишем результат в обобщенном виде. Полученные высказывания будут того же качества, что и исходное высказывание, и их количественная характеристика будет иметь «О» на всех тех же позициях, где у исходного высказывания были «О». Полученные высказывания могут иметь «О» или «Ч» на тех позициях, где у исходного были «Ч» (эти позиции обозначены при помощи «?»). Также индивидуальная характеристика каждого из полученных (после отрицания) высказываний будет содержать «О» по крайней мере на одной из позиций, обозначенных при помощи «?». Так что найдутся одна или более позиций количественных характеристик, на которых исходное и полученные высказывания различаются, и на каждой из таких позиций у исходного высказывания находятся «Ч», а у полученного — «О». Т.е. все полученные высказывания являются подчиняющими для исходного, выбранного, высказывания (по определению отношения подчинения). ■

Пример. Табл. 3. Пример для **контрарности**, когда выбрано высказывание **смешанного** количества: $n = 8$, выбранное высказывание — ОЧЧООЧОЧ, утвердительное. В таблице указаны количественная и качественная характеристики высказываний, рассматриваемых на каждом шаге. При этом акцент делается на том, на каких позициях характеристика неизменна, а на каких меняется, и на каком шаге. Шаг 1 — характеристика исходного выбранного высказывания, Шаг 2 — характеристика противоречащего высказывания, Шаг 3 — характеристика высказываний, подчиняющих противоречащее, Шаг 4 — характеристика высказываний, полученных в результате отрицания этих подчиняющих высказываний. Некоторые характеристики включают знак вопроса, поскольку в таблице обобщается ряд случаев (сначала, на Шаге 3, обобщаются характеристики разных высказываний, подчиняющих противоречащее высказывание, затем, на Шаге 4, обобщаются характеристики высказываний, каждое из которых является результатом отрицания какого-то из этих подчиняющих) — и в каждом конкретном случае будет иметь место своя комбинация букв количественной характеристики, «стоящих за» знаками вопроса. Если рассматривать их по отдельности, на Шаге 3 каждая количественная характеристика включает обозначение «О» на месте по крайней мере одного из вопросительных знаков обобщенной характеристики, а на Шаге 4 каждая количественная характеристика включает «Ч» на месте по крайней мере одного вопросительного знака.

Таблица 3

Пример для контрарности, выбрано высказывание смешанного количества: $n = 8$**, выбрано высказывание ОЧЧООЧОЧ, утвердительное**

Шаг	Характ-ка/позиция	1	2	3	4	5	6	7	8	Кач-во
Шаг 1	Хар. исходн. выск.	О	Ч	Ч	О	О	Ч	О	Ч	Утв.
Шаг 2	Хар. против. выск.	Ч	О	О	Ч	Ч	О	Ч	О	Отр.
Шаг 3	Хар. подч-щих пр-го	?	О	О	?	?	О	?	О	Отр.
Шаг 4	Хар. отр-я подч-щих	?	Ч	Ч	?	?	Ч	?	Ч	Утв.

Пример. Табл. 4. Пример для субконтрарности, когда выбрано высказывание смешанного количества: $n = 8$, выбранное высказывание — ОЧЧООЧОЧ, утвердительное. Если рассматривать их по отдельности, на Шаге 3 (характеристика подчиненных противоречащего высказывания) каждая количественная характеристика включает обозначение «Ч» на месте по крайней мере одного из вопросительных знаков обобщенной характеристики, а на Шаге 4 (характеристика высказываний, полученных в результате отрицания этих подчиненных высказываний) каждая количественная характеристика включает «О» на месте по крайней мере одного вопросительного знака.

■

6. Аристотелевы отношения, описанные в терминах количественной и качественной характеристик находящихся в них высказываний

Результаты, полученные в предыдущем параграфе, позволяют отступить от геометрических соображений и опираться исключительно на количественные и качественные характеристики сопоставляемых высказываний

Таблица 4

Пример для субконтрарности, выбрано высказывание смешанного количества: $n = 8$, выбрано высказывание ОЧЧООЧОЧ, утвердительное

Шаг	Характ-ка/позиция	1	2	3	4	5	6	7	8	Кач-во
Шаг 1	Хар. исходн. выск.	О	Ч	Ч	О	О	Ч	О	Ч	Утв.
Шаг 2	Хар. против. выск.	Ч	О	О	Ч	Ч	О	Ч	О	Отр.
Шаг 3	Хар. подч-ных пр-го	Ч	?	?	Ч	Ч	?	Ч	?	Отр.
Шаг 4	Хар. отр-я подч-ных	О	?	?	О	О	?	О	?	Утв.

об отношениях при исследовании логических отношений между такими высказываниями.

Мы уже рассмотрели критерии для контрадикторности и подчинения в соответствующих параграфах настоящей статьи. Теперь, опираясь на теоремы из предыдущего параграфа, сформулируем, между высказываниями с каким соотношением их характеристик существуют отношения контрарности и субконтрарности.

Следствие 1. Контрарность имеет место между данным высказыванием и высказываниями, являющимися подчиняющими для результата отрицания данного высказывания. Другими словами, между выбранным высказыванием и каждым из высказываний противоположного качества, у которых в количественной характеристике «О» на каждой позиции, на которой у выбранного «Ч», и еще как минимум одно «О» там, где у выбранного «О» (последняя часть нужна для того, чтобы разграничить случаи контрарности и контрадикторности).

Данное правило распространяется в том числе на сугубо общие высказывания. Можно утверждать, что сугубо частные высказывания не находятся в отношении контрарности ни с каким высказыванием, согласно определению контрарности, соображениям семантического характера и тому обстоятельству, что единственным высказыванием, которое не может быть истинным одновременно с сугубо частным высказыванием, является находящееся с ним в отношении контрадикторности (т.е. несовместимое не только по истинности, но и по ложности) сугубо общее высказывание противоположного качества[11].

[11] Строго говоря, утверждение, что сугубо частные высказывания не находятся в отношении контрарности ни с какими другими, справедливо в рамках данной системы, но может быть опровергнуто в системах с большей глубиной анализа. Так, подобные высказывания контрарны тождественно-ложным высказываниям, которые не выделяются в рамках настоящей системы, как и в логическом квадрате. Кроме того, можно

Следствие 2. Субконтрарность имеет место между данным высказыванием и высказываниями, являющимися подчиненными для результата отрицания данного высказывания. Другими словами, между выбранным высказыванием и каждым из высказываний противоположного качества, у которых в количественной характеристике «Ч» на каждой позиции, на которой у выбранного «О», и еще как минимум одно «Ч» там, где у выбранного «Ч» (последняя часть нужна для разграничения субконтрарности и контрадикторности).

Данное правило распространяется в том числе на сугубо частные высказывания. Можно утверждать, что сугубо общие высказывания не находятся в отношении субконтрарности ни с каким высказыванием, согласно определению субконтрарности, соображениям семантического характера и тому обстоятельству, что единственным высказыванием, которое не может быть ложным одновременно с сугубо общим высказыванием, является находящееся с ним в отношении контрадикторности (т.е. несовместимое не только по ложности, но и по истинности) сугубо частное высказывание противоположного качества[12].

