РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

LOGICAL INVESTIGATIONS

Vol. 5

MOSCOW "NAUKA" 1998

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 5

МОСКВА "НАУКА" 1998

УДК 16
ББК 87.4
Л 69

Издание подготовлено
При поддержке И-та
Открытое Общество
грант № Н2С703

Рецензенты:

доктора философских наук
И.А.Акчурин, В.Л.Маркин

Логические исследования. Вып. 5. — М.: Наука, 1998. — 280 с.

ISBN 5-02-01-3682-4

Пятый выпуск «Логических исследований» содержит статьи, подготовленные по докладам, которые были сделаны на секции “Символическая логика” 1-ой Международной конференции “Смирновские чтения” (Москва, март 1997).

В книгу вошли оригинальные работы по релевантным, модальным и многозначным логикам. Рассмотрены также интуиционистские варианты теории множеств.

Обратим внимание на работы в области компьютерных наук, где обсуждаются проблемы автоматического поиска доказательств в классическом исчислении предикатов, а также представлена теория пропозициональных программ.

Книга предназначена для специалистов в области логики, как математиков, так и философов, а также всех интересующихся проблемами современной неклассической логики.

ТП-98-II-№10

ISBN 5-02-01-3682-4

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

В пятом выпуске «Логических исследований» содержатся статьи, подготовленные по докладам, которые были сделаны на секции «Символическая логика» 1-й Международной конференции «Смирновские чтения». (Москва, март 1997). Напомним, что 4-ый выпуск «Логических исследований» посвящен памяти выдающегося российского логика и философа В.А.Смирнова (1931-1996). В нем содержится аналитический обзор результатов В.А.Смирнова в области современной формальной логики, а также полная библиография его научных трудов.

Сразу обратим внимание на небольшую работу Л.Эсакиа о доказуемостной интерпретации интуиционистской логики, где содержатся новые результаты. Значительное место в данном выпуске занимают работы по релевантным логикам. К этой теме не раз возвращался в своих исследованиях В.А.Смирнов. Новые результаты содержат статьи по модальным логикам. Доказана теорема о бесконечных множествах несводимых модальностей в нормальных модальных логиках. В статье Л.Л.Максимовой изучаются важные свойства одновременно модальных, суперинтуиционистских и релевантных логик. Динамическая семантика для паранепротиворечивых логик разработана Д.Батенсом (Бельгия). Последние переживают бурное развитие благодаря своим многочисленным применениям и приложениям. Особый интерес представляет работа О.М.Аншакова по многозначным логикам, для которых развивается алгебраическая теория. Рассмотрены также интуиционистские варианты теории множеств.

Обратим внимание на работы в области компьютерных наук, где обсуждаются проблемы автоматического поиска доказательств в классическом исчислении предикатов (Болотов А.Е., Бочаров В.А., Горчаков А.Е.) и где представлена теория пропозициональных программ (В.И.Шалак).

Не обойдена и тема формальной силлогистики, которая в данном сборнике развивается учениками В.А.Смирнова.

Готовится к изданию 6-й выпуск "Логических исследований". Сюда войдут доклады этой же конференции, сделанные на секции "Философская логика и логическая философия".

EDITORS' NOTE

The 5th issue of "Logical Investigations" consists of papers based on the reports presented at the section "Symbolic Logic" of the 1st International Conference "Smirnov's Readings" (Moscow, March 1997). Notice that the 4th issue of "Logical Investigations" was dedicated to the memory of outstanding Russian logician and philosopher V.A.Smirnov; it contains analytic review of V.A.Smirnov's results in the field of modern logic and complete bibliography of his scientific works.

This issue covers various logical topics. It should be noted at once that new results are presented in rather short L.Esakia's paper on the interpretation of intuitionistic logic in terms of provability.

Considerable part of the book consists of contributions on relevant logics. This is a topic which V.A.Smirnov returned to many times during his scientific work.

Interesting results are obtained in the papers on modal logics. The theorem about infinite set of non-reducible modalities in normal modal logics is proved. Important properties of modal, super-intuitionistic and relevant logics are discussed in L.Maksimova's paper.

D.Batens (Belgium) proposes dynamic semantics for paraconsistent logic. Nowadays paraconsistent logics are intensively developed because of their various applications.

The contribution of special interest is O.Anshakov's paper on many-valued logics for which an algebraic theory is constructed. Intuitionistic versions of set theory are considered in V.Hakhanian's paper.

Papers related to the field of computer science deal with automatic proof search in classical predicate calculus (A.Bolotov, V.Bocharov, A.Gorchakov) and theory of propositional programs (V.Shalak).

Also formal syllogistics is considered in the issue. It is elaborated by V.A.Smirnov's pupils.

Now 6th issue of "Logical Investigations" is prepared for publication. It will contain the reports presented at the section "Philosophical Logic and Logical Philosophy" of the same Conference "Smirnov's Readings".

А.С.Карпенко

НЕКОТОРЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ИДЕИ В.А.СМИРНОВА

Abstract. *This article examines V.A.Smirnov's logical ideas where many trends of the modern logic development have been foreseen. First of all it is a logical reconstruction of the ideas of Russian logician N.A.Vasil'ev. Then it is V.A.Smirnov's elaboration of the subject of classification of logical calculi and the first works in the world on logics without contraction rules. And the last but not least V.A.Smirnov's development of such an essential subject as the relations between formal theories.*

Не умаляя вклада Владимира Александровича Смирнова в методологию и философию науки[1], хочу подчеркнуть, что в первую очередь В.А.Смирнов был логиком, причем логиком высочайшего класса. К тому же, что весьма редко встречается в логическом мире, он оставался *работающим* логиком до конца своей жизни. Последнее означает, что он постоянно интересовался новейшими достижениями в области современной символической логики и, самое главное, стремился получать новые технические результаты в избранных им областях.

Совершенно не вдаваясь здесь в логическую технику, я постараюсь передать атмосферу некоторых идей В.А.Смирнова, обозначив, в первую очередь, то место, которое эти идеи занимают в современном логическом мире.

В центре своего исследования я положу только три работы В.А.Смирнова:

I. Логические взгляды Н.А.Васильева // Очерки по истории логики в России. М., 1962. С.242-257;

II. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972;

III. Логические методы анализа научного знания. М., 1987.

Основные идеи этих трех работ, расходясь концентрическими кругами и накладываясь друг на друга, должны ввести нас в логический универсум В.А.Смирнова, который во многом предугадал некоторые тенденции развития современной логики.

---

[1] См.: *Анисов А.М.* Концепция научной философии В.А.Смирнова // Философия науки. Вып. 2. ИФРАН. М., 1977. С. 5-27.

I

О русском логике Н.А.Васильеве (1880-1940) писали и ранее[2], но этой работе В.А.Смирнова повезло более, чем какой-либо другой, по той простой причине, что на неё появилась обстоятельная рецензия на английском языке и не где-нибудь, а в главном международном журнале по логике[3].

Идеи о возможности конструирования неаристотелевских логик появились в начале нашего века в работе Л.Брауэра[4] о недостоверности закона исключенного третьего и одновременно в 1910 г. в работах Я.Лукасевича[5] и Н.А.Васильева[6], которые независимо друг от друга пришли к выводу, что пересмотр основных законов аристотелевской логики (и в особенности таких, как закон непротиворечия: *одно и то же суждение не может быть и истинным и ложным*, и закон исключенного третьего: *из двух противоречащих суждени, либо первое, либо второе должно быть истинным*) приводит к построению неаристотелевской логики, при этом оба ссылались на пример построения неэвклидовой геометрии. Но идеи Н.А.Васильева[7] были богаче и гораздо шире, и именно на их глубину обратил внимание в своей статье В.А.Смирнов.

Рецензию на указанную статью В.А.Смирнова сразу заметили уже в монографии Н.Решера[8] по многозначной логике, где Н.А.Васильев был назван, с одной стороны, одним из предшественников многозначных логик, а с другой – одним из предшественников паранепротиворечивой логики[9] (в таких логиках из A и

---

[2] См. предисловие и библиографию в сб.: Васильев Н.А.Воображаемая логика. Избр. труды (ред. В.А.Смирнов). М.1989.

[3] См.: Comey D.D. Review of V.A.Smirnov 1962 // The Journal of Symbolic Logic. 1965. Vol. 30. P.368-370.

[4] См.: Brouwer L.E.J. De onbetrouwbaarheid der logische principles // Tijdschrift voor wijsbegeertre. 1908. Vol. 2. P. 152-158. (Англ. перевод: The unreliability of the logical principles // Brouwer L.E.I. Collected works. Vol. I (ed. A.Heyting). Amsterdam, 1975. P. 107-111.)

[5] См.: Jukasiewicz J. Uber den Satz des Widerspruchs bei Aristoteles // Bull. Intern. Acad. Sci. Cracov. Classe de Philosophie. 1910. P.15-38. (Англ. перевод в: Review of Metaphysics. 1971. Vol. 24).

[6] См.: Васильев Н.А. О частных суждениях, о треугольнике противоположностей и законе исключенного четвертого // Ученые Зап. Казанского ун-та. Год 77. 1910, октябрь. Кн. 10. С.1-47. (Переиздано: Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избр. труды (ред. В.А.Смирнов). М., 1989. С.12-53.)

[7] См. также: Васильев Н.А. Воображаемая (неаристотелева) логика // Журнал м-ва нар. Просвещения (Н.С.). 1912, август .Ч. 40. С.207-246; Васильев Н.А. Логика и металогика // Логос. 1912-1913, № 1-2. С.53-81. (Переиздано в: Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избр. труды (ред. В.А.Смирнов). М., 1989.)

[8] Rescher N. Many-valued logic. N.Y., 1969.

[9] См. приглашенный доклад А.Арруды: Arruda A.I. N.A.Vasil'ev: A forerunner of paraconsistent logic // VII-th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science. Salsburg, 1983. Section 6. P.14-17. См. также: *Arruda A.I.*

отрицания A не всегда следует произвольное высказывание B). На следующем Международном Конгрессе приглашенным докладчиком о Н.А.Васильеве был уже В.А.Смирнов[10]. Наконец, в 1989 г. В.А.Смирнов подготавливает и издает не раз упоминаемые нами избранные труды Н.А.Васильева с обширным приложением, где также публикуется его статья о Н.А.Васильеве[11].

Логические взгляды Н.А.Васильева оказали большое влияние на В.А.Смирнова, и до конца своих дней он разрабатывал их в различных направлениях. Так возникла идея *комбинированных логик*, где вводятся операции над событиями, они играют роль внутренних логических знаков, в то время как обычные логические знаки играют роль внешних логических знаков, и эта часть логики является абстрактной логикой. С точки зрения В.А.Смирнова, возможен двоякий подход к неклассическим логикам. Либо абстрактная часть логики (логика истинности) не варьируется, а внутренняя, онтологическая часть, может быть отлична от классической (например, за счёт изменения онтологических предпосылок), либо онтологическая часть остается прежней, а меняется абстрактная часть (пересматриваются гносеологические предпосылки). Возможна комбинация этих двух подходов, когда неклассичность появляется за счёт пересмотра как онтологических, так и гносеологических предпосылок[12]. Вообще, стоит заметить, что идея разделения в одной и той же системе логических операций на внутренние (язык-объект) и внешние (метаязык) является весьма плодотворной и возникала независимым образом у разных логиков. Особенно здесь стоит выделить работу Д.А.Бочвара[13], где строится первая трехзначная логика бессмысленности для разрешения некоторых теоретико-множественных

N.A.Vasil'ev: A forerunner of paraconsistent logic // Philosophia Naturalis. 1984. Vol. 21. P.472-491.

[10] *Smirnov V.A.* Logical ideas of N.A.Vasiliev and modern logic // Abstracts of 8-th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science. Moscow, 1987. Vol. 5. P. 86-89. См. также: *Smirnov V.A.* The logical ideas of N.Vasiliev and modern logic // Logic, Methodology and Philosophy of Science. Amsterdam, 1989. P.625-640.

[11] *Смирнов В.А.* Логические идеи Н.А.Васильева и современная логика // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избр. труды. М., 1989. С.229-259.

[12] См.: *Smirnov V.A.* Assertion and predication. Combined calculus of propositions and situations // Abstracts of 8-th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science. Moscow, 1987. Vol. 1. P.333-335; *Смирнов В.А.* Утверждение и предикация. Комбинированные исчисления высказываний и событий // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С.27-35; *Смирнов В.А.* Комбинирование исчислений предложений и событий и логика истины фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. М., 1989. С.16-29.

[13] *Бочвар Д. А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. Вып. 2. С. 287-308. (Англ. перевод в: History and Philosophy of Logic. 1981. Vol. 2.)

парадоксов. В свою очередь, идеи Д.А.Бочвара были развиты В.К.Финном и его учениками, что привело к оригинальным и эффективным методам аксиоматизации различных классов конечнозначных предикатных логик[14]. Однако подход В.А.Смирнова отличался всё-таки необычайной широтой.

Другая идея В.А.Смирнова, а именно идея *многомерных логик*, восходит к предложенному Н.А.Васильевым подразделению логических законов на два уровня: внешний и внутренний, абстрактный и эмпирический. Первый уровень зависит от гносеологических установок, он не варьируется – это логика лжи и истины. На этом уровне верен закон непротиворечия и закон исключенного третьего. Второй уровень зависит от онтологических допущений о познаваемом мире, при этом в «одномерном» мире опыт даёт только позитивные атомарные утверждения, а отрицательные утверждения не атомарны, они являются результатом вывода. Двумерный случай В.А.Смирнов рассматривает на примере дважды алгебр Брауэра[15]. Первоначально В.А.Смирнов предложил аксиоматику N-мерных логик в форме силлогистики[16]. Позднее им было предложено построение логики N-измерений в виде алгебры классов[17], предполагая в дальнейшем сравнить её с N-мерными логиками в форме силлогистики.

Основная идея многомерных логик состоит в том, что опыт даёт нам атомарные утверждения "многих типов", а отсюда мы приходим к идее "многомерных" миров. В этих мирах имеет место своя логика. Можно предположить, что В.А.Смирнов подошел к идее обобщения логической семантики так называемых "возможных миров", или "точек соотнесения". Частные интересные случаи стали уже появляться в современной литературе. Например, у А.Н.Прайора[18] в каждом возможном мире имеет место трехзначная логика Лукасевича, и этим определяется семан-

---

[14] См., напр.: Аншаков *О. М., Рычков С. В.* Об одном способе формализации и классификации многозначных логик // Семиотика и информатика. 1984. Вып. 23. С. 78-106.

[15] *Смирнов В.А* Дважды алгебры и симметрические логики // Логические исследования. Вып. 1. М., 1993. С 46-54.

[16] *Смирнов В.А.* Аксиоматизация логических систем Н.А.Васильева // Современная логика и методология науки. М., 1987. С.143-151; *Смирнов В.А.* Логические идеи Н.А.Васильева и современная логика // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избр. труды. М., 1989. С.229-259.

[17] *Smirnov V.A.* Multidimensional logics // Abstracts of the IX International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science. Uppsala, 1991. P.168; *Смирнов В.А.* Многомерные логики // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С.259-278.

[18] *Prior A.N.* Tense logic for non-permanent existence // Prior A. N. Papers on time and tense. Oxford, 1968. P. 145-160.

тика для "логики случайного бытия". Р.Раутли[19] предложил семантику для релевантных и паранепротиворечивых логик, где в каждом возможном мире действует не алгебра Буля, а алгебра де Моргана; а В.Л.Васюков[20] вводит тернарное отношение на мирах, которые структурализованы специального вида *MV*-алгебрами Чэна, и таким образом строится точная модель для бесконечнозначной логики Лукасевича, и т.д.

К сожалению, В.А.Смирнов не успел осуществить свои разнообразные идеи относительно многомерных логик.

II

Книга В.А.Смирнова "Формальный вывод и логические исчисления", по которой он защитил докторскую диссертацию, исключительно богата совершенно новыми идеями и определенно является его наивысшим интеллектуальным взлетом. Идеи, высказанные и разработанные в этой книге, во многом опередили своё время и, что важно, интенсивно развиваются сейчас в мировой логической литературе. Я отмечу только две темы, заслуживающие особого внимания в связи с современным развитием логики. Сразу хочу подчеркнуть, что эта книга не только не была переведена на английский язык, но на неё не была сделана даже рецензия в каком-либо международном журнале; поэтому эта блестящая работа В.А.Смирнова осталась неизвестной для зарубежного читателя.

В этой книге впервые в мировой литературе было положено начало исследованиям логических систем без правила сокращения (гл. 5)[21]. Правило сокращения позволяет освобождаться от повторений одной и той же формулы, и это свойство логической системы оказывается связанным с проблемой разрешения самого исчисления, т.е. логики естественно заинтересованы в том, чтобы для каждой правильно-построенной формулы данного исчисления можно было решить вопрос, является ли эта формула теоремой или нет.

В.А.Смирнов строит такое секвенциальное исчисление, результат расширения которого за счет добавления двух структурных правил сокращения (слева и справа) является секвенциальным вариантом классической логики предикатов. Доказано, что пропо-

---

[19] *Routley R.* American plan completed: alternative classical-style semantics, without stars, for relevant and paraconsistent logics // Studia Logica. 1984. Vol. 43, N 1-2. P. 131-158.

[20] *Vasyukov V. L.* The completeness of the factor semantics for the Jukasiewicz's infinite-valued logics // Studia Logica. 1993. Vol. 52. P. 143-167.

[21] Если уж быть совсем точным, то первая работа на эту тему была опубликована годом раньше: *Smirnov V.A.* On decidability of decision problem for sequential calculus of predicates without contractions // IV-th International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. Bucharest, 1971.

зициональная часть этого исчисления совпадает с пропозициональной частью классической логики и что проблема разрешения для неё разрешима. Также получены другие результаты относительно данного исчисления.

Ради справедливости стоит сказать, что в 1972 г. независимо от В.А.Смирнова появляются краткие тезисы В.Н.Гришина[22], который заинтересовался работами о применении многозначных логик Лукасевича (заметим, что трехзначная логика Лукасевича является исторически первой логикой, в которой закон сокращения не имеет места) к теории множеств. Как раз работы В.Н.Гришина[23] стали доступными для зарубежных специалистов и привлекли к себе внимание.

В 1985 г. выходит обстоятельная работа японских ученых[24] о логиках без сокращений, после чего появляется уже целый ряд чисто логических работ в этой области[25], а затем – знаменитая работа Дж.Жирара[26], которая обозначила целое направление в применении логик без сокращений в компьютерных науках. Однако нигде в зарубежных работах ссылок на исходные идеи В.А.Смирнова нет.

Другая идея В.А.Смирнова, высказанная и получившая развитие в этой книге, является, по моему мнению, его главным творческим достижением. Начнем с того, что В.А.Смирновым построена предикатная логическая система, названная им *абсолютной*; она лежит в основе целой иерархии логических систем. Абсолютная система является системой релевантной логики[27], а её импликативный фрагмент совпадает со "слабой позитивной импликацией" Чёрча[28]. Таким образом, независимо от А.Чёрча был открыт импликативный фрагмент релевантной логики *R*. (В своё время

---

[22] *Гришин В.Н.* Об одной нестандартной логике и её применении к теории множеств // Вторая Всесоюзная конференция по математической логике (Тезисы кратких сообщений). М., 1972.

[23] См.: *Гришин В.Н.* Об одной нестандартной логике и её применении к теории множеств // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М., 1974. С.135-171; *Гришин В.Н.* Об алгебраической семантике логики без сокращений // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М., 1976. С.247-264.

[24] *Ono H., Komori Y.* Logics without the contraction rule // The Journal of Symbolic Logic. 1985. Vol. 50. P. 169-201.

[25] См. в особенности: *Kiriyama E., Ono H.* The contraction rule and decision problems for logics without structural rules // Studia Logica. 1991. Vol. 50. N 2. P. 299-319.

[26] *Girard J.Y.* Linear logic // Theoretical computer science. 1987. Vol. 50. P. 1-102.

[27] См.: *Долгова Т.Н., Попов В.М.* Проблемы релевантной логики в работе В.А.Смирнова «Формальный вывод и логические исчисления» // Логические исследования. Вып. 4. М., 1997. С. 79-93.

[28] *Church A.* The weak theory of implication // Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkul und der Logik der Einzelwissenschaften. Munich, 1951. P. 22-37. (Abstract: The weak positive implicational propositional calculus // The Journal of Symbolic Logic. 1951. Vol. 16, N 3. P. 238).

В.А.Смирнов рассказывал автору этих строк, что когда он был в аспирантуре, для того, чтобы получить в читальном зале иностранную литературу, нужно было иметь *специальное* разрешение на это. Неудивительно, что большинство западных научных работ было вне досягаемости.)

Начиная с конца 80-х годов появляется целый ряд работ, где строятся различные иерархии логических систем[29]. Здесь в качестве исходной логической системы берется полное (full) исчисление синтаксических категорий Ламбека[30]. Но главная цель В.А.Смирнова – построитьть *классификацию логических исчислений*. В книге дается классификация сингулярных секвенциальных исчислений, в основе которой, в свою очередь, лежит классификация правил введения и удаления логических знаков слева и справа. Этот подход к классификации я бы назвал *внешним*. Предлагается еще один подход, *внутренний*, где за основу берется логическая связка импликации "если..., то...", что весьма естественно для логических исчислений, и тогда ставится вопрос о классификации импликативных логик, т.е. таких логик, в которых единственным логическим знаком является импликация. При этом подходе четко выделены два способа классификации:

1) так как формальные выводы различаются по своей структуре, то соответственно этому теорема дедукции принимает различный вид. Последнее позволяет классифицировать импликативные логики в зависимости от того, какая формулировка теоремы дедукции имеет место;

2) в основу классификации можно положить структурные правила в зависимости от соответствия между этими правилами и импликативными формулами.

Тема классификации импликативных логик была развита В.А.Смирновым в ещё одной работе[31], где обращено внимание на ту серьезную проблему, что оба способа классификации не охватывают классической логики. В первом случае, теорема дедукции, которая имеет место для интуиционистской логики, имеет место также и для классической, и поэтому не различает первую от второй. Во втором случае, нет такого структурного правила, которое отвечало бы за переход от интуиционистской импликации к клас-

---

[29] См.: *Došen K.* Sequent-systems and groupoid models. I // Studia Logica. 1988. Vol. 47. N 4. P. 353-385; *Došen K.* Sequent-systems and groupoid models. II // Ibid. Vol. 48. N 1. P. 41-65; *Wansing H.* Formulas-as-types for a hierarchy of sublogics of intuitionistic propositional logic. Bericht N 9. (Preprint). 1990; и в особенности: *Ono H.* Structural rules and a logical hierarchy // Mathematical logic. N.Y., 1990. P. 95-104.

[30] *Lambek J.* The mathematics of sentence structure // American Mathematical Monthly. 1958. Vol. 65. P. 154-170. (Рус. перевод: Математическое исследование структуры предложений // Математическая лингвистика. М., 1964. С. 47-68.)

[31] *Смирнов В.А.* Формальный вывод, теоремы дедукции и теории импликации // Логический вывод. М., 1979. С. 54-68.

сической. В гильбертовских исчислениях такой переход обычно осуществляется за счет добавления закона Пирса, но структурного правила, соответствущего этому закону, не существует.

К классификации импликативных логик можно подойти с совершенно иной стороны, используя свойства базисных (исходных) *комбинаторов* **I, B, C, W, K** и **S**, впервые введенных М.Шейнфинкелем[32], а затем Х.Карри[33]. Оказалось, что между комбинаторами и импликативными формулами существует однозначное соответствие. В силу указанного соответствия (оно еще называется *изоморфизмом Карри-Ховарда*), можно классифицировать импликативные логики посредством комбинаторов, и наоборот[34].

Однако эта классификация, как и классификация В.А.Смирнова, не охватывает классической импликативной логики, поскольку нет такого комбинатора, который соответствовал бы закону Пирса, и вообще, любой неинтуиционистской импликативной формуле. Поэтому в указанной работе конструируется весьма сложным образом такой "комбинатор" **P**, который соответствовал бы закону Пирса.

Итак, перед нами стоит следующая исходная проблема (назовем её *проблемой В.А.Смирнова*): найти единое основание для классификации импликативных логик, которая включала бы и классическую иплликацию.

Решение данной проблемы предложено автором данной статьи[35] и основано на классификации *независимых* аксиоматик импликативных логик посредством конечных булевых решеток. В результате получаем картину взаимоотношений между различными неклассическими логиками, обнаруживаются естественные пути расширений исчислений до самой классической логики, ставятся и решаются многие другие вопросы.

Конечно, в каком-то *всеобъемлющем* виде классифицировать логики невозможно, уж слишком разнообразен мир логики и по своей сути даже континуален. Но построение различных иерархий родственных логических систем и классификация определенных

---

[32] *Schönfinkel M.* Über die Bausteine der Mathematihschen Logik // Mathematischen Annalen, 1924. Bd. 92. S. 305-316. (Англ. перевод: From Frege to Gödel: a source - book in mathematical logic. Cambridge, 1967. P. 355-366.)

[33] *Curry H. B., Feys R.* Combinatory Logic. Vol. 1. Amsterdam, 1958.

[34] *Gabbay D.V., de Queiroz R. J. G. B.* Extending the Curry-Howard interpretation to linear, relevant and other resource logics // The Journal of Symbolic Logic.1992. Vol. 57. N 4. P. 1319-1365.

[35] См.: *Карпенко А.С.* Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 224-258; *Karpenko A.S.* Construction of classical propositional logic // Bulletin of the Section of Logic. 1993. Vol. 22. N 3. P. 92-97; *Карпенко А.С.* Классификация пропозициональных логик // Логические исследования. Вып. 4. М., 1997. С. 107-133.

классов исчислений привлекает и будет привлекать всё большее внимание специалистов.

III

Следующая книга В.А.Смирнова «Логические методы анализа научного знания» оказалась многострадальной. Вышла она с большим опозданием, и предшествовала этому напряженная борьба (конец 70 – первая половина 80-х годов.), которая шла в секторе логики Института философии РАН. И хотя лидерство В.А.Смирнова как логика было бесспорным, но тогдашняя дирекция Института поддержала противоборствующую сторону.

Из этой книги я выделю опять же только две темы, а именно результаты в области модально-временных логик и тему сравнения теорий. В книге (гл.5, §2) подводится как бы итог работы по модально-временным логикам. Первая статья была опубликована а 1978 г.[36], и одновременно и независимо (как это часто бывает в истории науки) начинает появляться целый ряд работ по этой же теме Дж.Бёрджеса[37]. Исходные идеи о логиках с модально-временными операторами как единых логических операций (типа "возможно будет, что...") впервые были высказаны А.Н.Прайором[38]. Им же в связи с этим были введены временные структуры с линейным временем в прошлое и ветвящимся в будущее.

А.Н.Прайор исходил из чисто философской проблематики, и именно уже в указанной работе В.А.Смирнова было предложено весьма оригинальное решение знаменитой аристотелевской проблемы о морском сражении[39] посредством введения метрических модально-временных операторов[40]. При таком подходе введение промежуточного истинностного значения, как это было сделано Я.Лукасевичем, не требуется.

Ещё одна важная идея, высказанная здесь В.А.Смирновым, состоит в новом понимании *сопряженности* между прошлым и будущим. В обычных временных логиках между прошлым и будущим существует зеркальная симметрия, или, как предложил

---

[36] *В.А.Смирнов*. Логики с модальными временными операторами // Модальные и интенсиональные логики (Тезисы координационного совещания). М., 1978. С.145-148.

[37] *Burgess J.P.* The unreal future // Theoria. 1978. Vol. 44, part 3. P.157-179.

[38] См., в особенности: *Prior A.N.* Past, present and future. Oxford, 1967.

[39] Подробно о фаталистическом аргументе Аристотеля и логических реконструкциях этого аргумента, которые привели также и к появлению модально-временных логик, см.: *Карпенко А.С.* Фатализм и случайность будущего: Логический анализ. М., 1990.

[40] См. также: *Смирнов В.А.* Логические системы с модальными временными операторами // Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М., 1984. С. 49-58.

А.Н.Прайор[41], операторы будущего времени могут быть трехзначными, и на этом пути опровергаются некоторые фаталистические утверждения. В.А.Смирнов[42] предлагает принять принцип, согласно которому *то, что реализовалось, было возможным в прошлом, но не обязательно в сколь угодно далеком прошлом*. Естественно, сразу же возникают вопросы о погружении известных модальных логик в новые временные системы, на решение которых всегда обращал внимание В.А.Смирнов.

Исследования по модально-временным логикам в дальнейшем стали приобретать всё более технический характер, поскольку требовалось решать проблемы о полноте и разрешимости логических систем, моделями которых являются древовидные структуры[43]. Однако вклад В.А.Смирнова в философскую логику несомненен.

Значительное место в данной книге занимает тема сравнения различных теорий и, в первую очередь, аксиоматических теорий. По существу этой проблематикой В.А.Смирнов интересовался весь свой зрелый период научной деятельности. На самом деле эта тема является продолжением исследований по *определимости*, в частности, определимости дескриптивных терминов. Результаты, полученные здесь, были доложены им (совместно с В.Н.Садовским) на V Международном Конгрессе по логике, методологии и философии науки в 1975 г.[44]

Логическим отношениям между теориями посвящено несколько работ [45], и чтобы показать ту красоту результатов, которые могут быть здесь получены, я приведу весьма впечатляющий пример из области сравнения алгебраических теорий.

Известно, что теория групп первоначально возникла как теория конечных групп подстановок (C.Jordan, 1970). Однако очень скоро было осознано, что операция подстановки здесь не при чем, а главное – изучение свойств бинарной операции без предположе-

---

[41] *Prior A.N.* The syntax of time distinctions // Franciscan Studies. 1958. Vol. 18. N 2. P.105-120.

[42] См.: *Smirnov V.A.* Tense logics with nonstandard interconnections between past and future // VII-th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science. Salsburg, 1983. Section 5 and 12. P. 164-168.

[43] Начиная с 1985 г., появляется целая серия работ А.Занардо. См.: *Zanardo A.* A finite axiomatization of the set of strongly valid Ockhamist formulas // Journal of Philosophical Logic. 1985. Vol. 14. N 4. P.447-468; Branching-time logic with quantification over branches. The point of view of modal logic // The Journal of Symbolic Logic. 1996. Vol. 61. N 1. P. 1-39; см. также: *Gurevich Y., Shelah S.* The decision problem for branching-time logic // The Journal of Symbolic Logic. 1985. Vol. 50. N 3. P.668-681.

[44] См.: Sadovski *V.N.*, *Smirnov V.A.* Definability and indentifiability: certain problems and hypotheses // Basic problems in Methodology and linguistics. Dordrecht-Boston, 1977. P. 63-80.

[45] См.: Smirnov *V.A.* Logical relation between theories // Synthese. Dordrecht. 1986. Vol. 66. N 1. P.71-87.

ния конечности множества элементов и без каких-либо предположений о природе элементов группы. Такой подход впервые оформился в самостоятельную область математики в 1916 г. с выходом книги О.Ю.Шмидта «Абстрактная теория групп».

В это же время начинает оформляться трехзначная логика Лукасевича как результат "борьбы за освобождение человеческого духа"[46]. В 1929 г. эта логика обобщается на бесконечнозначный случай[47], а в середине века происходит алгебраизация бесконечнозначной логики Лукасевича в виде *MV*-алгебр Чэна[48], т.е., как и в случае с теорией групп, происходит полное абстрагирование от природы элементов. В это же время сама теория групп обогащается решеточным порядком и начинает бурно развиваться как самостоятельный раздел математики в виде теории решеточно-упорядоченных групп[49].

Наконец, в 1986 г. выходит фундаментальная работа М.Мундичи[50], где доказывается эквивалентность целого ряда алгебраических теорий, возникших на совершенно различных основаниях и в разное время, с *MV*-алгебрами Чэна; в том числе доказывается эквивалентность решеточно-упорядоченных групп (со строгой единицей) с *MV*-алгебрами[51].

Имеются и другие интересные примеры эквивалентности различных и весьма несхожих теорий, но все эти примеры носят частный характер. В.А.Смирнов подходит к проблеме сравнения теорий гораздо шире, а именно разрабатывает *саму теорию* сравнения теорий. Он формулирует понятие несущественного расширения теории, переводимого расширения и анализирует с их помощью логические отношения между теориями, сформулированными в разных языках и на базе различных логик. Он рассматривает целый спектр различных типов отношений между теориями – погружающие операции, вложимость одной теории в другую, рекурсивную эквивалентность, относительную эквивалентность – и доказывает ряд теорем, описывающих их свойства. В дальнейшем В.А.Смирнов неоднократно использовал разработанные им методы в своих исследованиях взаимоотношения различных тео-

---

[46] *Jukasiewicz J.* Farewell lecture by proffessor Jan Jukasiewicz, delivered in the Warsaw University Lecture Hall on March 7, 1918 // Jukasiewicz J. Selected works. Warszawa, 1970. P. 84-86.

[47] См.: *Łukasiewicz J., Tarski A.* Untersuchungen über den Aussagenkalkül // Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. Classe III. 1930. Vol. 23. P. 1-21. (Англ. перевод: Investigations into the sentential calculus // Łukasiewicz J. Selected works. Warszawa, 1970. P. 131-152).

[48] *Chang C. C.* Algebraic analysis of many-valued logics // Transactions of the American Mathematical Society. 1958. Vol. 88. P. 467-490.

[49] См.: *Копытов В. М.* Решеточно-упорядоченные группы. М., 1984.

[50] *Mundici M.* Interpretation of AFC*-algebras in Jukasiewicz sentential calculus // Journal of Functional Analysis. 1986. Vol. 65. P. 15-63.

[51] См. также: *Nola A. D., Lettieri A.* Perfect *MV*-algebras are categorilly equivalent to Abelian l groups // Studia Logica. 1994. Vol. 53. N 2.

рий. Одним из последних его результатов является доказательство эквивалентности онтологии Лесневского и оккамовской силлогистики[52].

Конечно, не все идеи В.А.Смирнова здесь рассмотрены[53], а только те, как говорилось вначале, которые представляют особый интерес в современном мире логики. Что-то, может быть, было и пропущено, но возьму на себя смелость сказать, проработав с В.А.Смирновым без малого четверть века (вначале в качестве его студента, затем аспиранта, и всё остальное время в одном секторе), что основная заслуга моего Учителя в логике не только в его результатах, но и в том, что им была создана удивительная атмосфера содружества логиков в нашей стране и за ее пределами. В этой атмосфере можно было работать, обмениваться идеями на многочисленных конференциях и получать новые результаты.

Многочисленные его ученики рассеялись по белу свету и с благодарностью вспоминают и рассказывают о Владимире Александровиче Смирнове. А придет ещё время личных воспоминаний его учеников, и тогда откроются поразительные черты его характера не только как логика, но и как *личности*.

---

[52] *Смирнов В.А.* Дефиницидальная эквивалентность элементарной онтологии и обобщенной силлогистики оккамовского типа // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С.17-31; *Smirnov V.A.* Definitional equivalence of elementary ontology and generalized syllogistic of occamian type // Preprint 93-03. Institute for Logic, Cognitive Science and Development of Personality. M., 1993. P.1-17.

[53] См. аналитический обзор «Результаты В.А.Смирнова в области современной формальной логики» (под общей ред. А.С.Карпенко) // Логические исследования. Вып. 4. М., 1997. С. 40-69.

Л.Л. Эсакиа

ДОКАЗУЕМОСТНЫЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ

Abstract. *Robert Solovay investigated the version of the modal system one gets by taking "Box(p)" to mean "p is true in every transitive model of Zermelo-Fraenkel Set Theory ZF". The main result of this note establishes that the Intermediate Logic of the week Peirs Law sound and complet under the Solovay's interpretation.*

В известной работе “Доказуемостные интерпретации модальной логики” [1] Р.Соловай рассмотрел, кроме арифметической интерпретации модальной логики (при которой модальный оператор $\Box$ выражает доказуемость в Арифметике Пеано PA), и теоретико-множественную интерпретацию, при которой оператор $\Box$ трактуется как истинность в транзитивных моделях теории множеств Цермело-Френкеля ZF .

Пусть S – трансляция формул модальной логики в предложения Арифметики Пеано PA (соответственно, теории множеств ZF), сопоставляющая пропозициональным переменным произвольные предложения, коммутирующая с булевыми связками и трактующая модальное выражение $\Box p$ арифметически (соответственно, теоретико-множественно).

Теорема Соловая утверждает

(A) Арифметическую полноту модальной системы GL и

(B) Теоретико-множественную полноту модальной системы SOL , полученной из системы GL постулированием формулы

$$\Box(\Box p \Rightarrow \Box q) \vee \Box(\Box q \Rightarrow p)$$

в качестве дополнительной аксиомы.

Точнее, для любой модальной формулы p, ее доказуемость в системе GL (соответственно, в системе SOL) равносильна доказуемости в Арифметике Пеано PA (соответственно, в Теории множеств ZF) любой ее арифметической (соответственно, теоретико-множественной) трансляции S(p).

Используя трансляцию Геделя G, погружающую интуиционисткую логику в модальную систему (для наших целей удобно воспользоваться системой Гжегорчика S4Grz), и, далее, применяя преобразование F, “расщепляющее” формулы вида $\Box p$ в конъюнкцию $p \,\&\, \Box p$, получаем погружение интуиционистского пропозиционального исчисления HC в систему GL ($HC \vdash p \Leftrightarrow GL \vdash F(G(p))$). Арифметическая полнота системы GL обеспечивает арифметическую полноту исчисления HC.

В докладе на “Смирновских чтениях-97” [2] нами был рассмотрен вопрос о возможности распространения арифметической интерпретации с пропозиционального интуиционистского исчисления HC на его кванторное расширение QHC. Модификация Q*HC стандартного кванторного расширения Q*HC, допускающая арифметическую интерпретацию, требует усиления правила введения универсального квантора; а именно, исчисление Q*HC получается из стандартного заменой обычного правила обобщения следующей его версией:

$$(1)\qquad \frac{/\!-\ (P(a)=>Axp(x))=>p(a)}{/\!-\ \ Axp(x)}\ .$$

Там же нами было отмечено, что модифицированное исчисление Q*HC может быть получено из стандартного QHC принятием, в качестве дополнительной кванторной аксиомы, следующей “релятивизированной” версии Принципа Куроды:

(2) Ax[(p(x)=>Axp(x))=>Axp(x)]=>Axp(x).

Рассмотрение интуиционистских формул, допускающих теоретико-множественную интерпретацию (часть В Теоремы полноты), показывает, что модификация интуиционистской логики, необходимая в этом случае, затрагивает *пропозициональную* часть интуиционистской логики, так как существуют формулы, имеющие адекватную теоретико-множественную интерпретацию, но *не* доказуемые в интуиционистском пропозициональном исчислении HC. Характерным примером такой формулы может служить Слабый Закон Пирса wP, т.е. формула;

(wP) (q=>p) v [((p=>q)=>p)=>p].

Логика wPL слабого закона Пирса (wPL=HC+wP) и является “логикой истинности в транзитивных моделях ZF”, т.е. является той промежуточной пропозициональной логикой, которая допускает адекватную теоретико-множественную интерпретацию. Избегая, по возможности, технических вопросов, мы постараемся обосновать это утверждение.

1. Булевы каскады

Алгебраическими моделями логики wPL являются алгебры Гейтинга H, в которых верен слабый закон Пирса, т.е. справедливо тождество

(3) (q->p)v[((p->q)->p)->p]=1.

Заметим, что тождество (3) равносильно тождеству

(4) (p->q)v(q->p)v[((p->q)->p)->p]=1,

которое в неразложимых алгебрах Гейтинга (т.е. в алгебрах Гейтинга с “предшественником” единицы) означает справедливость

$[((p\to q)\to p)\to p)]=1$ закона Пирса для любых *несравнимых* элементов $p,q\in H$.

Алгебру Гейтинга, удовлетворяющую тождеству (3), будем называть *каскадной*; многообразие каскадных алгебр Гейтинга обозначим через cHA.

Известно [3], что многообразие каскадных алгебр cHA локально конечно и порождается конечными *булевыми* каскадами. Вспомним, что каскадным соединением конечной последовательности (H_i: $i\le k$) решеток Гейтинга называется алгебра Гейтинга H, состоящая из таких ее подрешеток H_i', изоморфных, соответственно, H_i, что пересечение H_i' и H'_{i+1} содержит ровно один элемент – наибольший в H_i' и наименьший в H'_{i+1}. Булев каскад – это алгебра Гейтинга, изоморфная каскадному соединению *булевых* решеток.

2. Фронтоны

Для анализа интуиционистских формул, допускающих арифметическую интерпретацию (как и формул, допускающих теоретико-множественную интерпретацию), удобно считать, используя замечательное соответствие [5] между расширениями классической логики доказуемости GL и расширениями доказуемостно-интуиционистской логики Кузнецова-Муравицкого КМ, что оператор □ системы GL "перенесен" в интуиционистское исчисление НС в качестве "представителя" оператора доказуемости Арифметики Пеано (воплощением такого переноса и является логика КМ). С алгебраической точки зрения, эта процедура может быть описана следующим образом: вместо диагонализируемой алгебры (или алгебры Магари) (B, τ) мы рассматриваем ее трафарет $H=\{p: p\le \tau p\}$, который, как известно, образует решетку Гейтинга по наследственному порядку; "спускаем" с булевой алгебры B на алгебру Гейтинга H оператор τ (рестрикция τ на H корректна). В полученной алгебре Гейтинга с оператором (H, τ) выполнены следующие условия (аксиомы Кузнецова-Муравицкого):

A1 $p\le \tau p$

A2 $\tau p\to p\le p$

A3 $\tau p\le q\vee(q\to p)$

для любых $p,q\in H$.

Назовем произвольную алгебру Гейтинга H с оператором τ, удовлетворяющим вышеприведенным аксиомам, *фронтоном* и заметим, что каждый фронтон (с точностью до изоморфизма) может быть получен вышеуказанным приемом. Будем говорить, что фронтон (H, τ) неразложим, если неразложима алгебра Гейтинга H.

Фронтон (H, τ) назовем *каскадным,* если для любых $p,q \in H$ выполнено равенство

(5) $(\tau p \to \tau q) \vee (\tau q \to p)=1$.

Следующее простое наблюдение оправдывает принятое определение.

Утверждение. Если фронтон (H, τ) каскадный, то и сама алгебра Гейтинга H каскадная, т.е. в H выполнен слабый закон Пирса.

Доказательство. Заметим, что в любом фронтоне (H, τ) справедливы тождества

(а) $(p \to q) \to p = \tau q \to p$,

(в) $\tau p \to p = p$.

Используя (а), слабый закон Пирса можно записать в виде

(6) $(q \to p) \vee [(\tau q \to p) \to p]=1$.

Пусть (H, τ) – произвольный неразложимый каскадный фронтон, и допустим, что $q \leq p$ неверно; так как $q \leq \tau q$ (по Акс.1), то $\tau q \leq p$ не верно; но тогда каскадность и неразложимость фронтона (H, τ) влекут $\tau p \leq \tau q$; свойство операции импликации дает $\tau q \to p \leq \tau p \to p$, и, используя (в), получаем $\tau q \to p \leq p$; наконец, опираясь на (а), заключаем, что $(p \to q) \to p \leq p$. Следовательно, для любых $p,q \in H$ либо $q \leq p$, либо $(p \to q) \to p \leq p$, что, с учетом неразложимости алгебры H, обеспечивает выполнимость слабого закона Пирса.

Известно, что многообразие фронтонов FR финитно аппроксимируемо [4]. Пусть (H, τ) – каскадный фронтон; тогда, по предыдущему утверждению, алгебра Гейтинга H каскадная. Обозначим через $S(H)$ семейство всех ее конечно-порожденных подалгебр. Ввиду локальной конечности каскадных алгебр Гейтинга, семейство $S(H)$ совпадает с семейством всех ее конечных подалгебр. Следовательно, алгебра Гейтинга H является объединением своих конечных каскадных подалгебр. Известно, что на каждой конечной алгебре Гейтинга H_0 может быть определен (и единственным образом) оператор τ_0, такой что (H_0,τ_0) – фронтон; а именно, для любого элемента $p \in H$, значение $\tau_0 p$ равно наименьшему из элементов $q \in H_0$, удовлетворяющих условиям: $p \leq q$ и $q \to p=p$. Если H_0 каскадная, то и фронтон (H_0,τ_0) каскадный. В каждом конечном булевом каскаде H_0 "поведение" оператора τ_0 может быть описано следующим образом: элементы, принадлежащие одной и той же булевой компоненте каскада H_0, оператор τ_0 отображает в наибольший элемент той же компоненты. Обозначим через $Sf(H)$ - семейство фронтонов (H_0,τ_0), ассоциированное с семейством $S(H)$ - конечных подалгебр H_0 исходной алгебры Гейтинга H. В общем случае, фронтон (H_0,τ_0) семейства $Sf(H)$ не является подфронтоном фронтона (H,τ), однако направленное семейство $Sf(H)$ удовлетворяет условию *стабилизации:* для любого фронтона $(H_0,\tau_0) \in Sf(H)$ и любого элемента $p \in H_0$

справедливо $\tau p \leq \tau_0 p$ и существует фронтон, скажем, (H',τ'), принадлежащий семейству Sf(H), такой что $H_0 \subseteq H'$ и $\tau p = \tau' p$ (причем последнее равенство "стабилизируется", т.е. будет выполнено во всех фронтонах семейства, расширяющих фронтон (H',τ').

Таким образом, исходная алгебра (H,τ) является пределом направленного стабилизирующегося спектра Sf(H) конечных фронтонов.

Пусть теперь некоторая формула p не верна во фронтоне (H,τ), т.е. при некотором означивании переменных формулы p элементами из H значение формулы p отлично от наибольшего элемента решетки H. Конечное множество K элементов H, возникших в ходе вычисления значения формулы p, содержится, в силу локальной конечности H, в некоторой конечной алгебре Гейтинга $H_0 \in S(H)$, следовательно, во фронтоне (H_0,τ_0); условие стабилизации обеспечивает существование фронтона (H',τ'), расширяющего (H_0,τ_0), в котором для всех элементов множества K операторы τ' и исходный τ согласованы. В этом конечном фронтоне формула p опровергается на тех же элементах.

Утверждение. Многообразие каскадных фронтонов финитно аппроксимируемо.

3. Логика слабого закона Пирса

Вспомним, что доказуемостно-интуиционистская логика Кузнецова-Муравицкого KM определяется в языке интуиционистской пропозициональной логики, расширенным модальным оператором $\Box$, добавлением к аксиомам интуиционистского исчисления HC следующих трех дополнительных аксиом:

$p \Rightarrow \Box p$,

$(\Box p \Rightarrow p) \Rightarrow p$,

$\Box p \Rightarrow (q \vee (q \Rightarrow p))$.

Известно, что логика KM *консервативна* над интуиционистским исчислением, т.е. доказуемость любой формулы p, не содержащей вхождений модального оператора $\Box$, в логике KM влечет ее доказуемость в HC.

Обозначим через KMS расширение логики KM, полученное постулированием дополнительной аксиомы

(s) $(\Box p \Rightarrow \Box q) \vee (\Box q \Rightarrow p)$.

Утверждение. Логика KMS (=KM + (s)) *консервативна* над логикой слабого закона Пирса, т.е. для любой формулы p, не содержащей оператора $\Box$, KMS/-p, если и только если wPL/-p.

Следствие. Логика слабого закона Пирса wPL является "логикой истиности в транзитивных моделях ZF", т.е. любая формула p языка интуиционистской пропозициональной логики доказуема в промежуточной логике слабого закона Пирса, если и только если ее трансляция T(p) во множество предложений языка теории множеств ZF, полученная композицией трансляции Геделя G, расщепляющей отображения F и теоретико-множественной интерпретации Соловая, доказуема в теории множеств ZF.

В заключение заметим, что, поскольку алгебра Гейтинга конусов любого 1) конечного, линейно-упорядоченного множества является каскадом двухэлементных булевых алгебр, 2) конечного веера – каскадом конечной булевой алгебры и двухэлементной булевой алгебры, 3) конечной юлы – каскадом трех булевых алгебр (двухэлементной, конечной и еще одной двухэлементной), то логика слабого закона Пирса wPL содержится во всех трех предтабличных (критических) промежуточных логиках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Solovay R.* Protability interpretations of modal logics // Israel Journal of Mathematics. 1976. Vol. 25. P. 287-304.
2. *Эсакиа Л.* Проблема квантификации в интуиционистской логике в свете доказуемостной интерпретации // Международная конференция “Смирновские чтения”. Москва, ИФРАН, 1997. С. 28-31.
3. *Эсакиа Л.* Алгебры Гейтинга. Теория двойственности. Тбилиси: Мецниереба, 1985.
4. *Муравицкий А.Ю.* О финитной аппроксимируемости исчисления I^{∇} и немоделируемость некоторого его расширения // Математические заметки. 1981. Том 29. С. 907-915.
5. *Kuznetsov A.V., Muravitsky A.Yu.* On superintuitionistic logics as fragments of proof logic extensions // Studia Logica. 1986. Vol. 45. P. 77-99.

О.М.Аншаков

J-ЛОГИКИ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ КЛАССЫ АЛГЕБР[1]

Abstract. *In this paper some large class of many-valued logics with J-operators is considered. Logics from this class are called J-definable and J-compact. For any J-definable J-compact logic one can construct a class of appropriate algebras. This class of algebras plays (for its own logic) the same role as the class of Boolean algebras for the classical two-valued logic. The main result of this paper is developing a general method of defining and axiomatizing the corresponding class of algebras for any J-definable J-compact logic.*

Введение

Пусть L – многозначная логика. Через V_L будем обозначать множество истинностных значений логики L. Через D_L будем обозначать множество выделенных значений логики L. $D_L \subseteq V_L$, $D_L \neq V_L$, $D_L \neq \varnothing$. Предполагаем, что множество V_L содержит элементы 0 и 1, интерпретируемые как «ложь» и «истина», где $1 \in D_L$, $0 \in V_L \setminus D_L$.

Множество логических операций логики L будем обозначать через O_L. Алгебру логики L обозначим через $\mathbf{AL}[L]$. $\mathbf{AL}[L] = \langle V_L, O_L \rangle$. Через F_L будем обозначать множество формул логики L, а через $\mathbf{AF}[L]$ – соответствующую алгебру формул – свободную алгебру в классе всех однотипных с ней алгебр.

Следуя алгебраической традиции, будем использовать одни и те же обозначения для соответствующих операций в однотипных алгебрах. Из контекста всегда будет ясно, о каких конкретно операциях идет речь. Пользуясь этим соглашением, мы можем считать, что $\mathbf{AF}[L] = \langle F_L, O_L \rangle$.

Классическую двузначную логику будем обозначать прямой полужирной буквой **C**. Тогда алгебра классической логики **C**

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-06-80191).

$\mathbf{AL}[\mathbf{C}] = \langle\{0,1\},\{\wedge,\vee,\Rightarrow,\neg\}\rangle$. Вторые фигурные скобки обычно будем опускать, т.е. записывать $\mathbf{AL}[\mathbf{C}] = \langle\{0,1\},\wedge,\vee,\Rightarrow,\neg\rangle$.

Определение 1. Гомоморфизм $v: \mathbf{AF}[L] \to \mathbf{AL}[L]$ будем называть *L-оценкой*. Формулу $A \in F_L$ будем называть *L-выделенной*, если для любой L-оценки v верно $v(A) \in D_L$.

Определение 2. J-операторами в логике L называются характеристические функции каких-либо подмножеств множества V_L. Пусть $W \subseteq V_L$, $\beta \in V_L$. Тогда

$$\mathrm{J}_W(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta \in W, \\ 0, & \text{если } \beta \notin W. \end{cases}$$

J-операторы были введены Россером и Тьюркеттом [14]. Логики с J-операторами рассматривались во многих работах [3–15]. Один из наиболее интересных примеров таких логик – $\mathbf{B}_n$-логики из статьи Р.Ш.Григолии и В.К.Финна [4]. Классификация многозначных логик с J-операторами, использующая семантические соображения дана в [9]. Широкий класс конечнозначных логик с J-операторами был рассмотрен автором совместно с С.В.Рычковым в работах [1, 2, 7]. Конечнозначные логики из [1, 2, 7] были названы авторами истинностно-полными **C**-расширяющими.

Определение 3. Конечнозначная логика L называется *истинностно-полной*, если в ее алгебре функционально выразимы все J-операторы для одноэлементных подмножеств множества V_L, т.е. все J_α ($\alpha \in V_L$), определяемые следующим образом:

$$\mathrm{J}_\alpha(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta = \alpha, \\ 0, & \text{если } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Определение 4. Конечнозначная логика L называется **C**-*расширяющей*, если в ее алгебре функционально выразимы бинарные операции $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ и унарная операция $\neg$, ограничения которых на множество $\{0, 1\}$ совпадают с классическими двузначными конъюнкцией, дизъюнкцией и импликацией, соответственно.

В работах [1, 2] был предложен общий эффективный способ аксиоматизации истинностно-полных **C**-расширяющих логик, доказана теорема о полноте и получены аналоги некоторых известных теоретико-модельных результатов.

В работе [7] рассматривались алгебраические проблемы, связанные с истинностно-полными **С**-расширяющими логиками. В [7] было показано, что каждой истинностно-полной **С**-расширяющей логике L соответствует некоторый класс алгебр, играющий для L ту же роль, что играет класс булевых алгебр для классической логики, т.е. формула A логики L является L-выделенной тогда и только тогда, когда она выделена относительно класса L-алгебр. В [7] была доказана теорема о представлении L-алгебр и предложен общий эффективный способ их аксиоматизации.

В совместной статье автора настоящей статьи, Д.П.Скворцова и В.К.Финна [6] был рассмотрен класс многозначных логик с J-операторами, названных авторами J-определимыми J-компактными логиками. (Определения будут сформулированы ниже). Логики из [6] могут и не быть конечнозначными. Наибольший интерес представляют как раз бесконечнозначные J-определимые J-компактные логики, именно такие логики используются для формализации правдоподобных рассуждений в ДСМ-методе автоматического порождения гипотез.

Что касается конечнозначных логик, то можно показать, что каждая истинностно-полная **С**-расширяющая логика является J-определимой и J-компактной. Поэтому некоторые результаты из [6] можно считать обобщением соответствующих результатов из работ [1, 2].

В данной работе рассматриваются алгебраические проблемы, связанные с J-определимыми J-компактными логиками. Автор стремился перенести на этот класс логик результаты из [7]. Был предложен общий эффективный способ построения для каждой J-определимой и J-компактной логики соответствующего класса алгебр и доказаны теорема о полноте относительно выделенности в соответствующих классах алгебр и теорема о представлении (в несколько ослабленной форме).

1. J-определимые и J-компактные логики

1.1. Определение. Пусть L – многозначная (возможно бесконечнозначная) логика. Логику L будем называть J-*логикой*, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

(1) в O_L существует хотя бы один нетривиальный J-оператор, т.е. операция J_W, где W – непустое собственное подмножество множества V_L;

(2) в алгебре логики L функционально выразимы бинарные операции $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ и унарная операция $\neg$, ограничения которых на множество $\{0, 1\}$ совпадают с классическими двузначными конъюнкцией, дизъюнкцией и импликацией, соответственно.

Не нарушая общности, будем считать, что операции $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$ содержатся в O_L.

Заметим, что сформулированное сейчас определение включает условие классической корректности из [6] (аналог **С**-расширяемости).

Множество J-операторов J-логики L будем обозначать через JO_L.

1.2. Определение. Пусть L – J-логика, $W \subseteq V_L$. Множество W будем называть *J-характеризуемым*, если J-оператор $J_W \in O_L$. Семейство всех J-характеризуемых подмножеств множества V_L обозначим через Ch_L.

1.3. Определение. Дадим рекурсивное определение *внешней формулы* J-логики L.

(i) Пусть A – формула логики L, J_W – J-оператор из O_L. Тогда формула $J_W(A)$ будет внешней формулой логики L.

(ii) Пусть X и Y – внешние формулы логики L. Тогда формулы $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \Rightarrow Y)$, $(\neg X)$ также будут внешними формулами логики L.

Множество внешних формул логики L будем обозначать через E_L.

1.4. Определение. *Нормальные формулы* J-логики L также определим рекурсивно.

(i) Пусть p – пропозициональная переменная, J_W – J-оператор из O_L. Тогда формула $J_W(p)$ будет нормальной формулой логики L.

(ii) Пусть X и Y – нормальные формулы логики L. Тогда формулы $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \Rightarrow Y)$, $(\neg X)$ также будут нормальными формулами логики L.

Множество нормальных формул логики L будем обозначать через N_L.

1.5. Соглашение. Пусть A – формула логики L, все пропозициональные переменные которой содержатся среди $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Значение формулы A на любой L-оценке v такой, что $v(p_1) = x_1$, $v(p_2) = x_2, \ldots,$ $v(p_n) = x_n$, будем обозначать через $A\lceil x_1, x_2, \ldots, x_n \rceil$.

1.6. Определение. Пусть L – многозначная логика, o – n-арная операция на V_L, A – формула логики L, все пропозициональные переменные которой содержатся среди $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Будем говорить, что операция *o функционально выразима с помощью формулы A*, если $o(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A\lceil x_1, x_2, \ldots, x_n \rceil$ для любых x_1, x_2, ..., x_n из V_L.

1.7. Определение. Пусть L – J-логика, o – n-арная операция на V_L. Будем говорить, что операция o – *нормализуема*, если существует нормальная формула X логики L такая, что операция o функционально выразима с помощью формулы X.

1.8. Определение. Формулы A и B логики L будем называть *равносильными*, если в **AL**$[L]$ справедливо тождество $A = B$ (напомним, что мы договорились соответствующие операции в **AF**$[L]$ и **AL**$[L]$ обозначать одинаковыми символами). Ясно, что A и B равносильны тогда и только тогда, когда $v(A) = v(B)$ для любой L-оценки v.

1.9. Определение. Внешнюю формулу X J-логики L будем называть *нормализуемой*, если существует нормальная формула Y этой логики такая, что X равносильно Y.

1.10. Определение. J-логику L будем называть J-*определимой*, если справедливы следующие два условия:

(1) Для любых J-оператора J_W и операции o, принадлежащих множеству O_L, их композиция $\mathrm{J}_W \circ o$ нормализуема.

(2) Нормализуема операция J_{D_L}, где D_L – множество выделенных истинностных значений.

1.11. Замечание. Условие (1) из 1.10 равносильно следующему утверждению: нормализуема любая формула вида $\mathrm{J}_W(o(A_1, \ldots, A_n))$, где J_W – произвольный J-оператор из JO_L, o – произвольная операция из O_L, $A_1, \ldots, A_n$ – произвольные формулы из F_L.

1.12. Определение. Пусть L – J-логика, Φ и Ψ – два семейства J-характеризуемых подмножеств множества V_L. Будем говорить, что пара $\langle \Phi, \Psi \rangle$ обладает свойством J-*компактности*, если из включения $\bigcap\limits_{S\in\Phi} S \subseteq \bigcup\limits_{T\in\Psi} T$ следует существование конечных $\Phi' \subseteq \Phi$, $\Psi' \subseteq \Psi$ таких, что $\bigcap\limits_{S\in\Phi'} S \subseteq \bigcup\limits_{T\in\Psi'} T$.

1.13. Определение. J-логику L назовем J-*компактной*, если любая пара семейств J-характеризуемых подмножеств множества V_L обладает свойством J-компактности.

1.14. Замечание. Любая истинностно-полная **C**-расширяющая конечнозначная логика L является J-определимой J-компактной логикой.

J-компактность тривиальна в силу конечнозначности логики L. J-определимость вытекает из справедливости тождеств:

(1) $J_\alpha(o(x_1,\dots,x_n)) = \bigvee\limits_{o(\beta_1,\dots,\beta_n)=\alpha}\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} J_{\beta_i}(x_i)\right)$, где операция o не является J-оператором;

(2) $J_0 J_\alpha(x) = \neg J_\alpha(x)$;

(3) $J_1 J_\alpha(x) = J_\alpha(x)$;

(4) $J_\beta J_\alpha(x) = 0$ при $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$.

Примеры бесконечнозначных J-определимых J-компактных логик можно найти в [6]. Заметим, что логики из [6] применялись для формализации правдоподобных рассуждений в ДСМ-методе автоматического порождения гипотез.

1.15. Соглашение. Будем предполагать, что множество пропозициональных переменных рассматриваемой логики L счетно. Множество O_L – не более чем счетно.[2] Тогда, не нарушая общности, можно считать, что множество пропозициональных переменных классической логики **C** представлено в виде объединения счетного множества не более чем счетных множеств, а именно:

$$P_{\mathbf{C}} = \bigcup_{p\in P_L}\{p_W \mid W \in Ch_L\},$$

[2] Вообще говоря, достаточно предположить, что мощность множества J-операторов логики L не превосходит мощности множества пропозициональных переменных.