7. Дальнейшие вопросы

Существуют пары высказываний, не подпадающие под рассмотренные в настоящей работе правила. В частности, это пары, где второе высказывание имеет то же качество, что и первое, а в его количественной характеристике есть «Ч» на некоторых позициях, где у первого «О», и «О» на некоторых позициях, где у первого «Ч». Таковы и пары, где высказывания имеют разное качество, при этом в количественной характеристике второго есть «Ч» там, где у первого «Ч», и «О», где у первого «О». Такие

найти высказывания, которые несовместимы с сугубо частным высказыванием по истинности, но совместимы по ложности, однако не в силу логической формы, а по причинам фактического характера. Например, такова пара высказываний «Некоторые кошки больше любят читать некоторые стихи, чем некоторую прозу» и «Некоторые кошки лучше играют некоторые произведения Моцарта, чем некоторые произведения Баха».

[12]Утверждение, что сугубо общие высказывания не находятся в отношении субконтрарности ни с какими другими, справедливо в рамках данной системы, но может быть опровергнуто в системах с большей глубиной анализа. Так, подобные высказывания субконтрарны тождественно-истинным высказываниям, которые не выделяются в рамках настоящей системы, как и в логическом квадрате. Кроме того, можно найти высказывания, которые несовместимы с сугубо общим высказыванием по ложности, но совместимы по истинности, однако не в силу логической формы, а по причинам фактического характера. Например, такова пара любых фактически необходимых высказываний, не являющихся при этом логически необходимыми.

пары высказываний рассматриваются в других наших работах ([Черкашина, 2022; Черкашина, 2023]) как находящиеся в отношении независимости. В этих работах показано, что при глубине анализа, предусмотренной данной системой, нет иных пар высказываний, находящихся в отношениях контрарности и субконтрарности, чем описанные в настоящей работе (т.е. чем следующие представленным здесь правилам). Предложенное в названных иных работах рассмотрение опирается на семантический подход. Представляется интересным включить эти случаи в более формальное доказательство.

Также мы ожидаем обнаружить иные, не совпадающие с имеющимися в логическом квадрате, логические отношения между высказываниями об отношениях, в том числе подобные контрарности и субконтрарности, но отличающиеся от них — отношения, которые мы называем «исчерпывающей m-местной контрарностью» и «исчерпывающей m-местной субконтрарностью», где $m > 2$. Такие отношения имеются в некоторых других исследованных и построенных нами логических диаграммах для отношений между высказываниями ([Черкашина, 2024a; Черкашина, 2024b]). Вопрос о наличии и (если они существуют) свойствах таких логических отношений между высказываниями об отношениях ожидает дальнейшего исследования.

Заключение

Мы доказали теоремы (Теорема 1 для контрарности и Теорема 2 для субконтрарности), нужные для обоснования правил (Следствие 1 и Следствие 2 соответственно), которые позволяют немедленно найти для произвольного высказывания об n-местном отношении (n — натуральное число, $n \geqslant 1$) высказывания того же типа, находящиеся с данным высказыванием в логическом отношении контрарности (субконтрарности).

Вместе с другими правилами, ранее сформулированными Ю.В. Ивлевым и нами, эти правила позволяют немедленно выявить для двух данных высказываний, есть ли между ними логические отношения подчинения, контрадикторности, контрарности, субконтрарности.

Литература

Бочаров, Маркин, 2010 – *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М.: Прогресс-Традиция, 2010. 336 с.

Ивлев, 1976 – *Ивлев Ю.В.* Логика. М.: РИО Академии МВД, 1976. 144 с.

Ивлев, 1988 – *Ивлев Ю.В.* Курс лекций по логике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 160 с.

Ивлев, 1992 – *Ивлев Ю.В.* Логика. Учебник. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. 270 с.

Ивлев, 2008 – *Ивлев Ю.В.* Логика: учеб. 4-е изд., перераб. и доп. М.: ТК Велби; Проспект, 2008. 304 с.

Черкашина, 2018a – *Черкашина О.В.* Логический многоугольник для суждений об отношениях // Логико-философские штудии. 2018. Т. 16. № 1–2 (май–июнь 2018). С. 194–195.

Черкашина, 2019a – *Черкашина О.В.* Некоторые аспекты построения логических многоугольников для высказываний о двухместных отношениях // Одиннадцатые Смирновские чтения: материалы Междунар. науч. конф. (г. Москва, 19–21 июня 2019 г.). М.: Современные тетради, 2019. С. 89–91.

Черкашина, 2022 – *Черкашина О.В.* Логические диаграммы для высказываний об отношениях // Логико-философские штудии. 2022. Т. 20. № 3. С. 266–274.

Черкашина, 2023 – *Черкашина О.В.* Отношение независимости и Аристотелевы отношения между высказываниями об n-местных отношениях // Тринадцатые Смирновские чтения: материалы Междунар. науч. конф. (г. Москва, 22–24 июня 2023 г.). М.: Издатель А.В. Воробьёв, 2023. С. 132–136.

Черкашина, 2024a – *Черкашина О.В.* Логический многоугольник для реляционных высказываний: правила построения и применения // Логические исследования. 2024. Т. 30. № 1. С. 25–45.

Черкашина, 2024b – *Черкашина О.В.* Некоторые вопросы построения для высказываний о двухместных отношениях аналога шестиугольника Бланше. Схема логических отношений подчинения и контрадикторности // Логико-философские штудии. 2024. Т. 21. № 4. С. 178–187.

Cherkashina, 2018b – *Cherkashina O.* Figure of Opposition for Propositions about Relations // Handbook of Abstracts. 6th World Congress on the Square of Opposition. Crete, November 1–5, 2018 / Ed. by J.-Y. Beziau et al. Crete, 2018. P. 68–69.

Cherkashina, 2019b – *Cherkashina O.* Logical polygon for relations among propositions about relations: Symmetry // *Symmetry: Art and Science*. 2019. No. 1–4. P. 86–89.

Cherkashina, 2024c – *Cherkashina O.* “Logical Lantern”: Analogue of the Square of Opposition for Propositions in V.I. Markin’s Universal Language for Traditional Positive Syllogistic Theories // Logica Universalis. 2024. Vol. 18. Is. 1–2. No. 1–2. P. 35–47.

Nilsson, 2020 – *Nilsson, J.F.* A Cube of Opposition for Predicate Logic // Logica Universalis. 2020. Vol. 14. P. 103–114.

Schang, 2016 – *Schang, F.* An Arithmetization of Logical Oppositions // The Square of Opposition: A Cornerstone of Thought (Studies in Universal Logic) / Ed. by J.-Y. Béziau, G. Basti. Cham, Switzerland, 2016. P. 216–237.