где через P_L обозначено множество пропозициональных переменных логики L, а через P_C обозначено множество пропозициональных переменных классической логики **С**. Будем использовать эти обозначения и в дальнейшем. Напомним, что Ch_L – это множество J-характеризуемых подмножеств логики L (см. определение 2.2). Мощность Ch_L равна мощности множества J-операторов логики L, значит она не более чем счетна.

Множество $\{p_W \mid W \in Ch_L\}$ будем называть *орбитой* пропозициональной переменной $p \in P_L$ и обозначать $\mathrm{orb}(p)$. Если $Q \subseteq P_L$, то орбитой множества Q будем называть множество

$$\mathrm{orb}(Q) = \bigcup_{p \in Q} \mathrm{orb}(p).$$

1.16. Определение. *Алгеброй нормальных формул* J-определимой логики L будем называть свободную в классе всех алгебр сигнатуры $\langle \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg \rangle$ алгебру с множеством свободных образующих $\{\mathrm{J}_W(p) \mid p \in P_L,\ W \in Ch_L\}$. Обозначать эту алгебру будем через $\mathbf{AN}[L]$. Используя введенные ранее обозначения можно сказать, что $\mathbf{AN}[L] = \langle N_L,\ \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg \rangle$.

1.17. Замечание. Нетрудно показать, что для любой J-логики L алгебры $\mathbf{AN}[L]$ и $\mathbf{AF}[\mathbf{C}]$ изоморфны. В качестве канонического изоморфизма $\mathbf{AN}[L]$ на $\mathbf{AF}[\mathbf{C}]$ можно взять оператор подстановки $\Delta : N_L \to F_C$, переводящий каждую формулу вида $\mathrm{J}_W(p)$ в пропозициональную переменную p_W ($p \in P_L$, $p_W \in P_C$). Обратный изоморфизм будем обозначать через ∇, и будем использовать постфиксную форму записи для операторов Δ и ∇, т.е. результат действия оператора Δ на нормальную формулу X логики L будем обозначать через X^Δ, а результат действия оператора ∇ на формулу A классической логики будем обозначать через A^∇. (Разумеется, обозначения Δ и ∇ можно ввести лишь предполагая, что логика L фиксирована. В противном случае придется использовать обозначения типа Δ_L и ∇_L).

Пусть Γ – множество нормальных формул J-логики L. Через Γ^Δ обозначим множество формул классической логики, определяемое как $\{X^\Delta \mid X \in \Gamma\}$. Аналогичным образом будем использовать обозначение Ξ^∇ по отношению к множеству формул классической логики Ξ.

1.18. Определение. Результат действия оператора Δ на нормальную формулу X J-логики L будем называть **C**-*реализацией* формулы X, а результат действия оператора ∇ на формулу A классической логики будем называть *L-представлением* формулы A.

1.19. Определение. Пусть L – J-логика. Определим теперь оператор, ставящий в соответствие каждой L-оценке v некоторую **C**-оценку, т.е. оценку в классической логике. Обозначать этот оператор будем символом $\uparrow$. Положим $v^{\uparrow}(p_W) = v(\mathrm{J}_W(p))$, где $p \in P_L$, $p_W \in P_{\mathrm{C}}$. На все множество F_{C} оценка $v^{\uparrow}$ продолжается обычным образом по индукции. Оценку $v^{\uparrow}$ будем называть **C**-*реализацией* оценки v.

1.20. Предложение. Очевидно, что $v^{\uparrow}\left(X^{\Delta}\right) = v(X)$ для любой L-оценки v и любой нормальной формулы X J-логики L.

1.21. Определение. Предположим, что L – J-логика. Пусть нам задано отображение $S : P_{\mathrm{C}} \to E_L$. Его можно по индукции продолжить до отображения множества F_{C} в E_L. Это продолжение (его мы также будем обозначать через S) назовем *оператором* **C***L-подстановки*.

Оператор **C**L-подстановки является гомоморфизмом алгебры формул классической логики в алгебру $\langle E_L, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg\rangle$. Примером оператора **C**L-подстановки может служить определенный выше оператор ∇.

1.22. Соглашение. Вообще, *оператором подстановки* мы будем называть гомоморфизм одной формульной алгебры в другую. Причем, это не обязательно будут разные алгебры и не обязательно алгебры всех формул некоторых логик. Как носители, так и множества операций формульных алгебр могут быть собственными подмножествами множеств F_L и O_L (для некоторой логики L), соответственно.

Пусть оператор подстановки S таков, что верны равенства: $S(p_1) = A_1$, $S(p_2) = A_2$, $\ldots$, $S(p_n) = A_n$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n \in P_{L_1}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in F_{L_2}$ (случай $L_1 = L_2$ не исключается); значения оператора S на других пропозициональных переменных нас не интересуют. Тогда оператор S будем обозначать как $S\begin{smallmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{smallmatrix}$.

Если ясно из контекста, о каких пропозициональных переменных идет речь, вместо $S\begin{matrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{matrix}(B)$ будем писать просто $B(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

1.23. Соглашение. Для нормальных формул мы будем рассматривать также *оператор специальной подстановки*. Оператором специальной подстановки мы будем называть гомоморфизм $S : \mathbf{AN}[L] \to \mathbf{AN}[L]$. Чтобы определить такой гомоморфизм достаточно определить отображение S на множестве формул вида $\mathrm{J}_W(p)$ (где $p \in P_L$, $W \in Ch_L$) и продолжить его на все множество N_L по индукции. По аналогии с соглашением 1.22, мы будем использовать обозначение $S\begin{matrix} \mathrm{J}_{W_1}(p_1) & \mathrm{J}_{W_2}(p_2) & \dots & \mathrm{J}_{W_n}(p_n) \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{matrix}$. Если ясно из контекста, о каких формулах вида $\mathrm{J}_W(p)$ идет речь, то вместо $S\begin{matrix} \mathrm{J}_{W_1}(p_1) & \mathrm{J}_{W_2}(p_2) & \dots & \mathrm{J}_{W_n}(p_n) \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{matrix}(Y)$ будем писать $Y[X_1, X_2, \dots, X_n]$. Вместо круглых скобок будем использовать квадратные скобки, чтобы указать, что речь идет *именно о специальной подстановке*. Заметим, что $Y[X_1, X_2, \dots, X_n]$ и $Y(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – это разные формулы.

Пусть f – отображение множества $\{\mathrm{J}_W(A) \mid W \in Ch_L,\ A \in F_L\}$ в множество нормальных формул логики L, S – отображение множества P_L в множество F_L. Определим отображение S_f множества $\{\mathrm{J}_W(p) \mid W \in Ch_L,\ p \in P_L\}$ в множество N_L следующим образом: положим $S_f(\mathrm{J}_W(p)) = f(\mathrm{J}_W(S(p)))$. Продолжив отображение S_f на все множество N_L обычным образом по индукции, мы получим оператор специальной подстановки. Будем называть его *оператором специальной подстановки, параметризованным функцией f.*

Для нас важно иметь удобное обозначение для результата параметризованной подстановки. Заметим, что этот результат зависит только от функции f и от того, какие формулы ставятся в соответствие пропозициональным переменным оператором S. Если по соглашению 1.22 оператор S таков, что его можно обозначить $S\begin{matrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{matrix}$, то соответствующий параметризованный оператор специальной подстановки S_f мы будем обозначать как

$S_f \begin{matrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{matrix}$. Если неважно или ясно из контекста, о каких

пропозициональных переменных идет речь, то будем писать вместо $S_f \begin{matrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{matrix}(Y)$ просто $Y_f[A_1, A_2, \dots, A_n]$.

1.24. Соглашение. Пусть L – J-определимая логика. Тогда существуют нормальные формулы, с помощью которых функционально выразимы операции $J_W \circ o$ (J_W – J-оператор, o – произвольная операция из O_L) и J_{D_L}. Таких нормальных формул может быть несколько. Однако для каждой операции $J_W \circ o$ и J_{D_L} мы выбираем *одну нормальную формулу*, с помощью которой эта операция будет функционально выразима, и для таких формул введем следующие обозначения: через N_W^o будем обозначать нормальную формулу, функционально выражающую операцию $J_W \circ o$, а через des будем обозначать нормальную формулу, функционально выражающую операцию J_{D_L}.

Будем предполагать, что все пропозициональные переменные, входящие в N_W^o, содержатся среди $p_1, \dots, p_n$ (если o – n-арная операция), а формула des содержит единственную пропозициональную переменную p_1. Тогда, в соответствии с соглашением 1.23, через $N_W^o(A_1, \dots, A_n)$ будем обозначать результат подстановки формул $A_1, \dots, A_n$ вместо переменных $p_1, \dots, p_n$, соответственно. Аналогично будем понимать обозначение $\mathrm{des}(A)$.

Для дальнейшей работы нам необходимо определить исчисление, адекватное J-определимой J-компактной логике L. Мы сделаем это в следующем разделе.

2. Исчисление для J-определимых и J-компактных логик

2.1. Обозначения. Как обычно, через $(A \Leftrightarrow B)$ будем обозначать формулу $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Через **1** и **0** будем обозначать выбранную тождественно-истинную и тождественно-ложную нормальную формулу J-логики L. Например, в качестве **1** можно взять

$J_W(p) \vee \neg J_W(p)$, а в качестве $\mathbf{0}$ – $J_W(p) \wedge \neg J_W(p)$, где $p \in P_L$, $W \in Ch_L$. Введем теперь обозначения $\bigwedge\limits_{i \in I} A_i$ и $\bigvee\limits_{i \in I} A_i$, где I – конечное множество индексов. Положим по определению:

$$\bigwedge_{i \in I} A_i = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если } I = \varnothing; \\ A_{i_0}, & \text{если } I = \{i_0\}; \\ A_{i_0} \wedge \left(\bigwedge\limits_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i \right), & \text{если } I = \{i_0, \ldots\}; \end{cases}$$

$$\bigvee_{i \in I} A_i = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } I = \varnothing; \\ A_{i_0}, & \text{если } I = \{i_0\}; \\ A_{i_0} \vee \left(\bigvee\limits_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i \right), & \text{если } I = \{i_0, \ldots\}. \end{cases}$$

Будем использовать обычные соглашения об опускании скобок в записи формул: опускаются внешние скобки, скобки опускаются, если это позволяет сделать соглашение о приоритете операций. Считается, что наивысший приоритет имеют унарные операции ($\neg$ и J_W, где $W \in Ch_L$), следующие по приоритету – операции $\wedge$ и $\vee$, самый низкий приоритет имеют операции $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$.

2.2. Схемы аксиом. Мы сформулируем исчисление гильбертовского типа, содержащее несколько групп аксиом. Сначала сформулируем аксиомы группы (A). Пусть X, Y, Z – внешние формулы J-определимой логики L. Тогда следующие формулы будут аксиомами:

(A1) $X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$,

(A2) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$,

(A3) $X \wedge Y \Rightarrow X$,

(A4) $X \wedge Y \Rightarrow Y$,

(A5) $X \Rightarrow (Y \Rightarrow X \wedge Y)$,

(A6) $X \Rightarrow X \vee Y$,

(A7) $Y \Rightarrow X \vee Y$,

(A8) $(X \Rightarrow Z) \Rightarrow ((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \vee Y \Rightarrow Z))$,

(A9) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$,

(A10) $\neg\neg X \Rightarrow X$.

Аксиомы группы (A) являются результатами действия оператора $\mathbf{C}L$-подстановки на аксиомы классического исчисления высказываний.

Группа (B) содержит единственную схему аксиом. Эта схема описывает свойство J-компактности.

Пусть A – произвольная формула логики L. Тогда следующая формула будет аксиомой:

(B) $\bigwedge\limits_{S \in \Phi} \mathrm{J}_S(A) \Rightarrow \bigvee\limits_{T \in \Psi} \mathrm{J}_T(A)$,

где $\Phi, \Psi \subseteq Ch_L$, Φ и Ψ – конечные множества и $\bigcap\limits_{S \in \Phi} S \subseteq \bigcup\limits_{T \in \Psi} T$.

Аксиомы группы (C) описывают J-определимость.

Пусть A_1, …, A_n – произвольные формулы логики L. Тогда следующая формула будет аксиомой:

(C1) $\mathrm{J}_W(o(A_1,\dots,A_n)) \Leftrightarrow \mathrm{N}_W^o(A_1,\dots,A_n)$,

где $o \in O_L \setminus JO_L$.

Пусть A – произвольная формула логики L. Тогда следующие формулы будут аксиомами:

(C2) $\mathrm{J}_W(\mathrm{J}_S(A)) \Leftrightarrow \mathbf{1}$ $(0 \in W,\ 1 \in W)$.

(C3) $\mathrm{J}_W(\mathrm{J}_S(A)) \Leftrightarrow \mathbf{0}$ $(0 \notin W,\ 1 \notin W)$.

(C4) $\mathrm{J}_W(\mathrm{J}_S(A)) \Leftrightarrow \mathrm{J}_S(A)$ $(0 \notin W,\ 1 \in W)$.

(C5) $\mathrm{J}_W(\mathrm{J}_S(A)) \Leftrightarrow \neg \mathrm{J}_S(A)$ $(0 \in W,\ 1 \notin W)$.

2.3. Правила вывода. Список правил вывода нашего исчисления будет содержать три правила:

(i) $\dfrac{X, \quad X \Rightarrow Y}{Y}$ (*modus ponens*),

где X, Y, Z – внешние формулы J-логики L.

(ii) $\dfrac{A}{\mathrm{des}(A)}$ (des-введение),

где A – произвольная формула J-логики L.

(iii) $\dfrac{\mathrm{des}(A)}{A}$ (des-удаление),

где A – произвольная формула J-логики L.

2.4. Замечание. Определенное выше исчисление для J-определимой J-компактной логики L будем называть исчислением L. Аналогично, классическое исчисление высказываний будем называть исчислением **C**. Понятия вывода из совокупности гипотез, доказательства, выводимой и доказуемой формулы определяются как обычно. Тот факт, что формула A будет выводима из совокупности гипотез Γ в исчислении L, будем обозначать через $\Gamma \vdash_L A$. Тот факт, что формула A будет доказуема в исчислении L, будем обозначать через $\vdash_L A$. Через $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}} A$ и $\vdash_{\mathbf{C}} A$ будем обозначать выводимость из совокупности гипотез и доказуемость в классическом исчислении высказываний.

2.5. Определения. Пусть A – формула многозначной логики L, v – L-оценка. Будем говорить, что v *является моделью формулы* A, если $v(A) \in D_L$. Будем говорить, что L-оценка v *является моделью множества формул* Γ, если она является моделью каждой формулы из Γ. Будем говорить, что формула A *является логическим (семантическим) следствием множества формул* Γ, если каждая модель множества Γ является моделью формулы A. Тот факт, что формула A семантически следует в логике L из множества формул, Γ будем обозначать через $\Gamma \models_L A$. Через $\models_L A$ будем обозначать тот факт, что формула A L-выделена, что, очевидно, равносильно логическому следованию из пустого множества формул.

2.6. Замечание. Адекватность определенного выше исчисления для J-определимых J-компактных логик была обоснована в работе [6]. Поэтому ниже мы приводим только формулировки результатов из [6], включая и формулировки некоторых технических лемм, которые будут использоваться в дальнейшем.

2.7. Теорема о корректности. Пусть Γ – множество формул, A – формула J-определимой логики L. Тогда $\Gamma \vdash_L A$ влечет $\Gamma \models_L A$.

2.8. Лемма. Пусть A – формула, Γ – множество формул классической логики высказываний, S – **C**L-подстановка для J-определимой логики L. Тогда $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}} A$ влечет $S(\Gamma) \vdash_L S(A)$.

2.9. Лемма. Пусть X, Y, Z_X и Z_Y – внешние формулы J-определимой логики L; Z_Y получена из Z_X заменой подформулы X на формулу Y в некоторых вхождениях. Тогда

$$X \Leftrightarrow Y \vdash_L Z_X \Leftrightarrow Z_Y .$$

2.10. Определение. Определим *оператор нормализации* norm, переводящий формулы вида $\mathrm{J}_W(A)$ в нормальные формулы. Рекурсия по построению формулы A:

(i) $\mathrm{norm}(\mathrm{J}_W(p)) = \mathrm{J}_W(p)$, где $p \in P_L$, $W \in Ch_L$;

(ii) $\mathrm{norm}(\mathrm{J}_W(o(A_1,\dots,A_n))) = \mathrm{N}^o_{W\,\mathrm{norm}}[A_1,\dots,A_n]$,

где $o \in O_L \setminus JO_L$, $W \in Ch_L$; через $\mathrm{N}^o_{W\,\mathrm{norm}}[A_1,\dots,A_n]$ обозначен результат оператора специальной подстановки, параметризованного функцией norm: этот оператор подставляет вместо формул вида $\mathrm{J}_T(p_i)$ формулы $\mathrm{norm}(\mathrm{J}_T(A_i))$, где $i = 1,\dots,n$, $T \in Ch_L$ (см. соглашение 1.23);

(iii) $$\mathrm{norm}(\mathrm{J}_W(\mathrm{J}_S(A))) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если } 0 \in W,\ 1 \in W, \\ \mathbf{0}, & \text{если } 0 \notin W,\ 1 \notin W, \\ \mathrm{norm}(\mathrm{J}_S(A)), & \text{если } 0 \notin W,\ 1 \in W, \\ \neg\mathrm{norm}(\mathrm{J}_S(A)), & \text{если } 0 \in W,\ 1 \notin W, \end{cases}$$

где W, $S \in Ch_L$.

2.11. Предложение. Для любой формулы A J-определимой логики L справедливо $\vdash_L \mathrm{J}_W(A) \Leftrightarrow \mathrm{norm}(\mathrm{J}_W(A))$.

2.12. Замечание. Оператор нормализации norm можно по индукции продолжить на множество всех внешних формул J-определимой логики L.

2.13. Предложение. Для любой внешней формулы X J-определимой логики L справедливо $\vdash_L X \Leftrightarrow \mathrm{norm}(X)$.

2.14. Предложение. Для любой формулы A J-определимой логики L существует нормальная формула X этой логики такая, что $A \vdash_L X$ и $X \vdash_L A$.

В качестве такой формулы можно взять norm(des(A)).

2.15. Следствие. Пусть Γ – множество формул, A – формула J-определимой логики L. Тогда

$\Gamma \vdash_L A$ если и только если $\mathrm{norm}(\mathrm{des}(\Gamma)) \vdash_L \mathrm{norm}(\mathrm{des}(A))$,

где $\mathrm{norm}(\mathrm{des}(\Gamma)) = \{\mathrm{norm}(\mathrm{des}(B)) \mid B \in \Gamma\}$.

2.16. Обозначения. Формулу $\bigwedge\limits_{S\in\Phi} \mathrm{J}_S(A) \Rightarrow \bigvee\limits_{T\in\Psi} \mathrm{J}_T(A)$ (аксиому группы (B)) будем обозначать через $\mathrm{B}_\Phi^\Psi(A)$. Пусть Γ – множество формул J-определимой логики L. Через $\mathrm{AxB}(\Gamma)$ обозначим множество формул

$$\left\{B_\Phi^\Psi(A) \,\middle|\, A \in \Gamma, \Phi, \Psi \subseteq Ch_L, \Phi, \Psi \text{ - конечные}, \bigcap_{S\in\Phi} S \subseteq \bigcup_{T\in\Psi} T\right\}.$$

Если A – формула, то через $\mathrm{AxB}(A)$ обозначим множество формул $\mathrm{AxB}(\{A\})$.

2.17. Определение. Оценку v в классической логике (**C**-оценку) будем называть B-*корректной*, если она является моделью множества формул $\mathrm{AxB}(P_L)^\Delta$, т.е. на оценке v истинна каждая формула вида $\bigwedge\limits_{S\in\Phi} p_S \Rightarrow \bigvee\limits_{T\in\Psi} p_T$, где $p \in P_L$, $\Phi, \Psi \subseteq Ch_L$, Φ, Ψ – конечные множества, $\bigcap\limits_{S\in\Phi} S \subseteq \bigcup\limits_{T\in\Psi} T$.

2.18. Предложение. Пусть L – J-определимая J-компактная логика. Тогда для каждой B-корректной **C**-оценки v существует L-оценка u такая, что $u^\uparrow = v$. (См. определение 1.19).

2.19. Лемма. Пусть Γ – множество нормальных формул, X – нормальная формула J-определимой J-компактной логики L. Тогда

$$\Gamma^\Delta \cup \mathrm{AxB}(P_L)^\Delta \vdash_{\mathbf{C}} X^\Delta, \text{ если и только если } \Gamma \vdash_L X.$$

2.20. Следствие. Пусть Γ – множество нормальных формул, X – нормальная формула J-определимой J-компактной логики L. Тогда $\Gamma \models_L X$ влечет $\Gamma \vdash_L X$.

2.21. Теорема о полноте. Пусть Γ – множество формул, A – формула J-определимой J-компактной логики L. Тогда $\Gamma \models_L A$ влечет $\Gamma \vdash_L A$.

2.22. Определение. Пусть L многозначная логика. Будем говорить, что логика L компактна, если для любого множества формул этой логики Γ и любой формулы A всякий раз, когда $\Gamma \models\!=_L A$, существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$ такое, что $\Gamma' \models\!=_L A$.

2.23. Теорема. Пусть L – J-определимая логика. Тогда следующие три условия для логики L равносильны:

(i) логика L J-компактна;

(ii) для логики L справедлива теорема о полноте (см. 2.21);

(iii) логика L компактна.

3. Алгебраический подход к J-определимым J-компактным логикам

3.1. Замечание. Пусть $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ – булева алгебра. Будем считать, что на множестве B в этом случае стандартным образом определено отношение порядка ≤ и операция «импликации» →, а именно: $a \le b$, если $a \cap b = a$; $a \to b = -a \cup b$. Наибольший элемент булевой алгебры **B** обозначим через *1*, наименьший – через *0*.

3.2. Определение. Пусть $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ – булева алгебра, а L – J-определимая J-компактная логика. Рассмотрим B^{Ch_L}, т.е. множество отображений Ch_L в B. Отображение $f \in B^{Ch_L}$ назовем B-*корректным* (имеются в виду аксиомы группы (B), а не алгебра **B**), если

$$\bigcap_{S \in \Phi} f(S) \le \bigcup_{T \in \Psi} f(T) \text{ всякий раз, когда } \bigcap_{S \in \Phi} S \subseteq \bigcup_{T \in \Psi} T$$

($\Phi, \Psi \subseteq Ch_L$, Φ, Ψ – конечны).

Обозначим через B_L множество $\{ f \in B^{Ch_L} \mid f \text{ B-корректно} \}$.

3.3. Определение. Пусть $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ – булева алгебра, L – J-определимая J-компактная логика. И пусть $v : P_L \to B_L$. Обозначим через $v^{\Uparrow}$ отображение множества N_L в B, определяемое рекурсивно следующим образом:

(i) $v^{\Uparrow}(J_W(p)) = v(p)(W)$, $\quad (p \in P_L,\ W \in Ch_L)$

(ii) $v^{\Uparrow}(X \wedge Y) = v^{\Uparrow}(X) \cap v^{\Uparrow}(Y)$, $\quad (X, Y \in N_L)$

$v^{\Uparrow}(X \vee Y) = v^{\Uparrow}(X) \cup v^{\Uparrow}(Y)$,

$$v^{\Uparrow}(X \Rightarrow Y) = v^{\Uparrow}(X) \to v^{\Uparrow}(Y),$$

$$v^{\Uparrow}(\neg X) = -v^{\Uparrow}(X).$$

Очевидно, что $v^{\Uparrow}$ является гомоморфизмом алгебры $\mathbf{AN}[L]$ в алгебру $\mathbf{B}$. Будем называть его **BN**-*реализацией* отображения v.

Пусть X – нормальная формула логики L, все пропозициональные переменные которой содержатся среди $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Значение формулы X на **BN**-реализации любого отображения $v : P_L \to B_L$ такого, что $v(p_1) = f_1$, $v(p_2) = f_2, \ldots$, $v(p_n) = f_n$, будем обозначать через $X\|f_1, f_2, \ldots, f_n\|$.

3.4. Определение. В предыдущем пункте мы определили **BN**-реализацию отображения $v : P_L \to B_L$ как гомоморфизм алгебры $\mathbf{AN}[L]$ в алгебру $\mathbf{B}$. Аналогично можно определить **B**-*реализацию* отображения v. Она будет гомоморфизмом алгебры $\mathbf{AF}[\mathbf{C}]$ в алгебру $\mathbf{B}$. Обозначать **B**-реализацию отображения v будем через $v^{\uparrow}$. Положим $v^{\uparrow}(p_W) = v(p)(W)$ $(p \in P_L,\, p_W \in P_{\mathrm{C}},\, W \in Ch_L)$ и продолжим отображение $v^{\uparrow}$ на все множество F_{C} обычным образом, по индукции.

Пусть A – формула логики **C**, все пропозициональные переменные которой содержатся в множестве $\mathrm{orb}(\{p_1, p_2, \ldots, p_n\})$. Значение формулы A на **B**-реализации любого отображения $v : P_L \to B_L$ такого, что $v(p_1) = f_1$, $v(p_2) = f_2, \ldots$, $v(p_n) = f_n$, будем обозначать через $A\|f_1, f_2, \ldots, f_n\|$.

3.5. Лемма. Пусть $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ – булева алгебра, L – J-определимая J-компактная логика, $v : P_L \to B_L$. И пусть X – нормальная формула логики L. Тогда $v^{\uparrow}(X^{\Delta}) = v^{\Uparrow}(X)$.

Используя введенные выше обозначения, этот результат можно сформулировать следующим образом:

$$X^{\Delta}\|f_1, f_2, \ldots, f_n\| = X\|f_1, f_2, \ldots, f_n\|.$$

3.6. Лемма. Пусть $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ – булева алгебра, L – J-определимая J-компактная логика, $v : P_L \to B_L$. Тогда **B**-реализация отображения v является моделью множества $\mathrm{AxB}(P_L)^{\Delta}$.

Доказательство. Каждый элемент множества $\mathrm{AxB}(P_L)^{\Delta}$ имеет вид

$$\bigwedge_{S\in\Phi} p_S \Rightarrow \bigvee_{T\in\Psi} p_T,$$

где $p \in P_L$, $\Phi,\Psi \subseteq Ch_L$ таковы, что $\bigcap_{S\in\Phi} S \subseteq \bigcup_{T\in\Psi} T$. Тогда

$$v^{\uparrow}\left(\bigwedge_{S\in\Phi} p_S \Rightarrow \bigvee_{T\in\Psi} p_T\right) = \bigcap_{S\in\Phi} v(p)(S) \to \bigcup_{T\in\Psi} v(p)(T) = 1,$$

так как $v(p) \in B_L$.

3.7. Определение. Пусть $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ – булева алгебра, L является J-определимой J-компактной логикой. Определим на множестве B_L *операции, соответствующие операциям из* O_L. Значения этих операций будут браться из множества B^{Ch_L}; замкнутость множества B_L относительно определяемых ниже операций на еще предстоит доказать. Обозначать эти операции будем так же, как операции из O_L. Положим, по определению:

(1) $o(f_1,\ldots,f_n)(W) = \mathrm{N}_W^o \|f_1,\ldots,f_n\|$,

где $o \in O_L \setminus JO_L$, $W \in Ch_L$, $f_1,\ldots,f_n \in B_L$.

(2) $$\mathrm{J}_S(f)(W) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in W,\ 1 \in W, \\ 0, & \text{если } 0 \notin W,\ 1 \notin W, \\ f(S) & \text{если } 0 \notin W,\ 1 \in W, \\ \neg f(S) & \text{если } 0 \in W,\ 1 \notin W, \end{cases}$$

где $S, W \in Ch_L$, $f \in B_L$.

3.8. Предложение. Множество B_L замкнуто относительно определенных выше операций.

Доказательство. Пусть функции $f_1,\ldots,f_n \in B_L$. Покажем, что $o(f_1,\ldots,f_n) \in B_L$. Пусть $\Phi,\Psi \subseteq Ch_L$ таковы, что $\bigcap_{S\in\Phi} S \subseteq \bigcup_{T\in\Psi} T$.

Покажем, что в этом случае будет верно

$$\bigcap_{S\in\Phi} o(f_1,\ldots,f_n)(S) \le \bigcup_{T\in\Psi} o(f_1,\ldots,f_n)(T). \qquad (1)$$

Рассмотрим формулу $o(p_1,\ldots,p_n)$. Обозначим ее через A. Формула $\mathrm{B}_{\Phi}^{\Psi}(A)$ является аксиомой, поэтому верно $\vdash_L \mathrm{B}_{\Phi}^{\Psi}(A)$.

В силу предложения 2.13, будет верно также $\vdash_L \mathrm{norm}\left(\mathrm{B}_\Phi^\Psi(A)\right)$. По лемме 2.19, получим: $\mathrm{AxB}(P_L)^\Delta \vdash_C \mathrm{norm}\left(\mathrm{B}_\Phi^\Psi(A)\right)^\Delta$. Пусть $v : P_L \to B_L$ таково, что $v(p_1) = f_1, \ldots, v(p_n) = f_n$. Тогда, по лемме 3.6, гомоморфизм $v^\uparrow$ является моделью множества $\mathrm{AxB}(P_L)^\Delta$. Для классической логики справедлива теорема о корректности относительно булевых алгебр. Следовательно, гомоморфизм $v^\uparrow$ является моделью формулы $\mathrm{norm}\left(\mathrm{B}_\Phi^\Psi(A)\right)^\Delta$. Но по лемме 3.5,

$$v^\Uparrow\left(\mathrm{norm}\left(\mathrm{B}_\Phi^\Psi(A)\right)\right) = v^\uparrow\left(\mathrm{norm}\left(\mathrm{B}_\Phi^\Psi(A)\right)^\Delta\right) = 1.$$

Но $\mathrm{norm}\left(\mathrm{B}_\Phi^\Psi(A)\right)$ – это формула

$$\bigwedge_{S\in\Phi} \mathrm{N}_S^o(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow \bigvee_{T\in\Psi} \mathrm{N}_T^o(p_1,\ldots,p_n).$$

Тогда, по определениям 2.10, 3.3 и 3.7, получим:

$$v^\Uparrow\left(\mathrm{norm}\left(\mathrm{B}_\Phi^\Psi(A)\right)\right) = \bigcap_{S\in\Phi} \mathrm{N}_S^o\|f_1,\ldots,f_n\| \to \bigcup_{T\in\Psi} \mathrm{N}_T^o\|f_1,\ldots,f_n\| =$$

$$= \bigcap_{S\in\Phi} o(f_1,\ldots,f_n)(S) \to \bigcup_{T\in\Psi} o(f_1,\ldots,f_n)(T) = 1,$$

откуда, очевидно, следует (1).

Замкнутость по J-операторам доказывается аналогично.

3.1. Определение. Предыдущее предложение показывает, что с помощью определений 3.2 и 3.7 мы для каждой булевой алгебры $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ задаем алгебру с носителем B_L и сигнатурой, совпадающей с сигнатурой алгебры логики L. Будем называть эту алгебру *L-версией алгебры* $\mathbf{B}$ и обозначать посредством $\mathbf{B}_L$.

3.2. Определение. Пусть $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ – булева алгебра, L – J-определимая J-компактная логика. Для каждого $a \in B$ определим $\hat{a} \in B^{Ch_L}$ следующим образом:

$$\hat{a}(W) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in W,\ 1 \in W, \\ 0, & \text{если } 0 \notin W,\ 1 \notin W, \\ a, & \text{если } 0 \notin W,\ 1 \in W, \\ \neg a, & \text{если } 0 \in W,\ 1 \notin W, \end{cases}$$

где $W \in Ch_L$. Будем называть $\hat{a}$ *L-образом* элемента a. Через $\hat{B}$ будем обозначать множество L-образов всех элементов B.

Заметим, что, вводя обозначение вида $\hat{a}$, мы неявно подразумеваем, что логика L – фиксирована.

3.3. Предложение. Пусть $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ – булева алгебра, L – J-определимая J-компактная логика. Тогда $\hat{B} \subseteq B_L$.

Доказательство. Разбор возможных случаев достаточно длинный, но несложный.

3.4. Определение. В алгебре $\mathbf{B}_L$ множество

$$D_{B_L} = \left\{ f \in B_L \,\middle|\, \mathrm{des}\|f\| = 1 \right\}$$

назовем множеством выделенных значений алгебры $\mathbf{B}_L$.

3.5. Предложение. Пусть $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ – булева алгебра, L – J-определимая J-компактная логика. Тогда $\hat{1} \in D_{B_L}$, $\hat{0} \notin D_{B_L}$.

Доказательство. Не нарушая общности, предположим, что $\mathrm{des} = \mathrm{J}_{D_L}(p)$. По определению 3.10,

$$\hat{1}(W) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \in W, \\ 0, & \text{если } 1 \notin W, \end{cases}$$

$$\hat{0}(W) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in W, \\ 0, & \text{если } 0 \notin W, \end{cases}$$

где $W \in Ch_L$. Напомним, что $1 \in D_L$, $0 \notin D_L$. Тогда

$$\mathrm{J}_{D_L}(p)\|\hat{1}\| = \hat{1}(D_L) = 1,$$

значит $\hat{1} \in D_{B_L}$, а $\mathrm{J}_{D_L}(p)\|\hat{0}\| = \hat{0}(D_L) = 0$, следовательно, $\hat{0} \notin D_{B_L}$.

3.6. Определение. Пусть L – J-определимая J-компактная логика; $\alpha, \beta \in V_L$. Будем говорить, что истинностные значения *J-сравнимы*, если для любого $W \in Ch_L$ в алгебре $\mathbf{AL}[L]$ верно равенство $\mathrm{J}_W(\alpha) = \mathrm{J}_W(\beta)$. Отношение J-сравнимости будем обозначать символом $\equiv$.

3.7. Предложение. Отношение $\equiv$ является конгруэнцией в алгебре $\mathbf{AL}[L]$.

Доказательство. Очевидно, $\equiv$ является отношением эквивалентности.

Пусть $o \in O_L \setminus JO_L$, $\alpha_1 \equiv \beta_1, \ldots, \alpha_n \equiv \beta_n$. Это означает, что $\mathrm{J}_W(\alpha_i) = \mathrm{J}_W(\beta_i)$ $(i = 1, \ldots, n, \quad W \in Ch_L)$. Тогда

$$\mathrm{J}_W(o(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \mathrm{N}_W^o\lceil \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rceil =$$

$$= \mathrm{N}_W^o\lceil \beta_1, \ldots, \beta_n \rceil = \mathrm{J}_W(o(\beta_1, \ldots, \beta_n)),$$

для любого $W \in Ch_L$. Следовательно, $o(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv o(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Аналогично проверяется тот факт, что отношение $\equiv$ сохраняет J-операторы.

Через $\mathbf{AL}[L]_{/\equiv}$ будем обозначать факторалгебру алгебры $\mathbf{AL}[L]$ по отношению $\equiv$, через $[\alpha]$ будем обозначать класс эквивалентности истинностного значения α по отношению $\equiv$.

3.8. Лемма. Пусть $\alpha \in D_L$, $\alpha \equiv \beta$. Тогда $\beta \in D_L$.

3.9. Определение. *Множеством выделенных классов* в алгебре $\mathbf{AL}[L]_{/\equiv}$ назовем множество $D_{L/\equiv} = \{ [\alpha] \mid \alpha \in D_L \}$. Определив множество выделенных классов, мы фактически определили *факторлогику логики L по отношению* $\equiv$. Обозначать эту факторлогику будем через $L_{/\equiv}$.

3.10. Лемма. Пусть v_1 и v_2 – две L-оценки такие, что $v_1(p) \equiv v_2(p)$ $(p \in P_L)$, и пусть X – нормальная формула. Тогда $v_1(X) = v_2(X)$.

Доказательство. Индукция по нормальным формулам J-определимой J-компактной логики L.

3.11. Лемма. Пусть v_1 и v_2 – две L-оценки такие, что $v_1(p) \equiv v_2(p)$ $(p \in P_L)$, и пусть A – произвольная формула логики L. Тогда $v_1(A) \equiv v_2(A)$.

Доказательство. Индукция по формулам логики L.

3.12. Определение. Пусть v – L-оценка в J-определимой J-компактной логике L. Положим $v_{/\equiv}(p) = [v(p)]$ (где $p \in P_L$) и продолжим оценку $v_{/\equiv}$ на множество F_L обычным образом по индукции. Полученную оценку в факторлогике $L_{/\equiv}$ будем называть *фактороценкой L-оценки v по отношению* $\equiv$.

Индукцией по формулам логики L можно доказать, что для любой формулы A логики L $v_{/\equiv}(A)=[v(A)]$.

3.13. Теорема. Пусть L – J-определимая J-компактная логика, $L_{/\equiv}$ – соответствующая фактор-логика. Тогда формула A логики L будет L-выделенной тогда и только тогда, когда она будет $L_{/\equiv}$-выделенной.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Индукция по формулам. Используется функция выбора на множестве $\left\{ v(p) \mid p \in P_L \right\}$, где v – $L_{/\equiv}$-оценка.

($\Leftarrow$) Следует из леммы 3.16.

3.14. Определение. Определим отображение $^{+}: V_{L/\equiv} \to B^{Ch_L}$ следующим образом:

$$[\alpha]^{+}(W)=\begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \in W, \\ 0, & \text{если } \alpha \in W, \end{cases}$$

где $W \in Ch_L$.

3.15. Лемма. Для любого $\alpha \in V_L$ функция $[\alpha]^{+} \in B_L$.

Доказательство. Непосредственная проверка по определению множества функций B_L. Используется тот очевидный факт, что $\alpha \equiv \beta$ тогда и только тогда, когда для любого $W \in Ch_L$ α и β либо одновременно принадлежат, либо одновременно не принадлежат множеству W.

3.16. Лемма. Пусть v – L-оценка. Определим отображение $v^{+}: P_L \to B_L$ следующим образом: $v^{+}(p)=[v(p)]^{+}$. Тогда для любой нормальной формулы X

$$v(X)=1 \Leftrightarrow v^{+^{\Uparrow}}(X)=1.$$

Можно сказать, что $v(X)=v^{+^{\Uparrow}}(X)$, если отождествить $0, 1 \in V_L$ с $0,\ 1 \in B$, соответственно. В более удобных обозначениях,

$$X\lceil \alpha_1,\ldots,\alpha_n \rceil = X\|\alpha_1,\ldots,\alpha_n\|.$$

3.17. Предложение. Отображение $^{+}: V_{L/\equiv} \to B_L$ является мономорфизмом алгебры $\mathbf{AL}[L]_{/\equiv}$ в алгебру $\mathbf{B}_L$.

Доказательство. Докажем, что $^{+}$ – инъективное отображение. Пусть $[\alpha] \neq [\beta]$. Тогда неверно, что $\alpha \equiv \beta$, значит, найдется

$W \in Ch_L$ такое, что $\alpha \in W$, но $\beta \notin W$. В этом случае $[\alpha]^+(W) = 1$, $[\beta]^+(W) = 0$, значит $[\alpha]^+ \neq [\beta]^+$.

Покажем, что $^+$ – гомоморфизм. Пусть $o \in O_L \setminus JO_L$. Покажем, что в этом случае

$$(o([\alpha_1],...,[\alpha_n]))^+ = o([\alpha_1]^+,...,[\alpha_n]^+). \qquad (1)$$

Пусть $W \in V_L$. Тогда

$$(o([\alpha_1],...,[\alpha_n]))^+(W) =$$
$$= [o(\alpha_1,...,\alpha_n)]^+(W) = \begin{cases} 1, & \text{если } o(\alpha_1,...,\alpha_n) \in W, \\ 0, & \text{если } o(\alpha_1,...,\alpha_n) \notin W. \end{cases}$$

С другой стороны

$$(o([\alpha_1]^+,...,[\alpha_n]^+))(W) = \mathrm{N}_W^o \left\| [\alpha_1]^+,...,[\alpha_n]^+ \right\| = N_W^o \lceil \alpha_1,...,\alpha_n \rceil =$$
$$= \mathrm{J}_W(o(\alpha_1,...,\alpha_n)) = \begin{cases} 1, & \text{если } o(\alpha_1,...,\alpha_n) \in W, \\ 0, & \text{если } o(\alpha_1,...,\alpha_n) \notin W. \end{cases}$$

Таким образом (1) доказано. Использовалось определение операции o на множестве B_L и лемма 3.24. Тот факт, что отображение $^+$ сохраняет J-операторы, проверяется аналогично.

3.18. Следствие. Пусть $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ – булева алгебра, L – J-определимая J-компактная логика. Тогда алгебра $\mathbf{B}_L$ содержит подалгебру, изоморфную факторалгебре $\mathbf{AL}[L]_{/\equiv}$.

3.19. Предложение. Пусть **B2** – двухэлементная булева алгебра, L – J-определимая J-компактная логика. Тогда $\mathbf{B2}_L$ изоморфна алгебре $\mathbf{AL}[L]_{/\equiv}$.

Доказательство. В силу предложения 3.25, достаточно показать, что любая функция f из $\{0,1\}_L$ представима в виде $[\alpha]^+$ для некоторого $\alpha \in V_L$.

Предположим, что $f \in \{0,1\}_L$. Пусть

$$\Phi_0 = \{W \in Ch_L \mid f(W) = 0\}, \quad \Phi_1 = \{W \in Ch_L \mid f(W) = 1\}.$$

Покажем, что $\bigcap\limits_{S \in \Phi_1} S \not\subseteq \bigcup\limits_{S \in \Phi_0} T$. Предположим противное. Пусть $\bigcap\limits_{S \in \Phi_1} S \subseteq \bigcup\limits_{S \in \Phi_0} T$. Так как логика L J-компактна, найдутся конечные

$\Phi_0' \subseteq \Phi_0$, $\Phi_1' \subseteq \Phi_1$ такие, что $\bigcap\limits_{S\in\Phi_1'} S \subseteq \bigcup\limits_{S\in\Phi_0'} T$. Но тогда верно неравенство

$$\bigcap_{S\in\Phi_1'} f(S) \leq \bigcup_{T\in\Phi_0'} f(T). \text{ Íî } \bigcap_{S\in\Phi_1'} f(S) = 1, \ \bigcup_{T\in\Phi_0'} f(T) = 0.$$

Получили противоречие. Таким образом, $\bigcap\limits_{S\in\Phi_1} S \not\subseteq \bigcup\limits_{S\in\Phi_0} T$. Тогда существует истинностное значение $\alpha \in \bigcap\limits_{S\in\Phi_1} S \setminus \bigcup\limits_{T\in\Phi_0} T$. Нетрудно показать, что $f = [\alpha]^+$.

3.1. Предложение. Пусть L – J-определимая J-компактная логика. Тогда $D_{\mathbf{B}2_L} = \{[\alpha]^+ \mid \alpha \in D_L\}$.

Доказательство. Используется лемма 3.24.

3.2. Лемма. Пусть $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, - \rangle$ – булева алгебра, L – J-определимая J-компактная логика. Рассмотрим гомоморфизм $v : \mathbf{AF}[L] \to \mathbf{B}_L$. Возьмем ограничение v на множество P_L и определим с его помощью гомоморфизм $v^{\Uparrow} : \mathbf{AN}[L] \to \mathbf{B}$ (см. определение 3.3). Тогда для любой формулы $A \in F_L$ и любого множества истинностных значений $W \in Ch_L$ верно

$$v^{\Uparrow}(\mathrm{norm}(\mathrm{J}_W(A))) = v(A)(W).$$

Доказательство. Индукция по построению формулы A. Используется определение оператора нормализации norm (2.10) и определение 3.3.

3.3. Определение. Пусть A – формула J-определимой J-компактной логики L, $\mathbf{B}_L$ – L-версия булевой алгебры $\mathbf{B}$. Формулу A будем называть $\mathbf{B}_L$-выделенной, если для любого гомоморфизма $v : \mathbf{AF}[L] \to \mathbf{B}_L$ значение $v(A) \in D_{\mathbf{B}_L}$. Формулу A будем называть выделенной в классе L-версий булевых алгебр, если она $\mathbf{B}_L$-выделена для любой булевой алгебры $\mathbf{B}$.

Тот факт, что формула A $\mathbf{B}_L$-выделена, будем обозначать через $\models\!=_{\mathbf{B}_L} A$, тот факт, что формула A выделена в классе L-версий всех булевых алгебр, будем обозначать как $\models\!=_{\mathrm{LVers}} A$.

3.4. Лемма. Пусть X – L-выделенная нормальная формула J-определимой J-компактной логики L, $\mathbf{B}_L$ – L-версия булевой алгебры **B**, v – гомоморфизм алгебры $\mathbf{AF}[L]$ в $\mathbf{B}_L$. Тогда $v^{\Uparrow}(X) = 1$.

Доказательство. По теореме о полноте, $\vdash_L X$. По лемме 2.19, $\mathrm{AxB}(P_L)^{\Delta} \vdash_{C} X^{\Delta}$. Взяв ограничение отображения v на множество P_L, построим его **BN**-реализацию $v^{\Uparrow}$ и **B**-реализацию $v^{\uparrow}$. (См. определения 3.3 и 3.4). По лемме 3.6, гомоморфизм $v^{\uparrow}$ является моделью множества $\mathrm{AxB}(P_L)^{\Delta}$. Поскольку для логики **C** имеет место теорема о корректности относительно булевых алгебр, получим $v^{\uparrow}(X^{\Delta}) = 1$. Но по лемме 3.5, $v^{\uparrow}(X^{\Delta}) = v^{\Uparrow}(X)$.

3.5. Теорема. Пусть A – формула J-определимой J-компактной логики L. Тогда $\models_L A$, если и только если $\models_{\mathrm{LVers}} A$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\models_L A$. Возьмем произвольную булеву алгебру **B**, построим ее L-версию $\mathbf{B}_L$, и рассмотрим гомоморфизм $v : \mathbf{AF}[L] \to \mathbf{B}_L$. Затем рассмотрим нормальную формулу $\mathrm{norm}(\mathrm{des}(A))$. Очевидно, $\models_L \mathrm{norm}(\mathrm{des}(A))$. Тогда по лемме 3.31, $v^{\Uparrow}(\mathrm{norm}(\mathrm{des}(A)) = 1$. Значит, $\mathrm{des}\|v(A)\| = 1$. (Не нарушая общности, можно предположить, что $\mathrm{des}(A) = \mathrm{J}_{D_L}(A)$, и воспользоваться леммой 3.29). Тогда $v(A) \in D_{B_L}$ (см. определение 3.12). В силу произвольности выбора булевой алгебры **B** и гомоморфизма v получим, что $\models_{\mathrm{LVers}} A$.

($\Leftarrow$) Пусть $\models_{\mathrm{LVers}} A$. Тогда формула A будет $\mathbf{B2}_L$-выделена, где **B2** – двухэлементная булева алгебра. Но алгебра $\mathbf{B2}_L$ изоморфна фактору алгебре $\mathbf{AL}[L]_{/\equiv}$. Тогда формула A будет $L_{/\equiv}$-выделена, значит и L-выделена.

3.6. Следствие (теорема о полноте относительно L-версий булевых алгебр). Пусть A – формула J-определимой J-компактной логики L. Тогда $\vdash_L A$, если и только если $\models_{\mathrm{LVers}} A$.

4. L-алгебры

В данном разделе предлагается аксиоматизация класса алгебр, которые (при подходящем определении множества выделенных значений) могут быть моделями J-определимых J-компактных логик. Так как доказательства достаточно громоздки, приводятся только формулировки результатов.

4.1. Определение. Пусть L – J-определимая J-компактная логика. Тогда L-алгеброй будем называть алгебру сигнатуры O_L, удовлетворяющую следующим аксиомам. (Предполагаем, *что* a, b, c, a_1, ..., a_n взяты из носителя L-алгебры, $W, S, T \in Ch_L$.)

Аксиомы внешних элементов

(A1) $\mathrm{J}_W\, a \vee \mathrm{J}_W\, a = \mathrm{J}_W\, a$,

(A2) $\mathrm{J}_S\, a \vee \mathrm{J}_T\, b = \mathrm{J}_T\, b \vee \mathrm{J}_S\, a$,

(A3) $(\mathrm{J}_S\, a \vee \mathrm{J}_T\, b) \vee \mathrm{J}_W\, c = \mathrm{J}_S\, a \vee (\mathrm{J}_T\, b \vee \mathrm{J}_W\, c)$,

(A4) $\mathrm{J}_S\, a \wedge (\mathrm{J}_T\, b \vee \mathrm{J}_W\, c) = (\mathrm{J}_S\, a \wedge \mathrm{J}_T\, b) \vee (\mathrm{J}_S\, a \wedge \mathrm{J}_W\, c)$,

(A5) $\neg\neg \mathrm{J}_W\, a = \mathrm{J}_W\, a$,

(A6) $\neg(\mathrm{J}_S\, a \vee \mathrm{J}_T\, b) = \neg \mathrm{J}_S\, a \wedge \neg \mathrm{J}_T\, b$,

(A7) $\mathrm{J}_S\, a \vee (\mathrm{J}_T\, b \wedge \neg \mathrm{J}_T\, b) = \mathrm{J}_S\, a$,

(A8) $\mathrm{J}_S\, a \Rightarrow \mathrm{J}_T\, b = \neg \mathrm{J}_S\, a \vee \mathrm{J}_T\, a$.

Аксиомы J-корректо**сти**

(B) $\bigwedge\limits_{S\in\Phi} \mathrm{J}_S\, a \Rightarrow \bigvee\limits_{T\in\Psi} \mathrm{J}_T\, a = 1$,

где $\Phi, \Psi \subseteq Ch_L$, Φ и Ψ – конечные множества и $\bigcap\limits_{S\in\Phi} S \subseteq \bigcup\limits_{T\in\Psi} T$.

Аксиомы связи

(C1) $\mathrm{J}_W\big(o(a_1,\ldots,a_n)\big) = \mathrm{N}_W^o\big(a_1,\ldots,a_n\big)$,

где $o \in O_L \setminus JO_L$.

(C2) $\mathrm{J}_W\big(\mathrm{J}_S\, a\big) = 1$ $\quad\big(0 \in W,\ 1 \in W\big)$.

(C3) $\mathrm{J}_W\big(\mathrm{J}_S\, a\big) = 0$ $\quad\big(0 \notin W,\ 1 \notin W\big)$.

(C4) $\mathrm{J}_W\big(\mathrm{J}_S\, a\big) = \mathrm{J}_S\, a$ $\quad\big(0 \notin W,\ 1 \in W\big)$.

(C5) $\mathrm{J}_W\big(\mathrm{J}_S\, a\big) = \neg \mathrm{J}_S\, a$ $\quad\big(0 \in W,\ 1 \notin W\big)$.

Аксиомы замкнутости

(D1) $\mathrm{J}_S\, a * \mathrm{J}_T\, b = \mathrm{J}_W(\mathrm{J}_S\, a * \mathrm{J}_T\, b)$ $\quad\big(0 \notin W,\ 1 \in W\big)$, (D2) $\mathrm{J}_S\, a * \mathrm{J}_T\, b = \mathrm{J}_W(\neg(\mathrm{J}_S\, a * \mathrm{J}_T\, b))$ $\quad (0 \in W,\ 1 \notin W)$,

(D3) $\mathrm{J}_S\, a = \mathrm{J}_W(\neg \mathrm{J}_S\, a)$ $\quad (0 \notin W,\ 1 \in W)$,

(D4) $\mathrm{J}_S\, a = \mathrm{J}_W(\mathrm{J}_S\, a)$ $\quad (0 \in W,\ 1 \notin W)$,

где через * обозначена любая из операций: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$.

4.2. Предложение. Для любой булевой алгебры **B** ее L-версия $\mathbf{B}_L$ является L-алгеброй.

4.3. Предложение. Для любой J-определимой J-компактной логики L ее алгебра $\mathbf{AL}[L]$ является L-алгеброй.

4.4. Определение. Пусть **L** – L-алгебра для некоторой J-определимой J-компактной логики L. Определим на носителе алгебры **L** отношение $\equiv$ следующим образом: $a \equiv b$, если для любого $W \in Ch_L$ верно $\mathrm{J}_W\, a = \mathrm{J}_W\, b$.

4.5. Предложение. Определенное выше отношение $\equiv$ является конгруэнцией в алгебре **L**.

4.6. Теорема о представлении. Пусть **L** – L-алгебра для некоторой J-определимой J-компактной логики L. Тогда существует булева алгебра **B** такая, что факторалгебра $\mathbf{L}_{/\equiv}$ изоморфна некоторой подалгебре алгебры $\mathbf{B}_L$ (L-версии алгебры **B**).

4.7. Определение. Пусть **L** – L-алгебра для некоторой J-определимой J-компактной логики L. Множество выделенных значений носителя алгебры **L** определим следующим образом:

$$D_{\mathbf{L}} = \{\, a \in \mathrm{dom}(\mathbf{L}) \mid \mathrm{des}(a) = 1 \,\},$$

где $\mathrm{dom}(\mathbf{L})$ – это носитель алгебры **L**.

4.8. Определение. Пусть A – формула J-определимой J-компактной логики L, **L** – L-алгебра. Формулу A будем называть **L**-выделенной, если для любого гомоморфизма $v : \mathbf{AF}[L] \to \mathbf{L}$ значение $v(A) \in D_{\mathbf{L}}$. Формулу A будем называть выделенной в классе всех L-алгебр, если она **L**-выделена для любой L-алгебры **L**.

Тот факт, что формула A **L**-выделена, будем обозначать через $\models\!=_{\mathrm{L}} A$, тот факт, что формула A выделена в классе всех L-алгебр, будем обозначать как $\models\!=_{\mathrm{LAlg}} A$.

4.9. Теорема о полноте. Пусть A – формула J-определимой J-компактной логики L. Тогда $\vdash\!\!-_L A$, если и только если $\models\!=_{\mathrm{LAlg}} A$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аншаков О.М., Рычков С.В.* О многозначных логических исчислениях // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. №2. С. 267-270.
2. *Аншаков О.М., Рычков С.В.* Об аксиоматизации конечнозначных логических исчислений // Матем. сб. 1984. №4. С. 71–89.
3. *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Матем. Сборник. 1938. Т. 4. №2. С. 287–303.
4. *Григолия Р.Ш., Финн В.К.* Алгебры Бочвара и соответствующие им пропозициональные исчисления // Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. М., Наука, 1979. С. 345–371.
5. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН СССР им. В.А.Стеклова. М., 1958. Т.51.
6. *Anshakov O.M., Finn V.K., Skvortsov D.P.* On axiomatization of many-valued logics associated with formalization of plausible reasoning // Studia Logica. 1989. Vol. 48. N 4. P. 423–447.
7. *Anshakov O., Rychkov S.* On finite-valued propositional logical calculi // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1995. Vol. 36. N 4. P. 606–629.
8. *Ebbinghaus H.-D.* Über eine Pradikatenlogik mit partiel definierten Pradikaten und Funktionen // Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. 1969. Bd. 12. S. 39–53.
9. *Finn V.K., Anshakov O.M., Grigolia R.Sh., Zabezhailo M.I.* Many-valued logics as fragments of formalized semantics // Acta Philosophica Fennica. 1982. Vol. 35. P. 239–272.
10. *Finn V.K., Grigolia R.* Nonsense logics and their algebraic properties // Theoria. 1993. Vol. 59. P. 207–273.
11. *Hallden S.* The logic of nonsense. Uppsala: 1949.
12. *Lukasiewicz J., Tarski A.* Investigations into the sentential calculus // Tarski A. Logic, Semantics, Metamathematics / Chapter IV. Oxford: Clarendon Press. 1956.
13. *Post E.* Introduction to a general theory of elementary propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol. 43. P. 63–185.
14. *Rosser J.B., Turquette A.R.* Many-valued logics. Amsterdam: North-Holland. 1951.
15. *Segerberg K.* A contribution to nonsense logic // Theoria. 1965. Vol. 31, P. 199–217.

Л.Л.Максимова

ЯВНАЯ И НЕЯВНАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ В МОДАЛЬНЫХ, СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИХ И РЕЛЕВАНТНЫХ ЛОГИКАХ*

Abstract. *Various versions of the Beth definability property are considered for propositional normal modal logics, and also for superintuitionistic and relevant logics. We discuss interrelations of these properties, and find their algebraic equivalents in case of modal and superintuitionistic logics, and for extensions of* R *formulated in the language with a propositional constant* t.

Теорема Бета о неявной определимости утверждает, что в классической логике предикатов из неявной определимости отношения в некоторой теории следует его явная определимость. Понятия неявной и явной определимости могут быть заданы для различных логик и притом разными способами.

Мы рассмотрим различные аналоги теоремы Бета об определимости в пропозициональных модальных, суперинтуиционистских и релевантных логиках и установим их взаимосвязи, а также соотношения с интерполяционными свойствами логик. Кроме того, мы найдем алгебраические эквиваленты указанных свойств.

1. Определения

Пусть L — логика, $\vdash_L$ — отношение выводимости в L. Пусть **x**, **q**, **q'** — попарно не пересекающиеся списки переменных, не содержащие y и z, **q** и **q'** имеют одинаковую длину, A(**x**,**q**,y) — формула. Говорим, что логика L обладает проективным свойством Бета PB1, если из $\vdash_L$ A(**x**,**q**,y)&A(**x**,**q'**,z)→(y↔z) следует $\vdash_L$ A(**x**,**q**,y)→(y↔B(**x**)) для некоторой формулы B(**x**). Далее, L обладает проективным свойством Бета PB2, если из A(**x**,**q**,y), A(**x**,**q'**,z) $\vdash_L$ y↔z следует A(**x**,**q**,y) $\vdash_L$ y↔B(**x**) для некоторой формулы B(**x**); L обладает свойством Бета B1, если из $\vdash_L$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (грант 97-03-04089).

$A(\mathbf{x},y)\&A(\mathbf{x},z)\to(y\leftrightarrow z)$ следует $\vdash_L A(\mathbf{x},y)\to(y\leftrightarrow B(\mathbf{x}))$ для подходящей формулы $B(\mathbf{x})$; L обладает свойством Бета B2, если из $A(\mathbf{x}y)$, $A(\mathbf{x},z) \vdash_L y\leftrightarrow z$ следует $A(\mathbf{x},y) \vdash_L y\leftrightarrow B(\mathbf{x})$ для некоторой формулы $B(\mathbf{x})$.

Очевидно, что B1 есть частный случай PB1, а B2 — частный случай PB2.

Свойства Бета тесно связаны с интерполяционными свойствами CIP и IPD, определенными следующим образом (где списки x,q,r попарно не пересекаются):

CIP. Если $\vdash_L A(\mathbf{x},\mathbf{q})\to B(\mathbf{x},\mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{x})$, что $\vdash_L A(\mathbf{x},\mathbf{q})\to C(\mathbf{x})$ и $\vdash_L C(\mathbf{x})\to B(\mathbf{x},\mathbf{r})$.

IPD. Если $A(\mathbf{x},\mathbf{q}) \vdash_L B(\mathbf{x},\mathbf{r})$, то существует такая формула $C(x)$, что $A(\mathbf{x},\mathbf{q}) \vdash_L C(\mathbf{x})$ и $C(\mathbf{x}) \vdash_L B(\mathbf{x},\mathbf{r})$.

2. Модальные логики

Наиболее известные модальные логики, такие как системы Льюиса S4 и S5, логика Гжегорчика Grz, логика доказуемости Геделя-Леба GL, логика K4 и минимальная нормальная модальная логика K обладают свойствами CIP и PB1. При этом предполагается, что в языке присутствует хотя бы одна пропозициональная константа $\top$ («истина») или $\bot$ («ложь»). В противном случае легко было бы опровергнуть PB1, так как формула $y\&z\to(y\leftrightarrow z)$ доказуема во всех этих системах, но не существует такой формулы B без переменных, чтобы была доказуема формула $y\to(y\leftrightarrow B)$.

Под нормальной модальной логикой мы понимаем множество модальных формул, содержащее все тавтологии классической пропозициональной логики и аксиомы вида $\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$ и замкнутое относительно правил R1: A, A B/B и R2: $A/\Box A$, а также правила подстановки.

Пусть L — нормальная модальная логика, $\vdash_L$ — отношение выводимости в L посредством правил R1 и R2. Определяем $[0]A=A$, $[n+1]A=A\&\Box[n]A$. Хорошо известно, что в нормальных модальных логиках справедлива следующая

Теорема дедукции. Если Г, $A \vdash_L B$, то $A \vdash_L [n]A\to B$ для некоторого натурального числа n.

Поэтому очевидно, что из PB1 следуют PB2 и B1, и B2 следует из B1. Диаграмма соотношений между CIP, IPD, B1 и B2 для случая нормальных модальных логик приведена в [9], мы получаем следующую теорему.

Теорема 1. В семействе нормальных модальных логик

а) PB1 эквивалентно каждому из свойств CIP и B1;

б) PB1 влечет конъюнкцию B2 и IPD, но обратное неверно;

в) конъюнкция B2 и IPD влечет PB2;

г) PB2 влечет B2, но обратное неверно.

Из теоремы 1 сразу следует, что PB2 слабее, чем PB1, на классе модальных логик. Так как существует модальная логика, удовлетворяющая IPD, но не обладающая B2, мы получаем, что в общем случае IPD не влечет PB2. В [11] было доказано, что все нормальные расширения модальной логики K4 обладают свойством B2. Из теоремы 1в вытекает тогда

Теорема 2. Пусть L — нормальная модальная логика, содержащая K4. Если L обладает IPD, то L обладает PB2.

Вопрос, существует ли нормальная модальная логика, удовлетворяющая PB2, но не обладающая IPD, остается пока открытым.

Отметим, что существует нормальное расширение логики S4, удовлетворяющее IPD, а значит, и PB2, но не обладающее CIP [7]. Ситуация меняется при переходе к расширениям логики S5. В [7], [9] было доказано, что лишь четыре расширения логики S5 имеют IPD и все они удовлетворяют CIP. Поэтому справедлива

Теорема 3. Для любого расширения логики S5 свойство Бета PB2 влечет IPD и, следовательно, все свойства PB1, B1, CIP, IPD, PB2 эквивалентны на классе расширений логики S5.

Ввиду теоремы 2, все эти логики обладают B2, поэтому B2 не влечет PB2.

Теперь мы получим алгебраические эквиваленты вышеуказанных свойств Бета. Хорошо известно, что существует взаимно однозначное соответствие между нормальными модальными логиками и многообразиями модальных алгебр. *Модальная алгебра* есть алгебра $\mathbf{A} = (A, \to, \neg, \Box)$, которая является булевой алгеброй относительно $\to$ и $\neg$ и, кроме того, удовлетворяет условиям $\Box \top = \top$ и $\Box(x \to y) \leq \Box x \to \Box y$. Модальная алгебра $\mathbf{A}$ называется *транзитивной*, если в ней выполнено неравенство $\Box x \leq \Box\Box x$; *топобулевой алгеброй*, или алгеброй замыкания, если в ней выполняется $\Box x \leq x$; топобулева алгебра, удовлетворяющая условию $x \leq \neg\Box\neg\Box x$, называется *эпистемической*, или *е-алгеброй*. Хорошо известно, что минимальная нормальная модальная логика K характеризуется многообразием всех модальных алгебр, логика K4 — многообразием транзитивных алгебр, S4 — многообразием топобулевых алгебр и S5 — многообразием е-алгебр.

В [9] было доказано, что нормальная модальная логика L удовлетворяет B1 тогда и только тогда, когда соответствующее многообразие V(L) супeрамальгамируемо, поэтому, ввиду теоремы 1а, свойство Бета PB1 также эквивалентно свойству SAP суперамальгамируемости соответствующего многообразия. Свойство IPD эквивалентно амальгамируемости AP [2] (для нормальных расширений логики S4 результат был доказан ранее в [7]).

Напомним, что класс K называется *амальгамируемым*, если он удовлетворяет для любых алгебр **A**, **B**, **C** из K условию

(AP) для любых мономорфизмов α: $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$, β: $\mathbf{A}\to\mathbf{C}$ существуют такие алгебра **D** из K и мономорфизмы γ: $\mathbf{B}\to\mathbf{D}$, δ: $\mathbf{C}\to\mathbf{D}$, что $\gamma\alpha=\delta\beta$.

Если, кроме этого, выполняется $\gamma(\mathbf{B})\cap\delta(\mathbf{C})=\gamma\alpha(\mathbf{A})$, то класс K называется *сильно амальгамируемым* (т.е. обладает свойством StrAP). Наконец, класс K называется *сверхамальгамируемым* (обладает SAP), если для любых алгебр **A**, **B**, **C** из K выполняется условие AP, причем для любых $x\in\mathbf{B}$, $y\in\mathbf{C}$ имеют место эквивалентности:

$\gamma(x)\leq\delta(y)\Leftrightarrow(\exists z\in\mathbf{A})(x\leq\alpha(z)\&\beta(z)\leq y)$,

$\gamma(x)\geq\delta(y)\Leftrightarrow(\exists z\in\mathbf{A})(x\geq\alpha(z)\&\beta(z)\geq y)$.

Как показал И.Немети ([3], теорема 5.6.10), в общем случае свойство B2 (вернее, его аналог для многообразий) эквивалентно следующему свойству:

RES: Пусть **A**, $\mathbf{B}\in V$ и h — гомоморфизм из **A** в **B**, где **B** порождается множеством $h(\mathbf{A})\cup\{a\}$ для некоторого a. Если для любых гомоморфизмов k, l из **B** в **C** из V выполняется $kh = lh\Rightarrow k=l$, то $h(\mathbf{A})=\mathbf{B}$.

В [9], [10] было доказано, что для многообразий модальных алгебр свойство B2 также эквивалентно каждому из свойств ES* и ES**, определенных следующим образом:

ES*: Для любых **A**, **B** из V(L), для любого мономорфизма $\alpha:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ и для любого $x\in\mathbf{B}$ — $\alpha(\mathbf{A})$ такого, что $\{x\}\cup\alpha(\mathbf{A})$ порождает B, существуют $\mathbf{C}\in V(L)$ и мономорфизмы β: $\mathbf{B}\to\mathbf{C}$, γ: $\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ такие, что $\beta\alpha=\gamma\alpha$ и $\beta(x)\neq\gamma(x)$.

Мы получим ES**, заменяя «мономорфизм α» на «гомоморфизм α».

Теперь рассмотрим более сильное свойство.

(SES) Для любых **A**, **B** из V(L), для любого мономорфизма α: $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ и для любого $x\in\mathbf{B} - \alpha(\mathbf{A})$ существуют $\mathbf{C}\in V$ и мономорфизмы β: $\mathbf{B}\to\mathbf{C}$, γ: $\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ такие, что $\beta\alpha=\gamma\alpha$ и $\beta(x)\neq\gamma(x)$.

Отметим, что, заменяя любое вхождение слова «мономорфизм» (или оба вхождения сразу) словом «гомоморфизм», мы получим условие, эквивалентное SES.

Теорема 4. Пусть L — нормальная модальная логика. Тогда L обладает свойством Бета PB2 тогда и только тогда, когда V(L) обладает свойством SES.

Учитывая приведенные выше соотношения, а также результаты из [7], [8], мы можем заключить следующее.

1. В семействе всех нормальных модальных логик свойство PB1 эквивалентно B1 и сверхамальгамируемости соответствующего многообразия, причем сверхамальгамируемость влечет сильную амальгамируемость, но обратное, вообще говоря, неверно. Далее, сильная амальгамируемость многообразия модальных алгебр влечет свойство SES, равносильное свойству PB2 для соответствующей логики. Свойство SES сильнее, чем ES*, RES и B2, а ES* и, тем более, SES не вытекают из AP. Было бы интересно узнать, равносильны ли PB2 и StrAP?

2. Каждое нормальное расширение логики K4 обладает свойством B2, а многообразие транзитивных алгебр — свойством ES*, поэтому амальгамируемость такого многообразия эквивалентна сильной амальгамируемости и влечет SES.

3. Ввиду теоремы 1a, число нормальных модальных логик, содержащих логику S4 и обладающих свойством PB1, конечно, так как конечно число таких логик с CIP [7]. Мы не знаем, каково число нормальных расширений логики S4 со свойством PB2 и многообразий топобулевых алгебр со свойством SES.

4. Для любого многообразия е-алгебр все свойства SAP, SupAP, AP, SES эквивалентны. Существуют точно четыре многообразия е-алгебр с этими свойствами.

3. Суперинтуиционистские логики

В суперинтуиционистских (с.и.) логиках, вследствие теоремы дедукции, PB1 эквивалентно PB2, B1 эквивалентно B2, и CIP эквивалентно IPD. Каждая обладает свойством Бета B1, но только восемь с.и. логик имеют CIP [4]. Стандартным способом можно вывести свойство Бета PB1 из свойства Крейга CIP, а B1 есть частный случай PB1.

Далее, L обладает интерполяционным свойством CIP в том и только в том случае, когда многообразие V(L) псевдобулевых алгебр амальгамируемо, и для любого многообразия псевдобулевых алгебр свойства AP, StrAP и SAP равносильны [6]. Можно доказать аналог теоремы 4, то есть равносильность PB2 (а значит, и PB1) и SES для с.и. логик. Ясно, что StrAP влечет PB2, но неясно, следует ли AP из PB2. Как и в случае модальных логик, можно показать, что с.и. логика обладает свойством Бета B2 тогда и только тогда, когда V(L) обладает свойством ES*. Как следствие, все многообразия псевдобулевых алгебр обладают свойством ES*. Проблема, сколько обладают свойством Бета PB2, остается пока открытой.

4. Релевантные логики

Для релевантных логик можно определить свойства Бета и интерполяционные свойства так же, как и для модальных логик. Однако для того, чтобы стандартным способом вывести PB1 из CIP в релевантном исчислении R и его расширениях, нам требуется, чтобы в языке присутствовала интенсиональная конъюнкция (которая, впрочем, может быть определена в R равенством $A^\circ B = \neg(A \to \neg B)$). В этом случае переопределим свойства Бета PB1 и B1.

Говорим, что логика L обладает свойством PB1', если из $\vdash_L A(\mathbf{x},\mathbf{q},y)^\circ A(\mathbf{x},\mathbf{q}',z) \to (y \leftrightarrow z)$ следует $\vdash_L A(\mathbf{x},\mathbf{q},y) \to (y \leftrightarrow B(\mathbf{x}))$ для некоторой формулы $B(\mathbf{x})$; L обладает свойством B1', если из $\vdash_L A(\mathbf{x},y)^\circ A(\mathbf{x},z) \to (y \leftrightarrow z)$ следует $\vdash_L A(\mathbf{x},y) \to (y \leftrightarrow B(\mathbf{x}))$ для подходящей формулы $B(\mathbf{x})$.

Тогда PB1' выводится из CIP, а также из PB1, а B1' следует из B1 в логиках, содержащих R. Мы не знаем, следует ли PB1 из PB1', а CIP из PB1' или из PB1 в расширениях логики R. Далее, для вывода IPD из CIP, а также PB2 из PB1' в расширениях логики R, нужно предположить, что в языке присутствует пропозициональная константа *t* («самая сильная истина»). Тогда в расширениях R справедлива следующая

Теорема о дедукции. Если Г, А $\vdash_L$ В, то Г $\vdash_L$ $A\&t\to B$, и требуемые выводы получаются легко. Все вышесказанное справедливо и для позитивного фрагмента логики R, и даже для фрагмента, в языке которого есть лишь $\circ$, $\to$, & и *t*.

Что касается взаимосвязей между интерполяционными свойствами и свойствами Бета в более широком семействе расширений релевантной логики Е, то картина неясная. Например, стандартный вывод PB1' из CIP, который годится для R, не подходит для релевантной логики Е. Также непонятно, выводится ли PB2 из PB1', хотя легко вывести PB2 из PB1, а также B2 из B1, используя теорему дедукции в Е [5]:

Если Г, А $\vdash$ В, $p_1, \ldots, p_n$ — все переменные из Г, А, В и все формулы из А имеют импликацию в качестве главной связки, то Г $\vdash$ $A\&\mathbf{p}\to B$, где $\mathbf{p}=(p_1\to p_1)\&\ldots\&(p_n\to p_n)$.

Заметим, что интерполяционное свойство выполняется в расширении RM логики R в присутствии константы *t* [14] и опровергается, если *t* отсутствует [1]. Добавим, что Уркхарт [16] доказал отсутствие интерполяционного свойства CIP и свойства B2 в Е и R (при этом безразлично, присутствует константа *t* или нет). Напротив, McRobbie [14] утверждает, что выполняется интерполяционное свойство CIP для квантифицированной логики ORQ, основанной на системе OR, полученной из R удалением аксиомы дистрибутивности; эта система близка к системе RAO из [15].

В [16] доказано также отсутствие амальгамируемости для многих многообразий решеточно упорядоченных моноидов, в том числе для класса R-алгебр, дающих адекватную семантику для логики R. Под R-алгеброй мы понимаем алгебру (A, &, V, $\to$, $\circ$, *t*, *f*), которая является дистрибутивно решеточно упорядоченным моноидом с решеточными операциями &, V, коммутативным умножением # и единицей *t*; кроме того, выполняются условия $t\to x = x$, $x\leq x\circ x$, $f\to f = t$, $(x\to f)\to f = x$ и

$x\leq y\to z\Leftrightarrow x\circ y\leq z$.

Из результатов статьи [2] можно вывести, что амальгамируемость любого многообразия R-алгебр равносильна интерполяционному свойству IPD для соответствующей логики. Свойство CIP для любого расширения логики R (сформулированной с константой *t*) равносильно суперамальгамируемости соответствующего многообразия R-алгебр [12]. Теорема 4 об эквивалентности SES и PB2, а также равносильность ES* и B2, имеют место и для расширений логики R. Эти соотношения остаются справедливыми, если отказаться от аксиомы дистрибутивности или ограничиться языком с $\rightarrow$, $^\circ$, & и t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderson A.R., Belnap N.D.* Entailment. Vol. I. New Jersey: Princeton Univ. Press. 1975.
2. *Czelakowski J.* Logical matrices and the amalgamation property // Studia Logica. 1982. 41. № 4. P. 329-341.
3. *Henkin L., Monk J.D., Tarski A.* Cylindric Algebras, Part II. Amsterdam: North-Holland, 1985.
4. *Kreisel G.* Explicit definability in intuitionistic logic // J. Symbolic Logic. 1960. № 25. P. 389-390.
5. *Максимова Л.Л.* Формальные выводы в исчислении строгой импликации // Алгебра и логика. 1966. 5. № 6. С. 33-30.
6. *Максимова Л.Л.* Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1977. 16. № 6. С. 643-681.
7. *Максимова Л.Л.* Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1979. 18. № 5. С. 556-586.
8. *Максимова Л.Л.* Интерполяционные теоремы в модальных логиках. Достаточные условия. // Алгебра и логика. 18. N 2. 1980, С. 194-213.
9. *Максимова Л.Л.* Свойства Бета, интерполяция и амальгамируемость в многообразиях модальных алгебр // Доклады АН СССР. 1991. 319. № 6. С. 1309-1312.
10. *Максимова Л.Л.* Модальные логики и многообразия модальных алгебр свойства Бета, интерполяция и амальгамируемость // Алгебра и логика. 1992. 31. № 2. С. 145-166.
11. *Максимова Л.Л.* Аналог теоремы Бета в нормальных расширениях модальной логики K4 // Сибирский мат. журнал. 1992. 33. № 6. С. 118-130.
12. *Maksimova L.* An algebraic approach to interpolation in relevant logics (Abstract) // J. Symbolic Logic. 1993. 58. № 4. P. 1483.
13. *McRobbie M.A.* Interpolation theorems for some first-order distribution-free relevant logics (Abstract) // J. Symbolic Logic. 1983. № 48. P. 522-523.
14. *Meyer R.K.* Relevantly interpolation in RM. Research paper No. 9, Logic Group, Dept. of Philosophy, R.S.S.S., Australian National Univ., 1980.
15. *Смирнов В.А.* Формальный вывод, теоремы дедукции и теория импликации // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 54-68.
16. *Urquhart A.* Failure of interpolation in relevant logics // J. Philos. Logic. 1993. № 22. P. 449-479.

Непейвода Н.Н.

НЕПОЛНЫЕ СТРУКТУРЫ ВЫВОДОВ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ[1]

Abstract. *Structures resulting from omitting some formulas from proof graphs are considered. The following results are stated.*

The problem whether graph with omitted formulas can be reconstructed up to proof is decidable but hard. It remains very hard if axioms are preserved. It becomes simple if are omitted only formulas corresponding (in constructive logics) to procedures but descriptions of their arguments and results are preserved. Vice versa arguments and results can be omitted if procedures are present.

Results are proved for intuitionistic and nilpotent logics, very divergent by their proof structures.

Some relations with re-engineering problems and CASE technologies are stated.

Введение

Логический вывод является достаточно избыточной структурой и поэтому интересны исследования неполных конструкций, образующихся опусканием части информации из выводов. В.А. Смирнов одним из первых начал систематически исследовать незавершенные выводы. В данной работе обращается внимание на другой род неполных доказательных структур, тесно связанных с незавершенными выводами — *скелеты выводов*, в которых логические зависимости между формулами и структура вывода сохраняются практически полностью, а конкретные формулы могут опускаться полностью либо частично.

Как давно известно, логический вывод является крайне избыточным объектом. Поэтому опускание значительной части информации, тем не менее, позволяет восстановить его. С прикладной точки зрения, важна не только возможность восстановить вывод, но и сложность задачи восстановления.

Частичные структуры доказательств важны в нескольких отношениях.

Во-первых, они важны для полуавтоматической проверки доказательств, создаваемых человеком, в частности, при обучении. Нельзя заставлять человека расписывать доказательство до элементарных шагов, за исключением обучения самому понятию формального вывода в логике. Поэтому человек должен описать

---

[1] Работа частично поддержана Минвузом России: тема ''Логические операторы''. Новосибирский грантовый центр, 1996.

скелет вывода, а программа — проверить возможность пополнения данного скелета до вывода.

Во-вторых, они важны для теоретического исследования и модификаций самого понятия логического вывода. Проверка, насколько устойчиво понятие вывода к опусканию фрагментов, позволяет тоньше исследовать формально эквивалентные системы. Ведь слишком часто формальная эквивалентность не означает применимости в одних и тех же областях. Смотри, например, гильбертовский и естественный выводы.

В-третьих, это важно для исследования соотношений между доказательствами и получаемыми из них конструкциями, в частности, между конструктивными доказательствами и программами.

Программу можно рассматривать как результат выделения действующих частей в конструктивном математическом рассуждении. Известно, что при этом между конструкциями и структурами доказательства и извлекаемой из него программой имеются тесные соответствия. Но конструктивная логика меняется при изменении класса рассматриваемых задач. Сейчас известны, по крайней мере, четыре класса конструктивных логик: интуиционистская (включающая в себя как подслучаи и известные случаи применения классической логики как конструктивной), линейная, нильпотентная и когерентная. Тем не менее, соотношения между доказательствами и программами практически сохраняются во всех известных случаях. Правда, для этого приходится тщательно проработать конкретную формулировку понятия логического вывода в конструктивной логике и, в частности, не удовлетворяться эвфемизмами, пригодными для чисто теоретических работ типа: вывод есть последовательность формул, а явно выделить графовую структуру информационной зависимости формул в выводе.

В данной работе все приведенные утверждения проверяются для двух крайних случаев — интуиционистского и нильпотентного. Перенос на линейный и когерентный случаи, как нам видится, более или менее техническая задача.

1. Выводы как графы

Традиционно понятие исчисления считается одним из ведущих в математике. Также традиционно содержательное понятие исчисления — способ порождения объектов — неправомерно зауживается в математической формализации. Рассматриваются либо линейные последовательности преобразований (на самом деле представляющие собой сети зависимостей), либо деревья.

Представление вывода как графа было использовано во многих работах, но в традицию не вошло. Оно имеет те преимущества, что заставляет нас явно формулировать многие структурные условия и даже правила, неявно протаскиваемые в традиционных формулировках. Далее, как в нильпотентных логиках, мы можем использовать выводы не только в форме сетей, но и в форме графов с циклами.

В данной работе используется следующее представление выводов в форме оснащенных ориентированных графов. Вершины и ребра этого графа помечены их типами. Помимо этого, некоторым типам вершин может быть сопоставлена дополнительная информация: их *содержание*.

1) Вершины графа делятся на три класса в соответствии с их типами:
   a) *Информационные* (в них стоят преобразуемые в выводе объекты, например, формулы или термы). Только информационные вершины могут иметь содержание.
   b) *Структурные*, задающие структуру вывода (например, структурными вершинами могут представляться подвыводы в естественном выводе, временные слои в темпоральных логиках и т.п.). Ребра могут идти в структурные вершины лишь из структурных вершин, а из структурных вершин они могут вести также и в информационные вершины. Ребра, ведущие из структурных вершин в структурные, называются *структурными ребрами*. Подграф, составленный из структурных вершин и ребер, называется *общей структурой* вывода.
   c) *Правила*, связывающие между собой преобразуемые объекты. Ребра, выходящие из правил, заканчиваются в информационных вершинах. Как говорят, данные вершины порождаются правилами. Ребра, ведущие в правило, могут начинаться и в информационных, и в структурных вершинах. Как говорят, данные вершины *используются* правилом.
2) Задается для каждого правила локальный (т. е. рассматривающий лишь некоторую окрестность в графе) алгоритм проверки является ли данное вхождение правила в вывод корректным. Обычно данный алгоритм описывается в виде подграфа, окружающего применение правила.
3) Задается глобальный алгоритм проверки корректности общей структуры вывода, использующий лишь типы информационных вершин, но не пользующийся конкретной информацией, стоящей в этих вершинах. Обычно такой алгоритм описывается в виде серии алгоритмически проверяемых требований на граф вывода, например, что в каждом цикле должно встречаться некоторое правило.

Из этих требований мы выделим три практически универсальных:

a) Каждая информационная вершина порождается не более чем одним правилом вывода[2].
b) Каждая информационная вершина используется не более чем одним правилом вывода.
c) Общая структура вывода представляет собой дерево (таким образом, вывод имеет блочную структуру).

Мы рассмотрим в качестве примеров выводов в форме графов представления систем естественного вывода для двух конструктивных логик: интуиционистской и нильпотентной логики первого порядка (общие определения см. [1]).

Естественный вывод отличается тем, что в нем имеются структурные вершины *подвыводов*, образующие поддерево общей структуры вывода. Имеется два особых типа подчиняющих ребер, ведущих из подвыводов: *допущение* и *результат*. Все информационные вершины, кроме допущений, обязаны порождаться правилами вывода. Корень дерева подвыводов является и корнем общей структуры вывода и называется *главный вывод*. Он не содержит допущений, а его результат является доказанной теоремой. Все остальные подвыводы вводятся для какой-то цели и поэтому должны использоваться правилами.

2. Нильпотентная логика

В нильпотентной логике имеются следующие связки: классические логические связки $\supset \wedge \vee \neg$ и конструктивная импликация $\Rightarrow$ Конструктивная импликация применяется лишь к классическим формулам, так что итераций конструктивной импликации нет. Соответственно, информационные вершины делятся на два типа: классические и конструктивные. Классические могут содержать лишь классические формулы, конструктивные — и конструктивные, и классические. Содержательно классические вершины понимаются как утверждения, истинные в любом состоянии, а конструктивные с классическими формулами — как утверждения, которые должны быть истинны в данный момент исполнения.

Классические вершины помечаются символом + , конструктивные — *.

Аксиомы нашей теории задают конструктивные импликации, которые соответствуют некоторому набору исходных действий и понимаются как пары ‘‘предусловие — постусловие’’.

---

[2] Кажется, что это требование должно было бы звучать ‘*ровно одним*’, но имеются важные исключения. Допущения правилами не порождаются.

Правила вывода следующие[3]:

Правило тавтологии:

$$\frac{}{+T}$$

Правило аксиомы:

$$\frac{}{+A} \qquad \frac{}{*\,A \Rightarrow B}$$

Здесь T — тавтология классической логики, A и $A \Rightarrow B$ — соответственно классическая и конструктивная аксиомы. Эти два правила не имеют посылок.

Правило резолюции:

$$\frac{+A \quad +A \supset B}{+B}$$

Правило применения функции:

$$\frac{*\,A \quad *\,A \Rightarrow B}{*\,B}$$

Еще два правила дают возможность соединять и разъединять ветви в создаваемой программе:

Правило соединения:

$$\frac{*\,A_1 \ldots *\,A_n \quad +A_1 \vee \cdots \vee A_n \supset B}{*\,B}$$

Правило разъединения:

$$\frac{*\,A \quad +A \supset B_1 \vee \cdots \vee B_n}{*\,B_1 \quad \cdots \quad *\,B_n}$$

Следующее правило является правилом косвенного вывода.

Правило дедукции:

$$\frac{\left|\begin{array}{l} *\,A\ (\textit{доп}) \\ \quad\ldots \\ *\,B\ (\textit{рез}) \end{array}\right.}{*\,A \Rightarrow B}$$

Два последних правила имеют дело с невозможными ситуациями.

Правило исключенного застоя:

$$\frac{*\,A \Rightarrow A}{+\neg A}$$

Правило ошибки:

$$\frac{+\neg A}{*\,A \Rightarrow A}$$

---

[3] Мы записываем правила вывода в традиционной форме ввиду технических трудностей использования сложных математических объектов в MS WORD.

В нильпотентной логике глобальные условия на вывод следующие:

1. Внутри каждого цикла в графе вывода имеется правило ППФ.
2. Все классические формулы подчинены главному выводу.
3. Все конструктивные импликации подчинены главному выводу.
4. Все конструктивные формулы, кроме результатов, используются некоторым правилом.

Добавим еще два правила, теоретически не являющиеся необходимыми, но удобные для наших целей.

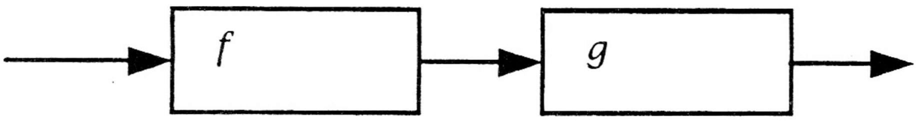
Размножение классических : $\dfrac{+A}{+A \quad +A}$ *Размножение импликаций* : $\dfrac{*A \Rightarrow B}{*A \Rightarrow B \quad *A \Rightarrow B}$

Рассмотрим пример вывода в нильпотентной логике. Пусть аксиомами нашей теории являются $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow C$. Выведем $A \Rightarrow C$.

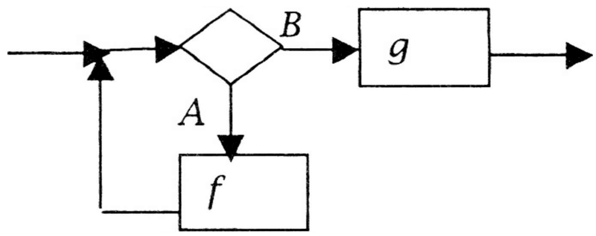
1.	$*A \Rightarrow B$	*Акс*
2.	$*B \Rightarrow C$	*Акс*
3.	$+A \vee B \supset A \vee B$	*Тавт*
4.	$+B \vee B \supset B$	*Тавт*
5.	$*A$	(*Доп*)
6.	$*A \vee B$	*объед* 5, 8.2
7.	$*B \quad *A$	*разъед*
8.	$*C \quad *B$	(*рез*) *из* 2, *из* 1
9.	$*A \Rightarrow C$	*ЧТД*.

Жирным шрифтом выделены номера строк, принадлежащих подвыводу. Этот достаточно традиционный вывод (допустимость правила силлогизма) проведен нетрадиционным путем, законным лишь в нильпотентной логике. Практически мы сначала построили доказательство формулы $A \vee B \Rightarrow B \vee C$, а из нее получили $A \Rightarrow C$. Такое преобразование — сокращение одинаковых дизъюнктивных членов в посылке и заключении импликации — допустимо лишь в нильпотентной логике при предположении конечности всех процессов. Оно является одним из главных ее преимуществ.

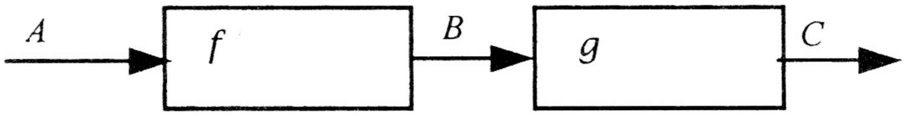
Интересно сравнить программы, получаемые из общего и нильпотентного выводов правила силлогизма. Пусть f — функция, реализующая $A \Rightarrow B$, а g — $B \Rightarrow C$. Тогда из традиционного доказательства получается последовательная композиция:



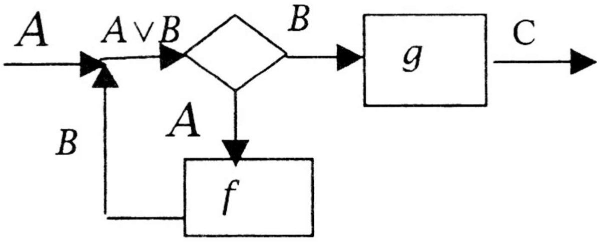
а из нильпотентного — следующая блок-схема:



Как можно видеть, обе они приводят к одним и тем же свойствам результата, но разным путем. Далее, на самом деле из доказательств получаются не просто блок-схемы, а *аннотированные программы*, где каждый переход снабжен условиями, которые в данный момент должны быть выполнены. Аннотированные программы для приведенных выше схем следующие:



и



3. Интуиционистская логика

Мы рассматриваем формализацию интуиционистской логики с несколько более крупноблочными правилами, чем это обычно принято.

В интуиционистской логике применения правил имеют следующий вид.

Правило применения процедуры

$$\begin{array}{c}
A_1(t_1,\ldots,t_k) \\
\cdots \\
A_n(t_1,\ldots,t_k) \\
\forall x_1,\cdots,x_k(A_1(x_1,\ldots,x_k)\,\&\cdots A_n(x_1,\ldots,x_k) \Rightarrow \exists y_1,\ldots,y_m(B_1(\bar{x},\bar{y})\,\&\cdots\&\,B_l(\bar{x},\bar{y}))) \\
\hline
B_1(t_1,\ldots,t_k,c_1,\cdots,c_m) \\
\cdots \\
B_l(t_1,\ldots,t_k,c_1,\cdots,c_m)
\end{array}$$

Правило описания процедуры

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|cc}
A_1(z_1,\ldots,z_k) & (\mathit{Доп}) \\
\cdots & \cdots \\
A_n(z_1,\ldots,z_k) & (\mathit{Доп}) \\
\cdots & \\
B_1(z_1,\ldots,z_k,t_1,\ldots,t_m) & (\mathit{Рез}) \\
\cdots & \cdots \\
B_l(z_1,\ldots,z_k,t_1,\ldots,t_m) & (\mathit{Рез})
\end{array} \\
\hline
\forall x_1,\ldots,x_k(A_1(\bar{x})\,\&\cdots\&\,A_n(\bar{x}) \Rightarrow \exists y_1,\cdots,y_m(B_1(\bar{x},\bar{y})\,\&\cdots\&\,B_l(\bar{x},\bar{y})))
\end{array}$$

В правиле описания процедуры $z_1,\ldots,z_k$ называются *произвольными переменными* соответствующего подвывода.

Правило разбора случаев обобщается до правила, подобного гиперрезолюции

$$\begin{array}{c}
A_1 \vee \cdots A_n \quad
\begin{array}{|ll|ll}
A_1 & (\mathit{доп}) & A_n & (\mathit{доп}) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
B_{i_1} & (\mathit{рез}) & B_{i_n} & (\mathit{рез})
\end{array} \\
\hline
B_1 \vee \cdots \vee B_m
\end{array}$$

Здесь $i_1, \ldots, i_n$ — не обязательно разные числа из интервала [0...n]. B_0 считается ложью[4].

Графовый вывод заставляет выделить еще два, обычно явно не задаваемых, правила: *правило размножения*, дублирующее

[4] Таким образом, в данное правило включаются и правила для отрицания, а само отрицание определяется как $A \Rightarrow F$.

формулу в произвольном числе экземпляров, и *правило передачи информации*, передающее формулу из вывода в подчиненный ему подвывод. В правиле передачи информации формула не должна свободно содержать произвольные переменные подвывода-назначения.

Правила интуиционистской логики сокращенно обозначаем следующим образом: ППП, ПОП, ПРС, ПРм, ППИ.

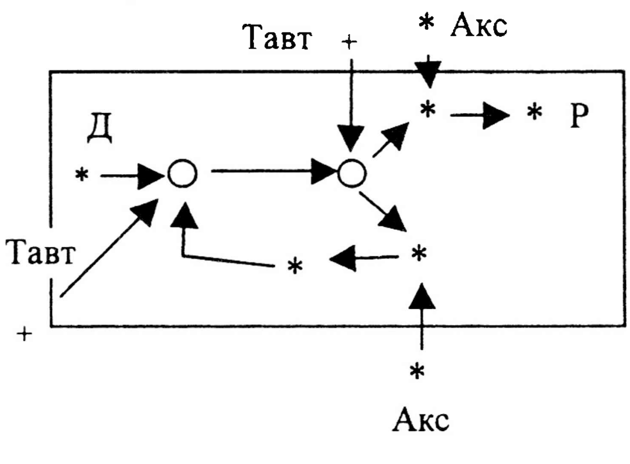
В интуиционистской логике глобальные условия на вывод следующие:

1. Граф вывода не содержит циклов.
2. Каждая вспомогательная константа используется лишь внутри того подвывода, в котором она была введена.

4. Структуры выводов

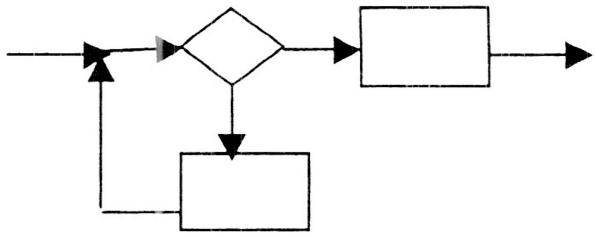
Рассмотрим один из видов частичных структур, пополняемых до выводов. Мы полностью сохраним графовую структуру, но будем частично опускать информацию. Есть и другой род частичных структур, когда информация практически полностью сохраняется, зато в графе вывода опускаются некоторые фрагменты.

Наиболее радикальная операция первого рода — опустить вообще все формулы, оставив лишь структуру логических зависимостей. Такой вид скелета вывода назовем *голой структурой вывода*. В частности, для рассмотренного нами вывода силлогизма получится следующий граф.



Вспомогательный вывод заключен в рамку. Конечно, надо было и его обозначить отдельной вершиной графа и добавить подчиняющие ребра ко всем его формулам, но это слишком перегрузило бы рисунок.

При этом, базируясь на соотношениях между конструктивным доказательством и программой, мы получаем, что операцию извлечения **программы** из доказательства можно проделать практически полностью (особенно если в теории не было функциональных символов, так что получающаяся программа оказывается написанной в функциональном стиле в интуиционистской логике и в языке ассемблера для нильпотентной логики.) В частности, для рассмотренного выше скелета мы получаем следующую схему, которая станет схемой программы после подстановки конкретных операторов и условий.



Таким образом, мы сохраняем схему программы, но теряем назначения (и наименования) отдельных ее частей. Но именно назначения операторов и блоков практически всегда опускаются в тексте программ при традиционной методике программирования, а их наименования часто мало дают для восстановления назначений. Восстановление назначений соответствует задаче *анализа программы*, считающейся одной из труднейших в современном re-engineering.

Чтобы точнее отразить данную задачу, опустим чуть меньше информации и сохраним аксиомы. Полученный граф назовем *структурой вывода*.

Предложение 1. Структура вывода дает возможность восстановить вывод, но полученная теорема при этом не обязательно восстанавливается однозначно.

Доказательство. Идея. Проводим процесс поиска унифицирующей подстановки предикатных переменных, начиная от предикатов, задействованных в аксиомах. Затем предикатная подстановка перепроверяется глобальной унификацией предметных переменных.

Реализация. Для нильпотентной логики. Для всех применений ППФ, главными посылками которых являются процедуры, однозначно восстанавливаем конструктивную посылку и заключение. Далее подставим формулы, возможно, содержащие пропозициональные переменные, следующим образом.

Посылкам и заключениям правил соединения и разветвления, которым ничто не сопоставлено, сопоставляем различные пропозициональные переменные. Классические посылки данных правил тогда определяются однозначно. Заключениям правил порождения тавтологии, которые после этого не определились однозначно, сопоставляем новые пропозициональные переменные.

Далее находим подстановку вместо пропозициональных переменных следующим образом. Если посылка правила разъединения является переменной, делаем ее дизъюнкцией конструктивных заключений. Если заключение правила соединения является переменной, делаем его дизъюнкцией конструктивных посылок.

Данный процесс неоднозначен, например, в следующем фрагменте вывода.

$$\dfrac{\dfrac{*p_1 \cdots *p_n \quad +p_1 \vee \cdots \vee p_n \supset q}{*q \quad +q \supset r_1 \vee \cdots \vee r_m}}{*r_1 \cdots *r_m}$$

q может быть сделано и дизъюнкцией p, и дизъюнкцией r. Но эта неоднозначность роли не играет. Процесс продолжается до тех пор, пока есть возможность устранять переменные.

Для интуиционистской логики. Тут в выводе нет циклов, и поэтому процесс организуется за два прохода. На первом проходе — вперед — расставляются все предикаты и термы, которые могут быть однозначно определены из аксиом, остальные заменяются на новые предикатные и свободные предметные переменные. На втором проходе — назад — производится унификация предикатных и предметных переменных.

Оставшиеся переменные, за исключением тех, которые в нильпотентной логике были заключениями правила порождения тавтологий, могут быть заменены любыми формулами. В нильпотентной логике заключения ППТ заменяются лишь тавтологиями.

Конец доказательства.

Из анализа алгоритма, применяющегося при доказательстве предыдущего предложения, видно, что все возможные неоднозначности могут быть выражены свободными предикатными переменными. Но если мы желаем, чтобы подстановка вместо них была неограниченной, то может возникнуть конечное число таких выражений.

Предложение 2. Если теория не содержит схем аксиом, множество ее аксиом и сигнатура конечны, то по голой структуре вывода можно восстановить все возможные теоремы с точностью до подстановки конкретных выражений вместо свободных предикатов.

Доказательство. Предыдущее доказательство модифицируется следующим образом. Вначале все формулы заменяются различными пропозициональными переменными. Затем производится процесс, как в предыдущем предложении, включая в унификацию и аксиомы. Затем перебираются все возможные подстановки аксиом в правила порождения аксиом, унифицирующиеся с заключениями этих правил, и для каждой такой подстановки проводится предыдущий процесс. Если унификация оказалась возможной, мы получаем схему теорем. Каждая теорема соответствует некоторой подстановке аксиом вместо заключений правил порождения аксиом.

Конец доказательства.

Предложение 3. Сложность задачи такого восстановления суперэкспоненциальна.

Достаточно заметить, что поиск вывода в монадическом исчислении предикатов выражается как одна из задач восстановления вывода по структуре.

Значит, и действительно, анализ программ — объективно трудная задача.

На практике действуют два фактора, один из которых облегчает задачу анализа программ, а второй — усложняет ее. Чаще всего программы пишутся не в функциональном стиле, и, слава Богу, имеется исходный текст не на языке ассемблера, а написанный в терминах некоторой библиотеки подпрограмм. В нашей формализации библиотечные программы соответствуют аксиомам, так что можно считать в выводе заданной несколько большую информацию: даны все аксиомы. Заметим, что отождествление стандартных программ с аксиомами, как и всякая математическая формализация, содержит заметный элемент упрощения. Она соответствует предположению о том, что назначение (пред- и постусловие) каждой подпрограммы фиксированы, т.е. что каждая подпрограмма используется для одной и только одной цели. На практике слишком часто это не так...

Воспользуемся нашими результатами как источником еще одной аналогии. В интуиционистском случае задача анализа программы может быть проделана за два прохода по графу вывода, если вывод находится в нормальной форме [2], все его вершины зависят от аксиом и теорема зависит от них. Содержательно наличие не зависящих от аксиом либо неиспользуемых вершин означает наличие в программе необязательных блоков либо переусложнений. Итак, лучше всего анализируется умеренно оптимизированная программа. Наличие же в ней процедур может *усложнить* задачу анализа. Таким образом, не всякое разбиение на модули является признаком хорошего стиля мышления и структурного программирования.

Второй фактор связан с тем, что в конструктивном доказательстве не все части имеют прямое отображение в программе. Доказательство того, что получившиеся на некотором этапе данные удовлетворяют предусловию применяемой процедуры, может быть сложнее всей программы. Далее, частым и весьма коварным случаем опускания части доказательства является применение приведения к абсурду для отбрасывания лишних случаев и построения соответствующей системы охраняемых команд либо условных операторов. Естественно, при анализе программы может встать задача восстановить опущенные обоснования, и, таким образом, задача анализа перекликается с задачей верификации программы.

Имеются два важных вида таких структур, для которых проблема восстановления вывода решается за линейное время. В одной опускаются главные посылки правил, а в другой, наоборот — побочные. Рассмотрим данный вопрос точнее.

Граф, получающийся опусканием во всех правилах удаления импликации и разбора случаев всех главных посылок, называется *типизированным скелетом* вывода, а граф, получающийся опусканием в этих правилах побочных посылок в правиле удаления импликации и допущений отдельных случаев в правиле разбора случаев — *функциональным скелетом.*

Предложение 4. Задача восстановления вывода по типизированному скелету разрешима за один проход по графу вывода.

Опять-таки берем процесс из Предложения 1, но теперь он заканчивается за один проход.

Предложение 5. Задача восстановления вывода по функциональному скелету разрешима за два прохода по графу.

В самом деле, в обобщенном правиле удаления импликации

$$\frac{A(t,r) \quad \forall x(A(x,r) \Rightarrow \exists y B(x,r,y))}{B(t,r,c)}$$

при опускании побочных посылок предикатная структура опущенных формул восстанавливается полностью, а для восстановления термов достаточно провести глобальную унификацию по графу вывода. Если же опустить главные посылки, то на первом проходе, исходя из известной теоремы и имеющихся аксиом, восстанавливаются предикаты, а на втором — термы.

Правило разбора случаев рассматривается аналогично.

Обратим внимание на соотношение двух рассмотренных выше типов скелетов выводов с программированием от функций и программированием от данных. Для восстановления хорошо специфицированной программы достаточно иметь либо поток данных, либо структуру применяемых функций. Вторая компонента программы в этом случае достраивается чисто механически, что и происходит, например, в CASE-технологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Непейвода Н. Н.* Выводы в форме графов // Семиотика и информатика. 1985. Вып. 26.
2. *Prawitz D.* Natural deduction. Stockholm, 1965.

D. Batens

DYNAMIC SEMANTICS APPLIED TO INCONSISTENCY-ADAPTIVE LOGICS[1]

Абстракт. *Статья содержит обсуждение проблемы (и ее решение) семантической характеризации динамики противоречиво-адаптивной логики (см., напр., [2]–[7], [9], [11] и [14]). Решение предложено в терминах так называемого метода блоков. Подобный подход может найти применение не только в адаптивной логике и позволяет охватить некоторые аспекты логики (умозаключений, языка), не рассматриваемые с помощью традиционных логических методов (см. [6]). По этой причине данная статья представляет интерес для логиков, непосредственно не занимающихся адаптивной логикой.*

1. Aim of this paper

The present paper contains a discussion of a problem (and its solution) in inconsistency-adaptive logics–see, *e.g.*, [2]–[7], [9], [11] and [14]. The solution proceeds in terms of a specific method: the block approach. This approach may be applied outside the domain of adaptive logics and enables one to tackle several aspects of logic (and reasoning and language) that are beyond the reach of the traditional logician's tools–see [6]. For this reason, the present paper might also be interesting for logicians that are not directly interested in adaptive logics.

When a body of knowledge turns out to contain an inconsistency, we shall try to emend it in such a way that it becomes consistent. Except for some border cases, this emendation requires that we *reason* from the inconsistent body in order to locate the logical abnormality and in order to find out which elements should be removed or replaced. Such reasoning presupposes that we interpret the inconsistent body of knowledge as consistently as possible. Inconsistency-adaptive logics offer such an interpretation.

These logics have dynamic as well as static aspects. Their proof theory is dynamic: the *stage* of a proof determines which formulas are derivable; formulas derivable at some stage may become underivable at a later stage, and *vice versa*. As several proofs may be constructed from the same set of premises, derivability at a stage is to some extent indeterministic. In contrast, the stage-independent *final derivability* relation is static and deterministic. It refers (in a precise way) to a stage at which dynamics has come to an end.

---

[1] Research for this paper was supported by subventions from the Fund for Scientific Research – Flanders, and indirectly by the INTAS-RFBR contract 95-365.

On the one hand, final derivability answers a logical demand. Without such static and deterministic relation, the system could hardly be called a logic. On the other hand, the dynamics at the proof theoretic level links inconsistency-adaptive logics to natural reasoning and argumentation. While analyzing a set of premises, we form a provisional idea of their meaning and consequences. Sometimes, we have to act on such provisional insights, or we decide that it is better not to invest energy in further analyzing the premises. And of course, we may be forced later to revise our conclusions. It is precisely the combination of, on the one hand, a sensible dynamics with, on the other hand, strict determinism (both in the long run and at the abstract meta-level), that constitutes the attractiveness of adaptive logics (and of other sensible non-monotonic procedures).

The usual semantic systems for adaptive logics are static, and their semantic consequence relation corresponds to final derivability. Given the importance of semantics for our understanding of logical systems, this situation is rather unsatisfactory. If the dynamics is genuine, we want and should be able to characterize it semantically. Such a characterization will moreover further our understanding of the dynamics, and, more likely than not, it will enable us to devise efficient proof search procedures.

In the present paper, I present a semantic characterization of the dynamics of some adaptive logics in terms of a block semantics. I shall describe two important inconsistency-adaptive logics, apply the block approach to them, present the central results, and list some open problems.

2. The inconsistency-adaptive logics ACLuN1 and ACLuN2

The language schema, L, is as for Classical Logic. S, C, V, P^r, F, and W are the sets of, respectively, sentential letters, and letters for constants, variables, predicates of rank *r*, formulas and wffs. The adaptive logics are based on the (monotonic) paraconsistent logic **CLuN**[2]. This system is full positive **CL** (Classical Logic) together with $A \vee {\sim}A$. This characterization should be taken strictly. Thus, the Substitutivity of Identity is restricted as follows:

A=2 $\quad \alpha=\beta\supset(A\supset B)$ where B is obtained by replacing in A an occurrence of α *that occurs outside the scope of a negation* by β

This restriction (which may be easily removed if one prefers so) agrees

[2] The propositional version of this logic, **PI**, was first presented in [1], the predicative version, **PIL**, in [5]. In view of results on logics that are adaptive with respect to abnormalities other than inconsistencies, the systems **PIL**, **APIL1**, etc. have been renamed to **CLuN**, **ACLuN1**, etc. **CLuN** is obtained from **CL** by allowing for gl*u*ts with respect to *n*egation.

with a general characteristics of **CLuN**: complex formulas of the form $\sim A$ are not logically related to proper subformulas of A or to negations of such subformulas. There are obviously many stronger paraconsistent extensions of positive **CL**. It turns out however, that the weakness of **CLuN** constitutes an advantage for the adaptive logics based on it—see, e.g., [3].

The semantics for **CLuN** is most easily formulated by extending L into a pseudo-language schema L^+, obtained by extending L with a (possibly uncountable) set of pseudo-constants O. The cardinality of O should not be smaller than that of the largest models one wants to consider[3]. Let W^+ denote the set of wffs of L^+ (in which $C\cup O$ plays the role played by C in the original language schema) and let $W^{\sim+}$ be the set of wffs of the form $\sim A$. A model $M = \langle D, v\rangle$, in which D is a set and v is an assignment function, forms an interpretation of W^+, and hence also of W, the wffs of the original language-schema, which is what we are interested in.

The assignment function v is defined by:

C1.1 $v : S \to \{0, 1\}$

C1.2 $v : C\cup O \to D$

C1.3 $v : P^r \to \wp(D^r)$ (the power set of the r-th Cartesian product of D)

C1.4 $v : W^{\sim+} \to \{0, 1\}$

We define equivalence classes $[\alpha]_M = \{\beta \in C\cup O \mid v(\alpha) = v(\beta);\ v(\sim A(\alpha)) = v(\sim A(\beta))\}$[4]. M will be called *regular* iff (i) $D = \{v(\alpha) \mid \alpha \in O\}$ and (ii) for any $\alpha \in C$, some $\beta \in O$ is such that $\beta \in [\alpha]_M$. Henceforth, I only consider regular **CLuN**-models. The valuation function v_M determined by the model M is defined as follows:

C2.1 $v_M : W^+ \to \{0, 1\}$

C2.2 where $A \in S$, $v_M(A) = v(A)$

C2.3 $v_M(\pi^r\alpha_1\ldots\alpha_r) = 1$ iff $\langle v(\alpha_1), \ldots, v(\alpha_r)\rangle \in v(\pi^r)$

C2.4 $v_M(\alpha=\beta) = 1$ iff $v(\alpha) = v(\beta)$

C2.5 $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$ or $v(\sim A) = 1$

C2.6 $v_M(A\supset B) = 1$ iff $v_M(A) = 0$ or $v_M(B) = 1$

C2.7 $v_M(A\&B) = 1$ iff $v_M(A) = 1$ and $v_M(B) = 1$

C2.8 $v_M(A\vee B) = 1$ iff $v_M(A) = 1$ or $v_M(B) = 1$

C2.9 $v_M(A\equiv B) = 1$ iff $v_M(A) = v_M(B)$

C2.10 $v_M((\forall\alpha)A(\alpha)) = 1$ iff $v_M(A(\beta)) = 1$ for all $\beta \in O$

---

3 One should not object to L^+. If one restricts the semantics to countable models, L^+ is simply a (countable) language schema. If, however, one allows for uncountable models, one needs a way to talk about these in the semantic meta-language, and doing so in terms of L^+ is just as good as any other way to do so.

4 While $v(\alpha) = v(\beta)$ warrants that $v_M(A(\alpha)) = v_M(A(\beta))$ whenever x does *not* occur within the scope of a negation in $A(x)$, $[\alpha]_M = [\beta]_M$ warrants that $v_M(A(\alpha)) = v_M(A(\beta))$ for *all* $A(x)$.

C2.11 $v_M((\exists\alpha)A(\alpha)) = 1$ iff $v_M(A(\beta)) = 1$ for at least one $\beta \in O$

Truth in a model, semantic consequence and validity are defined as usual[5]. The Soundness and Completeness of **CLuN** with respect to the semantics is proved in a pretty standard way[6], and the same obtains for The Deduction Theorem, Compactness (for $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}} A$ and $\vdash_{\mathbf{CLuN}} A$) and Interpolation.

An important theorem (see [5] for the proof) to which I shall have to refer later is:

THEOREM. $\vdash_{\mathbf{CL}} A$ iff there are $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 0)$ such that $\vdash_{\mathbf{CLuN}}$ $\mathsf{DEK}\{C_1, \ldots, C_n\} \vee A$. (Theorem Adjustment)

In order to base inconsistency-adaptive logics on **CLuN**, one needs a strategy. Intuitively, this is an interpretation of the phrase "as consistently as possible". The oldest such strategy is *reliability*, discovered in 1980 and reported in [3] (the volume took to 1989 to appear). The less cautious *minimal abnormality* strategy, first reported on in [2], was originally confused with the former[7]. I now characterize these strategies and the resulting logics.

As the essential mechanism of inconsistency-adaptive logics turns around existentially quantified disjunctions of contradictions, we need some definitions on them. Let $\exists!A$ abbreviate $(A\&{\sim}A)$, preceded (in some preferred order) by an existential quantifier over each free variable in A. Let $\mathsf{DEK}\{A_1, \ldots, A_n\}$ denote $\exists!A_1 \vee \ldots \vee \exists!A_n$ (in some preferred order)—$A_1, \ldots, A_n$ will be called the *factors* of the DEK-formula. A *minimal* DEK-consequence of Γ is a **CLuN**-consequence[8] of Γ of the form $\exists!A_1 \vee \ldots \vee \exists!A_n$ for which the result of eliminating any disjunct is not a **CLuN**-consequence of Γ—intuitively: the formulas that behave unreliably on Γ. Let $U(\Gamma)$ be the set of the factors of all minimal DEK-consequences of Γ. Where M is a **CLuN**-model, we define $Ab(M)$ as $\{A \mid v_M(\exists!A) = 1\}$—intuitively: the inconsistencies that obtain in M.

Let us first look at the semantics. A **CLuN**-model M of Γ is an **ACLuN1**-model of Γ iff $Ab(M) \subseteq U(\Gamma)$. A **CLuN**-model M of Γ is an **ACLuN2**-model of Γ iff it is a *minimally abnormal* model of Γ, that is, iff no **CLuN**-model M' of Γ is such that $Ab(M') \subset Ab(M)$. Remark that any **ACLuN1**-model of Γ is an **ACLuN2**-model of Γ, but not conversely[9].

---

5 The meta-language is fully classical: some models verify both A and ${\sim}A$, but no model both verifies and falsifies A. This approach is also followed by da Costa and his group—see [8] and [10].

6 The semantics of [5] is less general and does not include pseudo-constants. Adapting the proofs to the present formulation is straightforward.

7 Kristof De Clercq located two further strategies that are even more cautious than reliability—see [9].

8 In view of the Soundness and Completeness Theorems, "consequence" may be read syntactically as well as semantically.

9 Where, *e.g.*, $\Gamma = \{!p \vee !q\}$, $Ab(M) = \{p\}$ for some **ACLuN1**-model M of Γ, and hence, if $Ab(M') = \{p, q\} = U(\Gamma)$, M' is an **ACLuN1**-model but not an **ACLuN2**-model of Γ.

The proof theory of **ACLuN1** and **ACLuN2** is most easily formulated if we introduce a particular format for proofs. The idea is that proofs contain a line number, a formula A, a (finite) list of line numbers (referring to the formulas from which A is derived), a rule (by which A is derived from those formulas), and a (finite) set of formulas (that should 'behave normally' in order for A to be derivable)–this set is called the *condition* on A (for A being derivable in the way it is derived). Proofs proceed by writing conditional and unconditional steps, and by deleting or marking OUT lines of the proof.

The unconditional steps are those that are directly justified by **CLuN**; the condition on the derived wff is the union of the conditions of the formulas from which it is derived. If the condition on A is empty, A is said to be derived unconditionally from Γ, which simply means that $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}} A$. A conditional step leading to the derivation of A from $B_1, \ldots, B_n$ is justified by a **CLuN**-theorem of the form DEK$(\Delta)\vee((B_1\&\ldots\&B_n)\supset A)$; the condition on A is the union of the conditions on $B_1, \ldots, B_n$ *and* of Δ. The Theorem listed above warrants that A is (conditionally or unconditionally) derivable from $B_1, \ldots, B_n$ iff A is a **CL**-consequence of $B_1, \ldots, B_n$.

The motor for the dynamics of inconsistency-adaptive logic proofs is the set of 'minimal' DEK-formulas that occur in it. Let us say that DEK$\{C_1, \ldots, C_m\}$ is a minimal DEK-formula at a stage of a proof iff it occurs unconditionally on a line that is not deleted (nor marked OUT) and if there is no proper subset Δ of $\{C_1, \ldots, C_m\}$ such that DEK(Δ) occurs unconditionally on a non-deleted (nor marked OUT) line of the proof. To facilitate things, let us require that members of $\mathcal{V}$ occur in some *preferred* order in each factor of a minimal DEK-formula in a proof as well as in each condition on a formula[10].

For **ACLuN1**, a line with condition Δ is *deleted* iff some minimal DEK-formula DEK(Θ) in the proof (at that stage) is such that $\Delta\cap\Theta \neq \emptyset$. The minimal abnormality strategy of **ACLuN2**, which is the simplest from a semantic point of view, is slightly more complicated at the proof-theoretic level. Let $*\Phi_s$ be the set of all sets obtained by selecting one element from each minimal DEK-formula that occurs in the proof at stage s, and let Φ_s be the set of the minimal such sets (those $\phi \in *\Phi_s$ for which there is no $\phi' \in *\Phi_s$ such that $\phi' \subset \phi$). Lines containing A and condition Δ are marked IN at stage s if, for each $\phi \in \Phi_s$, some line contains A on condition Δ' and $\phi\cap\Delta' = \emptyset$; if the condition is not met, they are marked OUT. Here is an example of a very simple **ACLuN2**-proof:

1	$!p\vee!q$	Premise	$\emptyset$
2	$!p\vee r$	Premise	$\emptyset$
3	$!q\vee r$	Premise	$\emptyset$

[10] Alternatively, one might reason in terms of equivalence classes, where B belongs to the equivalence class of A iff it can be obtained from A by relettering individual variables (as for Pxa and Pya).

4	r	2; $!A\vee B/B$	$\{p\}$	IN
5	r	3; $!A\vee B/B$	$\{q\}$	IN

At stage 4 (after writing line 4), line 4 is marked OUT. At stage 5, however, lines 4 and 5 are marked IN ($\Phi_4 = \Phi_5 = \{\{p\}, \{q\}\}$. In an **ACLuN1**-proof, both lines 4 and 5 would be deleted as 1 is the only minimal DEK-formula in the proof.

This description of the inconsistency-adaptive logics **ACLuN1** and **ACLuN2**–the shortest one written up to now–should give the reader a feel of (and a possibility to study) the dynamics that is specific for these logics. In **ACLuN1**-proofs lines may be deleted as the proof proceeds, in **ACLuN2**-proofs they may be marked OUT. The dynamics of proofs is connected to final derivability (and hence to the semantic consequence relation) in a way that is rather simple at an abstract level. An extension of a proof from Γ is called *intelligent* iff, whenever $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}}$ DEK(Δ), then, for all non-empty Θ, DEK($\Delta\cup\Theta$) is not unconditionally derived in the extension before DEK(Δ) is unconditionally derived. Where **AL** is either **ACLuN1** or **ACLuN2**, it is provable–see [5]–that $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ iff A is derived from Γ in a proof (at some stage s) and if A is not deleted (or marked OUT) in any intelligent extension of this proof[11]. Moreover, $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ and $\Gamma \models_{\mathbf{AL}} A$ can be proved to be co-extensive[12]. As announced, this leaves us without a semantic analysis of the dynamics typical for inconsistency-adaptive logics.

3. The block approach applied to ACLuN1 and ACLuN2

Intuitively, a block is an unanalyzed formula. An unanalyzed formula may occur at different places in a proof, without being identified. In this case the occurrences are considered as *different* blocks. This is why I shall characterize blocks by a number and a formula, and write them officially as, for example, [14, $(p\&{\sim}q)\supset r$]–in shorthand: $[(p\&{\sim}q)\supset r]^{14}$. Combining blocks by logical symbols and parentheses, we obtain block formulas.

Consider an annotated proof. The block analysis of this proof is determined by the *discriminations* and *identifications* the author of the proof has *minimally* made in the formulas of the proof in order to construct the proof according to the annotation. As any proof can be correctly annotated in at least one way, any proof determines at least one block analysis. An example will clarify the matter–it may be read as a **CL**-proof. I write at once the block analysis:

1	$[p\supset{\sim}q]^2\supset[p\&({\sim}r\vee{\sim}p)]^3$	Premise	$\emptyset$

---

11 Needless to say, this abstract definition does not provide an effective procedure or even a positive test.

12 The intended notion of provability is wider than Hilbert's. Weak compactness (if $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$, then $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} A$ for some finite $\Gamma' \subset \Gamma$) does not obtain, as follows from a counterexample mentioned in [14].

2	$[p\supset\sim q]^2$	Premise	Ø
3	$[p\&(\sim r\vee\sim p)]^3$	1, 2; Modus Ponens	Ø

If the proof is continued by deriving p by Simplification from 3, then the block analysis of the result will read:

1	$[p\supset\sim q]^2\supset([p]^4\&[\sim r\vee\sim p]^5)$	Premise	Ø
2	$[p\supset\sim q]^2$	Premise	Ø
3	$[p]^4\&[\sim r\vee\sim p]^5$	1, 2; Modus Ponens	Ø
4	$[p]^4$	3; Simplification	Ø

The occurrence of p in block 4 is called *transparent*, the occurrences of p in blocks 2 and 5 *opaque*. Even if the latter occurrences become transparent at a later stage, they might not be identified with the p in block 4, and appear, say, as $[p]^{17}$.

The block language BL is most easily defined indirectly, starting from the language schema L (mentioned in section 2). For each $A \in$ W, sB contains a denumerable set of blocks $[A]^i$—the members of sB function as sentence letters, even if they contain predicative expressions, as in $[Pab\supset Qa]^{14}$. For each $\alpha \in$ C and for each $\alpha \in$ V, cB and vB respectively contain a denumerable set of blocks $[\alpha]^i$. The definition of functional blocks is more complicated. Any open formula A defines a string $\sigma(A)$ obtained by replacing the free variables by dashes; for example $\sigma(Pxa\supset(\exists y)Qxy)$ is $P\text{–}a\supset(\exists y)Q\text{–}y$. fB contains a denumerable set of blocks of the form $[A]^i$ for each member of $\{A \mid$ for some $B \in$ F-W, $A = \sigma(B)\}$. Where the rank of $[A]^i \in$ fB is the number of dashes in A, fB^1, fB^2, ... are the sets of functional blocks of rank 1, 2, ... In shorthand I shall write the constant blocks and the variable blocks as α^i, and I shall write their occurrences instead of the dashes in functional blocks. Thus, the block expression $[54, P\text{–}\&\sim(Q\text{–}\supset R\text{–}a)]([39, a], [15, b], [39, a])$ will be written (unambiguously) as $[Pa^{39}\&\sim(Qb^{15}\supset Ra^{39}a]^{54}$; remark that the last occurrence of a is opaque. sB∪cB∪vB∪fB is obviously denumerable.