Schang, 2018 – *Schang, F.* End of the square? // South American Journal of Logic. 2018. Vol. 4. No. 2. P. 1–21.

Oksana V. Cherkashina

Logical polygon: deducing logical relations among propositions about many-place relations

Oksana V. Cherkashina
Bauman Moscow State Technical University,
5/1, 2-ya Baumanskaya Str., Moscow, 105005, Russian Federetion.
E-mail: Ch.O.Logic@zohomail.com

Abstract: This work develops the earlier research aimed at creating an analogue of syllogistic theories, but for propositions about relations, not properties. The aim of this paper is to justify the rules (which we formulated earlier) that allow to find for a given proposition about an n-place relation with $n \geqslant 1$, where n is a natural number, the propositions of the same kind which are in the logical relations of contrariety and subcontrariety with the given proposition. Based on these rules (and also on the rules for contradiction and subalternation), it is also possible to immediately tell for two given propositions what the logical relation between them is. These rules are algorithms which allow to deduce the logical relations among propositions from the propositions' quantity and quality characteristics, without applying predicate logic. Here are proved two theorems, the corollaries of which show the connection of such characteristics to the relations among propositions. Based on these rules, we have constructed the diagram, called "logical polygon", which is proposed as an analogue of the logical square, but for propositions about n-place relations (and not properties, as the square is). Unlike the square, the polygon not only illustrates, — but also allows to deduce the logical relations among propositions. Logical polygon was constructed by us earlier based on semantic and geometric considerations, in this paper we give the needed proofs based on the forms of the propositions themselves. This work, together with other papers by the same author, intends to be useful in a new field of research — constructing and studying analogues of syllogistic theories, but for propositions about relations.

Keywords: propositions about relations, n-place predicate, Aristotelian relations, logical polygon, logical square, square of opposition, extensions of the square, diagrams, syllogistic theories, Ivlev

For citation: Cherkashina O.V. "Logicheskii mnogougol'nik: vyvedeniye logicheskikh otnoshenii mezhdy vyskazyvaniyami o mnogomesntnykh otnosheniyakh" [Logical polygon: deducing logical relations among propositions about many-place relations], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2026, Vol. 32, No. 1, pp. 112–136. DOI: 10.21146/2074-1472-2026-32-1-112-136. (In Russian)

References

Bocharov, Markin, 2010 – Bocharov, V.A., Markin, V.I. *Sillogisticheskie teorii* [Syllogistic theories]. Moscow: Progress-Traditsiya, 2010. 336 pp. (In Russian)

Cherkashina, 2018a – Cherkashina, O.V. "Logicheskii mnogougol'nik dlya suzhdenii ob otnosheniyakh" [Logical polygon for propositions about relations], *Logiko-filosofskie shtudii* [Logico-philosophical studies], 2018, Vol. 16, No. 1–2 (May–June 2018), pp. 194–195. (In Russian)

Cherkashina, 2018b – Cherkashina, O. "Figure of opposition for propositions about relations", in: *Handbook of Abstracts, 6th World Congress on the Square of Opposition*, ed. by J.-Y. Béziau et al. Orthodox Academy of Crete. Crete, 2018, November 1–5, pp. 68–69.

Cherkashina, 2019a – Cherkashina, O.V. *Nekotorye aspekty postroeniya logicheskikh mnogougol'nikov dlya vyskazyvanii o dvukhmestnykh otnosheniyakh* [Some aspects of constructing figures of opposition for propositions about two-place relations], in: Proceedings of the 11th Smirnov's readings on logic (Moscow, 19—21 June 2019). Moscow: Sovremennye tetradi Publ., 2019, pp. 89–91. (In Russian)

Cherkashina, 2019b – Cherkashina, O. "Logical polygon for relations among propositions about relations: Symmetry", *Symmetry: Art and Science*, 2019, No. 1–4, pp. 86–89.

Cherkashina, 2022 – Cherkashina, O.V., "Logicheskie diagrammy dlya vyskazyvanii ob otnosheniyakh" [Logical diagrams for propositions about relations], *Logiko-filosofskie shtudii* [Logico-philosophical studies], 2022, Vol. 20, No. 3, pp. 266–274. (In Russian)

Cherkashina, 2023 – Cherkashina, O.V. *Otnoshenie nezavisimos'ti i Aristotelevy otnosheniya mezhdy vyskazivaniyami ob n-mestnykh otnosheniyakh* [The relation of independency (unconnectedness) and Aristotelian relations among propositions about n-place relations], in: Proceedings of the 13th Smirnov's readings on logic (Moscow, 22–24 June 2023). Moscow: Publ. A.V. Vorobyov, 2023, pp. 132–136. (In Russian)

Cherkashina, 2024a – Cherkashina, O.V. "Logicheskii mnogougol'nik dlya relyatsionnykh vyskazyvanii: pravila postroeniya i primeneniya" [Logical polygon for propositions about relations: rules of constructing and application], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2024, Vol. 30, No. 1, pp. 25–45. (In Russian)

Cherkashina, 2024b – Cherkashina, O.V. "Nekotorye voprosy postroeniya dlya vyskazyvanii o dvukhmestnykh otnosheniyakh analoga shestiugol'nika Blanshe. Skhema logicheskikh otnoshenii podchineniya i kontradiktornosti" [Some questions of constructing for propositions about 2-place relations of an analogue of Blanché hexagon. A scheme for logical relations of subalternation and contradiction], *Logiko-filosofskie shtudii* [Logico-philosophical studies], 2025, Vol. 21, No. 4, pp. 178–187. (In Russian)

Cherkashina, 2024c – Cherkashina, O. "'Logical Lantern': Analogue of the Square of Opposition for Propositions in V.I. Markin's Universal Language for Traditional Positive Syllogistic Theories", *Logica Universalis*, 2024, Vol. 18, Is. 1–2, No. 1–2, pp. 35–47.

Ivlev, 1976 – Ivlev, Yu.V. *Logika* [Logic]. Moscow: Editorial and publishing department of the Ministry of Internal Affairs Academy, 1976. 144 pp. (In Russian)

Ivlev, 1988 – Ivlev, Yu.V. *Kurs lektsii po logike* [Course of lectures in Logic]. Moscow: Moscow University publishing, 1988. 160 pp. (In Russian)

Ivlev, 1992 – Ivlev, Yu.V. *Logika. Uchebnik* [Logic. Textbook]. Moscow: Moscow University publishing, 1992. 270 pp. (In Russian)

Ivlev, 2008 – Ivlev, Yu.V. *Logika* [Logic]. Moscow: TK Velbi; Prospect Publ., 2008. (4th ed. with corrections) 304 pp. (In Russian)

Nilsson, 2020 – Nilsson, J.F. "A Cube of Opposition for Predicate Logic", *Logica Universalis*, 2020, Vol. 14, pp. 103–114.