BF, the set of block formulas, is the smallest set such that

(i) sB ⊆ BF,

(ii) if $A \in \mathrm{fB}^n$ and $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in$ cB∪vB, $A(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) \in$ BF,

(iii) if $\alpha_1, \alpha_2 \in$ cB∪vB, $\alpha_1=\alpha_2 \in$ BF,

(iv) if $A, B \in$ BF, $\sim A$, $(A\supset B)$, $(A\&B)$, $(A\vee B)$, $(A\equiv B) \in$ BF, and

(v) if $A \in$ BF and $\alpha \in$ vB, $(\forall\alpha)A$, $(\exists\alpha)A \in$ BF. The set of well-formed block formulas, BW, is defined as usually.

Functional blocks deserve some further comment. Consider the following proof (it may be read as a **CL**-proof):

1	$(\forall x)(Pxa\supset(\exists y)Qaxy)$	Premise	Ø
2	$Pba\supset(\exists y)Qaby$	Universal Instantiation	Ø
3	$(\exists x)(Pbx\supset(\exists y)Qaby)$	Existential Generalization	Ø

The block analysis will be as follows (only the numbers are arbitrary). Let us first consider stage 2:

1	$(\forall x^1)[Px^1a\supset(\exists y)Qax^1y]^2$	Premise	$\emptyset$
2	$[Pb^3a\supset(\exists y)Qab^3y]^2$	Universal Instantiation	$\emptyset$

And now stage 3:

1	$(\forall x^1)[Px^1a^5\supset(\exists y)Qax^1y]^4$	Premise	$\emptyset$
2	$[Pb^3a^5\supset(\exists y)Qab^3y]^4$	Universal Instantiation	$\emptyset$
3	$(\exists x^6)[(Pb^3x^6\supset(\exists y)Qab^3y)]^4$	Existential Generalization	$\emptyset$

The official formulation of the functional block 2 is $[2, P\text{–}a\supset(\exists y)Qa\text{–}y]$; that of 4 is $[4, P\text{——}\supset(\exists y)Qa\text{–}y]$. It is essential to realize–the proof is safely left to the reader–that no functional block contains a free opaque variable. As proofs contain only members of W, any member of vB that occurs in a formula should occur within the scope of a quantifier over that member of vB. Functional blocks of rank r will be handled just as predicate symbols of rank r are usually handled.

In order to build the block semantics for the monotonic paraconsistent logic **CLuN**, we extend the language BL to the pseudo-language BL^+ obtained by adding to BL a (possibly uncountable) set of pseudo-constant blocks oB (just as L^+ was obtained by adding O to L). The sets sB, cB, vB, fB^1, fB^2, ..., BF, BW, BF^+, BW^+, and $\text{BW}^{\sim+}$ will be handled exactly as the sets S, C, V, P^1, P^2, ..., F, W, F^+, W^+, and $\text{W}^{\sim+}$ were handled in the **CLUN**-semantics in section 2. So, a **BCLuN**-model is a couple $M = \langle D, v\rangle$ in which D is a set and v is an assignment function defined by:

C1.1 $\quad v : \text{sB} \to \{0, 1\}$

C1.2 $\quad v : \text{cB}\cup\text{oB} \to D$

C1.3 $\quad v : \text{fB}^r \to \wp(D^r)$

C1.4 $\quad v : \text{BF}^{\sim+} \to \{0, 1\}$

Next we define regular models in terms of equivalence classes of the members of cB$\cup$oB, and discard non-regular models. We define the valuation function v_M determined by the model M–a task I can safely leave to the reader. Finally, we define truth in a **BCLuN**-block-model, semantic consequence and validity as usually. That the **BCLuN**-semantics is sound and complete with respect to **BCLuN**-proofs may be shown by an embedding of **BCLuN** in **CLuN**–see [6].

Given the **BCLuN**-semantics, we proceed exactly as for **CLuN** in order to define **BACLuN1**-models and **BACLuN2**-models. Remark that Ab(M) contains only abnormalities at the level of the block formulas (and no opaque ones). Given a proof in one of our adaptive logics, we perform its block analysis and start from there.

Let us again consider the last example of a proof and the block analyses of stage 2 and stage 3. As block 4 does not occur at stage 2, the premise at this stage, viz. $(\forall x^1)[Px^1a\supset(\exists y)Qax^1y]^2$, has models in which the block formulas 1, 2, and 3 of stage 3 are false. There are two ways in which we may proceed. On the *step by step* semantics, we simply interpret the formulas in the block analysis of stage 3. As a result, the premise of that stage, $(\forall x^1)[Px^1a\supset(\exists y)Qax^1y]^4$, has models in which all formulas of the block analysis of the previous stage are false. On the *continuous* semantics, the models of the block formulas at some stage should verify all block formulas of all previous stages. This is particularly attractive: each stage narrows down the models of the premises[13]. For my present purposes both styles of semantics can be used, and I shall follow the simpler step by step style.

4. Some results

As noted before, the motor for the dynamics of the proofs are the DEK-formulas that occur in it, together with the conditions on derived formulas. Reconsider the example of a dynamic proof in section 2. If it is interpreted as an **ACLuN1**-proof, lines 4 and 5 have to be deleted. If one would fail to see that 1 is a DEK-formula and that the formula in the condition on 4 is a factor of it, one would not delete 4. That, however, would be plainly incompetent–the rules for **ACLuN1** (not explicitly listed here) force us to delete 4. This has two simple effects for the block analysis of proofs in our logics: (i) the factors of DEK-formulas should be transparent in these formulas as should be the elements of conditions, and (ii) where an element of a condition is identical to a factor of a DEK-formula, the corresponding blocks should be identified.

The correspondence between the block analysis of a proof at a stage and the block semantics is similar to the correspondence between a usual proof and a usual semantics. Soundness: all (non-deleted or not marked OUT) lines in the proof at a stage are validated by all models of the block premises. I can safely skip the demonstration as it is *identical* to the proof that **ACLuN1** and **ACLuN2** are sound with respect to their semantics. Completeness: the wffs true in all models of the premises (as they come out of the block analysis) can be derived within the block proof *without changing the block analysis* (that is, *without further analysis or identification of blocks*). Given this proviso, the demonstration proceeds exactly as the one that **ACLuN1** and **ACLuN2** are complete with respect to their semantics. All **BCLuN**-consequences of the block premises can be unconditionally derived in an extension of the block proof, and wffs verified by all **BACLuN1**-models (respectively **BACLuN2**-models) of the block premises can be derived conditionally in an intelligent extension of the block proof and will not be deleted (or marked OUT) in it.

There is one proviso to both the Soundness and Completeness of block proofs with respect to the block semantics: if a DEK-formula is derivable in a block proof, it should be derived. This requirement turns out to be easily met. Indeed, a DEK-formula is only true in all models of

---

[13] This nicely expresses the information gained as the proof proceeds.

the premises iff its factors are transparent. Remark, for example, that no DEK-formula is derivable from $\sim[p]^4$ and $[p]^5\vee([q]^6\&\sim[q]^6)$. As $[p]^4$ and $[p]^5$ are not identified, both $\sim[p]^4$ and $[p]^5$ will be true in all **BACLuN1**-models and **BACLuN2**-models of those two formulas. If $\sim[p]^5$ and $[p]^5\vee([q]^6\&\sim[q]^6)$ occur in the proof, then $![p]^5\vee![q]^6$ should be derived. It can be shown, however, that the latter cannot be a minimal DEK-formula unless it was derived previously (which explains the identification of the two $[p]$-blocks).

It is instructive to consider the transition to a stage at which a line is deleted or marked OUT. Let us concentrate on **ACLuN1**, which is simpler from a proof theoretic viewpoint. Basically there are two reasons why a DEK-formula can be derived: it may result from the identification of two blocks, or it may result from the analysis of one or more blocks and from the identification of the newly discriminated blocks. As the former case is the more general one, I restrict attention to that.

Let us continue the example from the previous paragraph, where $\sim[p]^4$ and $[p]^5\vee([q]^6\&\sim[q]^6)$ occur in the proof; let us suppose that the inconsistency of no block is derivable from the premises (as analyzed at the stage). $![p]^5\vee![q]^6$ is derived by identifying block 4 with block 5. What happens on the semantic side? $U(\Gamma) = \emptyset$ for the previous stage; the premises, Γ, had consistent **BCLuN**-models, and hence these are the **BACLuN1**-models of Γ. By the identification, all **BCLuN**-models of Γ verify $![p]^5\vee![q]^6$ and $U(\Gamma) = \{p, q\}$. Now no **BCLuN**-model of Γ (as analyzed at this stage) is consistent and $Ab(M) \in \{\{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ for all **BACLuN1**-models of Γ. Hence, formulas derived in the proof with a condition containing p or q are not any more verified in all **BACLuN1**-models of Γ.

Let us move to the continuous semantics for a moment. What happened to the **BACLuN1**-models of Γ at the previous stage? By the identification of blocks 4 and 5, all models in which these blocks have different truth values turn out to be ill-formed[14]. As a result, the only **BCLuN**-models of Γ that are **BACLuN1**-models of Γ are now inconsistent (as described).

It turns out that we nicely captured the dynamics of adaptive logics in semantic terms: the dynamics of the proofs is semantically justified in terms of the block formulas provided by the block analysis. The semantic dynamics does not merely serve the purpose of justifying the dynamics of proofs. It also reveals that there is a deep and sensible mechanism behind that dynamics: it reflects that the insight in the premises grows as the proof proceeds. The information gained may be expressed in terms of the continuous semantics. The set of models of the premises is cut down as the proof proceeds; some interpretations of the premises turn out to be ill-formed and are discarded.

---

[14] Remark that we meet a further dynamics of the semantics here. As the analysis and identifications proceed, some block-models turn out to be ill-formed and hence are ruled out.

Before finishing the present section, I would like to add a comment on final derivability. I have remarked that Compactness fails for **BACLuN1** and **BACLuN2**. This rules out a positive test for final derivability in general. So, it is extremely important that we have *criteria* which warrant that some formula is finally derived at some stage of a proof. The block approach provides us with such criteria: by means of the block semantics we can delineate the circumstances under which any extension of the proof, which indeed corresponds to a further analysis and identification of blocks, will not lead to the deletion (respectively marking OUT) of the line at which the formula is derived. I refer to [6] for a rather rough such criterion. As is illustrated there, the block approach enables us to capture a host of other dynamic aspects of logical reasoning, even for monotonic logics.

5. Some open problems

Part of the attractiveness of the dynamics of adaptive proofs derives from the similarity of this dynamics to the one of everyday reasoning. The block approach looks quite promising with respect to that reasoning or at least with respect to mechanisms that attempt to capture it within a formal framework. In general, all logics that are not monotonic[15] belong to this class. For logics relying on such mechanisms as circumscription, a reconstruction in terms of **ACLuN2** together with a preference mechanism was presented in [4]. Recently it was discovered that the consistent chunking mechanism presented in [12] and [13] (and rediscovered later by a host of computer logicians, usually not referring to and perhaps not aware of the sources) is actually an inconsistency-adaptive logic (result to be published).

It is a very unfortunate thing that a proof theory for such systems has not been developed. Even if Compactness fails, even if we have to recur to some meta-theoretic criterion (such as *intelligent extension* of a proof), our grasp on such logics (and especially on their applications) would be greatly furthered if we had a proof procedure and some criteria to decide that some formula has been finally derived at a stage. The block approach is extremely promising in this respect in that the block semantics provides us with the requirements that such proof procedure should meet.

Apart from the above, there are more general and more specific open problems. The more general ones concern the dynamics of everyday reasoning. My personal view on the matter is that an elaboration of dynamic procedures in a strictly formal framework is more promising than a direct attack on everyday reasoning itself. The more specific problems concern logics such as **ACLuN1** and **ACLuN2**. Easy problems

---

[15] I use this rather long phrase because the expression "non-monotonic logics" is usually taken now to refer to a specific brand of logics that are not monotonic, viz. those that worry about Tweety and the Nixon Diamond.

concern reformulations of the proof procedure, such as natural deduction formulations in which the direct dependence on DEK-formulas might be loosened. More difficult problems concern a refinement of the criteria for deciding that a formula is finally derived at a stage of a proof. All this seems rather interesting because, as the Hilbert program crashed on Gödel, logicians should try to learn as much as they can about aspects of logic that have been so far neglected. The dynamics of our reasoning seems most promising in this respect, and the block approach provides a means to tackle it.

REFERENCES

1. *Batens D.* Paraconsistent extensional propositional logics. Logique et Analyse, 1980. V. 90–91. P. 195–234.
2. *Batens D.* Dialectical dynamics within formal logics. Logique et Analyse, 1986. V. 114. P. 161-173.
3. *Batens D.* Dynamic dialectical logics. // G. Priest, R. Routley, J. Norman (eds.). Paraconsistent Logic. München. Philosophia Verlag, 1989. P. 187-217.
4. *Batens D.* Inconsistency-Adaptive Logics and the Foundation of Non-Monotonic Logic. Logique et Analyse, 1994. (appeared 1996). V. 145. P. 57–94.
5. *Batens D.* Inconsistency-Adaptive Logics. // Ewa Orlowska (ed.). Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa. Kluwer, in print.
6. *Batens D.* Blocks. The clue to dynamic aspects of logic. Logique & Analyse, 1995. (appeared 1997). V. 150–151–152. P. 285–328.
7. *Batens D., Joke M.* Tableau methods for paraconsistent extensions of positive logic and for the adaptive logics based on them. Part 2: The predicative case. (to appear).
8. *da Costa Newton C.A., Elias H. A.* A semantical analysis of the calculi C_n. Journal of Formal Logic. Notre Dame, 1977. V. 18. P. 621–630.
9. *De Clercq K.* Two new strategies for inconsistency-adaptive logics. (to appear).
10. The semantics of the systems $\mathbf{C_n}$ of da Costa. // A.I. Arruda, N.C.A. da Costa, A.M. Sette (eds.). Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic. São Paulo. Sociedade Brasileira de Lógica, 1980. P. 161–172.
11. *Priest G.* Minimally inconsistent LP. Studia Logica, 1991. V. 50. P. 321–331.
12. *Rescher N.* Hypothetical Reasoning. Amsterdam. North-Holland, 1964.
13. *Rescher N., Ruth M.* On inference from inconsistent premises. Theory and Decision, 1970. V. 1. P. 179–217.
14. *Weber S.* Mathematical Analysis of Priest's nonmonotonic version of Kleene's $\mathbf{SK_3}$. (to appear).

P.Weingartner

DIFFERENT KINDS OF RELEVANCE[1]

Абстракт. *Стимулом для разработки систем релевантной и паранепротиворечивой логик служит исследование парадоксов. Эти парадоксы возникают в случае применения классической логики (CL) в различных областях науки, , вне сферы логики и математики, и в обычных рассуждениях. Ученые, когда они говорят о следствиях научных теорий, или гипотез, обычно подразумевают нечто гораздо более узкое, чем то, что CL допускает в качестве элемента класса следствий. Это справедливо также и для обычного рассуждения. Целью статьи является описание различных идей релевантности, демонстрация их отличий и их способности разрешения парадоксов.*

The stimulans for the development of systems of Relevant Logic and of Paraconsistent Logic came from investigating paradoxes. These paradoxes arise when Classical Logic (CL) is applied to different fields of science outside logics and mathematics and to ordinary discourse. Scientists, if they speak of consequences of scientific theories or hypothesis do have in mind something much more restricted than that what CL permits to be an element of the consequence class. This holds also for ordinary discourse.

The purpose of this paper is to describe different ideas of relevance and to show their differences and how they are able to solve paradoxes. Before beginning with the description of the different criteria some examples will show paradoxical situations:

1. Examples

E1 Assume that a physicist after obtaining some experimental result writes in his research report: If this experimental result is contradictory no physicist will ever find a correct theory of baryons. Asked by his collegues about his strange prediction he could reply: By the laws of logic my claim is true since a true empirical statement cannot be logically false.

E2 Assume that the contract of a building company contains the following statement: If all the building material will be available until time t_1 we shall finish the building until time t_2. But assume that the building company knows in advance (or arranges things that way) that the building material will not be available until t_1.

[1] Research on this paper was supported by a grant of INTAS-RFBR contract 95-365.

E3 Suppose that someone claims the following "theorem": If the system of relevant logic R is decidable then intuitionistic propositional calculus is also decidable.

E4 From the proof of Fermat's theorem it follows that: there is no solution of $x^n + y^n = z^n$ for $n > 2$ or Goldbach's conjecture is false.

E5 If males will not get pregnant then males who take the anti baby pills will not get pregnant.

E6 Assume that someone, after he has proved theorems T_1 and T_2 anounces theorem T_3 which is the conjunction of T_1 and T_2.

E7 Assume that someone infers a consequence of an empirical theory which was shown to be false (by experimental proof). He claims now that this theory has a lot more false consequences: all conjunctions of this false consequence with any (true or false) statement.

The logical structure of the examples is as follows:

E1: From a contradiction or from a logically false statement one may infer any statement. Or: an implication is true if its antecedents is logically false. $A \wedge \neg A \vdash B$; $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$. All relevant logics agree in avoiding this principle of CL (from a contradiction any arbitrary proposition follows) which was called recently the "explosion principle"[2].

E2: From the negation of the antecedent follows that the implication (with arbitrary consequent) is true: $\neg A \vdash A \rightarrow B$; $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Well known paradoxes which have this structure: Carnap's paradox of disposition predicates, Paradox of Derived Obligation, Paradox of Commitment.

E3: An implication is always logically true if the antecendent has been proved to be false and the consequent has been proved to be true: $F \vdash T$; $F \rightarrow T$. Paradoxes of this sort are such that the implication purports (additional) information although it is always logically true.

E4: From any true statement infer a disjunction including it: $A \vdash A \vee B$; $A \rightarrow (A \vee B)$. Well known paradoxes which have this structure: Hesse's Paradox of Confirmation, Goodman's Paradox, Ross' Paradox, Paradox with Irrelevant Explanandum Components.

E5: To any valid inference one may add premisses: $(A \vdash C) \vdash (A, B \vdash C)$; $A \rightarrow C \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$. Well known paradoxes which have this

[2] See Priest, 1997.

structure: Paradox of Irrelevant Theory Strengthening, Paradox of Irrelevant Law Specification.

E6: From seperated premisses one may always infer (form) the conjunction of them: A, $C \vdash A \wedge C$. Applying adjunction leads to paradoxes in action theory and in Quantum Logic.

E7: To any false consequence one may conjoin any statement forming a new false consequence: $(A \vdash F) \vdash A \vdash (F \wedge B)$; $(A \rightarrow F) \vdash (A \rightarrow (F \wedge B))$. This structure plays a role in paradoxes connected with the question "What are the consequences of a theory?" especially with respect to Versimilitude[3].

2. Ideas of Relevance

In a good sense the idea of relevance starts with Aristotle. His valid syllogistic modes are constructed in such a way that they satisfy the following relevance restriction: The predicates occurring in the conclusion are contained in those occurring in the premisses. Relevance is here understood with respect to the inference not with respect to an arbitrary proposition. With respect to the inference (valid argument) we can ask immediately two questions: (1) Does the conclusion follow relevantly from the premisses? (Conclusion-relevance). (2) Are the premisses relevant for this conclusion? (Premiss-relevance).

It seems to me that in the three main approaches to Relevance (1) is at focus and (2) is only sometimes additionally investigated.

2.1 *Strengthening Implication*

The approach has its origin in antiquity, in Stoic Logic. Later sources are in Medieval Logic. In this century the approach begins with Lewis' "Strict Implication" continuing with Parry's "Analytische Implikation", Ackerman's "Strenge Implikation", culminating in Anderson/Belnap's "Entailment"[4]. Further development in this direction was the construction of a semantics for the axiomatic systems proposed[5] and completeness and (un)decidability results[6].

2.2 *Theory of Conditionals*

A second approach is to build up a general theory of conditionals. Also this approach goes back to antiquity, again to Stoic and then to Medieval Logic. Contemporary research was done by Chellas, v. Bentham, Nute, Veltman and others[7].

---

[3] For further kinds of paradoxes see: Weingartner, Schurz, 1986.

[4] Lewis, Langford, 1932.

[5] Routley, Meyer, 1972; Maksimova 1973.

[6] Meyer, Dunn, Leblanc, 1974; Urquhart, 1984. For a survey until 1980 cf.: Dunn, 1986. Cf. also: Read, 1988.

[7] Cf.: Chellas, 1975; v. Bentham, 1984; Nute, 1984; Veltman, 1985.

The first two approaches mentioned above both propose a "new logic" in the sense that the concept of implication and (parallel) to that the concept of the validity of an inference is changed (in general in the direction of strengthening). Whether both go hand in hand depends heavily on the question whether the change is done only with respect to the main implication (in an implicational formula) or with all implications.

2.3 *Relevance Filters*

There is a third approach and Aristotle's idea seems to fit best in this one. It uses relevance restrictions to be applied to an underlying logic choosen (usually the classical one). The restrictions are usually much stronger than those received by changing implication. One reason is that there are limits for changing implication (and consequently validity of inference) since the usual closure conditions (transitivity, substitution, modus ponems) should be preserved for a logic. But it need not be preserved for a restriciton or for a filter.

Proposals of this third kind have been made by v. Wright, Körner, Geach, Gärdenfors, Wessel, Weingartner and Schurz[8].

2.4 *Semantic Considerations on Relevance*

The approaches under this heading are not semantics for axiomatic systems of (relevant) propositional logics but investigations on the semantic relations between individual variables or predicates in premisses and conclusions or in antecedent and consequent of an implication. Proposals of this kind have been made by Dunn and Orlowska/Weingartner[9].

These approaches are to some extend independent from the three approaches mentioned above and can in principle be conjoined with one of them.

3. Relevance Restrictions (Filters) on CL

The approaches which I shall describe in some more detail are approaches of the sort of 2.3 (above).

3.1 *Shared Variable restriction*

The conclusion should be connected in some way to the premisses. Premisses (at least one) and conclusion share some variable (propositional variable or predicate). With this restriction only E1 of the given examples and its underlying principle can be avoided. However adding a suitable tontology (like $B \rightarrow B$) to the premisses

---

8 von. Wright, 1957; Körner, 1959; Gärdenfors, 1976; Wessel, 1979; Weingartner, 1985; Weingartner, Schurz, 1986; Schurz, Weingartner, 1987; Schurz, 1991; Weingartner, 1997a.

9 Cf.: Dunn, 1987; Orlowska, Weingartner, 1997. A semantics for the relevance restriction (relevance filter) R (put on CL) was developed by Schurz (1991b).

satisfies the restriction but leaves the problem. Thus shared variable condition (mentioned in Anderson/Belnap 1975) is much too weak as a means for solving paradoxes.

3.2 *The Aristotelean Restriction*

The conclusion of a syllogism does not contain predicates which are not contained in the premisses. In fact the former contains subject and predicate term the latter in addition to the middle term. This amounts to the following relevance restriction:

A_1 $\alpha \vdash \beta$ is A_1-relevant if $\alpha \vdash \beta$ is valid and there are no predicates in β which are not in α.

We may transmit this idea to propositional logic and receive:

A_0 $\alpha \vdash \beta$ is A_0-relevant if $\alpha \vdash \beta$ is valid and there are no propositional variables in β which are not in α.

It is easily seen that A_0 can be applied to valid implicational formulas $\alpha \rightarrow \beta$ i.e. to the main-arrow ($\rightarrow$) of them. (However cf. 3.3 below). Applying A_1 is more complicated, if formulas are quantified.

A_0 (A_1) rules out E1, E2, E4, E5, E7 and the general cases of E3 (if the propositional variables and predicates of the sentence positively proved are not included in those of the sentences which were proved to be false). Thus it is easily seen, that A_0 (A_1) is already a rather strong criterion. But there is a problem with A-relevance. Since it is applied to CL we don't have the additional restrictions which Aristotle had for the premisses in his syllogisms. Therefore an arbitrary tautology containing the propositional variables or predicates needed can be added to the premisses in order to satisfy the A-restriction. Thus $A \wedge \neg A \vdash B$ can be turned into $(A \wedge \wedge\neg A) \wedge (B \rightarrow B) \vdash B$ and the latter satisfies the A-restriction. We might add to A_0 and A_1 the further restriction: No proper part of a valid implication (inference) can be a tautology or a contradiction. With this addition A_0 and A_1 become rather strong and the mentioned problem with adding tautologies in the premisses is avoided. A weaker extension of the A_0 criterion is that which has been proposed by Wessel in several of his writings. He adds to A_0 the condition proposed by Wright and Geach that the premisses must not contain a contradiction and the conclusion must not contain a tautology.

It might be interesting to see what properties the system of propositional logic has which is obtained by filtering CL with A_0. The following list gives an answer to this question:

(1) A_0-relevance is closed under substitution and under transitivity of implication.

(2) A_0-relevance is neither closed under modus ponens nor under contraposition.

(3) A_0-relevant implication $(\alpha \underrightarrow{A_0} \beta)$ is not A_0-relevance preserving.

(4) If $(\alpha \underrightarrow{A_0} \beta)$ then all four cases are possible concerning the A_0-relevance of α and β: both, neither or one of both may be A_0-relevant.

(5) The set of formulas (of classical propositional calculus) obeying the A_0-restriction can be characterized by finite matrices[10].

(6) If M_W is the matrix of Wronski and M any arbitrary matrix then it holds: for every α, β $M_W \times M \models \alpha \rightarrow \beta$ iff $M \models \alpha \underrightarrow{A_0} \beta$ (X ...Cartesian Product).

(7) The set of formulas obeying the A_0-restriction is finitely axiomatizable[11].

3.3 A different restriction is obtained if A_0 is applied to every implication ($\rightarrow$) in a valid implicational formula. I call this the A*-restriction. The remaining system has very different properties:

(1) A*-relevance is closed under modus ponens, under transitivity of implication and under substitutivity.

(2) A*-relevant implication preserves A*-relevance.

(3) A*-relevance is not closed under contraposition.

(4) The matrix mentioned in 3.2 describes also A*-relevance if every $\rightarrow$ is interpreted with the matrix for $\underrightarrow{A}$ and the matrices are designed as having an infinite universe. In this case this matrix is a special case of a class of matrices proposed by Dunn to reconstruct Parry's axiom system for analytic implication.

---

[10] Cf.: Weingartner, 1985. In fact the matrix proposed there is first designed for an infinite universe such that A_0-relevance can be characterized also by infinite matrices. But a small change permitts to construct a finite matrix out of it (p. 574) which also characterizes the A_0-restriction. Another finite matrix was constructed by A. Wronski. Cf.: Weingartner, 1994. p. 104. The claim in Schurz (1991b) p. 66ff. that A_0-relevance cannot be represented by finite matrices is incorrect and due to a confusion between A_0-relevance and A*-relevance. The claim holds for A*-relevance. The matrices given in Weingartner (1985) were constructed for A_0-relevance (although they can be used also for A*-relevance). Cf.: My, 1994. Chap. 4.121.

[11] An axiom system is given in: Zinoviev, 1973. P. 75 ff and 267 ff.

(5) From (4) and Dunn's completeness proof it follows that the class of A*-restricted formulas is axiomatizable by Dunn's axiom system (1972).

3.4 *Gärdenfor's restriction*

Gärdenfors is concerned with similar restrictions for an adequate concept of scientific explanation[12]. As a first condition beyond the usual basic ones for an explanation of a sentence E with the help of theory T and antecedence conditions C he gives in fact specifications of the A-restriction: his condition C5 and a strengthening of it C5'. His further conditions are especially concerned with premiss-relevance on the one hand (the explanation should contain the most simple antecedens, condition C6) and with the task of avoiding the case that E implies C on the other (condition C7). C6 requires a criterion of simplicity which is defined with the concept of "shorter formula" with respect to a disjunctive nonnal form. This idea as a means for avoiding redundancies is similar to the reduction-criterion RD to be described below (cf. 3.7).

3.5 *Körner's Restriction*

There should be no parts in a valid formula which can be replaced by its own negation salva validitate. This is an idea of Körner[13]. In a precise form the criterion reads:

K A valid formula α is K-relevant if there is no single occurrence of a subformula which can be replaced by its own negation salva validitate of α.

The K-restriction is rather strong, it rules out all the logically valid forms underlying E1 to E5 and E7. It is also universally applicable and not restricted to implicational formulas or inferences. However it doesn't exclude such simple irrelevances as: $A \rightarrow [A \wedge (B \vee \neg B)]$. On the other hand it seems to exclude too much: The restriction is also premiss-relevant in some strong sense and rules out for instance: $(A \wedge B) \rightarrow A$.

The following list gives some properties of the system obtained from CL by the K-restriction.

---

[12] Gärdenfors, 1976.

[13] Cf.: Körner, 1959, 1979. The criterion is ill-formulated in these places; it was made precise by Cleave (1973/74) and by Schurz (1983).

1) K-relevance is not closed under substitution, not closed under transitivity of implication, but closed under modus ponens.

(2) K-relevance is preserved under commutation, association, double negation, and De Morgan's laws.

(3) Every valid subformula of a K-relevant formula is K-relevant.

(4) If $\alpha \underrightarrow{K} \beta$ then none of α, β, $\neg\alpha$, $\neg\beta$ are valid.

(5) $\alpha \wedge \beta$ is K-relevant if both parts are.

(6) If $\alpha \underrightarrow{K} \beta$ and $\alpha \underrightarrow{K} \gamma$ then: $\alpha \underrightarrow{K} (\beta \wedge \gamma)$. If $\alpha \underrightarrow{K} \beta$ and $\gamma \underrightarrow{K} \beta$ then $(\alpha \vee \gamma) \underrightarrow{K} \beta$.[14]

All these and further properties follow from the following theorem:

(7) T_K: A valid formula α is not K-relevant if there exist formulas β, γ and a propositional variable p such that α is the formula which results by substituting γ in place of p in β, β is valid and p occurs in β only once.

(8) This theorem implies the further result: K-relevance can be replaced by (the appearently weaker) K'-relevance[15]:
K' No single occurrence of a propositional variable in α can be replaced by its own negation salva validitate of α.

(9) K-relevance cannot be characterized by matrices. But the valid formulas which do not obey K-relevance (K-irrelevance) can be characterized by infinite matrices.

(10) K-irrelevance is closed under substitution (cf. (1)).

3.6 *Kreisel's restriction*

The main idea is: There should not be parts in a valid formula that are eliminated in the usual proof of the interpolation theorem[16].

KR A valid formula α is KR-relevant if α does not have a proper part β in which there is a KR-irrelevant (KR-redundant) occurrence of a variable.

---

[14] Properties (2)-(6) have been observed already by Cleave (1973/74).

[15] The proofs of T_K and this result are due to A. Wronski: Cf.: Weingartner, 1994. P. 109f. Observe that it is crucial for the above results that the underlying propositional logic CL contains only propositional variables, no propositional constants.

[16] This restriction is due to Kreisel (proposed 1986 in private conversation to Wronski and myself).

An occurrence of (the variable) p is KR-irrelevant (KR-redundant) in β if β can be replaced salva validitate of α

(1) by $\beta\,[^{p}/_{\mathrm{T}}] \wedge \beta\,[^{p}/_{\mathrm{F}}]$ if β is a positive part of α

(2) by $\beta\,[^{p}/_{\mathrm{T}}] \vee \beta\,[^{p}/_{\mathrm{F}}]$ if β is a negative part of α

The formula β is a positive (negative) part of α if there is an even (odd) number of components of α having the form $\neg\gamma$ or $\gamma \rightarrow \delta$ where β is contained in γ[17]. KR is a possible formulation of Kreisel's main idea above.

A formula a is KR-relevant if a does not have a proper part in which there is a redundant occurrence of a variable.

Then the connection with the interpolation theorem can be stated thus: If a is a tautology and β is a positive (negative) part of α then one can find a formula β' such that the following conditions hold:

(1) $V(\beta') \subseteq V(\beta)$ and $\beta' \rightarrow \beta$ ($\beta \rightarrow \beta'$) is a tautology ($V(\beta)$ = the set of propositional variables in β).

(2) β can be replaced by β' in α salva validitate of α and no propositional variable of the resulting tautology is KR-redundant within β'[18].

A closer look shows that KR-relevance is rather strong. Like K-relevance it is applicable to arbitrary formulas. If applied to valid implication it combines conclusion-relevance and premiss-relevance since it is not concerned with redundance (irrelevance) only in the conclusion but in negative and positive parts of a formula. KR-relevance implies K-relevance for all formulas without propositional constants.

From this it also follows that KR excludes even more than K and so also $(A \wedge B) \rightarrow A$. This raises an important point concerning a threshold with respect to strength. It seems to me that even relevant inference should allow that the premisses are richer than the conclusion. But this idea is here violated and therefore there is a good reason for saying that KR is too strong.

3.7 *Replacement-Restriction (R)*

The replacement restriction was first proposed in Schurz/Weingartner (1987) as combining the merits of both A- and K-restriction but avoiding their weak points. Later it was developed

[17] This definition of positive (negative) parts of a formula is due to Kleene (1967), p. 124.

[18] This interpretation of Kreisel's idea is due to Wronski.

further by both authors. It was shown in different papers that R can solve most of the paradoxes in the following quite different areas (outside logic and mathematics) where logic (CL) is applied: theory of confirmation, explanation, law statements, disposition predicates, versimilitude, quantum logic, epistemic logic and deontic logic[19].

R is at the same time a generalization of one of the most important principles of Paraconsistent Logic, the principle of avoiding explosion: from a contradiction it should not be possible to derive any arbitrary formula. A closer look at the concept "arbitrary formula" leads to the idea of *formula which can be replaced by any other formula salva valididate of the inference*. If this is generalized again to include predicates and identity formulas and to allow replacement of more than one occurrence (of the same variable, predicate letter) but restricted to conclusion-relevance i.e. to the conclusion of a valid inference (consequent of a valid implication) we arrive at restriction R.

I want to emphasize that I prefer to say that a deduction is valid (with respect to CL) but not relevant instead of saying it is not valid in general. One reason for that is given below cf. 3.62 (T1). But an important other one may be stated immediately: the definitions of arbitrary formula (predicate) have to be relativized to an underlying logic, usually CL: *salva validitate* of *inference defined in CL.* Without such a relativization the concept of "arbitrary formula" remains vague.

3.71 *Replacement*

R (informally): α is a relevant consequence of A if α is a consequence of A and there are no arbitrary predicates or atomic formulas or identity formulas in α.

R (formally): α is a relevant consequence of A, symbolically $A \vdash_{cr} \alpha$ if the following conditions (1)-(3) are satisfied

(1) $A \vdash \alpha$

(2) It is not the case that a predicate (including propositional variable, the identity sign) is replacable in α on some of its occurrences by any other predicate of same arity salva validitate of A d α.

[19] Many paradoxes of the above mentioned areas have been discussed and solved in Weingartner/Schurz (1986) by different strengthenings of the A-criterion and of the K-criterion. But both criteria have some serious disadvantages. A and K criteria have been criticized correctly by Sylvan and Nola (1991). R however does not have these disadvantages and solves a lot more paradoxes (cf. T2).

(3) There is no β such that β }| α and β is the result of the replacement of some occurrencies of $\tau_1 = \tau_2$ by t or f[20].
$\alpha \rightarrow \beta$ is relevant, symbolically: $\alpha \rightarrow_{cr} \beta$ iff $\{\alpha\} \vdash_{cr} \beta$.

IR α is an irrelevant consequence of A, symbolically: $A \vdash_{cir}$ a iff R(1) is satisfied but either R(2) is not satisfied or both R(2) and R(3) are not satisfied.

3.72 *Properties of* $\vdash_{cr}$ (R)

What theorems of CL are R-relevant? This question is answered subsequently by giving properties of R. It is not easy to characterize these theorems exhaustively by a few principles. Since it will become clear from the theorems T1-T7 below that the set of these theorems has a more complicated structure in that it does not obey the usual closure conditions.

T1 $\vdash_{cr}$ and $\rightarrow_{cr}$ are not transitive (hence do not satisfy the cut rule), nor monotonic, nor closed under substitution nor closed under modus ponens.
T1 shows very clearly why (at least stronger kinds of) relevance (non redundance) – here conclusion relevance – have to be distinguished clearly from validity (of inference or implication): For validity closure with respect to transitivity and substitution are very important. To keep it for relevance means to allow redundancies in a quite direct and straight forward way. By substitution one can enlarge the redundancies – by substituting tautologies, repetitions ... etc. like the branches of a tree.

T2 $\vdash_{cr}$ and $\rightarrow_{cr}$ imply the Aristotelean criterion (A-criterion) or variable-entailment criterion: All the propositional variables and predicate letters of the conclusion (consequent) are contained in the propositional variables and predicate letters of the premisses (antecedent).
A-relevance ($A \vdash^{A} \alpha$) can be generalized by requiring that every valid substitution generalization of $A \overset{A}{\mathrm{d}} \alpha$ is also A-relevant. We call $A \vdash \alpha$ a substitution generalization of $A^* \vdash \alpha^*$ if $A^* \vdash \alpha^*$ is a substitution instance of $A \vdash \alpha$. Then it holds:

[20] The 'R' may stand for 'replacement' or 'relevance' or both; 'cr' stands for 'conclusion replacement' or 'conclusion-relevance' or both. For properties of $\vdash_{cr}$ see below. Condition (3) is needed to avoid special types of irrelevance concerned with identity which cannot be dropped with (2) alone: For instance if $\gamma := [(a = b \wedge b = c) \rightarrow a = c]$ then γ is not replacable in $A \vdash \beta \wedge \gamma$ by any other 2-place predicate salva validitate (i.e. by applying (2)). But it can be eliminated by applying (3).

T3 $A \vdash \alpha$ is R-relevant if every substitution generalization of is A-relevant[21]. T3 shows an interesting relatation between R-relevance and A-relevance.

$\vdash_{cr}$ ($\rightarrow_{cr}$) is not recursively axiomatizable. It is so only for propositional logic and for the decidable parts of predicate logic[22].

T4 $\vdash_{cir}$ ($\rightarrow_{cir}$) is transitive (and satisfies the cut rule), is monotonic and closed under substitution.

T5 $\vdash_{cr}$ satisfies only the left-to-right half and $\vdash_{cir}$ only the right-to-left half of the deduction theorem: $A \vdash \alpha \rightarrow \beta$ iff $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

T6 1. $A \vdash_{cr} (\alpha \wedge \beta)$ iff $A \vdash_{cr} \alpha$ and $A \vdash_{cr} \beta$.

2. $\vdash_{cr}$ and $\vdash_{cir}$ are preserved under applying the following equivalence transformations to subformula parts of the conclusion: $\vee \rightarrow$ transformation, double negation, De Morgan, $\vee$ $\wedge$ commutation and association; $\exists$-$\forall$ exchange, quantifier scope reduction $\forall\wedge$ -splitting and $\exists\vee$-splitting.

A very important question for R-relevance as a means to solve the problem of versimilitude is the following one: Is the set of all R-relevant consequences of a theory A always logically equivalent with the set of all consequences of A? Since this is so as theorem T7 says one does not loose anything by concentrating just on the R-relevant consequences of a theory rather than on the whole consequence class.

T7 1. The set of all consequences of A is logically equivalent to the set of all R-relevant consequences of A: For all A, $Cn(A) \dashv\vdash Cn_{Cr}(A)$.

2. For all (formulas of predicate logic) α there exists an α' such that $\alpha \dashv\vdash \alpha'$ and $\alpha' \vdash_{cr} \alpha'$.

3. For each consequence α of A there exists a β such that $A \vdash_{cr} \beta$ and $\beta \vdash \alpha$[23].

Theorem 7 is a very important result and provides a necessary premiss for further theorems.

R solves paradoxes E1-E5 and E7 and a lot more. R however only partially solves paradoxes in connection with: (1) the concepts of versimilitude, (2) the noninvariance of important concepts with respect

---

[21] For the proof see: Schurz, 1991b.

[22] For the proof see: Schurz, 1991.

[23] The proof of T7 for popositional logic was given in Schurz/Weingartner (1987) that for predicate logic was presented in a recent unpublished manuscript by Gerhard Schurz.

to logical equivalence transformations, (3) Quantum Logic, (4) Logic of Actions. For the solution of paradoxes in the latter areas we need an additional restriction (reduction) on the consequences in CL.

3.8 *Reduction and Replacement (RD)*

R does not rule out repetitions or double negations. More subtle kinds of complexities arise in the four areas mentioned above. To solve E6 we need a restriction which does not always allow to construct conjunctions (fusion) out of parts, or in other words to have a rule which splits up every consequence into its simplest parts (consequence-elements) but does not allow a way back. This solves also at the same time the problem with repetitions and double negation. If moreover the consequence elements have to be conjuncts then we can also avoid those implications of the distribution laws which are forbidden in quantum logic (these are the ones which go from a conjunction to a disjunction). Such a restriction forbids also equivalence transformations which turn simple elements or conjuncts into disjunctions and special transformations which arise in definitions of versimilitude and in the comparison of the consequence classes of false theories.

3.81 *RD*

RD Let α be a consequence of A, $A \vdash \alpha$. Then α consists of relevant consequence elements only if the following conditions are satisfied:

(1) α is in prenex conjunctive normal form (denoted by: $\alpha^\wedge$)
(2) $\alpha^\wedge$ does not contain repetitions nor double negations
(3) $\alpha^\wedge$ is reduced by scope reduction:
$\exists x\,(A \wedge B) \dashv\vdash \exists x\, A \wedge B$, where x is not free in B
(4) $\alpha^\wedge$ is reduced by splitting:
$\forall x\,(A \wedge B) \dashv\vdash \forall x A \wedge \forall x B$
(5) The resulting $\alpha^\wedge$ satisfies R.
(6) The conjuncts are split into separated elements:
$\beta \wedge \gamma \vdash \beta, \gamma$

Besides the paradoxes which are solved by R alone, RD solves several complicted paradoxical situations as they occur in the theory of versimilitude in the logic of actions, in quantum logic and in equivalence transformations[24].

REFERENCES

Anderson A. R., Belnap N., Entailment. The logic of relevance and necessity. Princeton, 1975.

Bentham J. von. Foundations of conditional logic. // J. Philos. Logic. 1984. Vol. 13. P. 303-349.

Chellas B. F. Basic conditional logic. // Ibid. 1975. Vol. 4. P. 133-153.

Cleave J. P. An account of entailment based on classical semantics. // Analysis. 1973/1974. Vol. 34. P. 118-122.

Dunn M. Relevance logic and entailment. // Handbook of Philosophical Logic. Ed. D. M. Gabbay and F. Guenthner. Dordrecht: Reidel, 1986. Vol. 3.

Dunn M. Relevant predication 1: The formal theory. // J. Philos. Logic. 1987. Vol. 16.

Gärdenfors P. Relevance and redundancy in deductive explanation. // Philos. Sci. 1979. Vol. 43. P. 420-432.

Geach P. Logic matters. Oxford: Blackwell, 1968.

Körner St. Conceptual thinking. L.: Dover, 1959.

Körner St. On logical validity and informal appropriateness. // Philosophy. 1979. Vol. 54. P. 377-379.

Lewis C. I., Langford C. H. Symbolic Logic. N. Y.: The Century co, 1932.

Maksimova L. L. A semantics for the calculus E of entailment. // Bull. Section Logic. 1973. Vol. 2. P. 18-21.

Meyer R. K., Dunn J. M., Leblanc H. Completeness of relevant quantification theories. // Notre Dame J. Formal Logic. 1974. Vol. 15. P. 97-121.

Nute D. Conditional logic. // Handbook of philosophical logic. Ed. D. M. Gabbay and F. Guenthner. Dordrecht: Reidel, 1984. Vol. 2.

Orlowska E., Weingartner P. Semantic considerations on relevance. 1997.

Parry W. T. Ein Axiomensystem für eine neue Art von Implikation: (Analytische Implikation). // Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. 1933. Bd. 4. S. 5-6.

Priest G. 1997

Read St. Relevant logic. A philosophical investigation of inference. Oxford: Blackwell, 1988.

Routley R., Meyer R. K. The semantics of entailment. II, III. // J. Philos. Logic. 1972. Vol. 1. P. 53-73.

[24] For versimilitude see: Schurz, Weingartner, 1987; for Quantum Logic see: Weingartner, 1993; for equivalence transformations see: Schurz, 1990; Weingartner, 1994 and 1997a.

Schurz G. Das deduktive Relevanzkriterium von Stephen Körner und seine wissenschaftstheoretischen Anwendungen. // Grazer Philosophische Studien. 1983. Bd. 20. S. 149-177.

Schurz G. Relevant deduction: From solving paradoxes towards a general theory. // Erkenntnis. 1991a. Vol. 35. P. 391-437.

Schurz G. Sprachunabhängigkeit der Erkenntnis. // Reflexion und Wirklichkeit. Wien, 1990. S. 309-327.

Schurz G. Relevant deductive inference: Criteria and logics. // Advances in scientific philosophy: Essays in honour of Paul Weingartner. Amsterdam: Rodopi, 1991b. P. 57-84.

Schurz G., Weingartner P. Versimilitude defined by relevant consequence-elements. A new reconstruction of Popper's original idea. // What is closer-to-the-truth? Amsterdam: Rodopi, 1987. P. 47-77.

Sylvan R., Nola R. Confirmation without paradoxes. // Advances in scientific philosophy: Essays in honour of Paul Weingartner. Amsterdam: Rodopi, 1991. P. 5-44.

Urquhart A. The undecidability of entailment and relevant implication. // J. Symbolic Logic. 1984. Vol. 49, №4. P. 1059-1073.

Veltman F. Logics for conditionals. Amsterdam: Jurriaans, 1985.

Weingartner P. A simple relevance-criterion for natural language and its semantics. // Foundations of logic and linguistics: Problems and their solutions. N. Y.: Plenum press, 1985. P. 563-575.

Weingartner P. A logic for QM: Based on classical logic. // L'art, la science et la métaphysique: Études offertes à André Mercier à l'occasion de son quatre-vingtème anniversaire et recueillies au nom de l'académie internationale de philosophie de l'art. Bern: Peter Lang, 1993. P. 439-458.

Weingartner P. Can there be reasons for putting limitations on classical logic? // Patrick Suppes, scientific philosopher. Amsterdam: Kluwer, 1994. P. 89-124.

Weingartner P. The weakness of logical equivalence. // Bull. Math. Logic. 1997a.

Weingartner P. Reasons for filtering classical logic. // Proceedings of the First World congress on paraconsistency. 1997b.

Weingartner P., Schurz G. Paradoxes solved by simple relevance criteria. // Logique et analyse. 1986. Vol. 113 . P. 3-40.

Wessel H. Ein System der strikten logischen Folgebeziehung. // Begriffsschrift: Jenaer Frege-Konferenz. Jena, 1979. S. 505-518.

Wright G. H. von. Logical studies. L.: Routledge and Kegan Paul, 1957.

Zinoviev A. A. Foundations of the logical theory of scientific knowledge: (Complex logic). Dordrecht: Reidel, 1973.

Памяти В.А.Смирнова

Е.А. Сидоренко

НОРМАЛИЗОВАННЫЕ ВЫВОДЫ И ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДЕДУКЦИИ[1]

Abstract. The main aim of the paper is to formulate both a general definition of the *normalized inference* from hypotheses and a general definition of the *deduction theorem* which at the same time would be valid for any logical theory T (D-theory) being not weaker than a system D_{min} with the following axiom schemes:

(1) $A \to A$, (2) $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$, (3) $(A_T \to B) \to B$

(2) (where A_T is any theorem of T), and the only rule of inference: *MP* (modus ponens).

Let $B_1, ..., B_m$ is a consequence of inference B from hypotheses Γ. We say that a member B_i of $B_1, ..., B_m$ depends from B_k iff (1) B_i is the same as B_k , or (2) B_k was used to obtained B_i by a rule of inference, or (3) B_i depends from B_j and B_j depends from B_k .

The using of *MP* in a consequence $B_1, ..., B_m$ of inference B from hypotheses Γ in a theory T is said *to be normalized* iff for each member of the consequence B_i ($i \leq m$), obtained from B_k (the major premise) and B_l (the minor premise) by *MP*, the following conditionals are satisfied:

(a) the major premise B_k precedes the minor one B_l, i.e. $k < l$.

(b) there is no any members being hypotheses between B_l and B_i .

(c) the minor premise B_l hasn't to depend from any hypotheses preceding B_k .

A normalized inference of B from hypotheses $\Gamma = \{A_1,...,A_n\}$ ($n \geq 0$) in a theory (calculus) T is said common standard inference (see below *D1*) where MP is under its normalized using.

A consequence $B_1, ..., B_m$ of inference B from hypotheses Γ is said to be *normalized* iff it fulfils *D2* .

MT1. In any theory T a class of valid statements $\Gamma \vdash B$ in accordance with [*standard definition of inference*] D1 is just the same that in accordance with D2.

Let $B_1, ..., B_m$ be a normalized consequence of inference B from hypotheses Γ in a theory T. Let B_k be the first member of the consequence after which the rule *RA* was not used. And let $A_1, ..., A_n$ be the consequence members (not obligatory different) including after B_k in the mentioned order as hypotheses. And let at last Γ_a be a list of all hypotheses Γ, which are included in the consequence before B_k. Then

[1] Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда (грант 95 - 06 - 17270).

the expression $\Gamma_a, \downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ is a *normalized writing* of the inference B from Γ.

MT2. (*Deduction theorem*). If the consequence of formulae $B_1, ..., B_m$ is a normalized inference B from Γ in a D-theory T and $\Gamma_a,\downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ is the corresponding normalized writing of $\Gamma \vdash B$, then in T it is valid any statement

$$\Gamma_a,\downarrow A_1,..., A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow B \ \ (1 \leq i \leq n) \ .$$

После смерти В.А. Смирнова в 1996 г., сотрудники сектора логики, которым Владимир Александрович так долго руководил, и его ученики решили посвятить ему очередной (4-й) выпуск им же основанных **Логических исследований**. Это предполагало, в частности, подготовку обзорной статьи, освещающей основные логические результаты, полученные им в области современной формальной логики[2]. Лично я обратился тогда к тем исследованиям по теории вывода, которые привели Смирнова к построению релевантных логических исчислений на иных, чем у других представителей релевантной логики, основаниях.

Имелась определенная параллель в его и моих работах по этой проблеме, связанная с установлением взаимоотношений между различными определениями вывода из посылок и теоремы дедукции, с одной стороны, и соответствующими им исчислениями - с другой.

Еще в начале 60-х годов В.А. Смирнов, исследуя некоторые проблемы силлогистики, обратил внимание на то, что многие правила вывода из посылок для исчисления высказываний могут быть сформулированы (и доказаны) без ссылок на конкретную аксиоматику исчислений. Для этого достаточно опираться лишь на само определение вывода [1]. Вместе с тем последнее может быть различным. От этого, естественно, будут различными и классы приемлемых утверждений о выводимости вида $\vdash$ B , а также правил, позволяющих переход от одних утверждений такого типа к другим. К последним относится и так называемая теорема дедукции, позволяющая переход от Γ, A $\vdash$ B к $\Gamma \vdash$ A $\rightarrow$B.

Если, скажем, определение вывода запрещает фиктивное использование посылок, делая неправомерным переход от $\Gamma \vdash B$ к $\Gamma, A \vdash B$, то в число приемлемых утверждений о выводимости, получаемых с помощью теоремы дедукции, не попадут (при еще некоторых очевидных ограничениях) такие парадоксальные утверждения, как

$\vdash$A$\rightarrow$.B$\rightarrow$A и $\vdash$ A $\rightarrow$.$\neg$A $\rightarrow$ B [2].

Определение вывода и принимаемая формулировка теоремы дедукции (а такие формулировки могут быть различными при одинаковом определении вывода) задают различные классы

[2] См.: Логические исследования. Вып.4. М., 1997. С. 40-69.

утверждений о выводимости[3]. Возникает вопрос, какие логические исчисления соответствуют тому или иному из этих классов? Эта проблема была детально исследована Смирновым в 70-е годы [3-6]. При этом были естественным образом построены и исследованы те свободные от парадоксов импликации исчисления, которые впоследствии стали именоваться релевантными. Речь идет о таких исчислениях, как *R*, *E*, их так называемых минглових аналогах и кванторных расширениях. Для всех рассмотренных исчислений предложены их секвенциальные аналоги, изучена проблема устранимости сечения. Занимались этими проблемами и ученики В.А. Смирнова, в частности, В.М. Попов [7, 8][4].

Мои исследования [9-13] в этом направлении отличались от смирновских в ряде отношений. И прежде всего в том, что предлагаемые мной определения вывода и теоремы дедукции (принципа дедукции) были изначально релятивизированы относительно исчислений. В том смысле, что при одинаковых по форме формулировках они приобретали различный смысл в зависимости от того, каким в реальности оказывалось исчисление, фигурирующее в определениях как некая абстрактная теория *T*.

Когда "Смирновские чтения" только задумывались, я был уверен и даже высказывал это публично, что буду делать на них доклад (а затем и статью для настоящей книги) "Формальный вывод и логические исчисления", в точности повторяющий название книги Смирнова и выражающий мое намерение изложить в гораздо более развернутой форме то, что я попытался сказать выше.

Случилось, однако, так, что новое обращение к уже, казалось бы, изученному мной вопросу, обращение, вызванное исключительно мемориальными обстоятельствами, неожиданно позволило получить результат [14] более сильный, чем тот, что представлялся мне окончательным и был опубликован мной ранее [13]. Ну как тут не сказать, что этим результатом я обязан Владимиру Александровичу. И, естественно, этот результат я посвящаю его памяти.

* * *

---

[3] В этой ситуации теорема дедукции, сохраняя название, выступает в качестве не обычной метатеоремы исчисления, фиксирующей, что при существовании вывода $\Gamma, A \vdash B$ в исчислении может быть построен вывод $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, но правила построения вывода, разрешающего переходить от первого из указанных выводов ко второму. Поэтому правильнее было бы в этих случаях говорить не о теореме, а о принципе дедукции. С другой стороны, употребляемое название сразу делает ясным, о чем идет речь, а контекст показывает, имеем ли мы дело с теоремой или же с правилом.

[4] Это направление в работе В.А.Смирнова было интересно проанализировано В.А.Бочаровом в его выступлении, посвященном памяти ученого, на логической конференции в Санкт-Петербурге (июнь, 1996). Конференция, которая изначально посвящалась памяти И.Н.Бродского и О.Ф.Серебряникова, неожиданно дополнилась новым мемориальным именем.

Напомним известное определение (логического) вывода из посылок (гипотез), которое мы будем называть далее *стандартным*.

D1. Логическим выводом высказывания (формулы) B из посылок (гипотез) $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ $(n \geq 0)$ *в теории (исчислении) T называется конечная последовательность высказываний (формул)* $B_1, ..., B_m$, $(m \geq 1)$ *такая, что последний член последовательности* B_m *совпадает с B, и для всякого* B_i $(1 \leq i \leq m)$ *выполняется одно из следующих условий: (а)* B_i *есть одна из посылок из* Γ; *или (б)* B_i *- теорема теории (исчисления) T; или (в)* B_i *получается из двух предшествующих членов последовательности по правилу MP (modus ponens); или (г)* B_i *представляет собой конъюнкцию двух предшествующих членов последовательности (по правилу адъюнкции: RA).* (***Примечание:*** Если в языке *T* нет знака конъюнкции, то пункт (г) должен быть опущен.)

Из *D1* видно, что многие утверждения о выводимости могут быть получены при том, что в качестве *T* берется пустая теория. Ясно также, что при верности $\Gamma \vdash B$ всегда верным будет также и $\Gamma, A \vdash B$, где *A* берется совершенно произвольно. Если, поэтому, вместе с *D1* принять как правило вывода теорему дедукции (будем обозначать ее в этом случае как *RDT*)[5], то из $\Gamma, A \vdash B$, а значит, и из верного $\Gamma \vdash B$ мы всегда можем получить в качестве обоснованного $\Gamma \vdash A \to B$ для любого произвольно взятого *A* .

Такое положение приемлемо, когда в качестве интерпретации для связки «→» берется классическая материальная импликация. Пусть, однако, теория описывает импликацию (условную связку), предполагающую, в отличие от материальной импликации, некоторую содержательную связь между антецедентом и консеквентом условного высказывания, и в силу этого отвергает классический принцип $A \to. B \to A$. Тогда теорема дедукции, в приведенной выше форме, в качестве правила вывода оказывается совершенно несостоятельной.

При всем том нахождение какого-то подходящего аналога теоремы дедукции для теорий с неклассическими импликациями представляется чрезвычайно важным. Во-первых, эвристическая значимость этой теоремы очень высока, так как она позволяет, в частности, сводить проблему вывода формулы вида $\Gamma \vdash A_1 \to. A_2 \to. ... \to. A_n \to B$[6] к зачастую куда более простой задаче вывода $\Gamma, A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$[6].

Во-вторых, и это, пожалуй, главное, при отсутствии теоремы дедукции в некоторой теории трудно (я думаю, просто невоз-

---

[5] При пустоте *T* определение *D1* вместе с *RDT* позволяет получить все утверждения $\vdash B$, где *B* есть теорема позитивной импликативной интуиционистской логики.

[6] Так как проблема разрешимости для неклассических теорий импликации часто оказывается нерешенной, важность возможности такого сведения вывода только возрастает.

можно) обосновать содержательную оправданность предлагаемого этой теорией описания (формализации) условной связки. Хотя бы уже потому, что в естественных рассуждениях обоснование истинности условных высказываний осуществляется с помощью приема, равносильного применению теоремы дедукции.

Даже не знающий логики человек, когда от него требуется доказать истинность условного предложения вида "*Если A, то B*", считает достаточным продемонстрировать, что из некоторой совокупности предложений, которые по каким-то основаниям считаются истинными, и из A можно вывести B. Иными словами, мы имеем дело с тем самым косвенным выводом, который, будучи воспроизведен в символической форме, позволяет считать верным $\Gamma \vdash A \to B$ на основании верности $\Gamma, A \vdash B$.

И вот что важно отметить. В естественных рассуждениях за счет простого здравого смысла при использовании принципа дедукции избегают тех неуместных последствий, к которым могло бы привести применение *RDT* при его чисто формальном применении. Никому при обычном рассуждении не прийдет в голову обосновывать истинность $A \to B$ тем, что имеет силу $B, A \vdash B$, где B является верным. Строгая же экспликация условий корректного применения *RDT* в случае принятия *D1*, как показано в [11], является весьма нетривиальной проблемой, решение которой хотя и возможно, но малопригодно при работе с исчислениями.

Попытки адаптации и поиска подходящей формулировки теоремы дедукции для исчислений с неэкстенсиональной импликацией неизбежно связаны с использованием двух взаимосвязанных и взаимодополняющих возможностей. Одна состоит в поиске подходящей переформулировки стандартного определения вывода *D1*, а другая - в нахождении адекватных ограничительных условий, при которых от $\Gamma, A \vdash B$ можно переходить к $\Gamma \vdash A \to B$ с соответствующей импликацией.

В чем состоят недостатки такого подхода при поисках адекватной исчислению или хотя бы уместной для него теоремы дедукции? Они достаточно очевидны. К их числу относится, в первую очередь, тот, что определение логического вывода приходится менять в зависимости от свойств описываемой в исчислении импликации. И значит, принимать всякий раз новое понимание вывода не только в смысле логических принципов, на которые в выводе можно опираться (что в исчислениях, различных по классу описываемых в них принципов, вполне оправдано), но и в смысле самих норм построения вывода. Подобная релятивизация в понимании вывода выходит за рамки тех детерминаций, которые связаны со смыслом терминов объектного языка, и поэтому никак не может считаться достоинством. И дело даже не в том, что мы в таком случае будем иметь дело с *ad hoc* определениями, но в том, что последние могут оказаться весьма далекими от содержательного и используемого в естественных рассуждениях понимания вывода.

В рамках пустой теории, например, а значит, и любой теории вообще, в соответствии с *D1* имеет силу всякое утверждение вида

$A \to . A \to B, A \vdash B$ (1).

Представим теперь, что имеются исчисления T_1 и T_2 , для первого из которых утверждение

$A \to A \to B \vdash A \to B$ (2)

является верным, а для второго - нет. Каким образом обосновать правомерность перехода от утверждения (1) к утверждению (2) в одном случае и неправомерность - в другом?

В принципе, конечно, можно для каждого исчисления рекурсивно описать весь класс верных для него утверждений вида $\Gamma, A \vdash B$, к которым применима теорема дедукции (см., например, [6, 12]). Но это мало что дает в практическом смысле, являясь по существу некоторой (секвенциального типа) переформулировкой исчисления, что никак не связано с реальными процедурами вывода.

Есть и иной путь, когда шаги стандартного вывода сопровождаются определенного типа анализом, позволяющим судить, может ли к соответствующей посылке быть применен принцип дедукции (см., например, [15]). Подобного рода анализ, однако, детерминирован некоторой предварительной идеологией и весьма трудно адаптируется к изменению класса доказуемых в исчислении теорем. Не случайно, по-видимому, авторы, использующие указанный подход, нередко признают из всех многочисленных теорий импликации правильной только одну, отказывая в законном существовании всем остальным.

Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы дать такое определение логического вывода (мы будем называть его *нормализованным*) из данных посылок, которое обеспечило бы справедливость некоторой универсальной формулировки теоремы дедукции для большого множества логических исчислений. Причем это определение вывода должно быть таким, чтобы класс следствий из данных посылок Γ в силу принимаемого определения нормализованного вывода во всяком исчислении T был в точности тем же, что и в силу стандартного определения *D1*. Иначе говоря, классы утверждений вида $\Gamma \vdash B$, верных в T, должны совпадать независимо от того, к какому определению мы обратимся.

Последнее требование, очевидно, ограничивает класс теорий, для которых может быть предложена единая формулировка теоремы дедукции. Нормализованный вывод, так же как и стандартный, в связи с указанным требованием позволяет делать выводы в рамках пустых теорий, в которых формулировать и доказывать теорему дедукции вряд ли имеет смысл. Таким образом, теории, для которых будет адекватна предлагаемая нами формулировка теоремы дедукции, не будут пустыми и будут называться *валидными для принципа дедукции*, или *D-теориями*. К ним относятся исчисления (теории), в которых имеют силу следующие (ниже будет понятно, почему именно эти) принципы:

(1) $A \to A$ (*рефлексивность*);

(2) $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$ (*слабая транзитивность*);

(3) $(A \to B) \to B$, где A - теорема T (*утверждение следствия из теоремы*).

Логическую теорию, содержащую в качестве аксиомных схем (1)-(3) и замкнутую относительно *MP*, обозначаем D_{min}, имея в виду, что в нашем случае данная теория является минимальной из числа всех тех, которые здесь именуются *D*-теориями[7].

Мы говорим, что *член B_i последовательности вывода $B_1, \ldots, B_m$ зависит от члена последовательности B_k* исключительно в случаях: (1) B_i совпадает с B_k, т.е. каждый член последовательности зависит от себя самого, или (2) B_k является одним из членов последовательности, из которых B_i получено по одному из правил вывода, или (3) B_i зависит от B_j, и B_j зависит от B_k (*отношение зависимости транзитивно*).

Установить, от каких членов последовательности $B_1, \ldots, B_m$ зависит тот или иной ее член B_i, очевидно можно в результате следующей простой процедуры. Сначала отмечаются те шаги вывода, на основании которых B_i получено непосредственно. Если таковые имеются (а они могут отсутствовать, когда B_i включено в последовательность как теорема или посылка и зависит только от себя самого), то отмечаются последовательно, пока процедура не закончится, шаги, на основании которых получены уже отмеченные члены последовательности. B_i зависит только от тех членов последовательности, которые окажутся отмеченными.

Будем говорить, что *использование правила MP в последовательности вывода $B_1, \ldots, B_m$ формулы B из гипотез Γ в теории T является нормализованным*, если и только если для каждого члена последовательности B_i $(i \leq m)$, полученного из двух предшествующих членов последовательности B_k и B_l по правилу *MP*, выполнены следующие условия:

(a) если B_k - большая посылка *MP* и имеет вид $B_l \to B_i$, то она предшествует в последовательности меньшей посылке B_l;

(b) между членами последовательности вывода B_l и B_i (т.е. между меньшей посылкой и заключением *MP*) не находится никакой член последовательности B_j, внесенный в нее на том основании, что B_j входит в число посылок;

[7] Заметим, что D_{min} не нашлось места в классификации импликативных логик, которую осуществил А.С.Карпенко [16]. Дело в том, что вместо (3) в его классификации фигурирует более слабый аналог $(A \to A \to B) \to B$.

(c) меньшая посылка B_l не зависит ни от какой из гипотез, которая предшествует большей посылке.

Вся суть ограничений заключается, конечно, в (a), в упорядоченности посылок *MP*. Зачем принимается (b)? Дело в том, что имеется возможность обойти некоторым образом смысл требования (a), выполнив его чисто формально. Условие (b) вводилось специально, чтобы эту возможность блокировать. Условие (c), по-видимому, покрывает (b), точнее, те причины, по которым (b) принималось. Вместе с тем наличие (b) делает более ясным те идеи, которые лежат в основе принимаемых ограничений. Рассмотрим в качестве примера два вывода:

№1

1. $A \to A$ (теор.)
2. A (пос.)
3. $A \to B$ (пос.)
4. A (1, 2, *MP*)
5. B (3, 4, *MP*)

№2

1. $A \to C$ (пос.)
2. A (пос.)
3. $C \to B$ (пос.)
4. C (1, 2, *MP*)
5. B (3, 4, *MP*)

Использование *MP* в обоих приведенных выводах, хотя оно и удовлетворяет условию (a), не является нормализованным. И в том и в другом случаях шаг (4) после шага (3) приводит к нарушению (b). Оба эти вывода нарушают, очевидно, и (c). На шаге (5) *MP* применено к посылкам, только меньшая из которых зависит от гипотез, предшествующих большей посылке.

Примеры выводов, которые удовлетворяет (b), но не (c).

№3

1. $C \to . A \to B$ (пос.)
2. $C \to A$ (пос.)
3. C (пос.)
4. $A \to B$ (1, 3, *MP*)
5. A (2, 3, *MP*)
6. B (4, 5, *MP*)

№4

1. $A \to B \to A$ (пос.)
2. $A \to B$ (пос.)
3. A (1, 2, *MP*)
4. B (2, 3, *MP*)

Вывод №3 нарушает (c), так как шаг (6) делается при том, что малая посылка A (5) зависит от гипотез, предшествующих большей посылке $A \to B$ (4). Вывод №4 также не удовлетворяет условию (c), так как малая посылка *MP* (3) зависит от (1), предшествующего большей посылке. Последний вывод примечателен тем, что $A \to B$ играет в нем роль одновременно и большей и меньшей посылок *MP*.

D2. Нормализованным логическим выводом высказывания (формулы) B из посылок (гипотез) $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ $(n \geq 0)$ в теории (исчислении) T называется конечная последовательность выска-

зываний (формул) $B_1, ..., B_m$ ($m \geq 1$), удовлетворяющая следующим условиям :

(1) *Последний член последовательности B_m совпадает с B, и для всякого B_i ($1 \leq i \leq m$) выполняется одно из следующих условий: (а) B_i есть одна из посылок из Γ; или (б) B_i - теорема теории (исчисления) T; или (в) B_i получается из двух предшествующих членов последовательности по правилу MP (modus ponens) при нормализованном его использовании; или (г) B_i представляет собой конъюнкцию двух предшествующих членов последовательности (получается по правилу адъюнкции: RA).*

(2) *Формула B_m зависит от каждой из посылок, включенных в последовательность $B_1, ..., B_m$.*

(***Примечания к D2***: 1. Если в языке *T* нет знака конъюнкции, то пункт (*г*) из (1) должен быть опущен. 2. B_i рассматривается в последовательности $B_1, ..., B_m$ как посылка или как теорема соответственно только тогда, когда B_i включено в последовательность именно в этом качестве.)

Убедимся, что *D2*, несмотря на его серьезные отличия от определения *D1*, не изменяет, как это и было замышлено, класса следствий, получаемых из тех же посылок. Начнем с отсутствующего в *D1* пункта (2). Он никак не может ограничить числа следствий, которые можно получать в соответствии с *D1*, так как запрещает лишь явное включение в последовательность тех посылок, без которых при получении следствий можно обойтись.

Теперь надо показать, что ограничение на *MP* также не сказывается на классе следствий из данных посылок. Пусть мы имеем вывод $B_1, ..., B_m$. Допустим, что в выводе имеет место ненормализованное использование *MP* . Обратимся к первому по порядку такому использованию. Посылки, к которым было применено правило, обозначим как $B_l \rightarrow B_i$ и B_l . Соответственно, заключением будет B_i. Так как использование *MP* по предположению не нормализовано, имеет место случай, что B_l зависит от некоторой гипотезы (или гипотез), которые предшествуют $B_l \rightarrow B_i$ [8].

Выпишем все те члены последовательности, от которых зависит B_l , в порядке их вхождения, начиная с первой из упомянутых гипотез и кончая самой посылкой B_l . Получившуюся в результате такого выписывания последовательность формул включим в старую последовательность на место малой посылки, если она была ниже большей, и включим сразу после большей в противном случае. В преобразованной последовательности вычеркнем все члены, от которых не зависит B_m , и осуществим необходимые изменения

[8] Заметим, что с указанным случаем мы имеем дело и тогда, когда меньшая посылка представляет собой гипотезу, предшествующую большей посылке. Здесь остается неохваченным случай, когда малая посылка предшествует большей, являясь теоремой. Однако в этом случае нормализация использования *MP* достигается простой перестановкой малой посылки.

в анализе (т.е. в ссылках на основания, по которым в выводе сделан тот или иной шаг). Поступим аналогичным образом со всеми другими ненормализованными применениями MP. В результате получим нормализованный вывод с теми же посылками и заключением, что и исходный вывод.

Обратимся к примерам. Рассмотренные выше выводы №2 и №3 в результате описанной процедуры превратятся соответственно в нормализованные выводы:

1. $C \to . A \to B$ (пос.)
2. C (пос.)
3. $A \to B$ (1, 2, MP)
4. $C \to A$ (пос.)
5. C (пос.)
6. A (4, 5, MP)

1. $A \to B$ (пос.)
2. $A \to B \to A$ (пос.)
3. $A \to B$ (пос.)
4. A (2, 3, MP)
5. B (3, 4, MP)

Заметим, что нормализацию выводов №3 и №4 удалось осуществить только за счет вторичного использования одной и той же посылки (C в №3 и $A \to B$ в №4). Забегая вперед, скажем, что вывод №3 говорит о невозможности получить принцип самодистрибутивности импликации в пустой теории, что было осуществимо в [13].

Фактически мы доказали следующую универсальную для любого исчисления метатеорему:

MT1. *Классы следствий из данных посылок, получаемые в любой теории T в силу $D1$ и $D2$, в точности совпадают.*

Требование, которое мы выдвигали при построении определения нормализованного логического вывода, выполнено. Различие между $D1$ и $D2$ состоит только в том, что не всякая конечная последовательность $B_1, \ldots, B_m$, которая является выводом B из Γ в смысле $D1$, является нормализованным выводом B из Γ в смысле $D2$. При этом всякий нормализованный вывод является выводом в соответствии с $D1$, и всякий вывод B из Γ в смысле $D1$ может быть нормализован.

Формулировка обобщенной теоремы дедукции, которую нам предстоит теперь дать, будет опираться на структуру соответствующего нормализованного вывода. В связи с этим потребуются дополнительные терминологические соглашения.

Пусть последовательность $B_1, \ldots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T. Выделим в этой последовательности такой ее член B_k с наименьшим индексом, после которого в выводе к членам последовательности, которые зависят от посылок, не использовалось правило адъюнкции RA. Пусть теперь $A_1, \ldots, A_n$ есть все те члены последовательности, необязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве посылок, начиная с шага B_k.

Пусть далее Γ_a - список всех тех посылок из Γ, которые были использованы в выводе до шага B_k. И, наконец, пусть Γ_o - список тех посылок из Γ, которые не использовались в выводе вообще.

Мы имеем, таким образом, три списка посылок Γ_a, Γ_o и $A_1,\ldots, A_n$, которые в своей совокупности исчерпывают весь список Γ и каждый из которых в конкретном случае может быть пустым.

Выражение $\{\Gamma_o\}, \Gamma_a, \downarrow A_1,\ldots, A_n \vdash B$ будем называть *нормализованной записью* утверждения $\Gamma \vdash B$ для нормализованного вывода B из Γ, имеющего вид $B_1, \ldots, B_m$. Записи $\Gamma_a, \downarrow A_1,\ldots, A_n \vdash B$ и $\{\Gamma_o\}, \downarrow A_1,\ldots, A_n \vdash B$ говорят о пустоте соответствующего списка посылок. Запись $C_1,\ldots, C_k, \downarrow A_1,\ldots, A_n \vdash B$ показывает, что после посылок $C_1,\ldots, C_k$ в выводе использовалось RA. При пустоте обоих списков Γ_o и Γ_a будем начинать нормализованную запись с вертикальной стрелки $\downarrow A_1,\ldots, A_n \vdash B$, показывая тем самым, что ни к одной из посылок не применялось в выводе правило RA. Наконец, обычная запись $A_1,\ldots, A_n \vdash B$ говорит только о том, что из указанных посылок можно вывести B, но не утверждается, что запись вывода нормализована.

Заметим, что число различных нормализованных выводов B из гипотез Γ в теории T может быть достаточно большим, а в силу отсутствия запретов на произвольное включение в последовательность вывода теорем из T, на повторение членов последовательности, не являющихся посылками, оно вообще может быть бесконечным. В принципе, такие запреты можно было бы ввести, но в теоретическом плане это не существенно, а в практическом выполняется естественным образом без необходимости специальных оговорок, которые лишь усложнили бы определения. Вместе с тем каждому нормализованному выводу соответствует всегда только одна (с точностью до порядка посылок в Γ_a) нормализованная запись.

Теорема дедукции может теперь быть сформулирована следующим образом:

МТ2. (*Теорема дедукции*). Если последовательность $B_1,\ldots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой *D-теории* T, и $\{\Gamma_o\}, \Gamma_a, \downarrow A_1,\ldots, A_n \vdash B$ есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения $\Gamma \vdash B$, то в T имеет силу всякое утверждение

$$\{\Gamma_o\}, \Gamma_a, \downarrow A_1,\ldots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow \ldots . \rightarrow A_n \rightarrow B \quad (1 \leq i \leq n).$$

Напоминаем, что под *D-теориями* имеются в виду такие теории, которые не слабее, чем D_{min}, а значит, содержат принципы: (1) $A \rightarrow A$; (2) $A \rightarrow B \rightarrow .C \rightarrow A \rightarrow .C \rightarrow B$; (3) $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ (где A - теорема T) и правило вывода MP. Ниже будет дано строгое доказательство **МТ2**. Сначала же некоторые содержательные объяснения.

Сейчас, когда мы имеем формулировку теоремы дедукции, видно, что ограничение рамками только таких теорий связано с возможностью построить для всех указанных принципов в любой теории (для (3) она, конечно, не должна быть *пустой*) выводы, нормализованной записью которых будут соответственно: (1) $\downarrow A \vdash A$; (2) $\downarrow A \to B, C \to A, C \vdash B$; (3) $\downarrow (A \to B) \vdash B$ (где A - теорема теории) и которые поэтому можно получить с помощью принципа дедукции.

Рассмотрим несколько примеров, раскрывающих характерные особенности сформулированной теоремы дедукции. Начнем с ограничения на применение правила адъюнкции. Рассмотрим утверждение

$AB \to .C \to D, A, B, C \vdash D$.

Соответствующим ему нормализованным выводом будет:

1. $AB \to .C \to D$ (*пос.*)
2. A (*пос.*)
3. B (*пос.*)
4. AB (2, 3, *RA*)
5. $C \to D$ (1, 4, *MP*)
6. C (*пос.*)
7. D (5, 6, *MP*)

Нормализованной записью этого вывода будет:

$AB \to .C \to D, A, B, \downarrow C \vdash D$.

Из этого следует возможность получить по теореме дедукции только

$AB \to .C \to D, A, B \vdash C \to D$,

но не

$AB \to .C \to D \vdash A \to .B \to .C \to D$.

Обобщенно говоря, ограничения, связанные с использованием *RA*, не позволяют в нормализованных утверждениях о выводимости заменять в общем случае входящую в список посылок конъюнкцию списком ее составляющих. Такая замена возможна лишь при том, что в процессе вывода можно обойтись без конъюнктивного объединения посылок или зависящих от них формул по правилу *RA*, например, при наличии в теории принципа экспортации. Видимо, уместно обратить внимание на то весьма неожиданное обстоятельство, что ограничения, связанные с *RA*, могут блокировать применение теоремы дедукции даже при том, что утверждение о выводимости содержит всего одну посылку. Так, скажем, в релевантных теориях теорема дедукции не может быть применена к утверждению $(A(C \to C) \to B)A \vdash B$, так как в них нельзя получить конъюнкцию $A(C \to C)$ без помощи *RA*.

Выше мы задавались вопросом, как при наличии теоремы дедукции иметь возможность принимать принцип сокращения в одной системе и отвергать в другой при том, что уже в пустой теории справедливо утверждение $A \to .A \to B, A \vdash B$. Посмотрим, каким образом блокируется применение к нему теоремы дедукции, когда в теории нет принципа сокращения. В соответствии с $D2$ вывод этого утверждения выглядит так:

1. $A \to .A \to B$ (*пос.*)
2. A (*пос.*)
3. $A \to B$ (1, 2, *MP*)
4. A (*пос.*)
5. B (3, 4, *MP*)

Определение $D2$, очевидно, не позволит нам избавиться от вторичного использования посылки A, так как требует, чтобы большая посылка предшествовала меньшей. В связи с этим нормализованной записью данного вывода будет:

$$\downarrow A \to .A \to B, A, A \vdash B,$$

а это значит, что теорема дедукции не позволяет осуществить сокращение повторяющегося члена импликации. Вместе с тем в теориях, где принцип сокращения $(A \to .A \to B) \to .A \to B$ верен, имеется возможность, используя его в выводе, обойтись однократным использованием посылок $A \to .A \to B$ и A, получив требуемое утверждение:

$$\downarrow A \to .A \to B, A \vdash B.$$

Нетрудно убедиться, что верное в релевантных исчислениях R и E утверждение:

$$A \to .C \to .A \to B, A, C \vdash B$$

является нормализованным для R, но не для E. Аналогично,

$$\downarrow A \to .B \to C, B, A \vdash B \quad \text{и} \quad \downarrow A, A \to B \vdash B$$

являются верными для R, но не для E. Причем блокирование от принятия неприемлемых для E утверждений достигается исключительно за счет упорядоченного использования посылок *MP*. В исчислении R это ограничение легко обходится за счет имеющегося здесь принципа $A \to .A \to B \to B$, который позволяет использовать посылки модуса в ином порядке.

Очевидно, что, имея дело с конкретными исчислениями, для каждого из них можно определить свое специальное понимание нормализованного вывода. Наибольший практический смысл при этом может иметь анализ и описание допустимых для тех или иных исчислений преобразований, которые применимы к нормализованным утверждениям о выводимости в различных исчислениях. Так, например, в случае исчисления E в утверждениях $\Gamma_a, \downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ можно менять местами посылки A_i и A_{i+1}, когда последняя имеет вид импликации. Этого нельзя делать в D_{min}, а в R порядок посылок $A_1,..., A_n$ вообще не имеет значения. Для классических исчислений любое верное утверждение $A_1,..., A_n \vdash B$ является нормализованным. Иными словами, $A_1,..., A_n \vdash B$ и $\downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ здесь совпадают. Причина понятна. Во-первых, классический принцип $A \to .B \to A$ позволяет включить в последовательность вывода любую посылку. Во-вторых, закон экспортации $AB \to C \to .A \to .B \to C$ дает возможность обойтись без правила адъюнкции. И, в-третьих, в классической логике нет никаких ограничений на перестановку членов импликации: $A \to .B \to C$ и $B \to .A \to C$ эквивалентны.

Рассматривая те возможности, которые дают разные исчисления при преобразованиях $\downarrow A_1, ..., A_n \vdash B$, можно получать сравнительные важные характеристики как самих исчислений, так и описываемых в них импликаций. Возможен также обратный путь. И это ближе к тому, чем занимался В.А. Смирнов. Идти от принятия некоторых правил преобразований нормализованных утверждений $\downarrow A_1, ..., A_n \vdash B$ к построению соответствующих им исчислений. Именно на этом пути я в свое время обнаружил [11, 12, 17], что между E и R лежит бесконечное множество промежуточных исчислений. Скажем, класс преобразований, допускаемый системой E, можно было бы дополнить уместным с содержательной точки зрения и не противоречащим идеологии этой системы разрешением сокращать повторяющиеся посылки в $A_1, ..., A_n$ не только, когда они стоят непосредственно рядом. Хотите получить бесконечное множество промежуточных между E и R систем, разрешите вычеркивать одинаковые посылки, когда они стоят через одну, через две, через три, ... Такого типа преобразований E имеется множество. Можно, например, сближать одинаковые посылки влево, вправо, навстречу друг другу.

Перейдем к доказательству теоремы дедукции $MT2$. К сожалению, несмотря на то, что определение $D2$, на которое опирается эта теорема, с его явным требованием зависимости последней формулы последовательности вывода от всех гипотез, делает справедливость теоремы достаточно очевидной, строгое ее доказательство оказывается довольно громоздким.

Пусть в некоторой D-теории T существует нормализованный вывод $B_1, ..., B_m$ формулы B из гипотез Γ, которому соответствует нормализованное утверждение $\Gamma_a \downarrow A_1, ..., A_n \vdash B$. Надо показать, что в этом случае верно всякое утверждение:

$$\Gamma_a, \downarrow A_1, ..., A_{i-1} \vdash A_i \to . ... \to .A_n \to B \ (1 \leq i \leq n).$$

Согласно принятым требованиям к нормализованным утверждениям, в последовательности $B_1, ..., B_m$ после появления гипотезы A_1 правило RA не применяется. Исследуем все возможные случаи вида той части последовательности (назовем ее подпоследовательностью G_{km}), которая начинается с шага B_k, на котором в последовательность включена гипотеза A_n, и кончая последним шагом B_m, на котором мы имеем формулу B.

Чтобы избежать громоздкости доказательства, пойдем на некоторые упрощения.

Исключим из рассмотрения те случаи, когда среди членов G_{km} встречаются формулы, являющиеся теоремами T. Мы имеем возможность сделать это на следующем основании. Если теорема является в выводе большей посылкой *MP*, то она без нарушений нормализованности вывода может быть вынесена в начало последовательности и стоять раньше шага B_k. Если же теорема является меньшей посылкой *MP*, то вместо пары членов последовательности $A_T \to C$ и A_T, где A_T - теорема, будем писать $A_T \to C \to C$ и $A_T \to C$, сводя дело к предыдущему случаю.

Обратим внимание также на следующее обстоятельство. Пусть в некоторой теории *T* имеет место теорема вида $C \to A$. Тогда в *T* будет верным $A \to B, C \vdash B$.

Последовательность вывода этого утверждения может быть представлена двояко:

Первый вариант

1. $C \to A$ (теор.)
2. $A \to B$ (пос.)
3. C (пос.)
4. A (1, 3, *MP*)
5. B (3, 4, *MP*)

Второй вариант

1. $A \to B \to . C \to A \to . C \to B$ (теор.)
2. $A \to B$ (пос.)
3. $C \to A \to . C \to B$ (1, 2, *MP*)
4. $C \to A$ (теор.)
5. $C \to B$ (3, 4, *MP*)
6. C (пос.)
7. B (5, 6, *MP*)

Мы будем полагать, что в рассматриваемых нами выводах всегда имеет место второй вариант. В общем случае это означает, что переход от формул последовательности $A \to B$ и C к B на основании *MP* осуществляется за счет ослабления (на основании имеющейся теоремы) $A \to B$, а не C. Мы полагаем также, что в рассматриваемых выводах нет членов последовательности, от которых не зависит последняя формула.

Принимаемые соглашения не отменяют универсальности теоремы. И нам остается рассмотреть три следующих исчерпывающих случая.

<u>Случай 1</u>. B_m совпадает с A_n. Тогда нормализованное утверждение имеет вид $\downarrow B \vdash B$. Теорема дедукции верна в силу того, что в каждой *D-теории* имеет силу $\vdash B \to B$.

<u>Случай 2</u>. A_n находится на шаге B_{m-1}. Тогда, в силу наших ограничений на *MP*, формула A_n может быть только *малой* посылкой этого правила, в результате применения которого получено B_m. Это значит, что в качестве большей посылки мог быть только член последовательности, имеющий вид $A_n \to B$. Но если формула $A_n \to B$ входит в последовательность вывода, то она является выводимой. Заметим, что $A_n \to B$ либо должна быть теоремой теории *T*, либо должна зависеть от всех остальных входящих в вывод гипотез $\Gamma_a, A_1, \ldots, A_n$, так как в противном случае не выполнено было бы требование о зависимости заключения B от всех посылок. Таким образом, возможность, по крайней мере, однократного применения теоремы дедукции в случае 2 доказана.

Случай 3. Гипотеза A_n является меньшей посылкой *MP*, но не совпадает с B_{m-1}. Убедимся, что между формулами B_k и B_m может находиться тогда только одна промежуточная формула последовательности B_{k+1}. Тот факт, что B_{k+1} не может не совпадать с B_{m-1}, доказывается следующим образом. Включить между B_{k+1} и B_m некоторую новую формулу B_{k+2}, зависящую от гипотез, можно было бы только за счет применения *MP*. Большими посылками ни B_k, ни B_{k+1} быть не могут, потому, что после них нельзя включать формулы, зависимые от гипотез, а другие в подпоследовательность G_{km}, как было условлено, не входят. Не могут быть меньшими посылками для получения B_{k+2} также никакие формулы, предшествующие B_k, так как это нарушило бы условие (b) нормализованного использования *MP*.

Это означает, что в случае 3 мы имеем в последовательности вывода предшествующие формуле B_k импликации $B_{k+1} \rightarrow B$ и $A_n \rightarrow B_{k+1}$. И так как в T справедлива теорема транзитивности

$$B_{k+1} \rightarrow B \rightarrow . A_n \rightarrow B_{k+1} \rightarrow . A_n \rightarrow B ,$$

из посылок $\Gamma_a, A_1, \ldots, A_{n-1}$ может быть получен вывод формулы $A_n \rightarrow B$, что и требуется теоремой дедукции.

Если бы формулировка МТ2 гласила, что верность $\Gamma_a, \downarrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$ влечет $\Gamma_a, A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$,

то теорему уже можно было бы считать доказанной. Мы же должны доказать верность более сильного утверждения:

$$\Gamma_a, \downarrow A_1, \ldots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow \ldots \rightarrow A_n \rightarrow B \quad (1 \leq i \leq n) .$$

Нам, собственно, надо показать, что нормализованная последовательность вывода $B_1, \ldots, B_m$ формулы B из $\Gamma_a, A_1, \ldots, A_n$ может быть преобразована в нормализованную последовательность $C_1, \ldots, C_r$, которой будет соответствовать $\Gamma_a, \downarrow A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$.

При доказательстве того, что принцип дедукции применим к последней посылке A_n, мы видели, что $A_n \rightarrow B$ или непосредственно предшествовала посылке A_n или могла быть получена из предшествующих посылке формул с помощью имеющихся в теории D_{min} теорем. В первом случае требуемый нормализованный вывод $C_1, \ldots, C_r$, обеспечивающий вывод $A_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow B$ из $\Gamma_a, A_1, \ldots, A_{n-2}$, мы получим, ограничив последовательность шагом, на котором получено $A_n \rightarrow B$. Во втором - поставив на место A_n заключительную формулу $A_n \rightarrow B$ и включив в вывод соответствующие теоремы.

Так мы можем поступать после каждого применения принципа дедукции, что и требовалось доказать.

Нам остается показать, что МТ2 адекватна любой *D-теории* в смысле следующей метатеоремы:

МТ3. (*Теорема адекватности*). Утверждение $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ верно во всякой *D-теории*, если и только если существует нормализованная последовательность G вывода B из посылок Γ и A, которой соответствует нормализованное утверждение $\Gamma, \downarrow A \vdash B$.

Действительно, раз существует вывод $A \to B$ из Γ, этот вывод всегда можно нормализовать (МТ1). Конечной формулой последовательности нормализованного вывода будет $A \to B$. Добавив к этой последовательности A (как посылку) и B (как результат MP), мы получим нормализованный вывод B из Γ и A, а значит, требуемое $\Gamma, \downarrow A \vdash B$. Обратное утверждение получается на основании МТ2.

МТ3 показывает, что в определении нормализованного вывода и в условиях применения теоремы дедукции МТ2 не содержится каких-либо ограничений, по причине которых при верности $\Gamma \vdash A_1 \to \ldots \to A_n \to B$ не имело бы, тем не менее, силы утверждение $\Gamma_a, \downarrow A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

Подозрение, что такое возможно, связано с требованием зависимости заключения от всех входящих в вывод гипотез, тогда как многие импликативного вида теоремы исчислений таковы, что их консеквенты сами являются теоремами и могут быть получены без участия антецедентов.

Возьмем, например, верное во всех *D-теориях* утверждение:

$\vdash A \to B \to .B \to A \to .B \to B$.

Можно убедиться, что соответствующее утверждение

$\downarrow A \to B,\ B \to A,\ B \vdash B$

является верным. Об этом говорит следующая последовательность формул:

1. $A \to B$ (пос.)
2. $B \to A$ (пос.)
3. B (пос.)
4. A (2, 3, MP)
5. B (1, 4, MP)

Верным будет также получающееся после применения принципа дедукции к $\downarrow A \to B,\ B \to A,\ B \vdash B$ утверждение

$$\downarrow A \to B,\ B \to A \vdash B \to B.$$

Соответствующий последнему нормализованный вывод получается из вывода, приведенного выше, включением в последовательность вывода теоремы $A \to B \to .B \to A \to .B \to B$ и вместо шагов (3)-(5) на последнем шаге формулы $B \to B$.

Конечно, на практике строить выводы, в которых следствие входит в число посылок или число теорем, не имеет никакого смысла. Однако подобные выводы могут оказаться полезными для внутренних целей теории. И, главное, они вполне законны, так как являются подстановочными случаями нормальных выводов. Так, в нашем случае - это подстановочный случай вывода B из $A \to B$, $C \to A$ и C, где вместо C, которое может быть произвольным, стоит B.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В.А.* Замечания по поводу системы силлогистики и общей теории дедукции // Проблемы логики. М.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 64-83.
2. *Смирнов В.А.* Так называемые парадоксы материальной импликации и системы с понятием сильного вывода // Исследование логических систем. М.: Наука, 1970.
3. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления // М.: Наука, 1972, 272 с.
4. *Smirnov V.A.* An absolute first order predicate calculus // Bull. Sec. Log. Pol. Acad. Sci. 1973. V. 2. N 1.
5. *Smirnov V.A.* A new form of the deduction theorem for R, E and P // V Intern. Congr. LMPS, Contrib. Papers. London - Ontario, 1975.
6. *Смирнов В.А.* Формальный вывод, теоремы дедукции и теории импликации // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 54-68.
7. *Попов В.М.* О разрешимости релевантной системы RAO // Модальные и интенсиональные логики. М.: ИФАН СССР, 1978.
8. *Долгова Т.П., Попов В.М.* Проблемы релевантной логики в работе В.А.Смирнова “Формальный вывод и логические исчисления“ // Логические исследования. Вып.4. М.: Наука, 1997.
9. *Сидоренко Е.А.* Принцип дедукции и релевантные теории импликации // Неклассические логики и их применения (Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР). М., 1980. С. 47-55.
10. *Сидоренко Е.А.* О различных понятиях вывода из гипотез // Модальные и релевантные логики. М.: ИФ АН СССР, 1982. С. 27-35.
11. *Сидоренко Е.А.* Логическое следование и условные высказывания. М., 1983.
12. *Сидоренко Е.А.* Логические выводы, доказательства и теория дедукции // Логика научного познания. М., 1987. С. 73-93.
13. *Сидоренко Е.А.* Теорема дедукции для классических и неклассических исчислений // Логические исследования. Вып. 2. М.: Наука, 1993. С. 128-138.
14. *Сидоренко Е.А.* Нормализованные выводы и теорема дедукции // Международная конференция “Смирновские чтения”. М., 1997. С. 25.
15. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.
16. *Карпенко А.С.* Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования. Вып. 2. М.: Наука, 1993. С. 224-258.
17. *Sidorenko E.A.* On extensions of E // Acta philosophica fennica. 1982. N 35. C. 195-202.

Д.В.Зайцев

ТЕОРИЯ РЕЛЕВАНТНОГО СЛЕДОВАНИЯ I: АКСИОМАТИКА

Abstract. *This paper foregoes a complex investigation in relevance logic. In what follows I'm summing up recent results in relevant logic in order to answer the question: what is wrong with the theory of entailment. Among numerous defects (such as undecidability) main are connected with justification of truth functional tautologies and $A \rightarrow A$ representing the archetypal form of inference . It leads to conclusions that (1)* **R** *and* **E** *are too strong to express entailment and (2) an appropriate theory of entailment must be a conservative extension of* **FDE***. As a consequence, sub-system of* **T** *(without Reductio) is proposed to be the basis for True Entailment.*

Неприглядная картина сложилась в релевантной логике. Ее недолгая, но бурная история определенно зашла в тупик.

Систему **E**, с которой связаны были главные надежды основоположников релевантной логики, критикуют за смешение модальности в духе **S4** и "исправленной" интуиционистской импликации $\mathbf{H}_{\rightarrow}$, за необоснованность негативных аксиом, за искусственную *ad hoc* формальную семантику. К недостаткам системы **R** относят, наоборот, невыразимость модальности через импликацию, некоторые интуитивно сомнительные дедуктивные принципы (неограниченную перестановочность). Обе эти системы оказываются недостаточно сильными для выражения некоторых вполне приемлемых дедуктивных принципов. Систему **T** вообще не воспринимают серьезно.

Наконец, все достаточно богатые системы (и **R**, **T**, **E** в том числе) оказались неразрешимыми, что, естественно, накладывает дополнительные ограничения на их использование в computer science.

Только лежащая в основе релевантной логики первоуровневая система $\mathbf{E_{fde}}$ не вызывает никаких сомнений. Надстроенные над ней более богатые системы не выполнили задачи экспликации релевантного следования и, вдобавок, страдают целым рядом крупных и мелких недостатков. На первый взгляд, кажется, что в процессе надстраивания более высоких порядков были допущены какие-то кардинальные просчеты. Поэтому, если стремиться к реанимации релевантной логики, то начинать следует с анализа процесса построения систем второго и более порядков, принимая как основу $\mathbf{E_{fde}}$.

Ниже будут подробно проанализированы основные особенности и некоторые недостатки известных систем релевантной логики. На основании этого анализа будет сформулирован подход к построению новой теории релевантного следования и дана аксиоматизация этой теории.

1. Импликация и модальность

Для начала рассмотрим импликативные фрагменты основных систем релевантной логики.

$\mathbf{E}_{\rightarrow}$: Как известно, эта система была сконструирована как релевантная модальная логика, в которой модальность (необходимость) выражается через импликацию – $\Box A \Leftrightarrow A \rightarrow A \rightarrow A$. В качестве единственного правила принимается модус поненс. Аксиоматика следующая:

I: 1. $A \rightarrow A$ (Тождество);

B: 2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$ (Префиксная Транзитивность);

W: 3. $(A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (Сокращение);

CR: 4. $(A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow D) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow D))$ (Ограниченная Перестановочность).

Аксиома ***B*** может быть заменена на суффиксную форму Транзитивности – ***B`***: $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$. Еще одна интересная формулировка системы получается, если взять ***B`***, ***W*** и аксиому Модализатор $((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B$. Простая подстановка A вместо B в эту аксиому дает аналог $\Box A \rightarrow A$.

В системе $\mathbf{E}_{\rightarrow}$ оказываются доказуемы модальные принципы **S4**: $\Box A \rightarrow A$; $(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(A \rightarrow B)$; $\Box A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow \Box B)$.

Система $\mathbf{R}_{\rightarrow}$ получается простым добавлением к указанным аксиомам Демодализатора $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A$, равносильного $A \rightarrow \Box A$, что естественно разрушает всю систему модальностей **E**(**S4**). Другая аксиоматизация $\mathbf{R}_{\rightarrow}$ получается заменой ***CR*** на обычную (неограниченную) Перестановочность (***C***).

Наконец, система $\mathbf{T}_{\rightarrow}$ оказывается самой слабой в “большой тройке” систем и поэтому тоже не является модальной. Если $\mathbf{R}_{\rightarrow}$ слишком сильна для выражения модальности через импликацию, то $\mathbf{T}_{\rightarrow}$ недостаточно сильна, чтобы выразить модальные принципы. В этой системе недоказуемы Ограниченная Перестановочность, Ограниченное Утверждение, Модализатор, Демодализатор. Подходящая аксиоматизация включает ***I***, ***B*** и ***B`***, а также ***S*** и Переставленную Самодистрибутивность (***S`***): $A \rightarrow B \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$. Обе формы Самодистрибутивности могут быть заменены Сокращением.

Подводя некоторый итог, можно заметить, что

необходимым и достаточным условием выражения модальности через импликацию является доказуемость Модализатора и недоказуемость Демодализатора.

Естественным образом возникает важный вопрос: должна ли релевантная логика быть модальной?

2. Парадоксы релевантности

По замыслу своих основоположников, релевантная логика должна была не только адекватно выражать отношение логического следования (чего она не делает), но и быть свободной от парадоксов материальной импликации (классического следования). Интересно заметить в этой связи, что одна из таких попыток была предпринята Льюисом в его теории строгой импликации. Однако оказалось, что взамен парадоксов материальной импликации появились новые парадоксы строгой импликации. На мой взгляд, аналогия со строгой импликацией уместна и в отношении релевантной импликации. Импликация и связанное с ней отношение следования в основных системах релевантной логики оказывается в определенном смысле парадоксальным.

Начнем с анализа понятия логического закона классической логики высказываний. При стандартном определении – это формула, истинная при любой интерпретации входящих в нее параметров (см. [1]). В соответствии с этим вполне правомерно понимание закона как формулы, следующей из пустого множества посылок – $\varnothing \models A$. Кроме того, особенности материальной импликации и классического следования позволяют модифицировать это определение, подставив на место пустого множества произвольное множество (возможно пустое) формул Δ. Таким образом, формула A является законом классической логики высказываний, е. и т.е. $\Delta \models A$ верно для любого Δ.

Это семантическое определение имеет свой синтаксический аналог в понятии теоремы как доказуемой формулы, т.е. выводимой из пустого множества формул. Для случая классической логики высказываний будет также верно утверждение

***K*: Любая теорема выводима из произвольного множества формул.**

Синтаксически это утверждение выражается в законе утверждения консеквента: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, который отвергается во всех системах релевантной логики. Для них в общем случае неверно утверждение ***K***. Однако, оказывается, есть формула, которая по выражению авторов [7], “представляет архетипичную форму всякого вывода”, – это закон тождества $A \rightarrow A$.

В системе **E** (и ее импликативном фрагменте) связь теорем и формулы ***I*** иллюстрирует аксиома Модализатор – $((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B$. Неформальное прочтение которой таково: “Если закон тождества влечет некоторую формулу, то она – теорема **E**”. В принципе, этот дедуктивный постулат служит основой для семантики ослаблений Е.К.Войшвилло ([1]) и ее дуала – реляционной семантики с “двумирными” точками соотнесения (семантики “усилений”) Е.А.Сидоренко ([3]).

Условимся называть подстановочный случай закона тождества для произвольной формулы *Ф* “*Ф*-тождеством”. Тогда подстановка *A* вместо *B* в Модализатор позволяет выразить связь теорем **R** с формулой ***I***: “Некоторая формула *A* является теоремой **R**, е. и т. е. ее влечет *A*-тождество”. Таким образом, в сравнении с **E**, система **R** действительно несколько проигрывает: в ней все теоремы, и только они, оказываются следствием соответствующей формы закона тождества, в то время как в **E** принимается только первая часть этого утверждения.

Итак, относительно систем **E** и **R** можно сформулировать утверждение

Kr : **Всякое следствие закона тождества является теоремой.**

В этом, на мой взгляд, и состоит парадоксальность релевантной импликации и соответствующего отношения следования. На смену известным предпосылкам о полноте и непротиворечивости, выявленным в информационном подходе Е.К.Войшвилло, приходит предпосылка, скажем, “само-тождественности”. Кстати, в уже упоминавшейся семантике Е.А.Сидоренко эта предпосылка явно присутствует в определении семантически истинной формулы как характеристика возможного мира, в котором верифицируется формула.

Получается, что все положения информационного подхода Е.К.Войшвилло о привнесенной информации при оценке информативности законов классической логики можно применить и к анализу законов релевантной логики. В семантиках систем **E** и **R** оценивается не информативность законов соответствующих теорий самих по себе. Мы и в этом случае имеем дело с информацией некоторого высказывания *A* при наличии *Г*, с той разницей, что *Г* теперь содержит соответствующую подстановочную форму закона тождества (или конъюнкцию законов тождества, или, в случае языка с пропозициональными константами – константу *t*).

Итак, возможны следующие альтернативы: либо признать архетипичность закона тождества и смириться с его ролью в релевантной логике, либо считать такое “родство” классической и релевантной логики недостатком в экспликации понятия релевантности и релевантного следования как выражающего связь между высказываниями по их собственному содержанию. Эта последняя альтернатива предполагает дальнейшее развитие релевантной логики, во-первых, не на основе систем **R** и **E**, а во-вторых, не в русле модальности (как она определяется в **E**).

Кроме того, имеется еще ряд формул, доказуемых в системе $\mathbf{E}_{\rightarrow}$, но вызывающих определенные сомнения с интуитивной точки зрения. К их числу, в первую очередь, относятся $(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow(A\rightarrow B))$, представляющая собой подстановочный случай закона утверждения консеквента, и $(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow(B\rightarrow A))$, также получающаяся подстановкой из явно парадоксальной $A\rightarrow(B\rightarrow B)$.

В этой связи следует упомянуть систему $\mathbf{T}_{\rightarrow}$, которая несколько выпала из рассмотрения. В ней не доказуемы парадоксальные релевантные формулы ни одного из упомянутых видов, в этом смысле она является вполне удовлетворительным кандидатом на выражение понятия релевантной условной связи и, возможно, следования.

3. Импликация и отрицание

Негативные аксиомы релевантной логики не отличаются разнообразием и не варьируются от системы к системе. Более того, такой авторитетный источник, как [6], просто приводит список аксиом со ссылкой на [5]. Вот этот список:

N1. (***Cont***) $(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$;

N2. (***NI***) $(A\&\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$;

N3. (***DNI***) $A\rightarrow\neg\neg A$;

N4. (***DNE***) $\neg\neg A\rightarrow A$.

Вторая аксиома в этом списке может быть заменена на N2*.(***Red***) $(A\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg A$. Первая и третья аксиомы объединяются в то, что принято называть интуиционистской контрапозицией (***Cont$_I$***): $(A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow\neg A)$.

Конечно, такое безоговорочное принятие негативных постулатов не может не настораживать, особенно в контексте *Entailment*, *vol.*I, где, скажем, выбору импликативных аксиом посвящены практически две первые главы (около 100 стр.). Наиболее обоснованное и критическое недоумение по поводу этих принципов можно найти в [8]. Причем, если аксиомы первая, третья и четвертая у любого не чересчур интуиционистски (конструктивистски) настроенного логика не вызывают особых вопросов, то аксиома два выглядит весьма сомнительно.

Во-первых, подстановка $\neg A$ вместо A в N2* в присутствии N3,4 дает $(\neg A\rightarrow A)\rightarrow A$. Если далее попробовать выразить отрицание через константу f и импликацию (что вполне оправданно для некоторых релевантных логик), то получившаяся формула $((A\rightarrow f)\rightarrow A)\rightarrow A$ представляет собой подстановочный случай закона Пирса, приемлемость которого в контексте релевантной логики не обсуждается. Да и без того, трудно интуитивно обосновать дедуктивный принцип, гласящий, что теорему влечет ее собственное отрицание. Единственная, на мой взгляд, разумная интерпретация состоит в требовании тотальной непротиворечивости дедуктивной теории.

Во-вторых, сомнения вызывает ее "контрапозиционная" формулировка $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \supset B)$. Она сразу же делает теоремами все истинно-значные тавтологии классической логики. В самом деле, простая подстановка A вместо B в сочетании с *modus ponens* приводит к закону исключенного третьего, этой архетипичной форме классических тавтологий. Странным и непоследовательным выглядит все это в сравнении с первоуровневой системой следования.

Наконец, по поводу N2 имеется небезынтересный пассаж в работе Г.Фреге "Логические исследования. Часть третья: сложная мысль" ([4]). Анализируя так называемую "сложную мысль шестого рода", он приходит к формулировке высказывания с союзом "если, то". «Мысль, выраженная сложным предложением "Если у меня есть петух, который сегодня снес яйца, тогда Кельнский собор завтра утром разрушится", также является истинной. Кто-нибудь, вероятно, скажет: "Но здесь условие внутренне никак не связано с заключением". С моей точки зрения, однако, такой связи не требуется, я прошу лишь того, чтобы "Если B, то A" понималось только с точки зрения того, что я говорил и выражал в форме "не [(не A) и B]"». ([4], с.87–88). Таким образом, понимание условной связи Фреге вполне соответствует нашей современной интерпретации материальной импликации, а обоснование истинности формулы вида $A \supset B$ осуществляется через отрицание конъюнкции A и $\neg B$. При наличии в системе контрапозиции, это позволяет обосновать дедуктивный принцип N2**: $(A \& \neg B) \supset \neg(A \supset B)$.

Резюмируя, следует заметить, что негативные аксиомы, некритично включаемые в состав практически любой системы релевантной логики, должны в принципе служить предметом более пристального анализа, обсуждения и, вполне возможно, ослабления. Наиболее спорной в этом списке выглядит N2 (N2*).

4. Импликация, отрицание и другие связки

Анализируя построение Андерсоном и Белнапом системы **E**, Р.Роутли восклицает: "Как, отправляясь от импликативного фрагмента и системы первоуровневого следования, они смогли прибыть к системе **E** как целому?"(см. [8]). Это вполне закономерный вопрос, поскольку система **E** не является консервативным расширением $\mathbf{E_{fde}}$. Авторам *Entailment* понадобилось изобрести весьма нелепую, лишенную изящества систему $\mathbf{E_{fdf}}$, представляющую некоторый гибрид классической логики и первоуровневого следования. Теоремами этой системы являются, с одной стороны, все теоремы $\mathbf{E_{fde}}$, а с другой – истинностно-функциональные тавтологии классической логики высказываний. На мой взгляд, именно на этом этапе была нарушена последовательность в построении теории релевантного следования.

Попробуем пойти несколько иным путем, рассмотрев промежуточную стадию перехода от первоуровневого следования к более богатым системам. Рассмотрим систему второуровневого релевантного следования $\mathbf{A}_0$, построенную в [8] и являющуюся консервативным расширением $\mathbf{E}_{\mathbf{fde}}$.

Постулаты и правила $\mathbf{A}_0$:

A1. (*I*);

A2. ($\boldsymbol{CE_1}$) $A\&B\to A$;

A3. ($\boldsymbol{CE_2}$) $A\&B\to B$;

A4. (***CI***) $(A\to B)\&(A\to C)\to(A\to(B\&C))$;

A5. ($\boldsymbol{DI_1}$) $A\to(A\vee B)$;

A6. ($\boldsymbol{DI_2}$) $B\to(A\vee B)$;

A7. (***DE***) $((A\to C)\&(B\to C))\to((A\vee B)\to C)$;

A8. (***Dis***) $(A\&(B\vee C))\to((A\&B)\vee C)$;

A9. (***Tr***) $((A\to B)\&(B\to C))\to(A\to C)$;

A10.(***Cont***);

A11. (***DNI***);

A12. (***DNE***);

R1. (***MP***) $A\to B, A\ /\ B$;

R2. (***&I***) $A, B\ /\ A\&B$.

Любая из известных систем релевантной логики (включая слабую “базовую” систему **B**) содержит $\mathbf{A}_0$.

Для того чтобы создать основу для консервативного расширения второуровневой системы, Роутли понадобилось пополнить $\mathbf{A}_0$ законом исключенного третьего. В сочетании с ***MP*** это сразу же дает все классические тавтологии. И, следовательно, опять уводит нас в сторону.

Следующий и последний шаг в построении систем высокого уровня состоит в формулировке третьеуровневых систем, т.е. в сочетании $\mathbf{A}_0$ (или $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + A\vee\neg A$) с импликативными фрагментами основных систем. Этого оказывается вполне достаточно, поскольку имеется результат Р.Майера о сведéнии импликации любого уровня к третьему ([7]).

5. Теория релевантного следования

Пришло время подвести некоторые итоги и обратиться, собственно, к построению "настоящей" релевантной логики. В предыдущих параграфах были рассмотрены недостатки традиционных теорий релевантной логики. Очевидно, что новая теория должна быть свободна от этих недостатков. Однако нельзя обойти вниманием вопрос о том, что стоит за этими недостатками. Наивно было бы считать, что пусть недолгая, но бурная история релевантной логики состоит из целой цепи ошибок, которые последовательно повторяются в основных фундаментальных работах в этой области науки, несмотря на все различия в подходах к проблематике их авторов.

Итак, что же это за теории, которые все это время ошибочно считались релевантной логикой, и каково главное отличие "настоящей" релевантной логики от ее предшественниц? Все отмеченные выше недостатки неоспоримо указывают на родство релевантной логики с классической логикой. Более того, если понимать материальную импликацию как сокращение для дизъюнкции и отрицания, то окажется, что все теоремы классической логики высказываний являются законами **E**, **T** и **R** – теорий релевантной логики. По поводу соотношения релевантной и классической логик существует весьма оригинальная точка зрения, принадлежащая Е.К.Войшвилло. Суть ее в том, что релевантная логика есть не какая-то альтернатива классике, а этап в развитии логики вообще. В этом смысле можно говорить о релевантной модальной, интуиционистской и т.п. логиках.

Не вдаваясь в подробный анализ этой позиции, можно, тем не менее, заметить, что подход Е.К.Войшвилло позволяет классифицировать и "традиционные" системы релевантной логики. Они представляют собой релевантные варианты классической логики. Это сразу объясняет их странные "парадоксальные" свойства и кажущиеся недостатки. Кажущиеся, потому что на самом деле они выражают черты классической логики, сохраняющиеся в ее релевантизированном варианте.

Что же тогда должна представлять собой "настоящая" релевантная логика? Ответ на этот вопрос, в принципе, лежит на поверхности. В нашем анализе уже упоминалась действительно релевантная теория первоуровневого релевантного следования. Ключевым словом здесь является не *первоуровневое*, а *следование*. В самом деле, идеалом релевантной логики всегда была формальная теория логического следования, а побудительным мотивом к ее созданию служила неадекватная формализация следования средствами классической логики. Эта неадекватность проявляет себя в классе импликативных законов классической логики. В силу функциональной полноты классической логики высказываний, импликативные и неимпликативные законы не имеют четкого различения. При желании, все теоремы классики можно считать формами закона тождества, а можно в основу положить закон исключенного третьего или непротиворечия. Все эти непринципиальные в контексте классической логики различия становятся очень существенными при переходе к логике релевантной.

Первый шаг в построении релевантной логики был сделан, когда появилась система $\mathbf{E}_{\mathbf{fde}}$. Следующие шаги состоят в распространении этого подхода на более высокие уровни импликативных логик. Таким образом, настоящая релевантная логика представляется как теория чистого релевантного следования.

Легко заметить, что наименее "парадоксальной" (в указанном выше смысле) является система **T**. Очевидно, что она и должна послужить, наряду с $\mathbf{E}_{\mathbf{fde}}$, основным источником для построения действительно релевантной логики, или теории чистого релевантного следования. Система **T** содержит $\mathbf{E}_{\mathbf{fde}}$ и **A** как свои подсистемы. К ее недостаткам можно отнести, во-первых, наличие N2* (***Red***), а во-вторых, отсутствие принципов типа формулы Уркварта.

Reductio интуитивно плохо согласуется с идеями релевантной логики. Тем не менее, может показаться, что отказ от *Reductio* является слишком сильным требованием. Действительно, интуитивные соображения, лежащие в основе релевантной логики, предполагают отказ от парадоксальных импликативных теорем классической логики, и только от них. В соответствии с этим, все импликативные теоремы любой системы релевантной логики должны быть теоремами классической логики, если в них все вхождения $\rightarrow$ заменить на $\supset$. Однако интересующее нас соотношение должно проявляться уже на уровне импликативных фрагментов. В самом деле, в $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$ (Закон утверждения консеквента, ***B`***, Закон Пирса) + ***MP*** доказуемы все теоремы $\mathbf{E}_{\rightarrow}$ ($\mathbf{R}_{\rightarrow}$, $\mathbf{T}_{\rightarrow}$). Для установления этого факта совершенно не нужно рассматривать материальную импликацию как сокращение для отрицания и дизъюнкции.

Первый результат на пути построения теории релевантного следования будет состоять в "исправлении" системы **E** и ведет к следующей формулировке исходной системы "*of true entailment*" **TE**: Схемы аксиом – ***I***, ***B***, ***B`***, ***W***, ***CE***, ***CI***, ***DI***, ***DE***, ***Dis***, $\boldsymbol{Cont_I}$, ***DNE***; правило ***MP***.

Дальнейшие исследования предполагают расширение **TE** принципами типа формулы Уркварта с соответствующими модификациями семантики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М.,1988.
2. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. Учебник. М.,1994.

3. *Сидоренко Е.А.* Реляционная семантика релевантных исчислений // Логические исследования. Вып.3. М., 1995. С.53–71.
4. *Фреге Г.* Логические исследования. Томск, 1997.
5. *Ackerman W.* Bergundung einer strengen Implikation // The journal of symbolic logic. 1956. Vol.21. P.113–28.
6. *Anderson A.R., Belnap N.D., Jr.* Entailment. The logic of relevance and necessity Vol.1. Princeton, 1975.
7. *Meyer R.K.* Career inductive stops here (and here = 2) // Journal of philosophical logic. 1979. Vol.8. P.361–371.
8. *Routley R., Plumwood V., Meyer R.K., Brady R.* Relevant logics and their rivals. Part I. The basic philosophical and semantical theory. Atascadero, California, 1982.

П.И.Быстров

РАЗРЕШИМЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА АБСОЛЮТНОЙ РЕЛЕВАНТНОЙ СИСТЕМЕ В.А.СМИРНОВА

Abstract. *An approach to the problem of decidability of propositional relevant calculi is displayed in the form of effective decision procedure for the calculus closely related to V.A.Smirnov's «absolute» system. The procedure is presented as proof-search algorithm for the sequent calculus with indexed formulae* ***SIRC****. The contribution is restricted by the idea and basic techniques of decision procedure whereas a question of strategies and heuristics is not discussed. However the method under consideration is supposed to be applicable to several relevant logics.*

В книге "Формальный вывод и логические исчисления" В.А.Смирновым построено релевантное исчисление предикатов, названное им "абсолютным". Пропозициональная часть этого исчисления в аксиоматическом его варианте включает в себя аксиомы

1. $A \supset A$
2. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$
3. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$
4. $(A \supset (A \supset C)) \supset (A \supset C)$
5. $((C \supset A) \& (C \supset B)) \supset (C \supset (A \& B))$
6. $(A \& B) \supset A$
7. $(A \& B) \supset B$
8. $((A \supset C) \& (B \supset C)) \supset ((A \vee B) \supset C)$
9. $A \supset (A \vee B)$
10. $B \supset (A \vee B)$
11. $(A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A)$

Правилами вывода являются modus ponens и правило введения конъюнкции

$$\frac{A,\ B}{A \& B}$$

На применение этого правила накладывается ограничение, согласно которому его посылки должны быть аксиомами или уже доказанными формулами.

Такая система дедуктивно эквивалентна пропозициональной части абсолютного секвенциального исчисления **SLA** с устранимым правилом сечения. Как отмечает В.А.Смирнов, пропозициональный фрагмент **SLA** неразрешим. Следовательно, неразрешима и эквивалентная ему аксиоматическая система.

Ниже предлагается разрешающий метод для пропозициональных исчислений, близких к "абсолютной" системе В.А.Смирнова. Разрешающая процедура состоит в организации поиска вывода в секвенциальном исчислении отмеченных (индексированных) формул **SIRC**.

1. Секвенциальное исчисление индексированных формул SIRC

Обычный язык пропозициональной логики с константами $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\supset$ (импликация) и $\neg$ (отрицание) расширяется за счет числовых индексов, вводимых согласно следующему определению.

Определение 1.1.

1) Любое натуральное число (исключая 0) есть индекс.

2) Если m, n – натуральные числа, то упрядоченная пара $<m,n>$ есть индекс.

3) Если m,n – натуральные числа, а I_1, I_2 - индексы, то упорядоченная пара вида $<I_1,m>$, $<n,I_2>$ или $<I_1,I_2>$ есть индекс.

4) Любое выражение, отличающееся от выражений, указанных в пунктах 1-3, не является индексом.

Индексированная формула есть пара вида $(A)w$, где A – правильно построенная (в обычном смысле) формула, а w - индекс.

Везде далее k, m, n,... обозначают натуральные числа, u, w,... – индексы, α, β, γ,... - индексированные формулы, а Γ, Θ, Δ, Ψ – списки индексированных формул. Для упрощения записи в индексах опускаются угловые скобки, не нарушающие однозначность прочтения данного индекса.

Секвенцией называется выражение вида $\Gamma \to \Theta$.

В описанном языке строится исчисление **SIRC**, включающее в себя:

Основную секвенцию $\Gamma, (A)w, \Delta \to \Theta, (A)w, \Psi$, где (1) A – элементарная (не содержащая логических констант) формула и (2) ни в один из списков индексированных формул не входит ни элементарная формула $(B)w$, где $B \neq A$, ни $(A)u$, где $u \neq w$.

Правила вывода

$$\frac{(A)u,\ \Gamma \to \Theta,\ (B)w}{\Gamma \to \Theta,\ (A \supset B)<u,w>}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, (\ A)u \qquad (B\ )w,\ \Delta \to\ \psi}{(A \supset B\ )<u,w>, \Gamma, \Delta\ \to \Theta, \psi}$$

$$\frac{(\ A)u, \Gamma \to \Theta \qquad (B\ )w, \Gamma \to \Theta,}{(A\vee B\ )<u,w>, \Gamma \to \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\ (\ A)u \qquad \Gamma \to \Theta,\ (B\ )w}{\Gamma \to \Theta\ , (A\&B\ )<u,w\ >}$$

$$\frac{(\ A)u,\ (B\ )w, \Gamma \to \Theta,}{(A\&B\ )<u,w>, \Gamma \to \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\ (\ A)u, (B\ )w}{\Gamma \to \Theta\ , (A\vee B\ )<u,w\ >}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, (B\ )w}{\neg(B\ )w,\ \Gamma \to \Theta}$$

$$\frac{(B\ )w, \Gamma \to \Theta,}{\Gamma \to \Theta,\ \neg(B)w}$$

Выводом в **SI   RC** является дерево секвенций, построенное из основных секвенций с помощью перечисленных правил вывода. Соответственно, секвенция S выводима в **SIRC**, если она является самой нижней секвенцией вывода в **SIRC**.

2. Описание разрешающей процедуры

Для осуществления разрешающей процедуры на базе **SIRC** строится *дерево поиска вывода*. Процесс его построения включает в себя следующие шаги.

0. Испытуемой формуле A (вывод которой требуется найти) сопоставляется односукцедентная секвенция $\to A$. Стандартным способом фиксируются положительные и отрицательные вхождения всех элементарных подформул формулы A:

– A является положительным вхождением в A;

–A (B) является отрицательным (положительным) вхождением в формулу $A\supset B$, если $A\supset B$ является положительным вхождением в некоторую формулу C, и положительным (отрицательным) вхождением, если $A\supset B$ является отрицательным вхождением;

– $\neg$ изменяет знак вхождения на противоположный;

– знак вхождения формулы вида $A\&B$ ($A \vee B$) переносится без изменений на ее подформулы.

1. Каждому вхождению (положительному или отрицательному) элементарной подформулы в испытуемую формулу A в строгой последовательности слева направо приписывается индекс следующим образом:

a) первому вхождению элементарной подформулы B в A приписывается индекс n (n=1);

b) i-ому отрицательному (положительному) вхождению элементарной подформулы C в A приписывается индекс $n+1$, если другому отрицательному (положительному) вхождению C ранее уже был приписан индекс n; в противном случае данному вхождению C приписывается индекс n.