Schang, 2016 – Schang, F. "An Arithmetization of Logical Oppositions", *The Square of Opposition: A Cornerstone of Thought (Studies in Universal Logic)*, ed. by J.-Y Béziau, G. Basti. Cham, Switzerland, 2016, pp. 216–237.

Schang, 2018 – Schang, F. "End of the square?", *South American Journal of Logic*, 2018, Vol. 4, No. 2, pp. 1–21.

Список трудов Ю.В. Ивлева[1]

Yuriy V. Ivlev: list of publications

Монографии

1. Логика в управлении. М.: Академия МВД СССР, 1979. 103 с.

2. Содержательная семантика модальной логики. М.: Московский университет, 1985. 170 с.

3. Модальная логика. М.: Московский университет, 1991. 222 с.

4. Квазиматричная (квазифункциональная) логика. М.: Московский университет, 2018. 128 с.

Статьи в журналах и сборниках

1. Об обоснованности нормативного вывода // Сборник статей адъюнктов и соискателей. М.: Высшая школа МВД СССР, 1969. С. 11–20.

2. Основания логики норм // Философские науки. 1969. № 6. С. 72–81.

3. Истинность нормы // Труды Высшей школы Министерства внутренних дел СССР. 1969. № 23. С. 180–191.

4. Таблицы истинности для модальной логики // Логика и методология науки. Логика (К XV всемирному конгрессу философов). М.: Институт философии АН СССР, 1973. С. 61–70.

5. Норма и суждение // Сборник статей адъюнктов и соискателей. М.: Высшая школа МВД СССР, 1973. С. 11–19.

6. Табличное построение пропозициональной модальной логики // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 1973. № 6. С. 51–61.

7. С учетом педагогической направленности // Alma mater. Вестник высшей школы. 1973. № 5. С. 47–50 (в соавторстве с В.Ф. Пирожковым, Н.Н. Брушлинским и К.К. Ермаковым).

8. Содержательная семантика модальной логики // Логико-методологические исследования. М.: Московский университет, 1980. С. 356–374.

[1]Список трудов Ю.В. Ивлева подготовил И.Ю. Слюсарев.

9. Methodologie und logik // Wissenschaftliche Beiträge. 1982. No. 19. S. 20–44.

10. Семантический анализ модальных высказываний // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 1982. № 5. С. 57–68.

11. Место логики в методологии научного познания // Методология развития научного знания. М.: Московский университет, 1982. С. 25–34.

12. Логические модальности // Философские науки. 1983. № 3. С. 81–84.

13. Интерпретация модальных исчислений // Логические исследования (Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР. Т. 2). М.: Институт философии АН СССР, 1983. С. 59–70.

14. Предмет и структура современной логики // Предмет и структура общественных наук. М.: Московский университет, 1984 (в соавторстве с В.А. Бочаровым и Е.К. Войшвилло).

15. Содержательный и формальный подходы в модальной логике // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 1985. № 5. С. 29–39.

16. Современный этап в развитии логики // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 1985. № 5. С. 4–14 (в соавторстве с В.А. Бочаровым и Е.К. Войшвилло).

17. Четырехзначная квазиматричная логика предикатов $PS + b$ // Нестандартные семантики неклассических логик (Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР. Т. 5). М.: Институт философии АН СССР, Москва, 1986. С. 76–87.

18. Содержательное построение систем модальной логики // Логика научного познания. Актуальные проблемы. М.: Наука, 1987. С. 159–172.

19. Некоторые результаты научной работы кафедры логики философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 1987. № 4. С. 4–11.

20. Новые семантики модальной логики // Современная логика и методология науки. М.: Московский университет, 1987. С. 71–86.

21. The current stage in the development of logic // Science as a subject of study. Moscow: Social Sciences Today, 1987. P. 92–106 (with co-authors V.A. Bocharov and E.K. Voishvillo).
22. Логика управленческого решения // Логика научного познания. М.: ФО СССР, 1988.
23. Логическая теория и практика преподавания логики // Философские науки. 1988. № 1. С. 105–109 (в соавторстве с Ю.А. Петровым).
24. A semantics for modal calculi // Bulletin of the section of logic. 1988. Vol. 17. No. 3. P. 114–126.
25. Логические аспекты философской аргументации // Вопросы философии. 1988. № 6–7. С. 202–210 (в соавторстве с Е.К. Войшвилло).
26. Минимальная модальная логика // Исследования по неклассическим логикам. М.: Наука, 1989. С. 246–258.
27. Трехзначная квазиматричная логика и логика квантовой механики // Современные исследования по квантовой логике. М.: Московский университет, 1989. С. 47–64.
28. Семантика фактических и логических модальностей // Logica, 88. Proceedings of Symposium. Praha: Institut for Philosophy and Sociology, Czechoslovak Academy of Sciences, 1989. P. 106–123.
29. Некоторые нерешенные проблемы содержательной семантики модальной логики // Исследования по логике научного познания. М.: Наука, 1990. С. 124–128.
30. Логическая характеристика вопросов // Логико-философские исследования. 1991. № 2. С. 142–146.
31. Квазифункциональная логика // Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы. 1992. № 6. С. 12–20.
32. Квазифункциональные семантики и семантики ограниченных множеств описаний состояний // Логические исследования. 1993. Т. 1. С. 186–209.
33. Quasi-Functional Logic and Logic of Propositional Attitudes // Philosophie und Logik. Frege-Kolloquien Jena 1989/1991. Herausgegeben von Werner Stelzner. Walter de Gruyter. Berlin; New York: 1993. S. 200–204.

34. Логические модальности // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 1996. № 6. С. 73–78.

35. К теории логических модальностей // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1996. М.: ИФ РАН, 1997. С. 140–148.

36. Semantics of the restricted state-descriptions sets for quasi-matrix logic // Bulletin of the section of logic. 1998. Vol. 27. No. 1. P. 74–76.

37. Теория логических модальностей // Логические исследования. Т. 6. 1999. С. 21–29.

38. Theory of Logical Modalities // Multiple Valued Logic. An International Journal. 2000. Vol. 5. P. 91–102.

39. Некоторые проблемы Tractatus logico-philosophicus с точки зрения современной логики (на английском и русском языках) // Logical Studies. 2000. № 5.

40. Quasi-matrix logic as a paraconsistent logic for dubitable infirmation // Logic and Logical Philosophy. 2000. Vol 8. P. 91–97.

41. Некоторые проблемы Tractatus logico-fhilosophicus с точки зрения современной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XIV. М.: ИФ РАН, 2000. С. 156–165.

42. Проблема построения теории фактических модальностей // Логические исследования. 2000. Вып. 7. С. 269–276 (в соавторстве с В.Ю. Ивлевым).

43. Квазиматричная логика — основа теории фактических (онтологических) модальностей // Логические исследования. 2001. Вып. 8. С. 50–64.

44. Outlines of the transition from the principles of traditional logic to the principles of non-classical logic // Zwischen Traditioneller und Modernen Logik. Nichtklassische Ansatze. Mentis, 2001. S. 297–310.