В результате получается соответствующая формуле A "квазииндексированная" формула A^* (формула с индексированными элементарными подформулами).

2. По формуле A^* строится соответствующая индексированная формула α согласно следующему алгоритму:

2.1. Каждая подформула A^* вида $(A)u\&(B)w$ преобразуется в $(A \wedge B)<u,w>$

2.2. Каждая подформула A^* вида $(A)u \vee (B)w$ преобразуется в $(A \vee B)<u,w>$

2.3. Каждая подформула A^* вида $(A)u \supset (B)w$ преобразуется в $(A \supset B)<u,w>$

2.4. Каждая подформула A^* вида $\neg(A)u$ преобразуется в $(\neg A)<u>$.

Применение шагов 2.1–2.4 начинается "из глубины" A^* (когда A и B являются элементарными) и заканчивается, когда получается правильно построенная индексированная формула с единственным индексом и "чистыми" подформулами. Естественно, общее количество натуральных чисел в индексе формулы α равно количеству вхождений в нее элементарных подформул.

3. Секвенция $\rightarrow A$ заменяется на секвенцию $\rightarrow \alpha$.

4. Дерево поиска вывода для секвенции $\rightarrow \alpha$ конструируется согласно следующим правилам:

4.1. К одному из членов данной секвенции применяется правило вывода исчисления **SIRC** "снизу вверх": данная секвенция принимается в качестве заключения, по которому восстанавливаются соответствующие посылки.

4.2. Построение данной ветви дерева заканчивается, если получена секвенция, ни к одному члену которой не применимо никакое правило или она является основной секвенцией.

Вывод формулы α построен, если каждая ветвь дерева поиска вывода секвенции $\rightarrow \alpha$ заканчивается основной секвенцией; вывода этой формулы не существует, если построение всех ветвей дерева поиска закончено (в смысле пункта 4.2), и хотя бы одна из ветвей заканчивается секвенцией, к которой не применимо ни одно правило и при этом она не является основной секвенцией.

Пример поиска вывода формулы $(\neg A \vee B) \supset (A \supset B)$

Шаг 0. Испытуемой формуле соответствует секвенция $\to (\neg A \vee B) \supset (A \supset B)$.

Шаг 1. В соответствии с пунктами 1a и 1 b по сукцеденту данной секвенции строится квазииндексированная формула следующим образом:

– первому слева (отрицательному) вхождению A приписывается индекс 1;

– первому (отрицательному) вхождению B приписывается индекс 1;

– второму (отрицательному) вхождению A приписывается индекс 2 (поскольку ранее отрицательному вхождению A уже был приписан индекс 1;

– второму (положительному) вхождению B приписывается индекс 1.

В результате получаем $\to (\neg(A)1 \vee (B)1) \supset ((A)2 \supset (B)1)$.

Шаг 2.

В соответствии с пунктом 4.4 получаем

$\to ((\neg A)1 \vee (B)1) \supset ((A)2 \supset (B)1)$.

В соответствии с пунктом 4.2 получаем

$\to ((\neg A \vee B)<1,1>) \supset ((A)2 \supset (B)1)$.

В соответствии с пунктом 4.3 получаем

$\to (\neg A \vee B)<1,1> \supset (A \supset B)<2,1>$.

В соответствии с пунктом 4.3 получаем

$\to (\neg A \vee B)<1,1> \supset (A \supset B))<1,1>,<2,1>$.

Шаг 3. Строим дерево поиска вывода последней из полученных на предыдущем шаге секвенций.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A)2 \to (B)1,\ (A)1}{(A)2,\ (\neg A)1 \to (B)1} \qquad (B)1 \to (B)1}{(A)2,\ (\neg A \vee B)<1,1> \to (B)1}}{(\neg A \vee B)<1,1> \to (A \supset B)<2,1>}}{\to (\neg A \vee B)1 \supset (A \supset B))<1,1>,<2,1>}$$

Одна из его ветвей закончится основной секвенцией вида $(B)1 \to (B)1$, а другая – секвенцией $(A)2 \to (B)1,\ (A)1$. К ней не применимо ни одно правило, и она не является основной секвенцией (согласно определению основной секвенции **SIRC**). Процедура поиска закончена безуспешно. Получен отрицательный результат: вывод испытуемой формулы заданными средствами построить невозможно.

Несмотря на то что в исчислении **SIRC** отсутствуют структурные правила, оно является релевантным исчислением, “близким” к абсолютной пропозициональной системе В.А.Смирнова (обозначим ее **SLAp**) в следующем смысле. Пусть S – некоторая (обычная) секвенция, а S^* получена из S в результате a) переноса всех антецедентных формул в сукцедент (согласно правилу введения стрицания в сукцедент); и b) приписывания индексов всем сукцедентным формулам по правилам, которые были сформулированы выше при описании разрешающей процедуры. Можно показать, что если секвенция S выводима в **SLAp** без правила сокращения, то S^* выводима в **SIRC**. С другой стороны, если секвенция S_i выводима в **SIRC**, то в **SLAp** выводима секвенция, полученная из S_i вычеркиванием всех индексов, приписанных входящим в нее формулам.

Из исчисления **SIRC** можно получить другие разрешимые релевантные системы, в основе которых лежат принципы, использованные В.А.Смирновым при построении “абсолютного” исчисления. Один из способов получения таких систем – варьирование ограничений на основную секвенцию и введение ограничений на применение правила введения импликации в сукцедент. Ограничения на основную секвенцию в **SIRC** “очень жесткие”, их можно ослаблять и варьировать. При ослаблении этих ограничений можно получить системы, соответствующие расширениям “абсолютного” пропозиционального исчисления (без правила сокращения) за счет таких, например, формул, как $((A \vee B) \& \neg B) \supset A$ или $A \supset (A \supset A)$.

K. Segerberg

ON THE REVERSIBILITY OF DOXASTIC ACTIONS

Абстракт. *Спорным вопросом, касающимся постулата восстановления в теории пересмотра полагания, основанной Алькурроном, Гарденфорсом и Макинсоном, являются последствия сокращения, представляющего собой некоторый тип доксастической аксиомы: могут ли они, в каком-то смысле, быть устранены. Этот вопрос является частным случаем более общей проблемы, обсуждаемой здесь. Статья имеет дело с формальной семантикой пересмотра полагания, она не содержит технических результатов.*

1. Definitions[1]. Let U be a nonempty set (*universe*) of elements (*points*) with an associated compact, totally separated topology T[2]. The subsets of U that are clopen (both closed and open) are called *propositions* in T (and they provide a base for T). If certain conditions are satisfied, a nonempty set of closed subsets of U will qualify as a *hypertheory*; a particular theory of belief revision would single out a particular family, the elements of which would be referred to as hypertheories in the sense of that theory[3]. Associated with each *doxastic action* is a binary relation in the set of hypertheories in T. We will use letters X, Y, Z for subsets of U, the letter H for hypertheories, letters P, Q for propositions, letters a, b for actions, and R(a), R(b) for the associated relations of the latter.

There is a difference between performing a doxastic action (which consists of processing a piece of information) and reverting to a previous position, once held but since been abandoned—the latter is of course also an action of sorts, but on a different level, as it was. Perhaps we might say that the former action is *internal*, the latter

---

1 For brevity and simplicity we omit the details of basic dynamic doxastic logic (DDL) as well as background and motivation; interested readers are referred to [1, 4, 7]. An introduction to the theory of belief revision itself is given, for example, in [2].

2 Totally separated: for all u, v $\in$ U, if u $\neq$ v then there is a set X $\subseteq$ U both closed and open such that u $\in$ X but v $\notin$ X. (The idea to use topology in connection with belief dynamics has occurred, independently, to Sten Lindstrцm and Timothy Surendonk.)

3 A hypertheory H is supposed to represent a possible belief state with the intersection $\cap$H representing the corresponding belief set. Informally, the *belief state* of an agent is viewed as the total of his dispositions to modify his beliefs in the face of new information, while the *belief set* is the total of his current beliefs. The union $\cup$H may be seen as the total of the agent's doxastic commitments. There are several different ideas of what hypertheories can (and should) look like.

external. In order to make the distinction clear we introduce the concept of a doxastic walk. A sequence $H_0, H_1, \ldots, H_n$ of hypertheories constitutes a *doxastic walk (in* n *steps)* if, for all i such that $0 < i \leq n$, either there is a doxastic action a_i such that $(H_{i-1}, H_i) \in R(a_i)$, or else there is some $m < i$ such that $H_i = H_m$. In the former case the belief state H_i is a result of performing the (internal) action a_i in belief state H_{i-1}. In the latter case we might say that H_i was reached by an (external) action of reverting to H_m. In the tradition initiated by Alchourryn, Gardenfors and Makinson this general concept of reversal is unknown, but it is not unnatural. For example, there are actual situations when it seems reasonable to «go back to square one» or to «try again», which means discarding a certain development in favour of going back to the starting point.

We use the symbol ° to represent actional composition. Let us say of a certain doxastic action a that it is *belief state reversible* by a sequence $b_0, \ldots, b_{k-1}$ of doxastic actions if, for all possible hypertheories H and H', if $(H, H') \in R(a)$ then $(H', H) \in R(b_0 \circ \ldots \circ b_{k-1})$; and *strongly belief state reversible* if in addition, for all possible hypertheories H'', $(H', H'') \in R(b_0 \circ \ldots \circ b_{k-1})$ only if H'' = H. It is then natural to say that a is *(strongly) belief state reversible* if a is (strongly) belief state reversible by some sequence of such actions. By contrast, a is *belief set reversible* by $b_0, \ldots, b_k$ if, for all possible hypertheories H and H' there is some hypertheory H'' such that, if $(H, H') \in R(a)$ then $(H', H'') \in R(b_0 \circ \ldots \circ b_k)$ and $\cap H = \cap H''$; and *strongly belief set reversible* if in addition, for all possible hypertheories H''', $(H', H''') \in R(b_0 \circ \ldots \circ b_{k-1})$ only if H''' = H''. Again, a is *(strongly) belief set reversible* if (strongly) belief set reversible by some sequence of doxastic actions. Note that belief state reversibility implies belief set reversibility.

2. A particular modelling. To give an example, assume a semantics in which the family of hypertheories is the set of nonempty sets H of closed sets such that H is connected under inclusion: for all X, Y $\in$ H, either $X \subseteq Y$ or $Y \subseteq X$. Define two contraction operations, $-_0$ and $-_1$:

$$(H, H') \in R(-_0P) \text{ iff } H' = \{\cap C\} \cup C,$$

$$(H, H') \in R(-_1P) \text{ iff } H' = \{(P \cap \cap C) \cup X : X \in H\},$$

where $C = \{X \in H : X \setminus P \neq Ш\}$. Call these types of contraction *Rott contraction* and *AGM contraction*, respectively, in honour of Hans Rott and Alchourryn, Gдrdenfors, and Makinson. We define an expansion operator + by the condition

$$(H, H') \in R(+P) \text{ iff } H' = H \cup \{P \cap \cap H\}.$$

Notice that if H and H' are sets of sets related by any of the three relations defined, then H' is a hypertheory if H is. (Notice that iteration is meaningful. For more on the present setting, see [4].)

It is clear that AGM contraction is (and Rott contraction is not) belief set reversible by expansion, in fact even strongly belief set reversible. Or more precisely, for every P, $-_1P$ (but not $-_0P$) is strongly belief set reversible by $+P$. Belief state reversibility applies in neither case. (From our point of view, the much debated issue whether "recovery" is a desirable property—see, e. g., [3]—may be described as a question as to whether it is reasonable to expect contraction to be belief set reversible by expansion.)

Of belief state reversibility and belief set reversibility, the latter seems less important; from now on we only consider the former. Is belief state reversibility an interesting property? So it would appear. If an agent wishes always to be able to revert back to an earlier, already abandoned belief state, then one idea would be to keep a record of his doxastic walk—a protocol. But keeping such a record might be expensive. If the same or an acceptably similar effect could be achieved by a series of doxastic actions, it might also be more economical. Certainly it would be interesting from a methodological point of view if an external action could be at least approximated by internal action.

After Isaac Levi, an operation is usually classified as a contraction if the only effect of applying it is that some beliefs are given up, and as an expansion if the only effect is that some new beliefs are added. In our terms—and going beyond Levi—we might consider defining a as a *contraction* if $(H, H') \in R(a)$ only if $H' \subseteq H$, and as an *expansion* if $(H, H') \in R(a)$ only if $H \subseteq H'$. The contraction or expansion would be *nontrivial* if and only if the inclusion were strict and *belief altering* if and only if $\cap H \neq \cap H'$. Notice that either operation could be nontrivial without being belief altering.

One consequence of adopting these definitions would be that AGM contraction would not count as contraction. Therefore we might consider an alternative defnition where account is taken of the reductionist notion that new hypertheories should arise from old in a piecemeal fashion—each element of a new hypertheory should be formed from an element in the old one, at least when the doxastic action in quetion is a basic action. Suppose that a is a doxastic action such that, if $(H, H') \in R(a)$, then there is a partial function f_a on H such that, for each $X \in \text{dom } f$, $f_aX \in H'$. One might say that f_aX is the effect on X of applying a to H, where X is an element of H that «survives» the action a. Let us say, for actions of this kind, that a is a *contraction* if both $(H, H') \in R(a)$ if and only if $H' = \{f_aX : X \in H \,\&\, X \in \text{dom } f_a\}$ and, for all $X \in H$, $X \in \text{dom } f_a$ only if $X \subseteq f_aX$. Similarly, let us say that a is an *expansion* if $(H, H') \in R(a)$ if and only if both $H' = H \cup \{f_aX : X \in H \,\&\, X \in \text{dom } f_a\}$ and, for all $X \in H$, $X \in \text{dom } f_a$ only if $f_aX \subseteq X$.

In any case, it would seem almost unavoidable that some of the information lost in contractions should be irretrievable. Therefore one ought not normally to expect contractions to be reversible, at least not in the sense of belief state reversibility.

With expansions it is different. For example, even though full reversibility of the expansion operation defined above seems problematic, it is *conditionally belief state reversible*, in the following sense, by either of the two contraction operations defined above: for $i \in \{0, 1\}$ it holds for all H, H' and H" that[4],

on condition that $\cap H \setminus P \neq \varnothing$,

if $(H, H') \in R(+P)$ and $(H', H'') \in R(-_i P)$ then $H = H''$.

This is a rather satisfactory result, for the condition is modest: usually there would be little interest in applying the operation +P in a situation where $\cap H \setminus P = \varnothing$—meaning that the agent already believes P—since (usually) doing so would not change the belief state H. That is, usually, $(H, H') \in R(+P)$ if and only if $H' = H$[5].

REFERENCES

1. *Cantwell J.* Some logics of iterated belief change. // Stud. logica.
2. *Gärdenfors P.* Knowledge in flux: modeling the dynamic of epistemic states. Cambridge (Mass): MIT press, 1988.
3. *Makinson D.* On the status of the postulate of recovery in the logic of theory change. // J. Philos. Logic. 1987. Vol. 16 . P. 383-394.
4. *Segerberg K.* Belief revision from the doxastic point of view. // Bull. I. G. P. L. 1995. Vol. 3 P. 535-553.
5. *Segerberg K.* Some questions about hypertheories. // Logic for a change. Uppsala: UPPP, 1995. P. 136-154.
6. *Segerberg K.* Further questions about hypertheories. // Odds and ends. Uppsala: 1996. P. 171-184. (Uppsala Philos. Stud.; Vol. 45).
7. *Segerberg K.* Belief revision along the lines of Lindström and Rabinowicz. // Fundamenta inform. 1997. Vol. 32. P. 183-191.

---

[4] For readers familiar with DDL we mention that this condition would validate the schema $\neg \mathbf{B}\varphi$ □ $(\mathbf{B}\chi + [+\varphi][-\varphi]\mathbf{B}\chi)$.

[5] The author is grateful for critical comments by Wlodek Rabinowicz.

A.Kron

THE LAW OF ASSERTION AND THE RULE OF RESTRICTED PERMUTATION[1]

Абстракт. *Известно, что тождество формул в чисто импликативном языке может рассматриваться как выводимость некоторых формул в очень слабой пропозициональной системе в том же языке. С точки зрения логики и философии представляет интерес то обстоятельство, что подстановка формул типа* $B \to .C \to D$ *вместо подформул вида* $B \to .C \to D$ *в формулу* A *может быть отождествлено с CONGR – выводимостью некоторых формул в слабой логической системе* $\mathbf{TRW}_{\to}$*+AP. В работе дается секвенциальная формулировка* $\mathbf{G(TRW}_{\to}$*+RP)* *системы* $\mathbf{TRW}_{\to}$*+AP и доказывается, что CONGR эквивалентна тому факту, что в* $\mathbf{G(TRW}_{\to}$*+RP)* *выводимость теорем вида* $A \to A$ *предшествует выводимости любых других теорем.*

1. Introduction

It is known that identity of formulas in the purely implicational language can be identified with the derivability of ceratin formulas in a very weak propositional system given in the same language. Namely, in [1] the system $\mathbf{TW}_{\to}$ was defined in the propositional language with the sole connective $\to$ by modus ponens and the following axiom-schemes:

ID	$A \to A$
ASU	$A \to B \to .B \to C \to .A \to C$
APR	$B \to C \to .A \to B \to .A \to C$

It was conjectured that if both $\vdash A \to B$ and $\vdash B \to A$ in $\mathbf{TW}_{\to}$, then A and B denote the same formula. We call this claim *the Anderson-Belnap conjecture* A-B.

Let $\mathbf{TW}_{\to}$-ID be obtained by deleting ID; then A-B is equivalent to NOID: in $\mathbf{TW}_{\to}$-ID for all A, not $\vdash A \to A$.

For a long time it was an open problem whether NOID holds for $\mathbf{TW}_{\to}$-ID. The problem was known as the P - W problem; it was solved in the affirmative (cf. [1a], [2], [3], [4], and [6]).

A-B and the mentioned equivalence with NOID was extended in [4] and [5] as follows.

[1] This research has been supported by the Science Fund of Serbia (grant number 04M02A) through the Mathematical Institute in Belgrade.

Let $\mathbf{TW}_{\rightarrow}$+AP be obtained from $\mathbf{TW}_{\rightarrow}$ by adjoining the *axiom-scheme of permutation*

AP $\quad A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow .B \rightarrow .A \rightarrow C$

and by substitution of the following rules for modus ponens:

SU $\quad$ If $\vdash A \rightarrow B$, then $\vdash B \rightarrow C \rightarrow .A \rightarrow C$

PR $\quad$ If $\vdash B \rightarrow C$, then $\vdash A \rightarrow B \rightarrow .A \rightarrow C$

TR $\quad$ If $\vdash A \rightarrow B$ and $\vdash B \rightarrow C$, then $\vdash A \rightarrow C$

Let $A \sim B$ mean that B can be obtained by substitution of formulas of the form $D \rightarrow .C \rightarrow E$ for some occurences of subformulas of A of the form $C \rightarrow .D \rightarrow E$.

Let CONGR be the claim: If $\vdash A \rightarrow B$ and $\vdash B \rightarrow C$ in $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+AP, then $A \sim B$.

Let NOASS be the claim: for no A and B, $\vdash A \rightarrow .A \rightarrow B \rightarrow B$ in $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+AP (notice that in $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+AP we have ID).

The generalization in [5] consisted in the proof that CONGR and NOASS are equivalent.

We find both logically and philosophicaly interesting that substitution of formulas of the form $B \rightarrow .C \rightarrow D$ for subformulas of the form $B \rightarrow .C \rightarrow D$ in a formula A can be identified with CONGR - with the derivability of certain formulas in the weak logical system $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+AP.

Also, it is a curious fact that the same substitution can be identified with NOASS - with the non-derivability of certain formulas in the same system. Notice, however, that neither A-B and NOID, nor CONGR and NOASS are equivalent for *any* pair of implicational systems - one having ID and the other being without ID.

In this paper we give a Gentzen formulation G($\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP) of $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+AP and we prove that CONGR is equivalent to the fact that in G($\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP) all derivations of theorems of the form $A \rightarrow A$ precede all derivations of any other theorem.

2. $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$ +AP

Since the only language considered here is a purely implicational language, we shall write (AB) for $(A \rightarrow B)$, and omit the outer parentheses. ABC stands for $(AB)C$.

A and B are *congruent* if $A \sim B$. If not $A \sim B$, we write $A \mathrel{/\!\!\sim} B$.

For any A by A^* we denote any formula B such that $A \sim B$.

$\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP is the system obtained from $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+AP by substitution of the rule RP of *restricted permutation* for the axiom-scheme AP, where RP is

RP $\quad$ If $\vdash AB$, then $\vdash A^*B^*$.

$\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP and $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+AP are equivalent. Let $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP-ID be obtained from $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP by deleting the axiom-scheme ID.

The main five properties of $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP (proved in [5]) are given in the next five theorems. Besides, $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP is closed under uniform substitution of formulas for variables.

Theorem 2.1 *If* A /~ B, *then* $\vdash AB$ *in* $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP *iff* $\vdash AB$ *in* $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP-ID.

Theorem 2.2 (CONGR) If $\vdash AB$ *and* $\vdash BA$, *then* $A \sim B$.

Theorem 2.3 (NOASS) *For all* A *and* B, *not* $\vdash A(ABB)$.

Theorem 2.4 CONGR *and* NOASS *are equivalent.*

Theorem 2.5 (NOABB) *For all* A *and* B *not* $\vdash ABB$.

$\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP is not closed either under modus ponens (MP) or under the *rule of permutation*:

P If $\vdash A$, then $\vdash A^*$.

If P is added to $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP, the system **L** mentioned in [3] is obtained.

NOID, NOASS and NOAB are true in **L**. **L** is not closed either under MP or under the rule

ASS1 If $\vdash A$, then $\vdash ABB$.

If ASS1 is added to **L**, the system investigated in [4] is obtained. **J** is closed under MP.

NOID and NOASS are true in **J** but NOABB is not. However, we have

Theorem 2.6 (NOE) *There is no theorem of* **J** *of the form* $AABB$.

If ID is added to **J**, the system $\mathbf{RW}_{\rightarrow}$ of contractionless implicational relevance logic is obtained.

3. The gentzen formulation G($\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP)

X, Y, Z etc. range over finite (possibly empty) sequences of formulas. As in [4], if X is the sequence $A_1,\ldots,A_n$, then by $X.B$ we understand the formula $A_1(A_2\ldots(A_nB)\ldots)$. For example, if X = $(A,B(CD)E)$, then $(A,B(CD)E).F$, $(A,(B.CD)E).F$ and $(A,((B,C).D)E).F$ denote the same formula $X.F$. Any formula A can be written in the form $(A_1,A_2,\ldots A_n).p$, for some formulas $A_1,\ldots,A_n$ and a variable p. Very often we shall write $W_A.p$, for the formula A.

By $\Pi(X)$ we denote the set of all permutations of X, and by $\Pi(X).B$ we denote any formula $Y.B$ such that $Y \in \Pi(X)$.

Let $X = (A_1,\ldots,A_n)$; by X^* we denote the sequence $(A^*{}_1,\ldots,A^*{}_n)$.

By the *beginning* of a nonempty sequence X, in symbols $[X]$, we understand the first formula of the sequence X.

The axioms of G($\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP) are

ID pp, for any variable p.

The only rule of G($\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP) is

RPG If $\vdash (X,A,Y).p$ and $\vdash (Z_1,C,Z_2).q$, then $\vdash \Pi(X^*,Z_1{}^*,Z_2{}^*,((Y.p)C)^*,A^*).q$, for any $\Pi(X^*,Z_1{}^*,Z_2{}^*,((Y.p)C)^*,A^*).q$ such that the following condition is satisfied: if $\Pi(X,Z) \neq \varnothing$, then the beginning of $\Pi(X^*,Z_1{}^*,Z_2{}^*,((Y.p)C)^*,A^*)$ either is $[X]^*$ or $[Z_1]^*$ or $((V.r)C)^*$, as we please; if $\Pi(X,Z) = \varnothing$, then the beginning is $((V.r)C)^*$.

In the sequel "derivable" ($\vdash$) means "derivable in **G(TRW$_{\rightarrow}$**+RP)".

G(**TRW$_{\rightarrow}$**+RP) is closed under RP.

Theorem 3.1 *$(A,X).p$ is derivable with weight w iff so is $(A^*,\Pi(X^*)).p$.*

Proof. By induction on the weight of $(A,X).p$ in a given derivation.

In the sequel we shall identify $(A,X).p$ and $(A^*,\Pi(X^*)).p$.

Theorem 3.2 (TRANSITIVITY WITH RP, RPTR). *If* (a) $\vdash (X,A,Y).p$ *and* (b) $\vdash (Z_1,Y.p,Z_2).q$, *then* (c) $\vdash \Pi(X,A,Z_1,Z_2).q$ *and either* $[\Pi(X,A,Z_1,Z_2)] = [X]$ *or* $[\Pi(X,A,Z_1,Z_2)] = [Z_1]$, *as we choose, if* $\Pi(X,Z_1) \neq \varnothing$, *and* $[\Pi(X,A,Z_1,Z_2)] = A$ *otherwise*.

Proof. Proceed by double induction. Suppose that (a) and (b) are derivable with combined weight w and that $Y.p$ is of degree d. Our induction hypotheses are:

Hyp 1 The theorem holds for any $Y'.p$ of degree $d' < d$ and any combined weight w;

Hyp 2 The theorem holds for $Y.p$ and any combined weight $w' < w$.

Suppose that (b) is an instance of ID; hence, $Y = Z_1 = Z_2 = \varnothing$ and $p = q$; obviously, (c) is (a).

Suppose that (b) is obtained by (b′) $\vdash (U,B,V).r$, (b″) $\vdash (W_1,C,W_2).q$ and RPG. Let $R \sim (Z_1,Y.p,Z_2).q \sim \Pi(U,W_1,(V.r)C,B,W_2).q$ for some U, V, W_1, and W_2; then either $[\Pi(R)] \sim Y.p$ (and $Z_1 = \varnothing$) or $[\Pi(R)] \sim [U] \sim Z_1]$ or $[\Pi(R)] \sim [W_1] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(R)] \sim (V.r)C \sim [Z_1]$.

1. Let $U \sim \Pi(Y.p,U')$ and $(Z_1,Z_2) \sim \Pi(U',W_1,W_2,(V.r)C,B)$. Now (c′) $\vdash \Pi(S).r$ by (a), (b′) and Hyp 2, where $S \sim (X,A,U',B,V)$ and either $[\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(S)] \sim [U']$, if $\Pi(X,U') \neq \varnothing$, and $[\Pi(S)] \sim A$ otherwise; hence, $\vdash \Pi(T).q$ by (b″), (c′) and RPG, $T \sim (X,W_1,W_2,A,U',B,(V.r)C)$ and either $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)]$ or $[\Pi(T)] \sim [W_1]$ or $[\Pi(T)] \sim (V.r)C$.

We must show that either $[\Pi(T)] \sim [X]$ or $[\Pi(T)] \sim [Z_1]$, if $\Pi(X,Z_1) \neq \varnothing$, and $[\Pi(T)] \sim A$ otherwise.

Suppose that $\Pi(X,Z_1) \neq \varnothing$; then either $X \neq \varnothing$ or $Z_1 \neq \varnothing$. If $X \neq \varnothing$, then $\Pi(X,U') \neq \varnothing$ and either $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim [U'] \sim [Z_1]$. If $Z_1 \neq \varnothing$, then either $[\Pi(T)] \sim [U'] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(T)] \sim [W_1] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(T)] \sim (V.r)C \sim [Z_1]$. Hence, if $\Pi(X,Z_1) \neq \varnothing$, then either $[\Pi(T)] \sim [X]$ or $[\Pi(T)] \sim [Z_1]$.

Suppose that $\Pi(X,Z_1) = \varnothing$; then $\Pi(X,U') = \varnothing$ and $[\Pi(S)] \sim A$. Also, we have $\Pi(X,W_1) = \varnothing$ and hence $[\Pi(T)] \neq (V.r)C$. Therefore, $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim A$.

2. Let $W_1 \sim \Pi(Y.p,W'_1)$ and $(Z_1,Z_2) \sim \Pi(U,W'_1,W_2,(V.r)C,B)$. Now (c') $\vdash \Pi(S).q$ by (a), (b'') and Hyp 2, $S \sim (X,A,W'_1,C,W_2)$ and either $[\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(S)] \sim [W'_1]$, if $\Pi(X,W'_1) \neq \varnothing$, or $[\Pi(S)] \sim [A]$ otherwise; hence, $\vdash \Pi(T).q$ by (b'), (c') and RPG, $T \sim (X,A,U,W'1',(V.r)C,W_2)$ and either $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)]$ or $[\Pi(T)] \sim [U]$ or $[\Pi(T)] \sim (V.r)C$.

Suppose that $\Pi(X,Z_1) \neq \varnothing$. If $X \neq \varnothing$, then $\Pi(X,W'_1) \neq \varnothing$ and either $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(T)] \sim [S] \sim [W'_1] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(T)] \sim (V.r)C \sim [Z_1]$. Hence, either $[\Pi(T)] \sim [X]$ or $[\Pi(T)] \sim [Z_1]$.

Suppose that $\Pi(X,Z_1) = \varnothing$; then $\Pi(X,W'_1) = \varnothing$. Hence, $[\Pi(S)] \sim [A]$. Also, we have $\Pi(X,U) = \varnothing$ and hence $[\Pi(T)] \neq (V.r)C$. Therefore, $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim A$.

3. Let $W_2 \sim \Pi(Y.p,W'_2)$ and $(Z_1,Z_2) \sim \Pi(U,W_1,W'_2,(V.r)C,B)$. Now (c') $\vdash \Pi(S).q$ by (a), (b'') and Hyp 2, $S \sim (X,W_1,C,A,W'_2)$ and either $[\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(S)] \sim [W_1]$ or $[\Pi(S)] \sim C$ (since C precedes $(Y.p)$ in (b''), the sequence of members of $\Pi(S)$ that precede A is nonempty); hence, $\vdash \Pi(T)$ by (b'),(c') and RPG, $T \sim (X,U,W_1,(V.r)C,A,W'_2)$ and either $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)]$ or $[\Pi(T)] \sim [U]$ or $[\Pi(T)] \sim (V.r)C$.

Since $[\Pi(R)] \neq Y.p$, we have $Z_1 \neq \varnothing$; hence, $\Pi(X,Z_1) \neq \varnothing$ and either $[\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(S)] \sim [W_1]$ or $[\Pi(S)] \sim C$. Therefore, either $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim [W_1] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim (V.r)C \sim [Z_1]$.

4. Let $Y.p \sim (V.r)C \sim \Pi(V.r,W_C).p$ and $(Z_1,Z_2).q \sim \Pi(U,W_1,W_2,B)$, where $C \sim W_C.p$. Obviously, either $[\Pi(R)] \sim [U] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(R)] \sim [W_1] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(R)] \sim (V.r)C \sim Y.p$. Now (c') $\vdash \Pi(S).p$ by (b'), (a) and Hyp 1, $S \sim (X,A,U,B,W_C)$, and either $[\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(S)] \sim [U]$, if $\Pi(X,U) \neq \varnothing$, and $[\Pi(S)] \sim A$ otherwise (for A precedes $V.r$ in (a)); hence, $\vdash \Pi(T)$ by (c'), (b'') and Hyp 1, $T \sim (X,A,U,B,W_1,W_2)$ and either $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)]$ or $[\Pi(T)] \sim [W_1]$, for $\Pi(S,W_1) \neq \varnothing$.

Since A precedes $V.r$ in (a), $Z_1 \neq \varnothing$; hence, $\Pi(X,Z_1) \neq \varnothing$ and either $[\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(S)] \sim [U]$ or $[\Pi(S)] \sim A$. Hence, either $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim [U] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(T)] \sim [W_1] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim A \sim [Z_1]$.

There is an alternative way to obtain (c): (c'') $\vdash \Pi(S).q$ by (a), (b'') and Hyp 1, $S \sim (X,A,V.r,W_1,W_2).q$ and either $[\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(S)] \sim [W_1]$, if $\Pi(X,W_1) \neq \varnothing$, and $[\Pi(S)] \sim A$ otherwise (for A precedes $V.r$ in (a)); hence, $\vdash \Pi(T)$ by (b'), (c'') and Hyp 1, $T \sim (U,B,X,A,W_1,W_2)$ and either $[\Pi(T)] \sim [U]$ or $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)]$, for $\Pi(S,W_1) \neq \varnothing$.

Since A precedes $V.r$ in (a), A precedes $V.r$ in (c''); hence, $Z_1 \neq \varnothing$. We have $\Pi(X,Z_1) \neq \varnothing$ and either $[\Pi(S)] \sim [X]$ or $[\Pi(S)] \sim [W_1]$ or $[\Pi(S)] \sim A$. Hence, either $[\Pi(T)] \sim [X]$ or $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim [W_1] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(T)] \sim [U] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(T)] \sim [\Pi(S)] \sim A \sim [Z_1]$.

To prove that **TRW**$_{\rightarrow}$+RP and **G**(**TRW**$_{\rightarrow}$+RP) have the same set of theorems we need the trivial

Theorem 3.3. *For any* A, $\vdash AA$ *in* **G**(**TRW**$_{\rightarrow}$+RP).

Using Theorem 3.3 and RPG we can prove

Theorem 3.4. *The following three rules are derivable in* **G**(**TRW**$_{\rightarrow}$+RP) (SU, PR *and a combination thereof with restricted permutation*):

RPSU *If* $\vdash (X,A,Y).p$, *then* $\vdash \Pi(X,A,(Y.p)q).q$, *such that the beginning of* $\Pi(X,A,(Y.p)q).q$ *is either* $[X]$ *or* $(Y.p)q$, *if* $X \neq \varnothing$, *and* $(Y.p)q$ *otherwise*;

RPPR *If* $\vdash (X,B,Z).p$, *then* $\vdash \Pi(X,AB,A,Z).p$, *such that the beginning of* $\Pi(X,AB,A).p$ *is either* $[X]$ *or* AB.

RPSP *If* $\vdash (X,A,Y).p$, *then* $\vdash \Pi(X,A,\Pi(Y.p,Z).q,Z).q$, *such that the beginning of* $\Pi(X,A,\Pi(Y.p,Z).q,Z).q$ *is either* $[X]$ *or* $\Pi(Y.p,Z).q$.

Therefore, the theorems of(**TRW**$_{\rightarrow}$+RP are theorems of **G**(**TRW**$_{\rightarrow}$+RP).

Theorem 3.5. **TRW**$_{\rightarrow}$+RP *is closed under* RPSU, RPPR *and* RPTR.

Proof. RPSU Suppose that (1) $\vdash (X,A,Y).p$ in **TRW**$_{\rightarrow}$+RP. If $X = \varnothing$, then $\vdash (X,(Y.p)q,A).q$ by (1) and SU. Eventually, $\vdash ((Y^{*}.p)q,A^{*}).q$ by RP.

Let $X \sim (B,X')$; then (2) $\vdash ((X',A,Y).p).(X',(Y.p)q,A).q$, successively applying PR to the axiom $(A,Y).p.(Y.p)q.Aq$. Hence, $\vdash (B,X',(Y.p)q,A).q$, by (1), (2) and TR. Eventually, $\vdash (B^{*},\Pi(X'^{*},(Y^{*}.p)q,A^{*})).q$ by RP.

To obtain $\vdash ((Y^{*}.p)q,B^{*},\Pi(X'^{*},A^{*})).q$, apply PR to (1); we obtain (3') $\vdash (((X',A,Y).p,X',A).q,B,X',A).q$. On the other hand, we have the sequence of axioms

$$\vdash ((Y.p)q.(A,Y).p,A).q$$

$$.\vdash (((X'',A,Y).p,X'',A).q,(C,X'',A,Y).p,C,X'',A).q,$$

where $X' \sim (C,X'')$. Using TR we obtain (3'') $\vdash ((Y.p)q,(X',A,Y).p,X',A).q$. Now $\vdash ((Y.p)q,B,X',A).q$ by (3'), (3'') and TR, and then we apply RP to obtain $\vdash ((Y^{*}.p)q,B^{*},\Pi(X'^{*},A^{*})).q$.

RPPR Suppose that (1) $\vdash (X,B).p$ in **TRW**$_{\rightarrow}$+RP. If $X = \varnothing$, then $\vdash (X,AB,A).p$ by (1) and PR; hence, $\vdash ((AB)^{*},A^{*}).q$ by RP.

Let $X \sim (C,X')$. From the axiom $\vdash Bp.AB.Ap$, successively applying PR we have (2) $\vdash ((X',B).p).(X',AB,A).p$. Hence, $\vdash (C,X',AB,A).p$ by (1), (2) and TR, and $\vdash (C^{*},\Pi(X'^{*},(AB)^{*},A^{*})).p$ by RP.

To obtain $\vdash ((AB)^{*},\Pi(X'^{*},C^{*},A^{*})).p$, apply SU to (1) to obtain (3') $\vdash ((X',B).p,X,A).p,C,X',A).p$.

On the other hand, we have the sequence of axioms

$$\vdash (AB,Bp,A).p$$

$$\vdash (((X'',B).p,X'',A).p,(D,X'',B).p,D,X'',A).p,$$

where $X' \sim (D,X'')$. Hence, (3") $\vdash (AB,(X',B).p,X',A).p$ by TR. Therefore, $\vdash (AB,C,X',A).p$ by (3'), (3") and TR.

RPTR Suppose that in $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP we have (1) $\vdash (X,A,Y).p$ and (2) $\vdash (Z_1,Y.p,Z_2).q$. If $\Pi(X,Z_1) = \varnothing$, then $\vdash (A,Z_2).q$ by TR. Hence, $\vdash (A^*,\Pi(Z_2^*)).q$ by RP (if necessary).

Let $X = \varnothing$ and $Z_1 \sim (B,Z'_1)$. Now $\vdash ((Y.p,Z_2).q,A,Z_2).q$ by (1) and SU; hence, (3') $\vdash ((Z'_1,Y.p,Z_2).q,Z'_1,A,Z_2).q$ by PR, and $\vdash (B,Z'_1,A,Z_2).q$, by (2), (3') and TR. Hence, $\vdash (B^*,\Pi(Z'_1{}^*,A^*,Z_2{}^*)).q$ by RP.

Let $Z_1 = \varnothing$ and $X \sim (B,X')$. Hence, $\vdash ((X',A,Y).p,X',A,Z_2).q$ by (2) and PR, and $\vdash (B,X',A,Z_2).q$ by (1) and TR, and $\vdash (B^*,\Pi(X'^*,A^*,Z_2{}^*)).q$ by RP.

Let $X \sim (B,X')$ and $Z_1 \sim (C,Z'_1)$. We have (3') $\vdash ((X',A,Y).p,X',A,C,Z'_1,A,Z_2).q$ by (3) and PR; hence, $\vdash (B,X',A,C,Z'_1,A,Z_2).q$ by (1), (3') and TR. Now, $\vdash (B^*,\Pi(X'^*,A^*,C^*Z'_1{}^*,A^*,Z_2{}^*)).q$ by RP.

Alternatively, (3') $\vdash (C,(X',A,Y).p,Z'_1,X',A,Z_2).q$ by (2) and RPPR. On the other hand, (3") $\vdash ((X',A,Y).p,Z'_1,X',A,Z_2).q,B,Z'_1,X',A,Z_2).q$, by (1) and RPSU. Hence, $\vdash (C,B,Z'_1,X',A,Z2).q$ by (3'), (3") and TR, and then, by RPPR, $\vdash (C^*,\Pi(B^*,Z'_1{}^*,X'^*,A^*,Z_2{}^*)).q$.

Theorem 3.6. $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP *and* $\mathbf{G}(\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP) *have the same set of theorems.*

Proof. We must show that $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP is closed under RPG. If (1) $\vdash (X,A,Y).p$ and (2) $\vdash (Z_1,C,Z_2).q$ in $\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP, then either (3) $\vdash ((Y.p)C,Z_1,Y.p,Z_2).q$ or (4) $\vdash (D,(Y.p)C,Z'_1,Y.p,Z_2).q$, by PPR and (2), where $Z_1 \sim (D,Z'_1)$ if $Z_1 \sim \varnothing$. Now either $\vdash ((Y.p)C,X,Z_1,A,Z_2).q$ or $\vdash (B,X',(Y.p)C,Z_1,A,Z_2).q$, either by (1), (3) and RPTR or by (1), (4) and RPTR, respectively, where $X \sim (B,X')$, if $X \neq \varnothing$, or $\vdash (D,X,(Y.p)C,Z'_1,A,Z_2).q$. Eventualy, we use RPPR to obtain the conclusion of RPG.

4. Normal Form Theorem For G($\mathbf{TRW}_{\rightarrow}$+RP)

Derivations of formulas of the form AA have a specific pattern.

Theorem 4.1 (NORMAL FORM THEOREM, NMF). *For any A and any node S in a derivation of AA there is a formula B such that $S \sim BB$.*

Proof. The theorem is true if $A = p$. Proceed by induction on the weight of a node in a derivation of AA.

Suppose that AA is obtained by (a') $\vdash (X,C,Y).p$, (a") $\vdash (Z_1,D,Z_2).q$ and RPG, where $AA \sim \Pi(X,C,Z_1,(Y.p)D,Z_2).q$ and either $A \sim [X]$ or $A \sim [Z_1]$ or $A \sim (Y.p)D$.

Case I $X \sim (A,X')$ and $A \sim \Pi(X',C,Z_1,(Y.p)D,Z_2).q$; hence, (a') $(\Pi(X',C,Z_1,(Y.p)D,Z_2).q,X',C,Y).p$ and (a'') $\vdash (Z_1,D,Z_2).q$. Hence, (b) $((X',C,Y).p,X',C,Z_1,(Y.p)D,Z_2).q$ by (a'') and RPPR. By (a'), (b) and CONGR, $(X',C,Y).p \sim (X',C,Z_1,(Y.p)D,Z_2).q$, which is absurd.

Case II $Z_1 \sim (A,Z'_1)$ and $A \sim \Pi(X,C,Z'_1,(Y.p)D,Z_2).q$; hence, (a') $\vdash (X,C,Y).p$ and (a'') $\vdash (\Pi(X,C,Z'_1,(Y.p)D,Z_2).q,Z'_1,D,Z_2).q$. Hence, (b) $\vdash ((Z'_1,D,Z_2).q,X,C,Z'_1,(Y.p)D,Z_2).q$ by (a') and RPSP. By (a''), (b) and CONGR, $\Pi(Z'_1,D,Z_2).q \sim \Pi(X,C,Z'_1,(Y.p)D,Z_2).q$, which is absurd.

Case III $A \sim (Y.p)D \sim \Pi(X,C,Z_1,Z_2).q$.

III.1 $X \sim (Y.p,X')$ and $D \sim \Pi(X',C,Z_1,Z_2).q$; hence, (a') $\vdash (Y.p,X',C,Y).p$ and (a'') $\vdash (Z_1,\Pi(X',C,Z_1,Z_2).q,Z_2).q$. If $Z_1 = \varnothing$, then NOABB is violated. Hence, $Z_1 \sim (B,Z'_1)$ and $\vdash (B,\Pi(B,Y.p,X',C,Z'_1,Z_2).q,Y.p,X',C,Z'_1,Z_2).q$ by (a'), (a'') and RPG, contrary to NOASS.

III.2 $Z_1 \sim (Y.p,Z'_1)$ and $D \sim \Pi(X,C,Z'1,Z_2).p$; hence, (a') $\vdash (X,C,Y).p$ and (a'') $\vdash (Y.p,Z'_1,\Pi(X,C,Z'_1,Z_2).q,Z_2).q$. Hence, (b) $\vdash (X,C,\Pi(X,C,Z'_1,Z_2).q,Z'_1,Z_2).q$ by (a'), (a'') and RPTR. NOASS is violated.

III.3 $Y.p \sim C$ and $D \sim \Pi(X,Z_1,Z_2).p$; hence, (a') $\vdash (X,Y.p,Y).p$ and (a'') $\vdash (Z_1,\Pi(X,Z_1,Z_2).q,Z_2).q$. If $X = \varnothing$, then $Z_1 = \varnothing$ (otherwise (a'') violates NOASS); if $Z_1 = \varnothing$, then $X = \varnothing$, by (a'') and NOABB. Hence, either both X and Z_1 are empty or both X and Z_1 are nonempty.

If both X and Z_1 are empty, then both (a') and (a'') are of the required form and we can apply the induction hypothesis.

Let $X \sim (B,X',E)$ and $Z_1 \sim (F,Z'_1)$. By (a') and RPSU (b) $\vdash (((Y.p,Y).p,Z_1,Z_2).q,B,X',E,Z_1,Z_2).q$. Hence, (c) $\vdash (F,(F,(Y.p,Y).p,Z'_1,Z_2).q,Z'_1,Z_2).q$, by (a''), (b) and RPTR. By (c) and Theorem 2.1, (c) is a theorem of **TRW**$_{\rightarrow}$+RP-ID and hence of **J**. Since **J** is closed under P, NOID in **J** is violated.

III.4 $Z_2 \sim (Y.p,Z'_2)$ and $D \sim \Pi(X,C,Z_1,Z'_2).q$; hence, (a') $\vdash (X,C,Y).p$ and (a'') $\vdash (Z_1,\Pi(X,C,Z_1,Z'_2).q,Y.p,Z'_2).q$. If $Z_1 \sim (B,Z'_1)$, then $\vdash (B,\Pi(B,X,C,Z'_1,Z'_2).q,X,C,Z'_1,Z'_2).q$ by (a'), (a'') and RPTR, contrary to NOASS. Hence, $Z_1 = \varnothing$ and (b) $\vdash (X,(Y.p,Z'_2).q,C,Z'_2).q$ by (a') and RPSP. If $X \sim (B,X')$, then $\vdash (B,(B,X',C,Z'_2).q, X',C,Z'_2).q$, by (a''), (b) and RPTR, contrary to NOASS. Therefore, $X = \varnothing$ and we have (a'') $\vdash (\Pi(C,Z'_2).q,Y.p,Z'_2).q$ and (b) $\vdash ((Y.p,Z'_2).p,C,Z'_2).p$. By CONGR, $C \sim Y.p$ and we can apply the induction hypothesis.

5. There Is No Theorem Of The Form *ABB*

In this section we shall give a proof of NOABB independent of CONGR.

Since **TRW**$_{\rightarrow}$+RP and *a fortiori* **G**(**TRW**$_{\rightarrow}$+RP) is closed under uniform substitution, to prove that there is no theorem of **G**(**TRW**$_{\rightarrow}$+RP) of a certain form, it suffices to prove such a theorem for a variant of **G**(**TRW**$_{\rightarrow}$+RP) in the language having a single variable p. This fact is assumed in the sequel.

Theorem 5.1. *If* (a) $\vdash (X.p)p$ *in* G(TRW$_{\rightarrow}$+RP), *then* $X = \varnothing$.

Proof. If (a) is an axiom, then $X = \varnothing$.

Suppose that (a) is obtained from (a′) $\vdash (U,A,V).p$ and (a″) $\vdash (W_1,C,W_2).p$ by RPG; then $(X.p)p \sim \Pi(U,A,W_1,(V.p)C,W_2).p$. Hence, $U = W_1 = W_2 = \varnothing$ and $X.p \sim \Pi(A,(V.p)C)$, which is absurd.

Theorem 5.2 (NOABB) *No theorem of* G(TRW$_{\rightarrow}$+RP) *has the form* (a) $(\Pi(B,X,Y).p,Y).p$.

Proof. No axiom has this form. Let there be a derivable formula of this form and let (a) $\Pi(\Pi(B,X,Y).p,Y).p$ be one of them of smallest degree (Hyp 3). If $Y = \varnothing$, Theorem 5.1 is violated.

Suppose that (a) is obtained by (a′) $\vdash (U,A,V).p$, (a″) $(W_1,C,W_2).p$ and RPG; then $(\Pi(B,X,Y).p,Y) \sim \Pi(U,A,W_1,(V.p)C,W_2)$ and the beginning of (a) is either $[U]$ or $[W_1]$ or $[(V.p)C]$.

Case I $U \sim (\Pi(B,X,Y).p,U')$ and $Y \sim \Pi(U',A,W_1,(V.p)C,W_2)$. Applying RPPR to (a″) we obtain (b) $((U',A,V).p,U',A,W_1,(V.p)C,W_2).p$. But (a′) is $(\Pi(B,X,\Pi(U',A,W_1,(V.p)C,W_2)).p,U',A,V).p$. Hence, $(\Pi(B,X,(U',A,V).p,U',A,V).p$ by (a′), (b) and RPTR, contrary to Hyp 3.

Case II $W_1 \sim (\Pi(B,X,Y).p,W'_1)$ and $Y \sim \Pi(U,A,W'_1,(V.p)C,W_2)$. Applying RPSP to (a′) we have (b) $((W'_1,W_2,C).p,U,A,W'_1,(V.p)C,V.p,W_2).p$. But (a″) is $(\Pi(B,X,\Pi(U,A,W'_1,(V.p)C,W_2)).p,W'_1,C,W_2).p$; hence $(\Pi(B,X,(W'_1,C,W_2).p,W'_1,C,W_2).p$ by (a″), (c) and RPTR, contrary to Hyp 3.

Case III $\Pi(B,X,Y) \sim \Pi(V.p,W_C)$ and $Y \sim \Pi(U,A,W_1,W_2)$; hence, $\Pi(B,X,U,A,W_1,W_2) \sim \Pi(V.p,W_C)$.

III.1 $V.p \sim B$ and $W_C \sim \Pi(X,U,A,W_1,W_2)$. Applying RPSP to (a′) we have (b) $\vdash (\Pi(V.p,X,W_1,W_2).p,X,U,A,W_1,W_2).p$. But (a″) is $(W_1,\Pi(X,U,A,W_1,W_2).p,W_2).p$; hence, $\vdash (\Pi(V.p,X,W_1,W_2).p,W_1,W_2).p$ by (b), (a″) and RPTR, contrary to Hyp 3.

III.2 $X \sim \Pi(V.p,X')$ and $W_C \sim \Pi(B,X',U,A,W_1,W_2)$. Applying RPSP to (a′) we obtain (b) $\vdash ((B,X',W_1,W_2,V.p).p,B,X',U,A,W_1,W_2).p$. But (a″) is $\vdash (W_1,\Pi(B,X',U,A,W_1,W_2).p,W_2).p$; hence, $((V.p,B,X',W_1,W_2).p,W_1,W_2).p$, by (b), (a″) and RPTR, contrary to Hyp 3.

III.3 $U \sim (V.p,U')$ and $W_C \sim (\Pi(B,X,U',W_1 A,W_2))$. Now (a′) and (a″) are $\vdash (V.p,U',A,V).p$ and $\vdash (W_1,\Pi(B,X,U',W_1,A,W_2).p,W_2).p$; hence, (b) $\vdash (\Pi(B,X,W_1,W_2,V).p,V,B,X,U',A,W_1,W_2).p$ by (a′) and RPPR, and $\vdash (\Pi(B,X,V,W_1,W_2).p,V,W_1,W_2).p$, by (a′), (b) and RPTR, contrary to Hyp 3.

III.4 $A \sim V.p$ and $W_C \sim \Pi(B,X,U,W_1,W_2)$. Now (a′) and (a″) are $\vdash (U,V.p,V).p$ and $\vdash (W_1,\Pi(B,X,U,W_1,W_2).p,W_2).p$; hence, (b) $(\Pi(B,X,W_1,W_2,V).p,B,X,U,W_1,W_2,V).p$, by (a′) and RPPR, and $(\Pi(B,X,V,W_1,W_2).p,V,W_1,W_2).p$, by (a″), (b) and RPTR, contrary to Hyp 3.

III.5 $W_1 \sim (V.p, W'_1)$ and $W_C \sim \Pi(B,X,U,W'_1,A,W_2)$. Applying RPSP to (a′) we obtain (b) $\vdash (\Pi(W'_1,W_2,V.p).p,U,W'_1,A,W_2).p$. But (a″) is $\vdash (V.p,W'_1,\Pi(B,X,U,W'_1,A,W_2).p,W_2).p$; hence, $(\Pi(B,X,W'_1,W_2,V.p).p,W'_1,W_2,V.p).p$, by (b), (a″) and RPTR, contrary to Hyp 3.

III.6 $W_2 \sim (V.p,W'_2)$ and $W_C \sim \Pi(B,X,U,W_1,A,W'_2)$. Applying RPSP to (a′) we obtain (b) $\vdash (\Pi(B,X,W_1,W'_2,V.p).p,B,X,U,W_1,A,W'_2).p$. But (a″) is $\vdash (W_1,\Pi(B,X,U,W_1,A,W'_2).p,V.p,W'_2).p$; hence $(\Pi(B,X,W_1,W'_2,V.p).p,W_1,W'_2,V.p).p$, by (a″), (b) and RPTR, contrary to Hyp 3.

6. NMF and Noass Are Equivalent

NOASS and CONGR were used in the proof of NMF; since, by Theorem 2.4, NOASS and CONGR are equivalent, NOASS implies NMF. NOABB, which is also used in the proof of NMF, is a consequence of CONGR and hence of NOASS, but in **G(TRW$_{\rightarrow}$+RP)** it has a proof independent of NOASS.

In this section we prove that NMF implies NOASS.

Theorem 6.1 NMF *implies* NOASS.

Proof. The strategy of the proof is as of the proof of Theorem 5.2 (NOABB). Suppose that the contrary is the case; then there is a formula (a) $A.ABB$ of smallest degree derivable in **G(TRW$_{\rightarrow}$+RP)** (Hyp 4). Now we investigate how it could have been obtained. It is clear that (a) is no axiom. Let (a) be obtained by (a′) $\vdash (X,C,Y).p$, (a″) $\vdash (Z_1,D,Z_2).p$ and RPG; hence, $A.ABB \sim \Pi(T) \sim \Pi(X,C,Z_1,(Y.p)D,Z_2).p$, where either is $[\Pi(T)] \sim [X]$ or $[\Pi(T)] \sim [Z_1]$ or $[\Pi(T)] \sim (Y.p)D$.

There are 14 main cases to be examined; they are classified in three groups.

In the cases of the first group we start with (a′) and (a″); using either RPSU or RPPR or RPTR or RPSP, one or more times, we derive a formula (b) $C.CDD$ of degree smaller than the degree of (a); this contradicts Hyp 4. For example, let $X \sim (A,\Pi(AB,X'))$ and $B \sim \Pi(X',C,Z_1,(Y.p)D,Z_2).p$; hence, (a′) is $(A,\Pi((A,\Pi(X',C,Z_1,(Y.p)D,Z_2)).p,X'),C,Y).p$. Now (b) $((A,X',C,Y).p,A,\Pi(X',C,Z_1,(Y.p)D,Z_2)).p$, by (a″) and RPPR. Hence, $(A,(A,X',C,Y).p,X',C,Y).p$ by (a′), (b) and RPTR, contrary to Hyp 4.

The remaining cases of this group are left to the reader.

In the second group there is only one case, where in our attempt to derive (a) we violate NOABB (this is why we need a proof of NOABB that is independent of CONGR and hence of NOASS). Here is the case.

Let $X \sim (A,X')$, $AB \sim \Pi(Y.p,W_D).p$ and $B \sim \Pi(X',C,Z_1,Z_2).p$, where $D \sim W_D.p$. Moreover, let $W_D \sim \Pi(A,W'_D)$ and $W_B \sim \Pi(Y.p,W'_D)$; hence, $W_B \sim \Pi(Y.p,W'_D) \sim \Pi(X',C,Z_1,Z_2)$. Eventually, let $Y.p \sim C$ and

$W'_D \sim \Pi(X', Z_1, Z_2)$; hence, (a′) $\vdash (A, X', Y.p, Y).p$ and (a″) $(Z_1, (A, \Pi(X', Z_1, Z_2)).p, Z_2).p$.

If $Z_1 = \varnothing$, then (a″) contradicts NOABB. If $Z_1 \sim (F, Z'_1)$, then (b) $\vdash ((F, Z'_1, Z_2, Y).p, Y, A, \Pi(F, X', Z'_1, Z_2)).p$ by (a′) and RPPR; hence, $(F, (F, Z'_1, Z_2, Y).p, Z'_1, Z_2, Y).p$ by (a″), (b) and RPTR, contrary to Hyp 4.

The third group consists of cases where NMF is used. Let us examine them.

In the first of them $A \sim (Y.p)D, X \sim \Pi(AB, X')$ and $B \sim \Pi(X', C, Z_1, Z_2).p$; hence, (a′) $\vdash ((\Pi((Y.p)D, X', C, Z_1, Z_2).p, X', C, Y).p$ and (a″) $\vdash (Z_1, D, Z_2).p$. By (a′), (a″) and RPG, (b) $((\Pi((Y.p)D, X', C, Z_1, Z_2).p, (Y.p)D, X', C, Z_1, Z_2).p$. By NMF, there are E and F such that $EE \sim \Pi((\Pi((Y.p)D, X', C, Z_1, Z_2).p, X', C, Y).p$ and $FF \sim (Z_1, D, Z_2).p$, which is impossible.

In the second of these cases $A \sim (Y.p)D$, $AB \sim C$ and $B \sim \Pi(X, Z_1, Z_2).p$; hence, (a′) $\vdash (X, ((Y.p)D, \Pi(X, Z_1, Z_2)).p, Y).p$ and (a″) $(Z_1, D, Z_2).p$.

Let $X = Z_1 = Z_2 = \varnothing$. Since $D \sim U.p$ for some U, (a″) $\vdash (U.p)p$; by Theorem 5.1, $U = \varnothing$ and $D = p$. Hence, (a′) $\vdash ((Y.p)pp, Y).p$. By RPPR and (a′), $\vdash (\Pi((Y.p)p, Y.p).p, Y.p, Y).p$, and then $(\Pi((Y.p)p, Y.p).p, (Y.p)p, Y.p).p$. By NMF, there is a E such that $EE \sim \Pi((Y.p)pp, Y).p$, which is impossible.

In the third case of this group $A \sim (Y.p)D$, $Z_1 \sim \Pi(AB, Z'_1)$ and $B \sim \Pi(X, C, Z'_1, Z_2).p$; hence, (a″) is $(\Pi(((Y.p)D, X, C, Z'_1, Z_2).p, Z'_1), D, Z_2).p$. By (a′), (a″) and RPG, (b) $(\Pi(((Y.p)D, X, C, Z'_1, Z_2).p, (Y.p)D, X, C, Z'_1), Z_2).p$. By NMF, $\Pi((Y.p)D, X, C, Z'_1, Z_2).p \sim \Pi(Z'_1, D, Z_2).p$, which is impossible.

REFERENCES

1. *Anderson A.R., Belnap N.D.*, Jr. Entailment, the logic of relevance and necessity. Princeton: Univ. press, 1975. Vol. I, § 8.11.

1a. *Anderson A.R., Belnap N.D., Dunn J. M.*, Entailment, the logic of relevance and necessity. Princeton: Univ. press, 1992. Vol. II, § 66.

2. *Komori Y.*, Syntactical investigations into *BI* logic and *BB'I* logic. // Studia Logica. 1994. Vol. 53. P. 397-416.

3. *Kron A.*, A constructive proof of a theorem in relevance logic. // Ztschr. math. Logik und Grundlagen Math. 1985. Bd. 31. S. 423-430.

4. *Kron A.*, Identity and permutation. // Publ. Inst. Math. 1995. T. 57 (71). P. 165-178.

5. *Kron A.*, Between $\mathbf{TW}_{\rightarrow}$ and $\mathbf{RW}_{\rightarrow}$. // Ibid.

6. *Martin E., Meyer R.K.*, Solution to the P - W problem. // J. Symbolic Logic. 1982. Vol. 47. P. 869-887.

А.В.Чагров, А.А.Чагрова

БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА НЕСВОДИМЫХ МОДАЛЬНОСТЕЙ В НОРМАЛЬНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ

Abstract. *The first mathematical results in modal logic was connected with the discovery of phenomenon of modality reduction: in many logics the infinite set of all iterated modalities is equivalent to finite sets (its own set for every concrete logic). The question about whether this reduction is always possible and how can we establish it (in algorithmic, criterion or another way) are not studied enough up to now. We will show that this problem has no simple solution: algorithm for its solution does not exist, a set of logics with infinite sets nonequivalent modalities has rather fuzzy bounds — set of maximal in inclusion normal modal logics each of which has an infinite set nonequivalent modalities is a continuum.*

Some open problems are discussed.