45. Основные области приложения квазиматричной логики // Логические исследования. 2002. Вып. 9. С. 103–112.

46. О понятии логической теории // Рационализм и культура на пороге третьего тысячелетия. Ростов н/Д.: Изд-во СКНЦ ВШ, 2002. Т. 2. С. 269–270.

47. Теория модальностей // Человек. Культура. Общество. Актуальные проблемы философских, политологических и религиоведческих исследований. М.: Современные тетради, 2002. Т. 2. С. 17–18.

48. Основы логической теории аргументации // Логические исследования. 2003. Вып. 10. С. 50–60.

49. Логическая и прагматическая характеристика вопросов и ответов // Логика и В.Е.К. М.: Современные тетради, 2003. С. 139–148.

50. Введение к книге К.И. Бахтиярова «Логика с точки зрения информатики» // Бахтияров К.И. Логика с точки зрения информатики: Бестселлер в духе Льюиса Кэрролла: 12 этюдов. М.: УРСС, 2002. С. 2.

51. Применение субъективно-технологического подхода к проблеме исследования механизма обмена информацией в ходе аргументативно-коммуникативных процессов // Критическое мышление, логика, аргументация. Калининград: Калининградский государственный университет, 2003. С. 74–84 (в соавторстве с О.В. Ляшенко).

52. Логика юридической аргументации // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVII. М.: ИФ РАН, 2004. С. 62–67.

53. Quasi-matrix logic // Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing. 2005. Vol. 11. No. 3–4. P. 239–252.

54. Оценки высказываний в теории аргументации // Философия и общество. 2005. № 2. С. 113–131 (в соавторстве с О.В. Ляшенко).

55. Дедукция и контрдедукция в дискуссии // Мысль: Журнал Петербургского философского общества. 2006. Т. 6. № 1. С. 79–88 (в соавторстве с О.В. Ляшенко).

56. Логика и реальность // Философия и общество. 2007. № 3. С. 164–174.

57. Логико-методологические критерии научности и ненаучности знания // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 2008. № 5. С. 40–45.

58. Обсуждаем статьи об индукции // Эпистемология и философия науки. 2008. Т. 15. № 14. С. 149–157 (в соавторстве с В.П. Филатовым, В.Л. Васюковым и Д.П. Шкатовым).

59. Комментарий к статье Ю.А. Петрова и А.А. Столяра «О педагогическом аспекте семантического анализа вопросов» // Трудные времена философии. М.: Либроком, 2009. С. 136–137.

60. Трехзначные исчисления и их интерпретации // Логико-философские исследования. 2010. № 4. С. 57–71.

61. Методологическая роль логики в научном познании // Логика. Методология. Науковедение. Актуальные проблемы и перспективы. Ростов н/Д.: Южный федеральный университет, 2010. С. 90–93.

62. Generalization of Kalmar's method for quasi-matrix logic // Логические исследования. 2013. Вып. 19. С. 281–307.

63. Аргументация и ее неаргументативное сопровождение или замещение // Wisdom. 2013. No. 1. P. 45–55.

64. Методологические аспекты аргументации // Известия МГТУ «МАМИ». 2013. Т. 2. № 14. С. 133–141.

65. Квазиматричные и матричные трехзначные логики // Логико-философские исследования. 2014. № 6. С. 128–131.

66. Логика и исследования в области логики // Известия МГТУ «МАМИ». 2014. Т. 5. № 3. С. 113–116.

67. О предмете логики // Вестник Российского философского общества. 2015. № 2. С. 56–59.

68. Минимальная квазиматричная логика // Известия МГТУ «МАМИ». 2015. Т. 6. № 2. С. 50–55.

69. Средства убеждения // Философия и общество. 2015. № 3–4. С. 144–154.

70. Роль вопросов в аргументации // Wisdom. 2015. No. 1. P. 26–33.

71. Философская логика // Логико-философские штудии. 2016. Т. 13. № 2. С. 153–154.

72. Четырехзначные матричные модальные логики // Логико-философские исследования. 2016. Вып. 7. С. 76–93.

73. Что такое (комплексная) универсальная логика А.А. Зиновьева? // Логико-философские исследования. 2016. Вып. 7. С. 178–181.

74. Логико-методологические основы педагогической культуры // Вестник Ассоциации вузов туризма и сервиса. 2016. Т. 10. № 3. С. 59–64.

75. Наука и техника sub specie philosophiae: новый учебник — новый подход // Вестник государственного университета «Дубна». Серия «Науки о человеке и обществе». Электронный научный журнал. 2016. № 1. С. 102–103.

76. Основные квазиматричные логики // Гуманитарный вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2016. № 10. С. 1–11.

77. Сравнительный анализ квазифункциональных логик // Гуманитарный вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2017. № 11. С. 1–8.

78. Объективное содержание логических знаний // Александр Зиновьев и актуальные проблемы логики и методологии. М.: Канон+, 2017. С. 92–114.

79. Logical-argumentative basis of educational culture // Advances in Social Science, Education and Humanities Research. 2017. Vol. 142. P. 173–177 (with co-authors V.Yu. Ivlev and M.L. Ivleva).

80. Мировоззренческая составляющая методологии социального познания (на примере квазифункциональной логики) // Человек и общество в контексте современности. Философские чтения памяти профессора П.К. Гречко. М.: Русское общество истории и философии науки, 2017. С. 275–279.

81. Предмет и перспективы развития логики // Логические исследования. 2018. Т. 24. № 1. С. 115–128.

82. Логика и «как-бы-логика» («as-if-logic») // Логико-философские штудии. 2018. Т. 16. № 1–2. С. 181.

83. Деонтическая квазиматричная логика. Логика норм // Гуманитарный вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2018. № 7. С. 1–12.

84. От детерминизма к квазидетерминизму в логике и вне логики // Логические исследования. 2018. Т. 24. № 2. С. 92–99 (в соавторстве с В.Ю. Ивлевым).

85. Objective Meaning of Logical Knowledge // Advances in Social Science, Education and Humanities Research. 2018. Vol. 283. P. 880–885 (with co-authors V.Yu. Ivlev).

86. Логическая методология // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Философия. 2019. Т. 23. № 4. С. 499–507 (в соавторстве с В.Ю. Ивлевым и М.Л. Ивлевой).

87. Квазифункциональность в логике и других науках // Гуманитарный вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2020. № 6. С. 1–22.

88. Логика в истории образования Тувы // Новые исследования Тувы. 2020. № 4. С. 28–44 (в соавторстве с Х.К. Кадыг-оол).

89. Квазифункциональные отношения в логике и других областях знания // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2021. № 63. С. 214–235.

90. Quasi-Matrix (Quasi-Functional) logic // Many-valued Semantics and Modal logic: Essays in Honour of Yuriy Vasilievich Ivlev. Springer, 2024. Vol. 1. P. 3–55.

Статьи в энциклопедиях

1. Гипотеза // Энциклопедия эпистемологии и философии науки. М.: Канон+, 2009. С. 151–152.

2. Классификация логическая // Энциклопедия эпистемологии и философии науки. М.: Канон+, 2009. С. 358–359.

3. Ошибки логические // Энциклопедия эпистемологии и философии науки. М.: Канон+, 2009. С. 680–681.

4. Семантические таблицы // Новая философская энциклопедия. Т. 3. М.: Мысль, 2010. С. 515–516.

5. Аргументация. Часть 2 // Новая философская энциклопедия. Т. 1. М.: Мысль, 2010. С. 163–165.

6. Суждение // Новая философская энциклопедия. Т. 3. М.: Мысль, 2010. С. 664–665.

7. Вопрос // Новая философская энциклопедия. Т. 1. М.: Мысль, 2010. С. 440.

8. Аналогия // Словарь философских терминов / Под ред. В.Г. Кузнецова. М.: ИНФРА-М, 2011. С. 15.

9. Аргументация // Словарь философских терминов / Под ред. В.Г. Кузнецова. М.: ИНФРА-М, 2011. С. 34–35.

10. Классификация // Словарь философских терминов / Под ред. В.Г. Кузнецова. М.: ИНФРА-М, 2011. С. 253.

11. Модальная логика // Словарь философских терминов / Под ред. В.Г. Кузнецова. М.: ИНФРА-М, 2011. С. 334.

12. Модальность // Словарь философских терминов / Под ред. В.Г. Кузнецова. М.: ИНФРА-М, 2011. С. 334–335.

13. Суждение // Словарь философских терминов / Под ред. В.Г. Кузнецова. М.: ИНФРА-М, 2011. С. 555–557.

14. Софизм // Словарь философских терминов / Под ред. В.Г. Кузнецова. М.: ИНФРА-М, 2011. С. 533.

15. Тождества принцип // Словарь философских терминов / Под ред. В.Г. Кузнецова. М.: ИНФРА-М, 2011. С. 590.

16. Гипотеза // Словарь философских терминов / Под ред. В.Г. Кузнецова. М.: ИНФРА-М, 2011. С. 112–113.

17. Индукция // Словарь философских терминов / Под ред. В.Г. Кузнецова. М.: ИНФРА-М, 2011. С. 200–201.

18. Методы Бэкона-Милля // Словарь философских терминов / Под ред. В.Г. Кузнецова. М.: ИНФРА-М, 2011. С. 69.

Публикации в материалах научных конференций

1. Логические аспекты совершенствования нормотворческой деятельности Советского государства // Образование СССР — торжество ленинской национальной политики. Л.: Высшее политическое училище МВД СССР, 1973. С. 95–97.

2. О содержательной семантике модальной логики // VII Всесоюзный симпозиум по логике и философии науки. Киев: Наукова Думка, 1976. С. 99.

3. К содержательной семантике модальной логики // Модальные и интенсиональные логики (Тезисы координационного совещания, г. Москва, 5–7 июня 1978 г.). М.: Институт философии АН СССР, 1978. С. 52–56.

4. О логической семантике для системы $S5$ Льюиса // Модальные и временные логики (Материалы II Советско-финского коллоквиума по логике. г. Москва, 3–7 декабря 1979 г.). М.: Институт философии АН СССР, 1979. С. 37–41.

5. Семантика модальной логики на основе значений t_n, t_c, f_i, f_c // Модальные и интенсиональные логики (Материалы к VIII Всесоюзной конференции «Логика и методология науки». г. Паланга, 26–28 сентября 1982 г.). М.: Институт философии АН СССР, Москва, 1982. С. 43–48.

6. Logical modalities // Logic, Methodology and Philosophy of Science. Salzburg: Elsevier INC, 1983.

7. Логика фактических модальностей // Интенсиональные логики и логическая структура теорий (Тезисы докладов IV Советско-финского коллоквиума по логике). Тбилиси: Мецниереба, 1985. С. 66–67.

8. Новые принципы построения модальной логики // Логика и системные методы анализа научного знания (Тезисы докладов к IX Всесоюзному совещанию по логике, методологии и философии науки. г. Харьков, 8–10 октября 1986 г.). М.: ВИНИТИ, 1986. С. 133–135.

9. Логика квантовой механики как содержательное обобщение классической логики // Логика квантовой механики. Университетская научная конференция (г. Москва, 26–27 декабря 1986 г.). М.: Московский университет, 1986. С. 133–134.

10. New semantics for modal logic // Тезисы докладов VIII Международного конгресса по логике, методологии и философии науки. М.: Наука, 1987. Т. 1. С. 253–255.

11. Методологическое значение квазифункциональной логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке (Материалы I научной конференции. г. Ленинград, 24–25 июня 1990 г.). Л.: Ленинградский университет, 1990. Т. 1. С. 40–42.

12. Основные области приложения квазифункциональной модальной логики // X Всесоюзная конференция по логике, методологии и философии науки (Тезисы докладов и выступлений. г. Минск, 24–26 сентября 1990 г.). Минск: БелНИИНТИ, 1990. Т. 24. С. 62–63.

13. Основные области приложения квазиматричной логики // XIX World Congress of Philosophy. Moscow, 1993. Vol. 1.

14. Формализация и сравнительный анализ основных систем пропозициональной квазиматричной логики // Логика, методология и философия науки (XI Международная конференция). М., 1995. Т. 2. С. 29–32.

15. Теория логических модальностей // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке (материалы IV Общероссийской научной конференции. г. Санкт-Петербург, 19–21 июня 1996). СПб.: СПбГУ, 1996. С. 16–17.

16. Способы построения паранепротиворечивой логики // Международная конференция «Развитие логики в России: итоги и перспективы». М.: Логос, 1997. С. 28–31.

17. Квазиматричная семантика ограниченных множеств описаний состояний // Первые Смирновские чтения по логике (Материалы международной научной конференции. г. Москва, 18–20 марта 1997 г.). М.: ИФ РАН, 1997. С. 45.

18. Семантика ограниченных множеств описаний состояний для квазиматричной логики // Человек–Философия–Гуманизм: Тезисы докладов и выступлений Первого Российского философского конгресса (г. Санкт-Петербург, 4–7 июня 1997 г.). СПб.: СПбГУ, 1997. Т. 3. С. 184–187.

19. Quasi-matrix logic as a para-consistent logic for dubitable infirmation // Parainconsistent Logic, Logical Philosophy, Mathematics & Informatics. Toruń, 1998. P. 68–69.

20. Квазиматричная логика как паранепротиворечивая логика высказываний, относительно которых допускается возможность их опровержения // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке (Материалы V Общероссийской научной конференции. г. Санкт-Петербург, 18–20 июня 1998 г.). СПб.: СПбГУ, 1998. С. 126–128.

21. Фактические модальности // Вторые Смирновские чтения по логике (Материалы международной научной конференции. г. Москва, 18–20 мая 1999 г.). М.: Московский университет, 1999. С. 109–111.