Введение

Проблема сведения модальностей является уникальной по простоте постановки — даже несведущему в логике человеку легко ее объяснить: отличаются ли “по смыслу” утверждения “необходимо A”, “необходимо, что необходимо A”, “возможно, что необходимо A”, “необходимо, что возможно A” и т.д. Уже в такой содержательной трактовке проблемы видна ее сложность, поскольку даже осознать интуитивный смысл итерированных модальностей — “необходимо, что необходимо...”, “возможно, что необходимо...”, “необходимо, что возможно...” и пр. — довольно трудно. Положение усугубляется, если мы будем рассматривать одновременно разные виды модальностей, т.е., помимо “необходимо” и “возможно”, будем использовать, к примеру, “обязательно”, “всегда будет” и т.д.; не говоря уж о кванторах, которые тоже можно истолковывать как модальности: вспомним, например, об одном из конъюнктивных членов эквивалентности $\forall x\Box\varphi\leftrightarrow\Box\forall x\varphi$ — формуле Баркан. Сразу оговоримся, что в этой статье мы ограничиваемся случаем пропозициональной модальной логики с одной модальностью “необходимо” и выражаемой через нее “возможностью”.

Являясь традиционной философско-логической модальной проблемой, с выходом работы [18], где было обнаружено, что три из пяти льюисовских систем — $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$ и $\mathbf{S}_5$ — обладают конечными полными множествами несводимых модальностей, и [17], где показано, что для $\mathbf{S}_2$ это свойство не выполняется, сведение модальностей стало традиционной математической проблемой в модальной логике. Заметим, что в математике имеется довольно много родственных проблем — проблемы конечности конечнопорожденной алгебры того или иного типа, а также и параллельных задач. Так, топологические пространства составляют адекватный семантический аппарат для модальной логики $\mathbf{S}_4$, причем при интерпретации формул в них оператору необходимости $\Box$ соответствует операция взятия внутренности множества, оператору возможности $\Diamond$ (мы его будем далее считать сокращением $\neg\Box\Box\neg$) соответствует операция взятия внутренности множества (а отрицанию — конечно же, дополнение множества), поэтому задаче сводимости модальностей при фиксированном, но произвольном высказывании A здесь соответствует "...забавная и полезная задача... Сколько различных множеств можно построить, исходя из фиксированного подмножества A топологического пространства, в результате последовательного применения в любом порядке операторов замыкания, перехода к внутренности и перехода к дополнению?" (см. [1], с. 70, 86), где приводится *задача Куратовского о замыканиях и дополнениях* [14]: "Пусть A — подмножество топологического пространства. ...Можно построить самое большее 14 множеств, применяя к A операции замыкания и перехода к ... дополнению. Существует подмножество пространства вещественных чисел (с обычной топологией), из которого можно таким образом получить ровно 14 различных множеств"; решение *задачи Куратовского* для произвольных топологических пространств рассматривалось во многих работах (см. [3], [15], а также многочисленные ссылки в этих работах). Количество возникающих здесь операций[1] над множествами в общем случае есть в точности количество несводимых модальностей логики $\mathbf{S}_4$ (см. [5]), где эти вопросы рассмотрены для *всех* нормальных расширений $\mathbf{S}_4$.

Заметим, что аналогичные задачи интересны и для иных логик, скажем, логики $\mathbf{S}_3$ (см. [19], а также [13]). При этом многие вопросы все еще открыты, например, неизвестно, есть ли сведения модальностей в логике $\mathbf{S}_6$, получаемой из $\mathbf{S}_2$ добавлением аксиомы $\Diamond\Diamond\bot$ ("возможно, что возможна ложь"), хотя бесконечность множества несводимых в ней модальностей достаточно очевидна (см. [4] о постановке задачи).

Со времени работы [18] изучено довольно много модальных систем с точки зрения вопроса описания всех сведений модальностей в них. Некоторые из полученных здесь (до 1974 г.) результатов читатель может найти в [4] и имеющемся в этой книге обзоре Г.Е.Минца. Со времени издания этих источников исследования

[1] Вопросы о числе различных операций и о числе получаемых с их помощью множеств, вообще говоря, различны!

вопросов сведения модальностей существенно изменились по своему предмету: от изучения *отдельных* модальных систем, когда интересуются количеством несводимых модальностей и/или описанием всех сведений модальностей в рассматриваемой системе[2], что является, как правило, интересной содержательной проблемой и интригующей математической задачей: интересы исследователей перемещаются в сторону изучения *классов* логик, когда вопросы о сведении модальностей задаются в "массовом духе", как, скажем:

- нельзя ли по виду аксиом системы определить (алгоритмически и/или, предоставив необходимые и/или достаточные синтаксические или семантические, или какие-либо иные критерии), конечно ли множество несводимых в ней модальностей;
- существуют ли модальные системы с данным числом несводимых модальностей;
- существуют ли модальные системы с данным множеством несводимых модальностей;
- как устроена совокупность (решетка) модальных логик с данным числом несводимых модальностей;
- как устроена совокупность модальных логик с данным множеством несводимых
- модальностей;

и многие другие.

Данная работа посвящена выяснению ответов на некоторые из вопросов, связанных с нормальными модальными логиками, т.е. нормальными расширениями минимальной нормальной модальной логики **K** и возможностью сведения в них всей совокупности модальностей к какому-либо конечному множеству.

1. Исходные определения

Напомним некоторые определения, связанные с нормальными модальными логиками. Модальные формулы строятся из пропозициональных переменных p, q, r, ... , с индексами, если нужно, и константы $\perp$ ("ложь") с помощью булевых связок $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и модальной связки $\Box$ ("необходимо, что... "); как обычно, употребляются и связки $\neg$, $\leftrightarrow$ и константа $\top$ ("истина") как стандартные сокращения, а кроме того, связка $\Diamond$ ("возможно, что... ") — сокращение $\neg\Box\neg$. Полагаем минимальной нормальной модальной логикой **K** логику, аксиоматизируемую следующим образом:

- аксиомы **K**:
  - — какой-нибудь конечный список формул, аксиоматизирующих множество классических тавтологий;

---

[2] Эти вопросы можно считать стандартными для всякой вновь формулируемой модальной системы наряду с вопросами о непротиворечивости, разрешимости, финитной аппроксимируемости, полноте и др.

— $\Box(p\to q)\to(\Box p\to\Box q)$;

- правила вывода **K**:
  - — подстановка;
  - — *modus ponens*: φ, $\varphi\to\psi$ / ψ;
  - — правило Геделя: φ / $\Box\varphi$.

Ввиду известной теоремы о замене эквивалентных в **K** (да и в любой нормальной модальной логике), можно использовать формулы с точностью до очевидных эквивалентностей типа булевых взаимосвязей, связи $\Box$ и $\Diamond$.

Нормальным расширением **K** формулами (дополнительными аксиомами) $\{\varphi_i: i\in I\}$ называется замыкание множества $\mathbf{K}\cup\{\varphi_i: i\in I\}$ по всем трем правилам вывода **K**, обозначение получаемой логики — $\mathbf{K}\oplus\{\varphi_i: i\in I\}$ или $\mathbf{K}\oplus\varphi_1\oplus\ldots\oplus\varphi_m$ в случае $I=\{1,\ldots,m\}$.

Полезно иметь в виду, что $\mathbf{K}\oplus\varphi_1\oplus\ldots\oplus\varphi_m=\mathbf{K}\oplus\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$, а потому аксиоматизируемость конечным списком дополнительных аксиом равносильна аксиоматизируемости одной дополнительной аксиомой. В дальнейшем для удобства вместо оборота “конечно-аксиоматизируемая логика” будет (не вполне корректно, но коротко) употребляться и термин “исчисление”.

Напомним, что *модальность* — это слово (возможно, пустое) в алфавите[3] $\{\neg,\Box\}$, сведение модальностей M_1 и M_2 в нормальной модальной логике L — это принадлежность этой логике формулы $M_1p\leftrightarrow M_2p$. По теореме о замене эквивалентных сводимые друг к другу модальности взаимозаменяемы во всех формулах, т. е. при замене дают эквивалентные формулы. В результате, все модальности для данной фиксированной нормальной модальной логики разбиваются на классы сводимости: в один класс попадают в точности те модальности, которые в этой логике сводимы друг к другу. В том случае, когда этих классов оказалось конечное число, говорим, что в данной логике конечное число несводимых модальностей, в противном случае — бесконечное число несводимых модальностей. Например, логика **K** имеет бесконечное число несводимых модальностей, сведения в ней по существу исчерпываются тривиальными, такими как $M\neg\neg Np\leftrightarrow MNp$ и непосредственно следующими из них. В логике $\mathbf{K}=\mathbf{K}\oplus\Box p\to\Box\Box p$ тоже бесконечно много несводимых модальностей, например, никакие две различные модальности вида $\Box^n$ не сводятся друг к другу, хотя имеются и нетривиальные теоремы сведения, например (см. [9]):

$$\mathbf{K}_4\vdash\Box\Diamond\Box\Diamond p\leftrightarrow\Box\Diamond p.$$

Отсюда, кстати, мгновенно следует тот факт, что логика $\mathbf{K}\oplus\Box^2p\leftrightarrow\Box p$ имеет конечное число несводимых модальностей, см. [9].

---

3 Подчеркнем еще раз, что $\Diamond$, конечно, используется, но в качестве упомянутого выше сокращения. Для наших результатов это несущественно, мы вводим эту договоренность для определенности.

Теперь сформулируем основную решаемую здесь задачу: *как по формулам из множества* $\{\varphi_i: i\in I\}$ *определить, конечно ли в* $\mathbf{K}\oplus\{\varphi_i: i\in I\}$ *множество несводимых модальностей.*

Подходы к ответу на этот вопрос, ввиду его неконкретности, могут быть самыми разными. Например, можно понимать этот вопрос как алгоритмическую проблему, состоящую в требовании предъявить алгоритм (или хотя бы доказать его существование, или доказать отсутствие такого алгоритма), который мог бы по формуле (или конъюнкции конечного списка формул) φ сказать нам, конечно ли множество несводимых в $\mathbf{K}\oplus\varphi$ модальностей. Однако независимо от ответа на такой вариант основного вопроса, останется неясно:

- почему в качестве параметра для алгоритма предлагается аксиома (а не множество аксиом), дополнительная к **K**;
- почему в качестве основы берется модальная логика **K**, а не, скажем, **K** или другая какая-нибудь модальная логика;
- почему бы не сформулировать алгоритмическую проблему как вопрос об аксиоматике (в целом, а не о дополнительных лишь аксиомах).

Есть и другие естественные вопросы, в частности, возникающие в зависимости от решения представленной алгоритмической проблемы. Но об этом позже.

Другой вариант решения основного вопроса существенно менее алгоритмичен, но по некоторым причинам во многих случаях он может оказаться гораздо полезнее алгоритмического. Дело в том, что решение вопроса об алгоритмическом описании свойства часто ничего не говорит о самом свойстве. Например, как известно, проблема выяснения по φ, является ли непротиворечивой $\mathbf{K}\oplus\varphi$, алгоритмически разрешима, однако соответствующий алгоритм состоит (ввиду теоремы Макинсона [16], утверждающей, что существуют ровно две максимальные по включению непротиворечивые нормальные модальные логики, а именно: логика рефлексивной точки и логика иррефлексивной точки как одноэлементных шкал Крипке) в выяснении истинности φ хотя бы в одноэлементной шкале Крипке (рефлексивной или иррефлексивной), что без разъяснений мало проясняет суть дела, к тому же попытки практического воплощения алгоритма натолкнутся на сложностные проблемы типа “**P** = **NP**?”. С другой стороны, мы имеем более информативную ситуацию, если понимаем все непротиворечивые нормальные модальные логики как логики, содержащиеся в логике одноэлементной рефлексивной шкалы или в логике одноэлементной иррефлексивной шкалы.

Таким образом, представляется полезным описать совокупность всех нормальных модальных логик с интересующим нас свойством “иметь (бес)конечное число несводимых модальностей”, охарактеризовав границы этого множества.

2. Алгоритмический аспект

Алгоритмические вопросы, связанные с выяснением ситуации со сведением модальностей, рассматривались во многих работах, укажем для примера статью [8], где дается семантический тест для определения количества несводимых модальностей в нормальных расширениях $\mathbf{S}_4$; впрочем, основная цель в этой работе (вопреки названию) — описание всех формул от одной переменной в системе $\mathbf{S}_4$. Отметим попутно, что алгоритм для решения задачи [8] может быть сформулирован много проще, поскольку он связан лишь с принадлежностью и непринадлежностью данной логике одной или нескольких формул из списка

$$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p,\ \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p,\ p \to \Box\Diamond p,$$

а это, как нетрудно убедиться, алгоритмически решаемо (в терминах [6], см. также [12], эти формулы *разрешимы* над $\mathbf{S}_4$). Заметим, что недавно М.В.Захарьящев доказал (см. [12]), что все конечно-аксиоматизируемые расширения $\mathbf{S}_4$, дополнительные аксиомы которых содержат не более одной переменной, финитно аппроксимируемы, а потому и разрешимы.

Однако в целом алгоритмические рассмотрения в данной области являлись до сих пор либо отрывочными, либо касались ситуаций, допускающих переборные решения, как в случае с расширениями $\mathbf{S}_4$ или для иных логик с конечными множествами несводимых модальностей. Так, был совершенно открыт вопрос (т. е. не были видны подходы к его решению), ответом на который является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Свойство "иметь конечное множество несводимых модальностей" неразрешимо в **K***, т. е. не существует алгоритма, позволяющего по произвольной формуле j определить, конечно ли множество несводимых модальностей в $\mathbf{K}\oplus\varphi$.

Доказательство этой теоремы мы, к сожалению, здесь привести не можем[4] ввиду его неоправданной для целей данного изложения громоздкости, поскольку детали этого доказательства имеют лишь косвенное отношение к сведению модальностей, как, собственно, часто происходит с доказательствами неразрешимости свойств, массовых проблем и т.п.

Как и в других подобных случаях, неразрешимость проблемы вовсе не лишает нас надежды на какое-либо алгоритмическое решение интересующей нас проблемы. Например, можно было бы задаться вопросом о построении алгоритма, *перечисляющего* все формулы, добавление каждой из которых (по отдельности!) к **K** давало бы исчисление с (бес)конечным множеством несводимых модальностей. Например, хотя в нормальных расширениях **K** про-

[4] Полные доказательства этой теоремы авторы предполагают опубликовать в отдельной статье.

блема табличности, проблемы совпадения с (фиксированной, но любой непротиворечивой!) табличной логикой (см. [2]), алгоритмически неразрешимы, множества табличных нормальных модальных логик и множества исчислений, совпадающих по множеству выводимых формул с данной непротиворечивой табличной логикой, перечислимы.

ТЕОРЕМА 2. *Совокупность всех нормальных модальных исчислений, каждое из которых имеет конечное число несводимых модальностей, рекурсивно перечислимо*, т. е. существует алгоритм, выписывающий эффективную последовательность нормальных модальных исчислений в виде одной дополнительной к **K** аксиомы, содержащей в точности все исчисления с конечным числом несводимых модальностей, и ничего другого.

Доказательство этой теоремы существенно проще, нежели доказательство теоремы 1; оно основывается на том, что имеется эффективная (даже разрешимая!) последовательность формул, т.е. логика имеет конечное число несводимых модальностей тогда и только тогда, когда в ней выводима одна из формул этой последовательности.

Теорема 2 позволяет следующим образом усилить утверждение теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ. *Совокупность всех нормальных модальных исчислений, каждое из которых имеет бесконечное число несводимых модальностей, не является рекурсивно перечислимым.*

Ответим теперь на некоторые из сформулированных выше вопросов.

Почему, например, рассматривается алгоритмическая проблема конечности множества несводимых модальностей для *исчислений*, а не каких-либо других эффективно задаваемых классов логик (например, рекурсивно аксиоматизируемых логик или, что, ввиду известного фокуса Крейга, практически то же самое, рекурсивно перечислимых логик)? Дело в том, что этому мешает теорема, доказанная, хотя и не опубликованная А.В.Кузнецовым, которую можно считать аналогом теоремы Райса-Успенского из теории алгоритмов: любое нетривиальное свойство рекурсивно задаваемых логик алгоритмически неразрешимо (см. детали в [6] и более общее изложение в [12]).

Далее. Почему не рассматриваются просто исчисления, т.е. нельзя ли в качестве входных данных предполагаемого алгоритма брать всю аксиоматику, а не дополнительные к **K** аксиомы? Ответ дает и теорема 1 и тот факт, что для общих исчислений неразрешимы даже свойства непротиворечивости, полноты относительно классических таблиц истинности и многое-многое другое (см. по этому поводу пионерскую работу [2]), т.е. неразрешимость интересующей нас проблемы, как, впрочем, и многих других, является "побочным эффектом", совершенно не относящимся к сути рассматриваемой тематики.

Любопытным является вопрос о выразительных алгоритмических возможностях[5] формул, представляющих собой сведения модальностей. Например, неизвестно, можно ли аксиоматизировать такими формулами неразрешимые исчисления. Отметим, что если использовать не одну модальность, а две или более, то такие построения возможны (см. [7], а также [11]).

3. Теоретико-множественные аспекты

Поскольку свойство "иметь конечное множество несводимых модальностей" наследственно в **K**, т. е. если им обладает какая-либо логика, то обладает и всякое ее расширение, описание множества нормальных модальных логик, каждая из которых имеет бесконечное множество несводимых модальностей, могло бы заключаться в описании его границ.

С помощью леммы Цорна легко доказывается, что множество "топологически замкнуто", т. е. граница множества в него же и включается, точнее говоря —*всякая логика с бесконечным множеством несводимых модальностей содержится в максимальной по включению логике с бесконечным множеством несводимых модальностей.* Таким образом, "идеальным" описанием интересующего нас множества было бы представление его в виде интервала [**K**; L] для некоторой подходящей логики L. Однако такое "идеальное" описание весьма далеко от реальности, а именно: справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Во множестве нормальных модальных логик, каждая из которых имеет бесконечное множество несводимых модальностей, существует континуум максимальных по включению элементов.*

Доказательство этой теоремы проводится параллельно доказательству теоремы 1, поэтому коснемся его лишь в двух словах. Мы строим континуальное семейство нормальных модальных логик, каждая из которых имеет бесконечное множество несводимых модальностей, а значит, по лемме Цорна, каждая из них включается в некоторую максимальную логику с этим свойством, но любые две различные логики семейства в сумме дают логику, включающую в себя $\mathbf{K}\oplus\Box^2p\leftrightarrow\Box p$, имеющую, как отмечалось выше, конечное множество несводимых модальностей, а потому для различных логик семейства, содержащие их максимальные логики с бесконечными множествами несводимых модальностей, должны быть различны.

---

[5] Другой вид выразительности формул — первопорядковая определимость — в контексте сведения модальностей полностью рассмотрен в [10].

Заключение

Мы укажем здесь некоторые оставшиеся без ответа вопросы, связанные с модальностями, дополнительно к отмеченным выше.

Прежде всего, интерес представляет не только множество логик, каждая из которых имеет бесконечно много несводимых модальностей, но и множество логик, не имеющих сведения модальностей, кроме, конечно, тривиальных. Об этом множестве известно лишь, что в нем, по крайней мере, два максимальных элемента[6] и что оно континуально. Таким образом, вопросы об аналогах теорем 1 и 3 для этого случая открыты.

С другой стороны, большинство представляющих интерес логик находится в расширениях $\mathbf{K}_4$, которая имеет (см. полное описание в [9]) бесконечно много несводимых модальностей. В наших доказательствах теорем 1 и 3 собственная аксиома $\mathbf{K}_4$ играет довольно важную роль, а потому они не переносятся на нормальные расширения $\mathbf{K}_4$.

Отметим один недостаток нашего доказательства теоремы 3: его неконструктивность, заключающуюся в применении леммы Цорна. Нам не известно ни одного конкретного примера максимальной по включению логики ни во множестве логик, каждая из которых имеет бесконечно много несводимых модальностей, ни во множестве логик, не имеющих сведения модальностей.

Наконец, совершенно не ясна картина со всеми решенными здесь и сформулированными проблемами, но по отношению к редукциям модальностей, т. е. формулам вида $M_1p \to M_2p$, а не $M_1p \leftrightarrow M_2p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келли Дж.Л.* Общая топология. М.: Наука, 1968.
2. *Кузнецов А.В.* Неразрешимость общих проблем полноты, разрешимости и эквивалентности пропозициональных исчислений // Алгебра и логика. 1963. Т. 2. С. 47-66.
3. *Солтан В.П.* К задаче Куратовского // Бюл. Польской АН. Сер. мат. наук. 1980. Т. 28. С. 369-375.
4. *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука, 1974.
5. *Чагров А.В.* Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин: КГУ, 1982. С. 186-190.
6. *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики / Под ред. С.В.Яблонского. М.: Физматлит, 1994. Вып. 5. С. 62-108.
7. *Шехтман В.Б.* Неразрешимые пропозициональные исчисления // Проблемы кибернетики: Неклассические логики и их приложение. 1982. Т. 75. С. 74-116.

---

[6] Это замечено в [9].

8. *Bellissima F.* A test to determine distinct modalities in the extensions of S_4 // Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1985. Bd. 31. S. 57-62.
9. *Bellissima F.* Infinite sets of nonequivalent modalities // Notre Dame J. of Formal Logic. 1989. Vol. 30. P. 574-582.
10. *Benthem J.A.F.K. van.* Modal reduction principles // J. of Symbolic Logic. 1976. Vol. 41. P. 301-312.
11. *Chagrov A.V., Shehtman V.B.* Algorithmic aspects of tense logics // Lecture Notes in Computer Science. Springer, 1995. Vol. 933. P. 442-455.
12. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford Univ. Press, 1997.
13. *Goldblatt R.I.* A model-theoretic study of some systems containing S_3 // Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1972. Bd. 19. S. 75-82.
14. *Kuratowski C.* Sur l'operation A de l'Analysis Situs // Fundamenta Mathematicae. 1922. Vol. 3. P. 182-199.
15. *Langford E.* Characterization of Kuratovski 14-sets // Amer. Math. Monthly. 1971. Vol. 78. № 78. P. 362-367.
16. *Makinson D.C.* Some embedding theorems for modal logic // Notre Dame J. of Formal Logic. 1971. Vol. 12. P. 252-254.
17. *McKinsey J.C.C.* Proof that there are infinitely many modalities in Lewis' system S_2 // J. of Symbolic Logic. 1940. Vol. 5. P. 110-112.
18. *Parry W.T.* Modalities in the Survey system of strict implication // J. of Symbolic Logic. 1939. V. 4. P. 137-154.
19. *Pledger K.E.* Modalities of systems containing S_3 // Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1972. Bd. 18. S. 267-283.
20. *Zakharyaschev M., Wolter F., Chagrov A.* Advanced Modal Logic. Preprint IS-RR-96-0027F (ISSN 0918-7553), School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology. Hokuriku, 1996.

В.Х.Хаханян

НЕЗАВИСИМОСТЬ ПРИНЦИПА ДВОЙНОГО ДОПОЛНЕНИЯ МНОЖЕСТВ ОТ СХЕМЫ СОБИРАНИЯ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ С ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКОЙ[1]

Abstract. *Let ZFI_R + DCS is the intuitionistic set theory with the full list of set-theoretic axioms and the axiom of double complement of sets (DCS). There is an inner model of ZF (and ZFC) in our set theory and this theory posesses the existential property (Myhill and auther).*

In 1993 I also proved that the collection scheme is independent of our set theory . In present short note I give the proof independent sketch of DCS of ZFI_R + collection - power axiom. I modife my model of realizabillity type (this model was constructed for the proof of consistency collection and DCS with ZFI_R) such that in the new model DCS is false and collection + ZFI_R is true (I think, that power axiom also is true, but now I can't to give such proof).

I will publish the full proof of this theorem in one of logic journals.

В одной из предыдущих работ автором было получено следующее усиление результата Дж. Майхилла о дизъюнктивности и экзистенциальности односортной теории множеств: отмеченные свойства дизъюнктивности и полной экзистенциальности остаются справедливыми для расширения односортной теории множеств со стандартным набором теоретико-множественных аксиом следующим принципом двойного дополнения множеств (DCS): $\forall a\exists x\forall y[y\in x\leftrightarrow\neg\neg y\in x]$, предложенного В.Поуэллом. В качестве интересного следствия была получена независимость схемы аксиом "collection" от теории множеств с принципом DCS (последняя теория представляет интерес с точки зрения развития внутри нее стандартной интерпретации классической теории множеств Цермело-Френкеля, что достигается именно с помощью DCS, т.е. эта теория множеств, с одной стороны, очень мощная, с другой стороны, достаточно эффективная), при этом автор использовал известный результат Фридмана и Щедрова (см. [2]) о том, что свойство экзистенциальности не выполняется в теории множеств со схемой аксиом "collection".

[1] Работа выполнена при поддержке Фонда НИОКР МПС и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00633).

В настоящей работе удалось доказать, что принцип двойного дополнения множеств (верный в классической теории множеств Цермело-Френкеля в силу закона исключенного третьего) не зависит от схемы аксиом "collection" в теории множеств с интуиционистской логикой, однако среди стандартного списка теоретико-множественных аксиом отсутствует аксиома множества подмножеств, т.е. в предлагаемой для доказательства модели выполняются все стандартные аксиомы теории множеств, кроме аксиомы множества подмножеств, и не выполняется принцип DCS. Предлагаемая ниже модель есть модель реализуемостного типа и является модификацией одной из ранних моделей автора (см. [1]), использованной им для доказательства совместности DCS с полной теорией множеств, включая и схему аксиом "collection".

Опишем теорию ZFI. Язык включает сорт переменных по множествам, бинарный предикат $x \in y$, логические связки и кванторы. Атомарные формулы имеют вид $x \in y$, остальные формулы строятся из атомарных обычным образом. Аксиомы теории включают: экстенсиональность, пару, сумму, выделение, подстановку, ε-индукцию. Отметим, что отсутствует аксиома множества подмножеств.

Построим универсум множеств Δ. Так как описание будет кратким, необходимо знакомство с [1]. Пусть ω – предельный регулярный кардинал, например, первый бесконечный кардинал. Каждое множество будет набором пар $< n,x >$, где n – натуральное число и x - уже построенное множество. В универсуме множеств есть отношение эквивалентности и новое множество не должно его разбивать. Новое условие на выбираемые множества состоит вот в чем. Пусть $y=\{< n,x >\}$. Обозначим $y^1 = \{n | \exists x.< n,x > \in y\}$ и через $y^2 =\{x|\exists n.< n,x >\in y\}$. Через ≈ обозначим отношение эквивалентности и для данных x и y пусть $x_{ун}=\{n| < n,x > \in y\}$.

Обозначим через $[X]_y$ класс множеств такой: $z\in[X]_y \Rightarrow z \approx x \wedge \exists n.< n,z > \in y$. Пусть $|y|$ – мощность классов эквивалентностей в y, т.е.$|\{[X]_y| \exists n.< n,x > \in y\}|$. Новое условие таково: если мощность y больше фиксированного ω, то для любого подмножества $z \subseteq y$ такого, что $|z| \geq \omega$, существует $u \subseteq z$ такое , что $|u| \geq \omega$ и $\cap\{x_{uн}|x\in u^2\}=\varnothing$,т.е. пересечение всех множеств натуральных чисел, с которыми x входит в y, будет пустым. В остальном построение Δ совпадает с построением в [1]. Реализуемость в точности повторяет [1], например

$R(e,g,\forall x\phi(x)) \leftrightarrow \forall x\in\Delta.R(e,g^n{}_x,\phi(a_n))$, где g – оценка для переменных, также см. [1]. Основная теорема гласит: если в теории ZFI+DCS без аксиомы степени выводима формула φ, то эффективно указывается e такое, что $\forall gR(e,g,\phi)$. Приведем скетч доказательства основной теоремы. $\forall eg\neg\neg R(e,g,DCS)$ и, следовательно, не выводимо. Возьмем a из Δ такое, что $|a|\geq\omega$.Тогда $\cap\{x_{aн}|x\in a^2\}=\varnothing$. Пусть для некоторых e g R(e,g,DCS). Если

$R(k,g,\neg\neg y\in a)$, где $y\in\Delta$,тогда любое n реализует это. И так для всякого y такого, что $\exists eR(e,g,\neg\neg y\in a)$. Тогда единое e(k) реализует $y\in x$ для сущего x, но так быть не может, так как $x\in\Delta$, а тогда $\cap\{y_{ан}|y\in x^2\}=\varnothing$; конечно, $|x|\geq\omega$. Итак, DCS нереализуемо и невыполнимо в предложенной модели. Остановимся на вопросе выполнимости в модели остальных аксиом. Часть аксиом (экстенсиональность, пара, бесконечность, индукция по множествам) реализуется в точности как в [1]. Остальные аксиомы, в которых требуется указать сущее множество, требуют, чтобы оно принадлежало Δ, т.е. чтобы выполнялось дополнительное условие, описанное выше. Продемонстрируем это на схеме выделения. $\exists x\forall y(y\in x\leftrightarrow y\in a\wedge\phi(y))$. Пусть a – фиксированное множество из Δ. Полагаем $x=\{< e,y >|< e_1,y >\in a\wedge R(e_2,g,\phi(y))\}$, где g – фиксированная оценка. Если $|x|\geq\omega$, то найдется $z\subseteq x$ такое, что $\cap\{u_{zн}|u\in z^2\}=\varnothing$, тогда аналогичное условие будет выполнено для подмножеств x, т.е. x будет принадлежать Δ. В остальном реализуемость схемы выделения проходит как в [1]. Совершенно аналогичным образом проходит доказательство выполнимости (реализуемости) аксиомы суммы $\forall a\exists x\forall yz[y\in z\wedge z\in a\rightarrow y\in x]$. Пусть $x=\{< n,y >|\ \exists z\in\Delta.\quad (< n_1,y >\in z \wedge < n_2,z >\in a\}$. Если $|x|\geq\omega$, то либо $|z|\geq\omega$ для некоторого z, либо $|a|\geq\omega$. В первом случае пересечение в x будет пусто по вторым компонентам (так как z из Δ), во втором случае пересечение в x будет пусто по первым компонентам, так как a из Δ. В любом случае x будет из универсума, так как выполнено условие на x, описанное выше. Это доказывает реализуемость аксиомы суммы , выполнимость остальных аксиом, например схемы аксиом собирания (“collection”) проводится аналогично приведенному с учетом доказательств, описанных в [1]. Основная теорема, таким образом, доказана и принцип DCS не может быть выведен в теории множеств со схемой собирания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаханян В.Х.* Независимость аксиомы “collection” от принципа DC в теории множеств с интуиционистской логикой. // Известия ВУЗов. Математика. 1993. №2. С. 81—84.
2. *FriedmanH., ScedrovA.* The lack definable witnesses in intuitionistic set theories // Advanches in Mathematics. 1995. V. 57. P. 1.

В.И.Шалак

ТЕОРИЯ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ПРОГРАММ II*

Abstract. *Every action results in some state. If in a current state we have the goal state description, then we are in position to cope with the wanted minimal changes of current state allowing us to realize given transition.*

From the logical point of view it is completely irrelevant in details and means how that transition will be done. Just the possibility of transition is counted.

In this way we arrive at construction of dynamic logic because of describing goal states and not the sequences of actions leading to those states. Very naturally we assign some accessibility relation on the set of states to an every formula of language. In case of propositional logic the states would be the truth-value assignments to propositional variables.

Целью настоящей работы является развитие идей, высказанных в работах [1], [2] и [3] и представляющих некоторый подход к абстрактной теории логической вычислимости.

В основе предлагаемого подхода лежит простое наблюдение: любое действие можно охарактеризовать тем состоянием, к которому приводит его выполнение. Если теперь, находясь в текущем состоянии, взять описание целевого состояния, то можно выявить те требуемые минимальные изменения текущего состояния, которые позволят совершить данный переход.

С логической точки зрения совершенно неважно, как конкретно, какими средствами будет совершен переход между состояниями. Интересна сама возможность перехода.

Так возникла идея построения динамической логики путем описания целевых состояний, а не последовательностей действий, которые к этим состояниям приводят. Для этого каждой формуле языка некоторым естественным образом сопоставляется отношение достижимости на множестве состояний. В случае логики высказываний множеством состояний является множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным.

Обозначим используемый язык посредством ***L***. Он состоит из:

---

* Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда, грант № 98-03-04085

1. $p,q,r,... \in Var$ - множество пропозициональных переменных;
2. $\&,\vee,\rightarrow,\neg$ - логические связки;
3. [,],(,) - скобки.

Определим множество **BF** булевых формул.

Def 1.

1. $Var \subseteq$ **BF**;
2. Если $A,B \in$ **BF**, то и $\neg A$, $(A\&B)$, $(A\vee B) \in$ **BF**;
3. Ничто другое булевой формулой не является.

Определим множество **PP** пропозициональных программ.

Def 2.

1. Если $A \in$ **BF**, то $[A] \in$ **PP**;
2. Ничто другое пропозициональной программой не является.

Пусть $Val=\{0,1\}^{Var}$. Это обычное множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным. Для удобства дальнейшего изложения дадим два следующих определения.

Пусть U - произвольное множество формул.

Def 3. $L(U)=\{p \mid \exists A(A\in U, p\in Var$ и p - подформула формулы A$)\}$

Примем соглашение, что если U является одноэлементным множеством $\{A\}$, то вместо $L(\{A\})$ будем писать просто $L(A)$. В каждом конкретном случае из контекста будет ясно, что имеется ввиду.

Def 4. $s\cong_{L(U)}t$ е.т.е. $\forall p(p\notin L(U) \Rightarrow s(p)=t(p))$, где $s,t\in Val$.

Основная идея развиваемой теории пропозициональных программ заключается в том, чтобы некоторым естественным образом сопоставить формулам пропозициональной логики бинарное отношение достижимости на множестве *Val*. Именно это отношение достижимости мы и будем называть пропозициональной программой. Итак, всякой булевой формуле A будет соответствовать пропозициональная программа $[A]\subseteq Val\times Val$. Запись $s[A]t$ будет служить сокращением для $\langle s,t\rangle\in[A]$ и будет читаться как “*из состояния s посредством пропозициональной программы [A] достижимо состояние t*”. Дадим строгое определение.

Def 5.

1. $s[P]t \Leftrightarrow s\cong_{L(P)}t,\ t(P)=1,\ P\in\{p,\neg p\}$.
2. $s[A\vee B]t \Leftrightarrow s[A]t$ или $s[B]t$.
3. $s[A\&B]t \Leftrightarrow (s[A]\circ[B]t,\ t(A)=1)$ или $(s[B]\circ[A]t,\ t(B)=1)$.
4. $s[\neg\neg A]t \Leftrightarrow s[A]t$.

5. $s[\neg(A\vee B)]t \;\Leftrightarrow\; s[\neg A\&\neg B]t$.

6. $s[\neg(A\&B)]t \;\Leftrightarrow\; s[\neg A\vee\neg B]t$.

Теперь нашей целью будет исследование свойств пропозициональных программ. Прежде всего заметим, что пункты 4-6 определения *Def* 5 позволяют проносить отрицания до пропозициональных переменных. Докажем данное свойство строго. Для этого зададим на множестве булевых формул **BF** операцию * следующим образом:

Def 6.

1. $p^* = p$
2. $(\neg p)^* = \neg p$
3. $(\neg\neg A)^* = (A)^*$
4. $(A\&B)^* = (A)^*\&(B)^*$
5. $(A\vee B)^* = (A)^*\vee(B)^*$
6. $(\neg(A\vee B))^* = (\neg A)^*\&(\neg B)^*$
7. $(\neg(A\&B))^* = (\neg A)^*\vee(\neg B)^*$

Теорема 1. $[A] = [A^*]$.

Дадим еще определение:

Def 7. $Ran([A]) = \{t \mid \exists s(s[A]t)\}$

Теорема 2. Пропозициональные программы обладают следующими свойствами:

1. $Ran([p])=\{t|t(p)=1\}$. 2. $Ran([\neg p])=\{t|t(p)=0\}$.
3. $Ran([p])=Val\backslash Ran([\neg p])$. 4. $s(A)=1\Rightarrow s[A]s$.
5. $s[A]t\Rightarrow t(A)=1$. 6. $[\neg\neg A]=[A]$.
7. $[\neg(A\vee B)]=[\neg A\&\neg B]$. 8. $[\neg(A\&B)]=[\neg A\vee\neg B]$.
9. $[A\&B]=[B\&A]$. 10. $[A\vee B]=[B\vee A]$.
11. $[A\&(B\&C)]=[(A\&B)\&C]$. 12. $[A\vee(B\vee C)]=[(A\vee B)\vee C]$.
13. $[A\vee A]=[A]$. 14. $[A]\subseteq[A\&A]$.
14'. $[P]=[P\&P]$, $P\in\{p,\neg p\}$.
15. $[A\&(B\vee C)]=[(A\&B)\vee(A\&C)]$.
16. $[A\vee(B\&C)]\subseteq[(A\vee B)\&(A\vee C)]$.
17. $[A]\subseteq[A\vee(A\&B)]$. 18. $[A]\subseteq[A\&(A\vee B)]$.
19. $\neg\exists t(t(A)=1)\Rightarrow[A]\subseteq[B]$. 20. $\neg\exists t(t(A)=1)\Rightarrow[A\vee B]=[B]$.
21. $\neg\exists t(t(A)=1)\Rightarrow[A\&B]=[A]$.
22. $[(A\&p)\vee(A\&\neg p)\vee A]=[(A\&p)\vee(A\&\neg p)]$.
23. $\exists A(s[A]t)\Leftrightarrow\exists B(s\cong_{L(B)}t)$. 24. $s[A]t\Rightarrow s\cong_{L(A)}t$.
25. $\exists t(t(A)=1)\Rightarrow\forall s\exists t(s[A]t)$. 26. $[A\vee B]=[A]\cup[B]$.

Следствие. Всякая пропозициональная программа [A] может быть преобразована к некоторому каноническому виду [A'], когда формула A' находится в дизъюнктивной нормальной форме и [A]=[A'].

Доказательство теоремы 2 и следствия приведено в [3].

Семантика пропозициональных программ имеет тесную связь с некоторыми теоретико-доказательными методами для логики высказываний.

Дадим определение множества всех путей Path(A) через формулу A:

Def 8.

1. $Path(P)=\{\{P\}\}$, где $P\in\{p, \neg p\}$.
2. $Path(A\vee B)=Path(A)\cup Path(B)$.
3. $Path(A\&B)=\{u|\ v\in Path(A),\ w\in Path(B),\ u=v\cup w,\ \neg\exists p(p\in u, \neg p\in u)\}$.

Из определения очевидно, что для всякой формулы A множество путей Path(A) является конечным множеством и каждый путь $u\in Path(A)$ является конечным множеством.

Пусть в формуле A классической логики высказываний все отрицания пронесены до пропозициональных переменных и двойные отрицания сняты. Тогда несложно показать, что формула A выполнима е. и т. е. $Path(A)\neq\varnothing$. Отсюда уже легко сделать один шаг до построения соответствующих теоретико-доказательных процедур. Различными авторами такие процедуры были определены для логики высказываний, логики предикатов, для некоторых систем модальной логики [4].

Нашей следующей задачей будет показать, как соотносится пропозициональная программа [A] и множество путей Path(A).

Теорема 3. $s[A]t \Leftrightarrow \exists u(u\in Path(A), s\cong_{L(u)}t, \forall P(P\in u \Rightarrow t(P)=1))$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся несколько лемм.

В классической логике высказываний имеют место следующие эквивалентности:

1. $\neg\neg A\leftrightarrow A$.
2. 2. $\neg(A\vee B)\leftrightarrow\neg A\&\neg B$.
3. 3. $\neg(A\&B)\leftrightarrow\neg A\vee\neg B$.
4. $A\&B\leftrightarrow B\&A$.
5. 5. $A\vee B\leftrightarrow B\vee A$.
6. 6. $A\&(B\&C)\leftrightarrow(A\&B)\&C$.
7. $A\vee(B\vee C)\leftrightarrow(A\vee B)\vee C$.
8. 8. $A\vee A\leftrightarrow A$.

9. 9. $P \leftrightarrow P\&P$.

10. $A\&(B \vee C) \leftrightarrow (A\&B) \vee (A\&C)$.

Этих эквивалентностей достаточно, чтобы любую формулу A логики высказываний привести к дизъюнктивной нормальной форме A'.

Лемма 1. Path(A)=Path(A'), где A' - дизъюнктивная нормальная форма формулы A.

Для доказательства леммы достаточно показать, что преобразование произвольной формулы в соответствии с приведенными выше эквивалентностями 1.-10. не приводит к изменению множества путей через формулу. Доказательство тривиально.

Лемма 2. $t(A)=1 \Rightarrow \forall s(s \cong_{L(A)} t \Leftrightarrow s[A]t)$, где $A=P_1\&...\&P_n$, $P_i \in \{p_i, \neg p_i\}$.

Доказательство проводим индукцией по длине формулы A.

I. $A=P$, $P \in \{p, \neg p\}$. Базис индукции.

+1. $t(P)=1$ - допущение

+2. $s \cong_{L(P)} t$ - допущение

3. $s[P]t$ - из 1, 2 по *Def 5*

4. $s \cong_{L(P)} t \Rightarrow s[P]t$ - из 2, 3

+5. $s[P]t$ - допущение

6. $s \cong_{L(P)} t$ - из 5 по *Def 5*

7. $s[P]t \Rightarrow s \cong_{L(P)} t$ - из 5, 6

8 $s \cong_{L(P)} t \Leftrightarrow s[P]t$ - из 4, 7

9.$\forall s(s \cong_{L(P)} t \Leftrightarrow s[P]t)$ - из 8

10. $t(P)=1 \Rightarrow \forall s(s \cong_{L(P)} t \Leftrightarrow s[P]t)$ - из 1-9.

II. $A=P\&B$, где $P \in \{p, \neg p\}$, $B= P_1\&...\&P_k$, $P_j \in \{p_j, \neg p_j\}$.

Индукционный шаг.

+1. $\forall t(t(P)=1 \Rightarrow \forall s(s \cong_{L(P)} t \Leftrightarrow s[P]t))$ - индукционное допущение

+2. $\forall t(t(B)=1 \Rightarrow \forall s(s \cong_{L(B)} t \Leftrightarrow s[B]t))$ - индукционное допущение

+3. $t(P\&B)=1$ - допущение

4. $\forall s(s \cong_{L(P)} t \Leftrightarrow s[P]t)$ - из 1, 3

5. $\forall s(s \cong_{L(B)} t \Leftrightarrow s[B]t)$ - из 2, 3

+6. $s \cong_{L(P\&B)} t$ - допущение

7. $s \cong_{L(P)} s'$, $s'(P)=1$ - из 6

8. $s[P]s'$ - из 7 по *Def 5*

9. $t(P)=s'(P)$ - из 3, 7

10. $s'\cong_{L(B)}t$ - из 6, 9

11. $s'[B]t$ - из 2, 3, 10

12. $s[P]s'$, $s'[B]t$, $t(P)=1$ - из 3, 8, 11

13. $s[P\&B]t$ - из 12 по *Def 5*

14. $s\cong_{L(P\&B)}t \Rightarrow s[P\&B]t$ - из 6-13

+15. $s[P\&B]t$ - допущение

16. $(\exists s'(s[P]s', s'[B]t), t(P)=1)$ или $(\exists s'(s[B]s', s'[P]t), t(B)=1)$ - из 15 по *Def 5*

+17. $\exists s'(s[P]s', s'[B]t), t(P)=1$ - допущение

18. $s[P]s'$, $s'[B]t$, $t(P)=1$ - из 17 для некоторого s'

19. $s'(P)=1$, $t(B)=1$ - из 18 по теореме 2

20. $s\cong_{L(P)}s'$, $s'\cong_{L(B)}t$ - из 1, 2, 18, 19

21. $s\cong_{L(P\&B)}t$ - из 20 по *Def 4*

+22. $\exists s'(s[B]s', s'[P]t), t(B)=1$ - допущение

23. $s[B]s'$, $s'[P]t$, $t(B)=1$ - из 22 для некоторого s'

24. $s'(P)=1$, $t(B)=1$ - из 23 по теореме 2

25. $s\cong_{L(P)}s'$, $s'\cong_{L(B)}t$ - из 1, 2, 23, 24

26. $s\cong_{L(P\&B)}t$ - из 25 по *Def 4*

27. $s[P\&B]t \Rightarrow s\cong_{L(P\&B)}t$ - из 15-26

28. $\forall s(s\cong_{L(P\&B)}t \Leftrightarrow s[P\&B]t)$ - из 14, 27

29. $t(P\&B)=1 \Rightarrow \forall s(s\cong_{L(P\&B)}t \Leftrightarrow s[P\&B]t)$ - из 3-28

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу леммы 1 и следствия к теореме 2 можно считать, что формула A находится в дизъюнктивной нормальной форме $A=C_1\vee...\vee C_n$, $C_i=P_1\&...\&P_k$, $P_j\in\{p_j,\neg p_j\}$ $n\geq i\geq 1$, $k\geq j\geq 1$

+1. $s[A]t$ - допущение

2. $s[C_i]t$ - для некоторого $C_i=P_1\&...\&P_k$, $P_j\in\{p_j,\neg p_j\}$ из 1 по *Def 5*

3. $\{P_1,...,P_k\}\in Path(A)$ - из 1, 2 по *Def 8*

4. $t(P_1\&...\&P_k)=1$ - из 2 по теореме 2

5. $\forall P(P \in \{P_1,\ldots,P_k\} \Rightarrow t(P)=1)$ - из 4

6. $s \cong_{L(\{P1,\ldots,Pk\})} t$ - из 2 по лемме 2

7. $\exists u(u \in Path(A),\ s \cong_{L(u)} t,\ \forall P(P \in u \Rightarrow t(P)=1))$ - из 3, 5, 6

+1. $\exists u(u \in Path(A),\ s \cong_{L(u)} t,\ \forall P(P \in u \Rightarrow t(P)=1))$ - допущение

2. $u \in Path(A),\ s \cong_{L(u)} t,\ \forall P(P \in u \Rightarrow t(P)=1)$ - из 1 для некоторого u

3. $u=\{P_1,\ldots,P_k\}$ - для некоторого $C_i=P_1\&\ldots\&P_k$ из 2 по *Def 8*

4. $t(P_1\&\ldots\&P_k)=1$ - из 3

5. $s \cong_{L(P1\&\ldots\&Pk)} t$ - из 2, 3

6. $s[P_1\&\ldots\&P_k]t$ - из 4, 5 по лемме 2

7. $s[A]t$ - из 6 по *Def 5*

Теорема доказана.

Следствие 1. $Path(A) \subseteq Path(B) \Rightarrow [A] \subseteq [B]$.

+1. $Path(A) \subseteq Path(B)$ - допущение

+2. $s[A]t$ - допущение

3. $\exists u(u \in Path(A),\ s \cong_{L(u)} t,\ \forall P(P \in u \Rightarrow t(P)=1))$ - из 2 по теореме 3

4. $\exists u(u \in Path(B),\ s \cong_{L(u)} t,\ \forall P(P \in u \Rightarrow t(P)=1))$ - из 1, 3

5. $s[B]t$ - из 4 по теореме 3

Следствие 2. Неверно, что $[A] \subseteq [B] \Rightarrow Path(A) \subseteq Path(B)$.

Имеется контрпример. Пусть $A = (p\&q)\vee(p\&\neg q)\vee p$ и $B = (p\&q)\vee(p\&\neg q)$. Тогда $[A]=[B]$, $Path(A) = \{\{p,q\},\{p,\neg q\},\{p\}\}$, $Path(B) = \{\{p,q\},\{p,\neg q\}\}$.

Следствие 3. $t \in Ran([A]) \Leftrightarrow \exists u(u \in Path(A),\ \forall P(P \in u \Rightarrow t(P)=1))$.

Важность теоремы 3 заключается в том, что она разрешает нам говорить о выполнении пропозициональной программы [A] в терминах нахождения пути через формулу A.

Возможно построение логики пропозициональных программ по аналогии с тем, как строятся динамические логики. Для этого определим множество **FM** формул:

Def 9.

1. $\mathbf{BF} \subseteq \mathbf{FM}$.
2. $A \in \mathbf{BF},\ B \in \mathbf{FM} \Rightarrow [A]B \in \mathbf{FM}$.
3. $A,\ B \in \mathbf{FM} \Rightarrow \neg A,\ (A\&B),\ (A\vee B),\ (A\rightarrow B) \in \mathbf{FM}$.
4. Ничто другое формулой не является.

Определим отношение $s \models A$ - “при приписывании s истинна формула A”.

Def 10.

1. $s \models p \Leftrightarrow s(p)=1$.
2. $s \models \neg A \Leftrightarrow$ неверно, что $s \models A$.
3. $s \models (A\&B) \Leftrightarrow s \models A$ и $s \models B$.
4. $s \models (A \vee B) \Leftrightarrow s \models A$ или $s \models B$.
5. $s \models (A \rightarrow B) \Leftrightarrow$ если $s \models A$, то $s \models B$.
6. $s \models [A] \Leftrightarrow \forall t(s[A]t \Rightarrow t \models B)$.

Def 11. Формула A общезначима ($\models A$), е. и т. е. $\forall s(s \models A)$.

Вопросы аксиоматизации логики пропозициональных программ будут рассмотрены в последующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шалак В.И.* Динамическая интерпретация высказываний. // Тезисы X Всесоюзной конференции по логике, методологии и философии науки. Минск, 1990b. С. 129-130.
2. *Шалак В.И.* Динамическая интерпретация высказываний. // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993 С. 68-81.
3. *Шалак В.И.* Теория пропозициональных программ. // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН, 1998.
4. *Bibel W.* Automated Theorem Proving. // Braunscweig; Wiesbaden: Vieweg, 1982.

А.Е. Болотов, В.А. Бочаров, А.Е.Горчаков

АЛГОРИТМ ПОИСКА ВЫВОДА В КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ*

Abstract. *In this paper the authors introduce an algorithm of searching the proof in natural deduction calculus of classical predicate logic. The system of natural deduction is a Fitch-style subordinate proof. Special mechanism of generating two sequences of formulae, namely, a list of formulae of the proof itself and a list of formulae-goals is the very idea of the algorithm. Due to the specifics of the searching procedures the synthetical rules that introduce logical constants are applied automatically. This fact can be interpreted as the argument against the widespread criticism of the natural deduction. The unification problem, which is the crucial point of searching for the proof in predicate logic, has found its solution in the algorithm following the famous method of using dummy variables. Terms or quasi-terms in the proof are considered as objects for the substitution instead of the dummy variables. The authors propose the special procedure of the evaluation of the dummy variables which plays the main role in the solution of the unification problem. The implementation of the algorithm and some open problems are discussed in the conclusion.*

1. Обзор работ по автоматическому доказательству теорем

Разработки в области автоматической дедукции проводятся в целом ряде крупных мировых научно-исследовательских центров, таких как, например: Argonne National Laboratory, США (программа "*Otter*", основанная на теории резолюций), University of Cambridge (программа автоматической дедукции *Isabelle*), Carnegie Mellon University (автоматическое доказательство теорем для логики высоких порядков), KAKEHI Laboratory, WASEDA University, Япония (программа автоматического доказательства для *секвенциального исчисления*) и др. Как было отмечено в ряде наших предыдущих работ [1, 2], эти процедуры автоматического поиска доказательств обычно строятся либо на базе секвенциальных исчислений и теории резолюций, либо на некотором аппарате, который в той или иной мере близок к данным представлениям логики. Надо отметить, что концентрация внимания исследователей в области автоматического вывода на этих популярных дедуктивных методах не случайна и

* Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда (грант № 96-03-04666).

обусловлена, в первую очередь, *практическими* соображениями [16]. Так, исследования в области теории резолюций тесно связаны с языками логического программирования (в частности, типа *Пролог*), где выводы основаны на методе резолюций, который изначально являлся как бы составной частью Пролога [4, 5]. Другие области, диктующие необходимость совершенствования методов автоматического доказательства – это компьютерная алгебра, а также некоторые аспекты тестирования программ [8].

Еще одной причиной может являться факт достаточно успешного практического применения неклассических логик в рамках различных проектов тестирования аппаратных средств (hardware verification) [10, 16], нередко спонсирующихся ведущими производителями таких средств (например, Intel). Здесь самыми распространенными и эффективными на сегодняшний день являются методы тестирования моделей (Model checking) [18], где для описания моделей hardware используется тот или иной дедуктивный аппарат, чаще всего основанный на модальной или временной логике [10, 11, 12, 13, 14].

Во всех этих приемах процедура выведения одних положений из других или вообще не представлена, или осуществляется в таком виде, который весьма далек от того, что понималось под выводом в истории логики [3, 6]. И секвенции, и метод резолюций – это скорее алгоритмы проверки общезначимости утверждений, чем вывод. Все они строятся на основе чисто аналитических процедур, в то время как традиционное понятие вывода представляет собой метод синтеза доказуемого утверждения из имеющихся посылок. Оригинальность нашей работы как раз и состоит в том, что здесь вывод строится как традиционная синтетическая процедура по автоматическому поиску теорем. (Заметим, что в англоязычной литературе часто под термином "natural deduction systems" полагаются не системы натурального вывода в нашем понимании, а как раз те или иные варианты секвенциального представления логики.)

Недостаток внимания, уделяемого натуральному выводу, обусловлен некоторым скептицизмом, порожденным именно фактом специфики этого метода доказательства как синтетической процедуры. Наличие правил введения логических связок рассматривается как камень преткновения на пути автоматизации натурального вывода. (В алгоритме, предложенном в нашей работе, эта проблема решена кардинальным путем – правила введения логических связок применяются чисто автоматически, по мере достижения целей, и программа работает в линейном режиме.) Более того, часто то или иное мнение достаточно авторитетных фигур может оказывать заметное влияние на направление исследований. Так, например, М. Фиттинг в известной и популярной монографии по автоматической дедукции [15], опубликованной в 1990 г., разбирая проблему сложности, пишет (стр. 95): "Системы Гильберта не подходят для автоматического доказательства теорем. То же самое относится и к натуральному выводу".

Одним из главных критериев оценки эффективности того или иного дедуктивного аппарата является быстродействие программы, основанной на этом аппарате. Не вдаваясь в детальный анализ этой проблемы, описание которой содержится, в частности, в [9, 15], отметим лишь, что и теория резолюций, и теория секвенций, как и все другие допустимые дедуктивные средства, обладают следующим свойством: известны типы примеров, где одни методы работают быстрее других и, в принципе, нет такой системы, которая бы превосходила все другие ([15], стр. 95). Так, теория резолюций (в отношении классической пропозициональной логики) является довольно эффективным методом. Одним из наиболее эффективных методов является так называемая теория линейной резолюции, применяемая по отношению к специальному типу нормальной формы, требуемой для резолюций, когда члены КНФ имеют вид дизъюнктов Хорна (где разрешается не более одного позитивного вхождения какой-то переменной) [4]. Существуют стратегии поиска доказательства (комбинация которых является полной по отношению к множеству дизъюнктов Хорна), представляющие собой очень эффективное средство решения логических задач [9, 12]. Однако очевидно, что далеко не всякое множество формул представимо в виде конъюнкции дизъюнктов Хорна. Так, первый член в следующем выражении не является дизъюнктом Хорна:

$(p \vee q) \mathbin{\&} (\neg p \vee q) \mathbin{\&} (p \vee \neg q) \mathbin{\&} (\neg p \vee \neg q)$

и, следовательно, в принципе, никакой стратегии, кроме стандартного перебора всех возможных вариантов применения правила резолюций, здесь применить не удается. Другой тип примеров, сложных для теории резолюций, – это формулы, нормальные формы которых "взрываются" в аспекте их длины, как, например, в случае

$((p \equiv q) \mathbin{\&} (q \equiv r)) \equiv (p \equiv r)$,

или в еще более сложном примере

$(p \equiv (q \equiv r)) \equiv (p \equiv q)$.

Заметим, что здесь для натурального вывода доказательство подобных формул – не проблема, именно в силу следующей кардинальной особенности алгоритма. Сложность алгоритма в случае натурального вывода зависит не от длины формулы, подлежащей доказательству (что является, в совокупности с проблемой порождения "нерелевантных" для доказательства или просто лишних резольвентов, основными моментами, влияющими на сложность метода резолюций), или количества различных переменных в анализируемой формуле (что вызывает экспоненциальный рост таблиц истинности), а как бы структурная сложность формулы.

Подобные примеры служат свидетельством известного факта, что наиболее эффективной является в принципе простая процедура построения истинностных таблиц. Упомянем здесь работу [17], где авторы, модифицируя технику аналитических таблиц, доказывают весьма существенный результат, что полученная ими дедуктивная теория может "имитировать" сложность таблиц истинности. Анализируя методику, предложенную в этой работе, можно найти много аналогий и идейного сходства между формулировками правил построения таблиц и правилами натурального вывода. В заключение заметим, что существенной является задача определения сложности и эффективности нашего алгоритма, требующая особого исследования; первые же результаты тестирования нашего алгоритма, даже на довольно слабых, с современной точки зрения, компьютерах, показали достаточно хорошие результаты.

В свете вышеизложенного, интересно следующее направление современных исследований в области автоматической дедукции. Речь идет о попытке симбиоза различных методов, включая теорию резолюций, секвенций, элементы натурального вывода и другие. Это частично характерно для центра исследований Otter, но наиболее четко проявляется в подходе группы по разработке проекта Isabelle (University of Cambridge) [20], где авторы прямо заявляют о такой стратегии симбиоза. На наш взгляд, этот подход является, во-первых, достаточно обоснованным (в силу специфик и ограниченности каждого из методов дедукции) и, во-вторых, многообещающим (учитывая не только теоретические моменты, но также и практические возможности применения техники параллельных процессоров). В этой связи наша работа в области эвристик для натурального вывода видится весьма перспективной и способной внести свою лепту в решение проблемы эффективной интеграции различных методов автоматической дедукции.

Ниже описывается алгоритм автоматического поиска вывода для стандартного натурального классического исчисления предикатов, которое в течение долгого времени преподается на философском факультете МГУ студентам-философам.

Для понимания дальнейшего нам потребуется четко ввести язык стандартного классического исчисления предикатов и задать принципы работы в нем. Однако для цели описания алгоритма поиска доказательств мы введем вначале более богатый язык, а затем укажем, что́ в его составе будет относиться к языку исчисления предикатов.

Алфавит алгоритмического представления исчисления предикатов

1. $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$ – бесконечный список *связанных индивидных переменных*,
2. $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, \ldots$ – бесконечный список *свободных индивидных переменных*,
3. $v_1, v_2, \ldots$ – бесконечный список *временных переменных*,

4. $p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2,\ldots$ – бесконечный список *пропозициональных переменных,*
5. $P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, P_2,\ldots$ – список *предикаторов* различной местности (местность не указывается, так как она однозначно высчитывается по количеству аргументов),
6. $f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2,\ldots$ – список *функторов* различной местности (местность не указывается по вышеуказанной причине),
7. $\&, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ – *логические термины*,
8. (,), , – *технические символы.*

Понятие псевдотерма

1. любая связанная индивидная переменная есть псевдотерм,
2. любая свободная индивидная переменная есть псевдотерм,
3. любая временная переменная есть псевдотерм,
4. если Ф – n-местный функтор, а $t_1, t_2,\ldots, t_n$ – псевдотермы, то выражение вида $Ф(t_1, t_2,\ldots, t_n)$ – псевдотерм,
5. Ничто иное не есть псевдотерм.

Понятие квазитерма и терма

Квазитермом называется псевдотерм, в котором отсутствуют временные переменные.

Термом называется псевдотерм, в котором отсутствуют как временные, так и связанные индивидные переменные.

Понятие псевдоформулы

1. если П – n-местный предикатор, а $t_1, t_2,\ldots, t_n$ – псевдотермы, то выражение вида $П(t_1, t_2,\ldots, t_n)$ – псевдоформула,
2. каждая пропозициональная переменная есть псевдоформула,
3. если А – псевдоформула, то $\neg$А – псевдоформула,
4. если А и В – псевдоформулы, то (А & В), (А $\vee$ В), (А $\supset$ В) – псевдоформулы,
5. если А – псевдоформула и α – связанная индивидная переменная, то выражения вида $\forall\alpha A$ и $\exists\alpha A$ – псевдоформулы,
6. Ничто иное не есть псевдоформула.

Псевдоформулы, определяемые пунктами 1 и 2, называются *элементарными псевдоформулами.* Все остальные псевдоформулы называются *сложными псевдоформулами.*

В выражениях вида $\forall\alpha A$ и $\exists\alpha A$ псевдоформула А называется *областью действия кванторов* $\forall$ и $\exists$, *взятых по переменной* α.

Свободная или временная индивидная переменная *s* входит в псевдоформулу, если в ее составе есть хотя бы одно вхождение *s*.

Вхождение связанной индивидной переменной α называется *связанным*, если данная переменная расположена непосредственно справа от некоторого квантора или она находится в области действия квантора, взятого по переменной α. Остальные вхождения связанной индивидной переменной α называются *свободными вхождениями.*

Понятие квазиформулы и формулы

Квазиформулой называется псевдоформула, в которой нет вхождений временных переменных.