22. Логические модальности // XXI век: будущее России в философском измерении (Материалы Второго Российского философского конгресса. г. Екатеринбург, 7–11 июня 1999 г.). Екатеринбург: Уральский университет, 1999. Т. 1. С. 240.

23. Outlines of the transition from the principles of traditional logic to the principles of non-traditional logic // Ursprunge und Entwurte nichtklassischer logischer Ansatze im Ubergang von traditioneller zu modernen Logik. Bremen: Universität Bremen, 1999. P. 15–16.

24. К теории фактических модальностей // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке (Материалы VI Общероссийской научной конференции. г. Санкт-Петербург, 22–24 июня 2000 г.). СПб.: СПбГУ, 2000. С. 187–189.

25. Отношения между системами фактических модальностей // Третьи Смирновские чтения по логике (Материалы международной научной конференции. г. Москва, 24–27 мая 2001 г.). М.: Московский университет, 2001. С. 121–124.

26. Философия идеального: пространство, материя, сознание // Материалы конференции по книге К. Карманова «Логика идеального». М.: Кардымон, 2002. С. 8–11.

27. К вопросу о теории аргументации // Четвертые Смирновские чтения по логике (Материалы международной научной конференции. г. Москва, 28–29 мая 2003 г.). М.: ИФ РАН, 2003. С. 128–129.

28. Правильные и неправильные вопросы и ответы // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке (Материалы VIII Общероссийской научной конференции. г. Санкт-Петербург, 24–26 июня 2004 г.). СПб.: СПбГУ, 2004. С. 57–59.

29. Аргументация и факторы, влияющие на аргументацию или заменяющие ее // Философия и будущее цивилизации: Тезисы докладов и выступлений IV Российского философского конгресса. М.: Современные тетради, 2005. Т. 1. С. 507.

30. Логика и реальность // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке (Материалы IX Общероссийской научной

конференции. г. Москва, 22–24 июня 2006 г.). СПб.: СПбГУ, 2006. С. 37–40.

31. Объективная и субъективная реальность с точки зрения различных логических систем // Пятые Смирновские чтения по логике (Материалы международной научной конференции. г. Москва, 20–22 июня 2007 г.). М.: ИФ РАН, 2007. С. 75–76.

32. Причины апорий и парадоксов // Шестые Смирновские чтения по логике (Материалы международной научной конференции. 17–19 июня 2009 г.). М.: Современные тетради, 2009. С. 67–68.

33. Современная философская логика: ретроспективный взгляд // Будущее науки и образования в контексте глобализационных процессов (Материалы международной научной конференции). Дубна: Международный университет природы, общества и человека, 2010. С. 75–79.

34. Концепция курса «Теория и практика аргументации» // Проблеми викладання логіки та дисциплін логічного циклу (IV міжнародна науково-практична конференція). Киев: Киевский университет, 2010. С. 119.

35. Как создавался общий курс современной логики и его содержание // Проблеми викладання логіки та дисциплін логічного циклу (IV міжнародна науково-практична конференція). Киев: Киевский университет, 2010. С. 158–159.

36. Основания для построения многозначных логик // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке (Материалы XI Общероссийской научной конференции. г. Санкт-Петербург, 24–26 июня 2010 г.). СПб.: СПбГУ, 2010. С. 335–337.

37. Логическая физика А.А. Зиновьева, апории Зенона и предмет логики // Зиновьевские чтения в Российской академии наук (Материалы третьей международной конференции). М.: Российский государственный торгово-экономический университет, 2010. С. 75–79.

38. Функции и квазиоперации в неклассической логике // Седьмые Смирновские чтения по логике (Материалы международной научной конференции. г. Москва, 22–24 июня 2011 г.). М.: Современные тетради, 2011. С. 73–76.

39. Эмпирическое и теоретическое знания в логике // Философия в современном мире: диалог мировоззрений (Материалы VI Российского философского конгресса. г. Нижний Новогород, 27–30 июня 2012 г.). Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, 2012. Т. 1. С. 109.

40. Эмпирическая и теоретическая составляющие науки логики // Проблеми викладання логіки та дисциплін логічного циклу (V Міжнародна науково-практична конференція). Киев: Киевский университет, 2012. С. 71–72.

41. Generalisation of Kalmar's method for quasimatrix logic S_r // Восьмые Смирновские чтения по логике (Материалы международной научной конференции. г. Москва, 19–21 июня 2013 г.). М.: Современные тетради, 2013. С. 13–15.

42. Концепция учебного курса «Основы логической культуры для школьников и родителей» // Проблеми викладання логіки та перспективи ii розвитку (VI Міжнародна науково-практична конференція). Киев: Киевский университет, 2014. С. 39–40.

43. Методы доказательства семантической полноты и разрешимости многозначных модальных логик // Девятые Смирновские чтения по логике (Материалы Международной научной конференции. г. Москва, 17–19 июня 2015 г.). М.: Московский университет, 2015. С. 20–21.

44. Решение проблемы разрешимости для матричных модальных логик. Solution of the desition problem for matrix modal logics // Философия. Толерантность. Глобализация. Восток и Запад — диалог мировоззрений (Тезисы докладов VII Российского философского конгресса. г. Уфа, 6–10 октября 2015 г.). Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. Т. 3. С. 115.

45. Квазиматричная логика — перспективное направление логических исследований и преподавания логики // Проблеми викладання логіки та перспективи ii розвитку (VII Міжнародна науково-прктична конференція). Киев: Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, 2016. С. 27.

46. Методы формализации и основные области приложения квазиматричной (квазифункциональной) логики // Десятые Смирновские чтения по логике (Материалы Международной научной конференции. г. Москва, 15–17 июня 2017 г.). М.: Московский университет, 2017. С. 78–80.

47. Методологическая функция квазиматричной (квазифункциональной) логики // Методология в науке и образовании (Материалы Всероссийской конференции университетов и академических институтов РАН). М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2017. С. 61–65.

48. От детерминизма к квазидетерминизму в логике и вне логики // Первый Конгресс Русского общества истории и философии науки «История и философия науки в эпоху перемен». М.: Русское общество истории и философии науки, 2018. Т. 1. С. 80–83 (в соавторстве с В.Ю. Ивлевым).

49. Логический принцип ограниченного детерминизма в медицине (диагностика и лечение) // Одиннадцатые Смирновские чтения по логике (Материалы Международной научной конференции. г. Москва, 19–21 июня 2019 г.). М.: Современные тетради, 2019. С. 62–63.

50. Методологическая роль принципа квазидетерминизма в логике, математике, естествознании, технических и гуманитарных науках // Логика. Методология. Науковедение. Интеллектуальные паттерны (Материалы Всероссийской научно-практической конференции). Ростов н/Д.: Южный федеральный университет, 2019. Т. 1. С. 64–72.

51. Возможные технические приложения квазифункциональной логики // Восьмой Российский Философский Конгресс — «Философия в полицентричном мире» (Круглые столы). М.: Логос, 2020. Т. 4. С. 198–200.

52. О предмете логики // Двенадцатые Смирновские чтения (материалы Международной научной конференции. г. Москва, 24–26 июня 2021 г.). М.: Русское общество истории и философии науки, 2021. С. 95–97.

53. Квазифункциональная логика как теоретическое знание // Третий Международный Конгресс Русского общества истории и философии науки «После постпозитивизма». М.: РОИФН, 2022. С. 516–519.

54. Эмпирическое и теоретическое знания в логике // Тринадцатые Смирновские чтения по логике (Материалы Международной конференции. г. Москва, 22–24 июня 2023 г.). М.: Вагант, 2023. С. 86–90.

Методические пособия

1. Упражнения по логике. М.: Высшая школа МВД СССР, 1972. 56 с.
2. Методические указания для самостоятельной работы над курсом логики. М.: Академия МВД СССР, 1974. 20 с.
3. Курс лекций по логике. М.: Московский университет, 1988. 160 с.
4. Логика. Экспериментальный учебник для студентов гуманитарных вузов. М.: Наука, 1994. 284 с.
5. Планы семинарских и практических занятий. М.: Юридический колледж МГУ, 1996. 228 с. (в соавторстве с А.К. Голиченковым, Н.А. Богдановым, В.И. Золотаревым, В.П. Кашириным и Н.Л. Колпаковым).
6. Методические рекомендации по курсу «Логика для юристов». М.: Юридический колледж МГУ, 1997. 61 с.
7. Логика. Сборник упражнений. М.: Дело, 2002. 248 с.
8. Учебник логики. Семестровый курс. М.: Дело, 2003. 208 с.
9. Логика. Электронный курс. М.: МЭСИ, 2009. 160 с. (в соавторстве с Г.Т. Журавлевым и В.Ю. Ивлевым).
10. Логика. Учебник для студентов философских и юридических специальностей. М.: Проспект, 2012. 304 с.
11. Мантик (Логика. На таджикском языке). Душанбе: Дониш, 2013. 318 с. (в соавторстве с Н.М. Сайфуллоевым).
12. Логика. М.: Проспект, 2020. 304 с.
13. Теория и практика арументации. М.: Проспект, 2023. 288 с.
14. Практикум по логике. М.: Проспект, 2023. 353 с.
15. Логика. Краткий курс. М.: Проспект, 2025. 144 с.
16. Логика для юристов. М.: Проспект, 2025. 272 с.

Исправления

Erratum

Сложность и обширность современного массива логических знаний иногда приводят к тому, что в его теле обнаруживаются досадные неточности, требующие указания на них и возможного исправления. Несмотря на старания рецензентов научных статей, от этого не застрахованы даже самые именитые авторы таких авторитетных изданий, как *Journal of Symbolic Logic*. В качестве примеров можно привести обнаруженные неточности таких авторов, как H. Wansing (*JSL*. 2003. Vol. 68. No. 2. P. 712) и F. Fitch (*JSL*. 1970. Vol. 35. No. 2. P. 242) и др.

Редакция журнала «Логические исследования» также следует этой практике и периодически публикует информацию об обнаруженных неточностях.

В этот раз мы сообщаем о неточности в работе: *Зайцев Д.В.* Аргументативное следование, немонотонность и релевантность // Логические исследования. 2025. Т. 31. № 1. С. 110–129.

На с. 114 автор следующим образом определяет отношение аргументативного следования: $\Gamma \mid\!\approx A \Leftrightarrow \forall v(\forall C \in \Gamma.v(C) = \textbf{и} \Rightarrow v(A) = \textbf{и})$ *и* $\exists v.\forall C \in \Gamma.v(C) = \textbf{и}$, где v — классическое приписывание истинностных значений.

В последующем определении исчисления **ANML** на с. 117 автор использует правило $(ar5)$ $A \mid\!\sim A; B \mid\!\sim B \,/\, A, B \mid\!\sim A \wedge B$. Очевидно, что при подстановке p/A и $\neg p/B$ посылки $p \mid\!\sim p$; $\neg p \mid\!\sim \neg p$ удовлетворяют определению отношения следования, но заключение $p, \neg p \mid\!\sim p \wedge \neg p$ ему не удовлетворяет, поскольку не существует такого классического приписывания v, при котором $v(p) = \textbf{и}$ и $v(\neg p) = \textbf{и}$. Это приводит к тому, что теорема адекватности оказывается неверна, и в исчислении **ANML** доказуемы выводимости, нарушающие отношение аргументативного следования.

Возможное исправление могло бы заключаться в том, чтобы, используя авторскую операцию *, следующим образом заранее наложить ограничение непротиворечивости на множество формул $\{A, B\}$ в определении $(ar5)$: $A \mid\!\sim A$; $B \mid\!\sim B \,/\, A \wedge B \mid\!\sim A \wedge B \,/\, (A \wedge B)^* \mid\!\sim A \wedge B$.

Информация для авторов

• Журнал «Логические исследования» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики см. на сайте журнала `http://logicalinvestigations.ru`)

• Все статьи, планируемые к публикации в журнале «Логические исследования», проходят процедуру анонимного рецензирования.

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате $\LaTeX\,2_\varepsilon$

• При подготовке рукописи в $\LaTeX\,2_\varepsilon$ необходимо использовать стилевой класс `LIarticle.cls` и шаблон `LI_template.tex` (если рукопись на русском языке) или `LI_template_eng.tex` (если рукопись на английском языке), которые размещены в правилах предоставления рукописей на сайте `http://logicalinvestigations.ru`. Здесь же размещены подробные рекомендации по подготовке рукописи.

• Объем рукописи не должен превышать 25 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, списки литературы, аннотации (на русском и английском языках).

Статьи следует направлять в электронном виде в редакцию через сайт
`http://logicalinvestigations.ru`

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: `http://logicalinvestigations.ru`)

• All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process.

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the $\LaTeX\,2_\varepsilon$ format.

• While typesetting a paper, the class file `LIarticle.cls` and the template `LI_template_eng.tex` should be used; both files can be accessed at `http://logicalinvestigations.ru`. Here you can also find detailed guidelines for preparing your paper.

• Papers should not exceed 25 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

Submissions should be sent in electronic form through the website:
`http://logicalinvestigations.ru`

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2026. Том 32. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: *ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015*

Главный редактор: *В.И. Шалак*

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технический редактор: *Е.А. Морозова*

Корректор: *Е.М. Пушкина*

Художники: *Н.Н. Попов*, *С.Ю. Растегина*

Подписано в печать с оригинал-макета 16.06.2026.
Формат 70 x 100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Для набора греческого текста использован пакет Teubner.
Усл. печ. л. 12,68. Уч.-изд. л. 7,52. Тираж 1 000 экз. Заказ № 12.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Разработка LaTeX-класса стилевого оформления оригинал-макета: *А.Е. Коньков*

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
http://logicalinvestigations.ru