Формулой называется псевдоформула, в которой нет вхождений как временных переменных, так и свободных вхождений связанных индивидных переменных.

Пусть t – будет псевдотермом, α – связанной индивидной переменной, а s, s_1, s_2,...,s_n – свободными индивидными переменными или временными переменными. Тогда выражения вида $A(\alpha/t)$ и $A(\alpha/s)$ обозначают результат подстановки в псевдоформулу $A(\alpha)$ вместо всех свободных вхождений связанной индивидной переменной α, соответственно, псевдотерма t, или свободной индивидной переменной s, или временной переменной. Отметим, что если t – терм, то все такого рода подстановки являются правильными.

К языку исчисления предикатов относятся только те объекты, которые задаются понятиями квазитерма, терма, квазиформулы и формулы. Понятия же псевдоформулы и псевдотерма необходимы лишь для описания работы алгоритма.

Правила вывода:

&в: $\dfrac{A, B}{A \& B}$ &и: $\dfrac{A \& B}{A}$, $\dfrac{A \& B}{B}$

$\vee$в: $\dfrac{A}{A \vee B}$, $\dfrac{B}{A \vee B}$ $\vee$и: $\dfrac{A \vee B, \quad \neg A}{B}$

$\supset$в: $\dfrac{B}{C \supset B}$ где C - последняя гипотеза $\supset$и: $\dfrac{A \supset B, \quad A}{B}$

$\neg$в: $\dfrac{B, \quad \neg B}{C}$ где C - последняя гипотеза $\neg$и: $\dfrac{\neg\neg A}{A}$

$\forall$в: $\dfrac{A(\alpha / s, s_1, s_2, ..., s_n)}{\forall \alpha A(\alpha, s_1, s_2, ..., s_n)}$ где α - абс. $s_1, s_2, ..., s_n$ - огр. $\forall$и: $\dfrac{\forall \alpha A(\alpha)}{A(\alpha / t)}$

$\exists$в: $\dfrac{A(\alpha / t)}{\exists \alpha A(\alpha)}$ $\exists$и: $\dfrac{\exists \alpha A(\alpha, s_1, s_2, ..., s_n)}{A(\alpha / s, s_1, s_2, ..., s_n)}$ где α - абс. $s_1, s_2, ..., s_n$ - огр.

В формулировках этих правил считается, что абсолютная переменная s ограничивает каждую из переменных $s_1, s_2,..., s_n$.

Выводом в системе называется непустая конечная последовательность формул $C_1, C_2,..., C_k$, удовлетворяющая условиям:

(1) каждая C_i есть либо гипотеза (посылка), либо получена из предыдущих формул по одному из правил вывода,

(2) если в выводе применялись правила $\supset$в или $\neg$в, то все формулы, начиная с последней гипотезы и вплоть до результата применения данного правила, в дальнейших шагах построения вывода не принимают участия (их дальнейшее применение в выводе исключается),

(3) ни одна свободная индивидная переменная не характеризуется в выводе дважды как абсолютная переменная,

(4) ни одна свободная индивидная переменная не ограничивает в выводе сама себя.

Особо отметим, что вывод, согласно данному определению, является именно последовательностью формул, а не пседоформул или квазиформул. Понятие квазиформулы нам необходимо лишь для четкой формулировки кванторных правил.

При осуществлении вывода необходимо строго следить, чтобы ни одна переменная не ограничивала сама себя. Такое самоограничение может возникнуть за счет транзитивности отношения *ограничения*, а именно: если некоторая переменная s при применении данных правил ограничивает переменную s_1, а при другом применении правил переменная s_1 будет ограничивать s, то по транзитивности возникнет два случая самоограничения – s будет ограничивать s и s_1 будет ограничивать s_1. Ни та, ни другая ситуации недопустимы.

Вывод $C_1, C_2,..., C_k$ есть вывод вида $A_1, A_2,..., A_n \vdash B$, если $A_1, A_2,...,A_n$ – это неисключенные гипотезы (посылки), а формула B графически совпадает с C_k.

Вывод называется завершенным, если ни одна свободная индивидная переменная, которая характеризовалась в выводе как абсолютная переменная, не встречается ни в посылках вывода, ни в заключении.

Доказательством (*завершенным доказательством*), как обычно, считается вывод (завершенный вывод) из пустого множества неисключенных посылок.

Для описания алгоритма нам потребуется ввести важные понятия *компоненты псевдоформулы* и *подобия псевдоформул*.

Две псевдоформулы A и B будем считать *псевдоподобными*, если и только если при их познаковом сравнении слева направо устанавливаются следующие факты:

1. первый (самый левый) знак псевдоформул A и B называется 1-й компонентой этих псевдоформул, и эти первые компоненты графически совпадают,

2. если следующий знак в псевдоформулах A и B, идущий за их j-ми компонентами, не является временной переменной, ни в псев-

доформуле A, ни в псевдоформуле B, то этот знак объявляется j+1-й компонентой этих псевдоформул, и эти компоненты графически совпадают,

3. если следующий знак или в псевдоформуле A, или в псевдоформуле B, идущий за их j-ми компонентами, является временной переменной v_n, то эта переменная в псевдоформуле, где она встречается, объявляется j+1-й компонентой; тогда j+1-й компонентой другой псевдоформулы объявляется:

(а) если это не функциональный знак, то следующий знак, идущий за j-й компонентой этой псевдоформулы, и он есть или временная переменная v_n, или временная переменная v_m $(n \neq m)$, или свободная индивидная переменная,

(б) если это функциональный знак Ф, то комплекс знаков, идущий за j-й компонентой этой псевдоформулы, и этот комплекс есть выражение Ф(...).

Иначе говоря, две псевдоформулы псевдоподобны, если они покомпонентно подобны. Рассмотрим в качестве примера две псевдоформулы и укажем нумерацией их компонент:

$$\begin{array}{lcccccccccccccccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\
 & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\
A = & \exists & x & \forall & y & (& Q & (& v_4 & , & v_1 & , & a &) & \supset & P & (& \underline{f(x,y)} & , & g & (& v_3 &) &) &) \\
 & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\
B = & \exists & x & \forall & y & (& Q & (& v_5 & , & b & , & a &) & \supset & P & (& v_2 & , & g & (& c &) &) &)
\end{array}$$

Итак, эти две псевдоформулы являются псевдоподобными. Отметим, что в ходе установления псевдоподобия каждая временная переменная получила некоторое значение. В нашем примере временные переменные получили следующие значения: $v_4 = v_5$, $v_1 = b$, $v_2 = f(x, y)$, $v_3 = c$. Если теперь в обеих псевдоформулах произвести замену временных переменных на соответствующие псевдотермы (причем, если значением временной переменной является квазитерм, то данная переменная меняется на этот квазитерм, а если значением временной переменной является другая временная переменная, то временная переменная с бо́льшим индексом меняется на временную переменную с меньшим индексом), то эти две псевдоформулы будут не просто подобными, они станут тождественными. Такую процедуру будем называть далее *приписыванием значений временным переменным*.

Две формулы A и B считаются *подобными*, если при установлении их псевдоподобия ни одна временная переменная не получила в качестве значения различные квазитермы.

2. Общая стратегия алгоритмического поиска вывода

Стратегия состоит в том, что по некоторому заданному метаутверждению о выводимости создаются две последовательности. Первая последовательность – это последовательность формул $C_1, C_2,...,$ C_k, которая и представляет собой формируемый вывод. На некоторых шагах работы алгоритма эта последовательность может временно содержать и псевдоформулы. Поэтому псевдоформулы, входящие в данную последовательность, называются *псевдоформулами вывода*. Вторая же последовательность – это последовательность *целей*, в качестве которых могут выступать либо некоторые конкретные псевдоформулы, либо метка "F", означающая, что целью является противоречие. При этом на каждом шаге вывода однозначно задается та цель, которая на данный момент является последней и должна быть *достигнута*.

Все правила подразделяются на *аналитические* и *синтетические*. К первым относятся те правила, которые автоматически выполняются в выводе при наличии в нем соответствующих псевдоформул. Этими правилами являются &и, $\vee$и, $\supset$и, $\neg$и, $\forall$и и $\exists$и, т.е. все правила исключения логических связок. Все остальные правила являются синтетическими и их применение регулируется *достижением* некоторой цели. Как это конкретно происходит, описывается в самом алгоритме.

Описание основных процедур

(I) По псевдоформулам вывода осуществляются следующие процедуры:

Процедура 1 – формирует последовательность псевдоформул вывода. Она состоит в нахождении одной или двух псевдоформул, к которым применяются соответствующие правила исключения логических связок. Если такие псевдоформулы обнаруживаются, то вывод пополняется результатом применения данного правила.

Процедура 2 – формирует новые цели. Эта процедура выполняется в том случае, когда все возможные, указанные в процедуре 1, правила вывода применены, последней целью в последовательности целей является "F" (противоречие) и при этом данная цель не достигнута (см. процедуру 3). Какие именно вводятся цели, определяется видом содержащихся в выводе псевдоформул и будет объяснено далее.

Процедура 3 – осуществляет проверку достижимости последней цели в списке целей. Если последней целью является некоторая псевдоформула, то она считается достигнутой, если в выводе имеется подобная ей псевдоформула. Если же последней целью является "F" (противоречие), то она считается достигнутой, если в выводе содержатся две псевдоформулы вида A и $\neg$A. Достигнутая цель из списка целей устраняется, а очередной целью становится предыдущая цель в списке целей.

Процедура 4 – осуществляется переход к циклу. Эта процедура применяется в том случае, когда все выводы сделаны, все цели взяты, последней целью является "F" – противоречие, эта цель не достигнута и в выводе содержатся *псевдоформулы цикла*. Что представляют собой псевдоформулы цикла, будет разъяснено ниже.

(II) По последовательности целей осуществляются следующие процедуры:

Процедура 5 – формирует подцели, которые помещаются в последовательность целей.

Процедура 6 – выбирает новые дополнительные посылки, помещаемые под очередным номером в последовательность псевдоформул вывода.

Процедуры 5 и 6 опишем вместе, так как они в определенных случаях применяются одновременно. Данные процедуры начинают использоваться тогда, когда уже применена процедура 1, целью является некоторая псевдоформула, и при этом она не достигнута. В этом случае последовательность целей дополняется новой подцелью или совокупность посылок в выводе дополняется новой посылкой. Что конкретно происходит, зависит от вида очередной (последней) цели и будет объяснено в формулировке алгоритма.

Процедура 7 – сигнализирует о необходимости автоматического применения в выводе правил введения логических связок. Более детально это описывается ниже.

3. Описание алгоритма

1. Определяется *главная цель* вывода. Таковой является псевдоформула, стоящая справа от знака выводимости в заданном метаутверждении о выводимости. Данная псевдоформула помещается в качестве начальной в последовательность целей. Если слева от знака выводимости стоят псевдоформулы, то все они помещаются в качестве начальных в последовательность псевдоформул вывода. Переход к 2.

2. Анализ множества псевдоформул вывода.

2.1. Если множество псевдоформул вывода пусто, то переход к 4.

2.2. Если множество псевдоформул вывода непусто, то переход к 3.

3. Умозаключения по псевдоформулам вывода.

3.1. Осуществляются все непосредственные умозаключения по аналитическим правилам; при этом на посылки правил вывода вида $A \& B$, $A \vee B$, $A \supset B$, $\neg\neg A$, $\forall\alpha A$ и $\exists\alpha A$, к которым были применены, соответственно, правила &и, $\vee$и, $\supset$и и $\neg$и, $\forall$и, $\exists$и, ставится *метка* "V0", указывающая на два обстоятельства: (а) недопустимость вторичного применения к ним указанных правил, (б) невозможность их использования для порождения новых целей; на псевдоформулу $\forall\alpha A$ дополнительно ставится метка "V1", указывающая, что данная псевдоформула является *псевдоформулой цикла*; на заключения правил вывода ставится метка "V+0" (смысл этой метки разъясняется далее). При этом правила $\forall$и и $\exists$и применяются следующим образом:

3.1.1. $\forall$и.

(а) Квантор общности снимается по правилу $\forall$и с псевдоформулы $\forall\alpha A$ по первой временной переменной в алфавитном их порядке, которая отсутствует как в псевдоформулах вывода, так и в целях.

(б) Если в псевдоформуле А вообще отсутствует связанная индивидная переменная α, то результатом снятия квантора общности будет сама псевдоформула А.

3.1.2. $\exists$и.

(а) Квантор существования снимается по правилу $\exists$и с псевдоформулы $\exists\alpha A$ по первой свободной индивидной переменной в алфавитном их порядке, которая отсутствует как в псевдоформулах вывода, так и в целях.

(б) Рядом с так полученной псевдоформулой $A(\alpha/s)$ пишется "s – абс, $s_1, s_2,..., s_n$ – огр.", где $s_1, s_2,..., s_n$ – все временные или свободные индивидные переменные, входящие в псевдоформулу $\exists\alpha A$.

(в) Если в псевдоформуле $A(\alpha/s)$ встречается некоторая временная переменная v_i, то отмечается и запоминается, что $v_i \neq s$ или $\neq$ любому сложному терму, который содержит переменную s. Эта пометка делается для того, чтобы абсолютно ограниченная переменная не ограничивала сама себя.

(г) Если в псевдоформуле А вообще отсутствует связанная индивидная переменная α, то результатом снятия квантора общности будет сама псевдоформула А.

Переход к 11.

3.2. Если ни одно аналитическое правило не применимо, то – 4.

4. Анализируется главный знак очередной последней цели – W.

4.1. W – элементарная псевдоформула. Переход к 5.

4.2. Главный знак W – $\neg$. Переход к 5.

4.3. W = Wi $\supset$ Wj. Переход к 6.

4.4. W = Wi & Wj. Переход к 7.

4.5. W = Wi $\vee$ Wj. Переход к 8.

4.6. W = $\forall\alpha A$. Переход к 9.

4.7. W = $\exists\alpha A$. Переход к 10.

4.8. Цель W – противоречие. Переход к 14.

5. $\neg$W включается в последовательность псевдоформул вывода в качестве *посылки*, *подцелью* становится получение противоречия, тип устраняемости – $\neg$. Переход к 3.

6. Псевдоформула Wi включается в последовательность псевдоформул вывода в качестве посылки, подцелью становится Wj, а тип устраняемости – $\supset$. Переход к 3.

7. Wi и Wj становятся подцелями. Начинаем всегда работать с Wi.

7.1. Подцель – Wi. Псевдоформула Wi, а также, начиная с этого момента, все новые псевдоформулы вывода и цели помечаются меткой – "V-1".

Если Wi *достижима*, то со всех псевдоформул вывода и всех целей снимается метка "V-1", переход к 7.2.

В противном случае – 14.

7.2. Подцелью становиться Wj. Псевдоформула Wj, а также, начиная с этого момента, все новые псевдоформулы вывода и цели помечаются меткой – "V-2".

Если Wj *достижима*, то со всех псевдоформул вывода и всех целей снимается метка "V-2", переход к 12.

В противном случае – 14.

8. Wi или Wj становятся подцелями. Начинаем работать с Wi.

8.1 Цель – Wi. Псевдоформула Wi, а также все новые псевдоформулы вывода и цели помечаются меткой – "V-3".

Если цель Wi *достижима*, то 12.

В противном случае – 8.2.

8.2. Цель – Wj. Из вывода и целей устраняются все псевдоформулы вывода и все цели, отмеченные меткой "V-3". Псевдоформула Wj, а также все новые псевдоформулы вывода и цели помечаются меткой – "V-4".

Если цель Wj *достижима*, то – 12.

В противном случае – 8.3.

8.3. Из последовательности целей и псевдоформул вывода устраняются все подцели и все псевдоформулы с метки "V-4".

(а) Если на цели $Wi \lor Wj$ не стоит метка "V2", то псевдоформула $\neg(Wi \lor Wj)$ берется в качестве новой посылки и помечается меткой "V2", а в качестве новой цели берется противоречие. Переход к 3.

(б) В противном случае, т. е. если на цели $Wi \lor Wj$ стоит метка "V2", осуществляется временный выход из доказательства исходного метаутверждения, с псевдоформулы вывода $\neg(Wi \lor Wj)$ снимаются все метки, цель $Wi \lor Wj$ устраняется, а в качестве новой цели берутся две псевдоформулы $\neg Wi$ и $\neg Wj$ и строится вывод $\neg(Wi \lor Wj) \vdash \neg Wi$ и $\neg Wj$. После осуществления этого вывода на псевдоформулу вывода $\neg(Wi \lor Wj)$ ставится метка "V0". Переход к 3.

9. Подцелью становится псевдоформула $A(\alpha/s)$, где s – первая в алфавитном порядке свободная индивидная переменная, не встречающаяся ни в псевдоформулах вывода, ни в целях.

(а) Рядом с так полученной псевдоформулой $A(\alpha/s)$ пишется "s – абс, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ – огр.", где $s_1, s_2, \ldots, s_n$ – все временные или свободные индивидные переменные, входящие в псевдоформулу $\forall\alpha A$.

(б) Если в псевдоформуле $A(\alpha/s)$ встречается некоторая временная переменная v_i, то отмечается и запоминается, что $v_i \neq s$ или $\neq$ любому сложному терму, который содержит переменную s. Эта пометка делается для того, чтобы абсолютно ограниченная переменная не ограничивала в выводе сама себя.

(в) Если в псевдоформуле A вообще отсутствует связанная индивидная переменная α, то результатом применения данного пункта алгоритма будет сама псевдоформула A.

Переход к 11.

10. Подцелью становится формула $A(\alpha/v_i)$, где v_i – первая в алфавитном порядке временная переменная, не встречающаяся ни в псевдоформулах вывода, ни в целях.

Если в $A(\alpha/v_i)$ вообще отсутствует связанная индивидная переменная α, то результатом снятия квантора существования будет сама псевдоформула A.

10.1. Цель $A(\alpha/v_i)$, а также все новые псевдоформулы вывода и цели помечаются меткой -- "V-5".

Если данная цель достигнута, то переход к 12.

В противном случае, переход к 10.2.

10.2 Из последовательности целей и псевдоформул вывода устраняются все подцели и все псевдоформулы с меткой "V-5".

(а) Если на цели $\exists\alpha A$ не стоит метка "V3", то псевдоформула $\neg\exists\alpha A$ берется в качестве новой посылки и помечается меткой "V3", а в качестве новой цели берется противоречие. Переход к 3.

(б) В противном случае, т. е. если на цели $\exists\alpha A$ стоит метка "V3", осуществляется временный выход из доказательства исходного метаутверждения, с псевдоформулы вывода $\neg\exists\alpha A$ снимаются все метки, цель $\exists\alpha A$ устраняется, а в качестве новой цели берется псевдоформула $\forall\alpha\neg A$ и осуществляется вывод $\neg\exists\alpha A \vdash \forall\alpha\neg A$. После осуществления этого вывода, а он всегда осуществим, на псевдоформулу вывода $\neg\exists\alpha A$ ставится метка "V0". Переход к 3.

11. Проверка достижимости последней цели.

(а) Если последней целью является псевдоформула A, то она считается достигнутой тогда, когда среди неисключенных псевдоформул вывода имеется псевдоформула B такая, что A и B подобны друг другу.

В противном случае цель считается не достигнутой.

(б) Если последней целью является противоречие, то она считается достигнутой тогда, когда среди неисключенных псевдоформул вывода найдутся две псевдоформулы A и $\neg$B такие, что A и B подобны друг другу.

В противном случае цель считается не достигнутой.

Если цель достигнута, то переход к 12.

Если цель не достигнута, то переход к 13.

12. Достигнута цель Wn.

12.1. Если Wn – *главная цель*, т. е. самая верхняя цель в их последовательности, то Wn помечается как *достигнутая*, выход из алгоритма – выводимость обоснована.

12.2. Если Wn – противоречие и некоторые временные переменные при этом получили значение, то:

(а) Во всех псевдоформулах вывода и целей, содержащих данные временные переменные, осуществляется приписывание значений временным переменным.

(б) Проверяется, не возникла ли при приписывании значений временным переменным ситуация, когда некоторая переменная ограничивает сама себя..

(в) Wi как цель устраняется.

(г) Новой целью становится предыдущая цель, а к псевдоформулам вывода применяется правило $\neg$в. Результатом является псевдоформула $\neg$B, где B – последняя посылка в выводе.

(д) Делается отметка, что все псевдоформулы, начиная с B и заканчивая псевдоформулой, предшествующей $\neg$B, в дальнейших шагах вывода принимать участия не могут.

(е) Если в число этих псевдоформул попадает псевдоформула с меткой "V+0", являющаяся заключением некоторого правила вывода, то с соответствующей псевдоформулы, являющейся посылкой данного применения правила вывода, снимается метка "V0". Переход к 3.

12.3. Если предыдущей к достигнутой цели Wn является цель Wn-1 = Wn $\vee$ Wk или Wk $\vee$ Wn и временные переменные при этом получили значение, то:

(а) Во всех псевдоформулах вывода и целей, содержащих данные временные переменные, осуществляется приписывание значений временным переменным.

(б) Проверяется, не возникла ли при приписывании значений временным переменным ситуация, когда некоторая переменная ограничивает сама себя.

(в) Из последовательности целей устраняются цели Wn и Wn-1.

(г) Новой целью становится предыдущая цель, а в последовательность псевдоформул вывода включается псевдоформула Wn-1, которая является результатом применения правила $\vee$в к псевдоформуле Wn.

(д) Если на цели Wn-1 стояла метка "V4", то с *псевдоформулы вывода, породившей данную цель* (об этом см. ниже), снимается метка "V4". Переход к 3.

12.4. Если предыдущей к достигнутой цели Wn является цель Wn-1 = Wk $\supset$ Wn и некоторые временные переменные при этом получили значение, то:

(а) Во всех псевдоформулах вывода и целей, содержащих данные временные переменные, осуществляется приписывание значений временным переменным.

(б) Проверяется, не возникла ли при приписывании значений временным переменным ситуация, когда некоторая переменная ограничивает сама себя.

(в) Из последовательности целей устраняются цели Wn и Wn-1.

(г) Очередной целью становится ближайшая ранее не достигнутая цель, к псевдоформуле вывода Wn применяется правило $\supset$в, т. е. псевдоформула Wn-1 переносится в вывод, и в последовательности псевдоформул вывода делается отметка, что все псевдоформулы, начиная с Wk и заканчивая псевдоформулой Wn, в дальнейших шагах вывода принимать участия не могут.

(д) Если в число последних псевдоформул попадает псевдоформула с меткой "V+0", являющаяся заключением некоторого правила вывода, то с соответствующей псевдоформулы, являющейся посылкой данного применения правила вывода, снимается метка "V0".

(е) Если на цели Wn-1 стояла метка "V4", то с *псевдоформулы вывода, породившей данную цель*, снимается метка "V4". Переход к 3.

12.5. Если предыдущей к достигнутой цели Wn является цель Wn-1 = Wk & Wn и некоторые временные переменные при этом получили значение, то:

(а) Во всех псевдоформулах вывода и целей, содержащих данные временные переменные, осуществляется приписывание значений временным переменным.

(б) Проверяется, не возникла ли при приписывании значений временным переменным ситуация, когда некоторая переменная ограничивает сама себя.

(в) Wn и Wn-1 устраняются из последовательности целей.

(г) Очередной целью становится ближайшая ранее не достигнутая цель, к псевдоформулам вывода Wk и Wn применяется правило &в, т. е. псевдоформула Wn-1 переносится в вывод и в последовательности псевдоформул вывода на псевдоформулу Wk & Wn ставится метка "V0".

(д) Если на цели Wn-1 стояла метка "V4", то с *псевдоформулы вывода, породившей данную цель*, снимается метка "V4". Переход к 3.

12.6. Если предыдущей к достигнутой цели Wn является цель Wn-1 = $\forall\alpha$A и некоторые временные переменные при этом получили значение, то:

(а) Во всех псевдоформулах вывода и целей, содержащих данные временные переменные, осуществляется приписывание значений временным переменным.

(б) Проверяется, не возникла ли при приписывании значений временным переменным ситуация, когда некоторая переменная ограничивает сама себя.

(в) Wn и Wn-1 устраняются из последовательности целей.

(г) Очередной целью становится ближайшая ранее не достигнутая цель, к псевдоформуле вывода Wn применяется правило $\forall$в, т. е. псевдоформула Wn-1 переносится в вывод и в последовательности псевдоформул вывода на псевдоформулу $\forall\alpha$A ставятся метки "V1" и "V0".

(д) Если на цели Wn-1 стояла метка "V4", то с *псевдоформулы вывода, породившей данную цель*, снимается метка "V4". Переход к 3.

12.7. Если предыдущей к достигнутой цели Wn является цель Wn-1 = $\exists\alpha A$ и некоторые временные переменные при этом получили значение, то:

(а) Во всех псевдоформулах вывода и целей, содержащих данные временные переменные, осуществляется приписывание значений временным переменным.

(б) Проверяется, не возникла ли при приписывании значений временным переменным ситуация, когда некоторая переменная ограничивает сама себя.

(в) Wn и Wn-1 устраняются из последовательности целей.

(г) Очередной целью становится ближайшая ранее не достигнутая цель, к псевдоформуле вывода Wn применяется правило $\exists$в, т. е. псевдоформула Wn-1 переносится в вывод и в последовательности псевдоформул вывода на псевдоформулу $\exists\alpha A$ ставится метка "V0".

(д) Если на цели Wn-1 стояла метка "V4", то с *псевдоформулы вывода, породившей данную цель*, снимается метка "V4". Переход к 3.

12.8. Если достигнутая цель имеет метку "V4" и некоторые временные переменные при этом получили значение, то:

(а) Во всех псевдоформулах вывода и целей, содержащих данные временные переменные, осуществляется приписывание значений временным переменным.

(б) Проверяется, не возникла ли при приписывании значений временным переменным ситуация, когда некоторая переменная ограничивает сама себя.

(в) Данная цель из последовательности целей убирается, новой становится предыдущая цель. Переход к 3.

13. Цель Wn не достигнута.

Если последней целью является псевдоформула и она не достигнута, то 4.

Если последней целью является противоречие и она не достигнута, то 14.

14. Выбор новых целей по формулам вывода.

14.1. Если при просмотре сверху вниз всех псевдоформул вывода в их последовательности имеются сложные псевдоформулы, не отмеченные метками "V0" или "V4", то к ним применяются следующие процедуры:

(а) Если в выводе имеется импликативная псевдоформула вида $Wi \supset Wj$, то в качестве подцели берется Wi. Псевдоформула $Wi \supset Wj$ и цель Wi помечаются метками "V4". Переход к 4.

(б) Если в выводе имеется дизъюнктивная псевдоформула вида $Wi \vee Wj$, то в качестве подцели берется $\neg Wi$. Псевдоформула $Wi \vee Wj$ и цель $\neg Wi$ помечаются метками "V4". Переход к 4.

(в) Если в выводе встречается псевдоформула $\neg Wi$, то в качестве цели берется Wi. Псевдоформула $\neg Wi$ и цель Wi помечаются метками "V4". Переход к 4.

14.2. В противном случае переход к 15.

15. Если при просмотре сверху вниз всех псевдоформул вывода в их последовательности имеются псевдоформулы, отмеченные меткой "V1", то 16.

В противном случае 17.

16. Вхождение в цикл.

Фиксируется последняя цель. Цикл начинается с применения ко всем псевдоформулам вывода, отмеченным меткой "V1", правил вывода.

Если, применяя далее алгоритм, мы вновь пришли к пункту 16 и при этом последняя фиксированная цель не была достигнута, то цикл считается *непродуктивным*, переход к 17.

17. Завершение алгоритма.

(а) Если последняя цель противоречие отмечена меткой "V-1", то выход из алгоритма – вывод неосуществим.

(б) Если последняя цель противоречие отмечена меткой "V-2", то выход из алгоритма – вывод неосуществим.

(в) Если последняя цель противоречие отмечена меткой "V-3", то переход к 8.2.

(г) Если последняя цель противоречие отмечена меткой "V-4", то переход к 8.3.

(д) Если последняя цель противоречие отмечена меткой "V-5", то переход к 10.2.

(е) если последняя цель противоречие не отмечена указанными выше метками, то выход из алгоритма – вывод неосуществим.

4. Компьютерная реализация алгоритма

При разработке той части программы, которая обеспечивает компьютерное доказательство теорем классической логики высказываний, достаточно ограничиться сравнением строковых выражений. Это означает, что две формулы эквивалентны тогда и только тогда, когда все символы, использованные для их представления, эквивалентны в каждой позиции. В этом случае, при написании программы, можно использовать инструментальные средства, обеспечивающие эффективную работу со строковыми переменными. Однако в случае логики предикатов, для установления эквивалентности двух формул необходимо осуществлять не только формальное сравнение, но и проводить сравнение значений элементов формул (например, для временных переменных). Из этого следует, что элементы, составляющие формулу логики предикатов, должны обладать некоторыми свойствами (например – временные переменные должны принять значения). Для реализации такого рода переменных наиболее подходят объектно-ориентированные языки программирования, например, язык программирования С++.

Использование этого языка позволило создать компактную программу, осуществляющую доказательство теорем классической логики высказываний и логики предикатов в автоматическом режиме. Программа работает в среде Windows 3.11 и занимает на диске около 180 Кбайт. Однако следует учитывать, что указанный объем памяти относится лишь к исполнимому коду программы и не учитывает памяти, которая требуется для построения вывода (сегмент данных). При работе программы для хранения формул вывода и формул целей память выделяется автоматически. Таким образом, оценить полный объем памяти, необходимый для работы программы, довольно сложно, так как это количество зависит от числа шагов вывода и формул целей, требуемых для доказательства данной формулы. Время доказательства одной теоремы (в любой из логик) составляет несколько секунд для процессора Intel Pentium с тактовой частотой 133 Мгц. Тестирование проводилось на множестве формул, выбранных из учебников по математической логике, в частности, из книги А. Черча "Введение в математическую логику". Это множество – около ста теорем классической логики высказываний и более пятидесяти теорем логики предикатов – достаточно репрезентативно.

Мы приведем здесь два примера компьютерного осуществления вывода. Один из них – доказательство закона Пирса в логике высказываний.

Требуется доказать: $((p \supset q) \supset p) \supset p$.

$(p \supset q) \supset p$,	посылка
$\sim p$,	посылка
p,	посылка
$\sim q$,	посылка
$\sim\sim q$,	$\sim$в из 1, 2
q,	$\sim$и, из 4
$p \supset q$,	$\supset$в 2 к 5
p,	$\supset$и, из 0, 6
$\sim\sim p$,	$\sim$в из 1, 7
p,	$\sim$и, из 8
$((p \supset q) \supset p) \supset p$,	$\supset$в 0 к 9

Объясним шаги вывода, строившегося по описанному выше алгоритму. Так как требуется доказать формулу $((p \supset q) \supset p) \supset p$, то исходный список вывода пуст, а главной целью является сама эта формула. По этой формуле, согласно пункту 4, начинает формироваться последовательность формул вывода и в качестве первой посылки берется формула $(p \supset q) \supset p)$, а целью становится формула p. Так как эта цель не достижима, то, по пункту 5, в вывод помещается посылка $\neg p$, а целью становится F. Цель F не достижима, поэтому, по процедуре 14, первая посылка служит источником новой цели, которой становится формула $p \supset q$. Вновь, по 4, а также пункту 6, в качестве новой посылки берется формула p, а в качестве новой цели – формула q. Опять-таки, последняя цель не достижима, поэтому, по 5, берется новая посылка $\neg q$, а новой целью становится F. На этом шаге автоматического поиска вывода машина устанавливает, что цель F достигнута, так как в выводе имеется противоречие – формулы p и $\neg p$ (шаги вывода 1 и 2). Это служит сигналом для применения в выводе правила "введения отрицания". Именно таким образом в выводе появляется 4-й шаг – формула $\neg\neg q$. При этом все формулы, начиная с последней посылки (формулы 3) и вплоть до результата применения этого правила, считаются из вывода устраненными (что помечено слева от номеров шагов вертикальной линией, длина которой равна числу строчек исключаемых формул). Заметим, что хотя в выводе уже ранее содержалось противоречие, это правило не применялось, так как на это не указывала никакая из целей. Цель F, так как она достигнута, исключается и целью становится предыдущая цель – формула q. Формула q легко достигается, так как к 4-му шагу можно применить правило "исключения отрицания". Достижение формулы q служит сигналом для автоматического применения правила "$\supset$в", что дает формулу 6 вывода. Остальные шаги вывода очевидны и могут быть легко восстановлены.

Рассмотрим пример доказательства предикатной формулы.

Требуется доказать: $\forall x(P(x)\supset Q(x))\supset(\forall xP(x)\supset\forall xQ(x))$.

0. $\forall x(P(x) \supset Q(x))$,	посылка
$P(a) \supset Q(a)$,	$\forall$и, из 0
$\forall xP(x)$,	посылка
$P(a)$,	$\forall$и, из 2
$\neg Q(a)$,	посылка
$Q(a)$,	$\supset$и, из 1, 3
$\neg\neg Q(a)$,	$\neg$в, из 4, 5
$Q(a)$,	$\neg$и, из 6
$\forall xQ(x)$,	$\forall$в, из 7, a – абс.
$\forall xP(x)\supset\forall xQ(x)$,	$\supset$в, из 8, 2
$\forall x(P(x)\supset Q(x))\supset(\forall xP(x)\supset\forall xQ(x))$,	$\supset$в, из 9, 1

Вопрос, почему возникла данная последовательность шагов, требует обсуждения, что и будет сейчас сделано. Для понимания дальнейшего мы будем *цели* помещать с правой стороны страницы, а *псевдоформулы вывода* прижимать к ее левой стороне. Итак, требовалось обосновать выводимость

$$\forall x(P(x)\supset Q(x))\supset(\forall xP(x)\supset\forall xQ(x)).$$

Исходный список псевдоформул вывода пуст, а главной целью является сама эта формула:

$$\forall x(P(x)\supset Q(x))\supset(\forall xP(x)\supset\forall xQ(x)).$$

По этой формуле, согласно пункту 6 алгоритма, начинает формироваться последовательность псевдоформул вывода и в качестве первой посылки берется псевдоформула (помечена цифрой 0):

0. $\forall x(P(x)\supset Q(x))$,

а целью становится консеквент исходного выражения –

$$\forall xP(x)\supset\forall xQ(x).$$

Так как к псевдоформуле 0 можно применить правило $\forall$и, мы, по пункту 3 алгоритма, получаем псевдоформулу 1:

1. $P(v1) \supset Q(v1)$.

При этом на псевдоформулу 0 вешается метка "V1", говорящая о том, что данная псевдоформула является цикловой, а также метка "V0", говорящая, что к данной формуле нет необходимости еще раз применять правила снятия квантора общности. (Отметим, что псевдоформула 1 отличается от того выражения под номером 1, которое содержится в построенном выводе.) Из данных двух псевдоформул сделать дальнейшие шаги вывода по аналитическим правилам невозможно. Поэтому переходим к анализу последней цели. Она недостижима, но ее анализ позволяет, по пункту 6, получить в качестве еще одной посылки псевдоформулу вывода, помеченную цифрой 2:

2. $\forall x P(x)$,

а последней целью сделать псевдоформулу

$$\forall x Q(x).$$

Теперь мы вновь можем сделать некоторый шаг вывода, что, по пункту 3 алгоритма, дает нам псевдоформулу 3:

3. $P(v2)$.

При этом на псевдоформулу 2 ставятся метки "V1" и "V0". Отметим, что и в данном случае полученная по алгоритму псевдоформула 3 отличается от того, что мы в этом пункте имеем в окончательном варианте вывода. Так как никаких дальнейших шагов вывода применить к псевдоформулам, содержащимся в выводе, нельзя, переходим к анализу последней цели. Она не достижима, но дает нам, по пункту 9 алгоритма, в качестве новой последней цели формулу

$$Q(a),$$

где "a" новая свободная индивидная переменная.

Теперь мы попали в ситуацию, когда ни одного шага вывода сделать нельзя и в то же время последняя цель (а ею является элементарная формула) не достижима. Тогда, по пункту 5 алгоритма, данная цель со знаком отрицания переносится в последовательность псевдоформул вывода в качестве посылки, а последней целью становится "F":

4. $\neg Q(a)$

противоречие.

Вновь возникшая ситуация характеризуется следующим: ни одного шага вывода сделать нельзя, цель противоречие не достигается. Поэтому, по пункту 14, в результате анализа псевдоформул вывода получаем новую цель. Ею становится антецедент псевдоформулы 1, так как только это выражение может породить новую цель. Итак,

$$P(v1),$$

при этом на псевдоформулу 1 и полученную новую цель ставится метка "V4".

Так как ни одного шага вывода по-прежнему сделать нельзя, то переходим к анализу последней цели и устанавливаем, что данная цель является достижимой, а именно: псевдоформула цели P(v1) подобна псевдоформуле 3 вывода. При установлении подобия определяем, что v1 = v2. Из этого равенства определяем, что временной переменной v2 должна быть приписана в качестве значения переменная v1, т. е. во всех псевдоформулах вывода и целей переменная v2 должна быть заменена на переменную v1. Это означает, согласно пункту 12, что псевдоформула 3 в выводе должна быть заменена на P(v1). Итак,

3. P(v1).

При этом P(v1) из целей убирается, а новой целью становится "F" –

противоречие.

Теперь, согласно пункту 3, к которому нас отсылает пункт 12, мы можем по правилу $\supset$и получить из 1 и 3 псевдоформулу

5. Q(v1).

Последней целью является противоречие, которое достижимо в силу того, что в выводе имеются две противоречащие друг другу достижимые псевдоформулы. Это псевдоформулы 4 и 5. При этом временная переменная v1 принимает в качестве значения свободную индивидную переменную "a". Тогда, согласно пункту 12, мы перестраиваем вывод, который теперь будет иметь вид:

0. $\forall x(P(x) \supset Q(x)$,

1. $P(a) \supset Q(a)$,

2. $\forall xP(x)$,

3. P(a),

4. $\neg Q(a)$,

5. Q(a),

и применяем правило $\neg$в, что даст нам псевдоформулу

6. $\neg\neg Q(a)$,

при этом псевдоформулы 4 и 5 в дальнейших шагах вывода уже принимать участия не могут, что и было отмечено скобкой. Цель –противоречие – из последовательности целей устраняется. Последней целью теперь становится псевдоформула

Q(a).

Эта цель легко достигается, так как к псевдоформуле вывода 6 должно быть применено правило $\neg$и, что дает:

7. Q(a).

Достижимость псевдоформулы Q(a) означает, согласно пункту 12, что из последовательности целей устраняется как сама цель Q(a), так и предшествующая ей псевдоформула $\forall xQ(x)$. Последняя псевдоформула при этом переносится в вывод, т. е.:

8. $\forall xQ(x)$ – a – абс.,

а новой целью становится псевдоформула

$$\forall xP(x)\supset\forall xQ(x).$$

Дальнейшие шаги построения вывода по описанному алгоритму очевидны и мы их приводить не будем.

5. Соображения по доказательству корректности алгоритма

Будем считать далее связку, которая упоминается в названии того или иного правила введения или удаления, как это обычно и делается, *характеристической* (для данного правила). Имея некоторое правило вывода, будем называть посылку, содержащую характеристическую связку, *бóльшей* посылкой. Вывод называется *нормальным*, если никакая формула, которая *является большей посылкой* какого-либо правила удаления, не является в то же время *заключением* некоторого правила введения. Вывод формулы B из множества гипотез Г удовлетворяет критерию *подформульности*, если каждая формула, входящая в вывод, является элементом множества подформул Г или элементом множества подформул B. *Поле поиска* вывода – мощность множества формул, которые могут быть использованы как цели.

Обычно указывают, что в системах натурального вывода нарушается свойство *нормальности*. В принципе, это действительно так, если система натурального вывода сформулирована в виде совокупности правил введения и удаления логических связок. Тогда ничто не запрещает совершать операции, нарушающие критерий нормальности. Проблема нормальности связана с другим свойством вывода – подформульностью. Нормальный вывод обладает свойством подформульности. Как известно, при секвенциальном построении логики свойство подформульности нарушается при применении правила сечения и особое место занимают теоремы об устранимости сечения, которые позволяют (если они доказаны) любой вывод с применением сечения перестроить в вывод без сечения. С точки зрения автоматизации, наличие свойства подформульности является одним из ключевых требований, предъявляемых к выводу. В принципе оба свойства, нормальности и подформульности, связаны с проблемой поиска вывода. Действительно, при выполнении этих условий поиск, по крайней мере, потенциально, может быть алгоритмизирован, в то время как нарушение этих условий может привести к крайне неприятным фактам, таким, как циклы в выводе (если ничто не запрещает получать некоторую формулу в выводе как результат правила введения и затем использовать ее как бóльшую посылку в правиле удаления связки) или, при нарушении свойства подформульности, поле поиска может быть (в худшем случае) бесконечным. Последнее связано с наличием, например, правил введения дизъюнкции и негласно принимающимся принципом введения допущений в вывод, согласно которому в вывод в качестве допущения можно ввести любую произвольную формулу.

Например, пусть мы должны вывести B из множества гипотез Г. Согласно формулировкам правил, как результат применения правила введения дизъюнкции к некоторой формуле A, в нашем выводе может быть получена формула $A \vee C$, где C – это произвольная формула (возможно, не входящая ни в множество гипотез, ни в Г, ни в B). С другой стороны, если введение допущений в вывод никак не обусловлено, то при наличии упомянутого принципа последствия для алгоритмизации будут катастрофическими. Исследования в области автоматизации дедукции как раз и обходят стороной натуральный вывод именно в силу проблемы "укрощения" правил введения и, в первую очередь, правила введения дизъюнкции.

Однако, заметим, что подобная критика натурального вывода, если она и являлась обоснованной, то до 1991 г., когда Шталмарк [21] показал, что любой натуральный вывод может быть нормализован, следуя некоторым специальным процедурам. Таким образом, нападки на натуральный вывод, с точки зрения его "ненормальности", сейчас уже некорректны. Таким образом, с точки зрения нормальности, правила введения оказываются вне критики, оставляя, однако, в запасе у критиков натурального вывода еще одно орудие – *поле поиска*. Действительно, весьма характерно, что в немногочисленных работах по автоматизации натурального вывода обычно принимается следующий подход. Казалось бы, совсем безобидное и *естественное* правило удаления дизъюнкции (так оно и формулируется в нашем построении) также считается безысходным для процедур поиска и заменяется на правило (известное в истории логики под названием "рассуждение по случаям" – "Если B выведено из Г и A, и B выведено из Г и C, и при этом имеется вывод дизъюнкции $A \vee C$ из Г, то тогда B считается выведенным из Г"). Отметим, что такая замена правила удаления дизъюнкции, конечно, не решает проблемы поиска, создавая одновременно дополнительные сложности.

Таким образом (по имеющейся у авторов информации), на сегодняшний день ситуация такова: учитывая решенность проблемы нормализации натурального вывода при формулировке системы натурального вывода с правилом рассуждения по случаям, в принципе, можно сформулировать некоторый базовый алгоритм, работающий на поле поиска, состоящем из множества подформул исходной формулы (требующей доказательства или вывода). Этот алгоритм может быть представлен, например, в духе последовательного перебора возможных вариантов (так называемый breadth first search) и отсеивания тупиковых ветвей в дереве поиска. В силу того, что множество формул поиска конечно, и в силу конечности числа возможных ветвей в дереве поиска, алгоритм всегда завершит свою работу, помечая всегда тупиковый путь меткой "Нет" и путь, ведущий к решению, меткой "Да". Однако при таком подходе встает серьезная проблема возможной "недетерминированности" алгоритма практически на каждом шаге в дереве поиска. Таким образом, актуальной является задача снятия (ликвидации) этой "недетерминированности" (по крайней мере, насколько это окажется возможным) путем введения дополнительных приемов. Именно эту задачу и решает представленный в данной работе подход.

Итак, мы покажем, что сформулированный нами алгоритм решает следующие проблемы:

– нормализацию вывода (и, следовательно, проблему подформульности),

– максимально решает проблему "недетерминированности" поиска вывода.

Что касается первой из указанных проблем, то свойство нормальности достигается, в принципе, за счет особого механизма, обеспечивающего строго "детерминированное" применение правил введения логических связок совместно со специальным механизмом накладывания меток на формулы вывода, ограничивающего выбор новых целей и применение правил удаления связок.

Теперь, принимая во внимание, что выбор целей начинается с анализа формулы, требующей доказательства (или вывода), легко установить, что выполняется и свойство подформульности – так как теперь все формулы, попадающие в вывод, являются членами множества подформул этой исходной формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотов А.Е., Бочаров В.А., Горчаков А.Е.* Алгоритмы поиска вывода в классической пропозициональной логике // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 1996.
2. *Болотов А.Е., Бочаров В.А., Горчаков А.Е.* Алгоритм поиска вывода для натурального классического исчисления высказываний // Логические Исследования, вып. 3. М., 1995.
3. *Бочаров В.А., Маркин* В. И. Основы логики. М., 1994.
4. *Братко И.* Программирование на языке Пролог для искусственного интеллекта. Пер. с англ. А.И. Лупенко, А.М. Степанова, под ред. А.М. Степанова. М., 1990.
5. *Вишняков В. А., Буланже Д.Ю., Герман О.В.* Аппаратно-программные средства процессоров логического вывода. М., 1991.
6. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
7. Математическая теория логического вывода // Сб. переводов. Под ред. А.В. Идельсона и Г. Минца. М., 1967.

8. *Baain D., Klarlund N.* Hardware Verification using Monadic Second-Order Logic // BRICS Technical Report Series, RS-95-7. 1995.
9. *Babel W.* Automated Theorem proving (2nd Ed.). Vieweg; Braunschweig, 1987.
10. *Bochmann G.* Hardware Specification with Temporal Logic: An Example // IEEE Transactions on Computers. 1982. Vol.C-31. № 3.
11. *Bolotov A., Fisher M.. A* Resolution Method for Computation Tree Branching Time Temporal Logic // IV INternational Workshop on Temporal Representation and Reasoning (TIME'97). Published by the IEEE. Florida, 1997.
12. *Davis M. and Putnam H.* A Computing Procedure for Quantification Theory // JACN 7(3), 1960.
13. *Emerson E., Clarke E.* Characterizing correctness properties of parallel programs using fixpoints // Lecture notes in computer science, 85. Springer-Verlag, 1980.
14. *Clarke E.M., Emerson E.A.* Using branching time logic to synthesize synchronization skeletons // Science of Computer Programming. 1982. №2.
15. *Fitting M.* First-Order Logic and Automated Theorem Proving. N. Y. Springer – Verlag, 1990.
16. *Jansen G.* Hardware Verification using Temporal Logic: A Practical View // Formal VLSI Correctness Verification, VLSI Design Methods-II. Elsevier Science Publishers, 1990.
17. *D'Agostino M., Mondadori M.* The Taming of the Cut Classical Refutation with Analytic Cut // Journal of Logic and Computation. № 4(3):285-319, June 1994.
18. *Pnueli A.* Now you can compose temporal logic specifications // Proceedings of the 16-th ACM Sumposium on Theory of Computing, 1984.
19. Otter 3.01. User`s guide. // Argonne National Laboratory, 1995.
20. Izabelle. User`s guide. University of Cambridge, 1996.
21. *Stalmark G.* Normalization theorems for full first order classical natural deduction // Journal of Symbolic Logic. 1991. №56.

V.Rantala

ON THE LOGIC OF CONNECTIONIST REPRESENTATION

Абстракт. *По мнению некоторых коннекционистов, процессы в когнитивной архитектуре мышления, порождающие полагание, не могут рассматриваться как логические операции с высказываниями, и ментальные состояния невозможно понять в терминах последних. С этой точки зрения образование нового полагания происходит аналогично процессу в сети связей при наличии объекта или образца, вызывающего активизирование ее элементов. В статье рассматривается как ограничивающие отношения между символическим и предсимволическим представлением знаний, так и, в терминах коннекционистских систем, отношения между пропозициональным и непропозициональным представлением знаний. По-видимому, можно рассматривать классическое представление (в некотором условном логическом смысле слова) как нормативную и идеализированную теорию, в то время как предсимволическое представление приводит к более реалистической картине человеческого знания и познания и их логики. Из ограничительного отношения, например, следует, что нормативная эпистемическая логика должна быть предельным случаем более реалистической эпистемической логики, что, тем не менее, в некотором смысле, до сих пор не до конца понято.*

It is often said that symbolic representation does not belong to the architecture of connectionist systems, but they can learn to represent symbols by means of nonsymbolic processes. If this holds and if connectionism models human cognition, the same can be said about human symbolic representation, too. It is also maintained by some cognitive scientists, Smolensky (1988) in the first place, that the so-called subsymbolic representation in connectionist networks and symbolic representation, e.g., in von Neumann computers are in a certain sense approximations to each other and the latter is a limiting case of the former. This view is called limitivism, and it is analogous to certain ideas presented in the philosophy of science about scientific change.

According to some connectionists, the processes belonging to human cognitive architecture which give rise to beliefs should not be thought of as logical operations of propositions and mental states should not be understood in terms of propositions. Instead, the formation of a new belief is analogous to what takes place in a connectionist network when it is presented with an object or pattern which causes that its units are activated. Knowing is analogous to the fact that the network recognises this object or pattern which means that the weights of its connections receive appropriate values.[1] Where symbolic knowledge representation, as it is described in the classical model of cognition, concerns propositional knowledge, describable by phrases of the form 'x knows that...', connectionist systems fundamentally model nonpropositional knowledge, part of which can be described, e.g., by phrases of the form 'x knows how...'. The latter is sometimes called experiential knowledge, and, perhaps, tacit knowledge.

I shall consider now both the limitivist relation which Smolensky claims to obtain between symbolic and subsymbolic representations of knowledge and, in terms of connectionist systems, the relation between propositional and nonpropositional knowledge representations. Even though the forthcoming ideas about the representations and their relationship are to some extent hypothetical, they may nevertheless open new perspectives, e.g., on certain problems much discussed in the logic of propositional attitudes, in so far as that logic can be thought of as a descriptive 'theory' of human knowledge processes. It seems to me that it is possible to consider classical representation, in some conventional logical sense of the word, as a normative and idealised theory, whereas subsymbolic representation would yield a more realistic picture of human knowledge and learning, and their logic. From the limitivist relation it follows, for instance, that normative epistemic logic would be a limiting case of a more realistic epistemic logic, in some sense which is not very well understood so far, however.

1. Different Kinds of Knowledge Representation

There are extensive debates in cognitive science about the relation between symbolic and connectionist representations of cognition and, on the other hand, about the relation between cognitive theories and theories of neuroscience.[2] Certain standard views, such as reductionism and functionalism, of how representations belonging to different levels of cognitive science are related are especially problematic conceptually. As I have argued elsewhere,[3] they are problematic in that they are not, and possibly cannot be, elaborated so as to be applicable in a distinct and realistic way to relations between actual theories of cognitive science. It turns out, however, that the notions of limiting case and approximate correspondence may help us to explain the conceptual disparity involved in symbolic and subsymbolic representations of knowledge.[4] For instance, the notions can be applied to investigate the relation between theories describing appropriate symbolic and connectionist structures.

---

[1] See, e.g., Bechtel and Abrahamsen (1991).
[2] See Vadén (1993), (1996).
[3] Rantala (1997).
[4] Vadén (1993), Rantala and Vadén (1994), Vadén (1996).

At this point we need to describe two distinctions, made by Smolensky, which will be needed in the present paper. The first one is the distinction, mentioned above, between *symbolic* and *subsymbolic* representations of knowledge and models of cognition.[5] The two models are often thought of as different paradigms, in the Kuhnian sense of paradigm. Briefly stated, the symbolic (or classical) model of cognitive architecture maintains that cognitive representations and processes take place by means of symbols, and it is often thought, not necessarily, however, that such an architecture has a combinatorial syntax and compositional semantics. The symbols of a symbol system have a semantics in the sense that they refer to and mean something else, and they are syntactical entities capable of being manipulated according to rules.[6]

On the other hand, subsymbolic representations and processes take place by means of 'subsymbols' rather than symbols, and they are realized by connectionist systems (i.e., networks) whose behaviour is said to be rule-described, not rule-governed, unlike symbolic representation and processes.[7] While by means of the symbolic model the so-called conscious rule application can be exactly described, the subsymbolic one can be used to exactly describe intuitive cognitive processing. Rules in a system of the former kind provide 'hard constraints' for cognition, whereas the constraints in a connectionist system are 'soft' and they are yielded by the connections between its units. A hard constraint does not admit violations, whereas the role of a single connection in a network is more limited in the sense that it is just one among many (possibly a huge number of) connections. While symbols are manipulated by syntactic operations, subsymbols are processed by numerical computations. Subsymbols are microfeatures of symbols rather than symbols and they need not have a semantic (context-free) content individually in the same sense as symbols have. Generally, only an ensemble or vector of subsymbols, distributed among units of a connectionist system, can be collectively interpreted in the same way as a single symbol.

The other distinction is that between the *conceptual* and *subconceptual levels* of analysis, and it is semantic, that is, concerns the notion of semantic content. The former level is the semantic level of descriptions in the ordinary sense of semantics, whereas the latter one is a semantic level at which the activities of individual units in a connectionist system (and possibly units in subsymbolic systems of other kinds, such as the brain) are given a semantic content. The semantic content of such a unit is a microfeature of something; it is a

---

5 'Information' would be a term that is philosophically more neutral, but 'knowledge' is commonly used here.

6 Their semantics is sometimes given from the outside, as in the case of digital machines. Then a system is not what Fetzer (1990) calls a semiotic system.

7 See also Vadén (1995) and (1996) for a clarification of Smolensky's position.

subconcept rather than concept. Only vectors of activation values of units, that is, representations distributed over a (possibly huge) number of units, may represent concepts and thus have meanings in the ordinary sense. Now a connectionist system can be described referring to either level, of which the subconceptual level is considered fundamental. The conceptual level description of such a system is, according to Smolensky, an approximation of the accurate subconceptual level description of the system.

Some aspects of cognition can be described in an accurate way only at the subconceptual level by using notions such as individual unit (of a network), activation value (of a unit), connection (of units), and weight (of a connection). But the conceptual level semantics refers to notions and elements of the task domain, and only this level is relevant for the purposes of a symbol system. An important idea that Smolensky advocates is that to describe cognition completely enough both symbolic and subsymbolic models are needed and within the latter both the conceptual level and subconceptual level.

Now he suggests, furthermore, that the relation between symbolic and subsymbolic representations of knowledge is such that the theory describing symbol systems is a limiting case of the theory describing connectionist systems (if it is assumed that, e.g., the number of units in a connectionist network approaches infinity). He does not provide any construction of the limiting case correspondence he claims there is,[8] but Rantala and Vadén (1994) design two theories (of the conceptual level) related to symbolic and subsymbolic representations, respectively, and point out that the former is in a limiting case correspondence to the latter. This is done by first constructing a Turing machine *T* and a connectionist net *N* satisfying certain conditions and then showing that a certain conceptual level description (theory) of *T* is in a limiting case correspondence to a similar description of *N* when the number of units of *N* approaches infinity. The former description is called a 'theory of Turing representation' and the latter a 'theory of network representation'. In a case where the number of the units of the network is finite but large, one may say that the respective network representation approximates the Turing representation.

Given a network like *N*, one might hope that its subconceptual architecture could be described by telling how the rules indicating how the activation values of *N* are determined by other activation values and connection weights, and this way displaying how the outputs of *N* are determined by the respective inputs and the activation rules in question. This would mean that the internal structure and activation rules of *N* determine, but possibly only in a statistical sense, the output when the input is given. Hence, if the rules are deterministic and if there is a subconceptual level theory S describing the architecture of *N* that is

---

[8] It seems obvious that there cannot exist such a comprehensive correspondence relation between theories of the two kinds as he claims.

deterministic, it explains why a given output results from a given input, but if the rules are stochastic, the explanation is statistical. In general, such a mathematical description would be available if enough were known about the network. However, this much knowledge may not be available if there are hidden layers in the network, as acknowledged by many connectionists, such as Bechtel and Abrahamsen, who argue that typically there is no simple description for the regularities of hidden units.[9] According to Smolensky, on the other hand, conceptual-level descriptions can be derived from subconceptual ones, but they are incomplete, imprecise, or informal in relevant senses of the words. If a network is stochastic, one must be satisfied with probabilities and with a statistical or probabilistic inference of the input-output relation from the possible subconceptual description of the network.[10]

2. Connectionist Learning

The connectionist system *N* mentioned above was assumed to be trained so that it has learned to recognize whether or not certain inputs (that is, vectors of activation values) represent expressions of a given language, say L (satisfying appropriate conditions). The activation values of *N* were assumed to be given by so-called logistic (or respective stochastic) activation functions, as is usual in cases where hidden layers are involved, which means, for instance, that the output values belong to the open interval (0,1). That *N* has learned to recognize an expression means that the respective output is close to 1 or close to 0, respectively, according to whether the expression belongs or does not belong to L.. If the number of the units of the network increases and approaches infinity, in the limit the network becomes a Turing machine *T*.. It is known that if the the set of expressions of a language is finite or recursively infinite, such a Turing machine is able to recognize exactly (that is, it can be defined so that it recognizes) whether or not a given expression belongs to the language, that is, its output value is 1 or 0 according to whether or not it belongs to it.

In the more formal version in Rantala and Vadén (1994) it is supposed that *N* is a deterministic system, but it does not change the results if it is stochastic, in so far as relevant conditions concerning the degree of variability are satisfied. In such a case, the outputs, that is, the respective activity functions, are interpreted as probabilities. Then

---

9 Bechtel and Abrahamsen (1991), p. 163.

10 The relationship between connectionist and neural representations of knowledge is not very well understood; and most of what has been said of it in the literature is rather uncertain. Smolensky (1988) proposes that this relation is in many respects similar to the relation of symbolic and connectionist representations. According to him, if a connectionist system and the brain are described at the subconceptual level (it is a 'higher' level than the neural level), the descriptions are good approximations of each other, but what would an exact relation look like between them is not known so far.

the relation between inputs and outputs is probabilistic, and it may happen that different trials with the same input (and the same connection weights) result in slightly different outputs. We may say, in any case, that the connectionist system *N* recognizes the expressions of the language L only approximately since the output values are 1 or 0 only approximately. However, in certain cases the system may make mistakes. If it is stipulated (as usual) that a (positive) recognition takes place sufficiently well as soon as the respective output exceeds a given value, close to 1, it can happen that the trained network occasionally yields output values which are smaller than what was stipulated. This may take place if the system has to *generalize* from what it is trained to recognize, that is, if the system is actually trained to recognize a proper subset of the expressions of L, and then it is tested whether it will recognize others. There are some actual experiments indicating that networks can learn to recognize and that they make mistakes when trying to generalize, as, for instance, Bechtel and Abrahamsen's (1991) simulation model which solves certain logical problems.

Let us assume now, tentatively at least, that a sufficiently complete description S of the subconceptual architecture of *N* exists. S describes the mechanism of how an input is transformed into an output, hence it describes in a general way the dynamic processes of *N*, that is, how connection weights and activation values of individual units are adjusted. Now it is sometimes said (metaphorically) that S describes *N'* s capability of *knowing how* to transform a given input into the correct output, that is, it describes the nonpropositional knowledge of *N*.. Similarly, the piece of propositional knowledge of *N* resulting from an input is said to consist of its ability to recognize whether or not the respective input represents an expression belonging to the language L in question. This is to say (metaphorically) that if it manages to recognize it by giving an appropriate output value in every test case, it *knows that* the input does or does not represent such an expression. For example, Bechtel and Abrahamsen (1991) make this kind of distinction between nonpropositional and propositional knowledge with respect to connectionist (even artificial) networks.

Now, at least if we assume that by means of connectionist systems human cognition can be modelled more or less correctly, that is, approximately in some sense, then the kind of knowledge it represents can be called, after Smolensky, *individual knowledge*, in the sense that "It is not publicly accessible or completely reliable, and it is completely dependent on ample experience."[11] If a theory S which describes the subconceptual processes of *N*, it describes how its individual nonpropositional knowledge (or knowing how) is possible, and a description of the input-output relation of *N* (that is, what we called above the theory of network representation) shows how its individual propositional knowledge (that it knows that an input represents what it

[11] Smolensky (1988), p.5.

represents) is brought about. On the other hand, it will be said that the infinite limit of N, that the Turing machine T (or possibly another symbol system of the same kind) represents what Smolensky calls *public knowledge*.. It is propositional, publicly accessible and expressible, reliable (in the sense of admitting public checking), universal, and analyzable at the conceptual level.[12] It admits procedures that different people can reliably execute by means of step-by-step instructions, and thus it is related to Turing machines and von Neumann computers. Therefore its relation to the above notion of individual propositional knowledge seems to be in harmony with the relation of T to N, as described above. Analogously we may say, then, that the representation of public knowledge in this sense is in a limiting case correspondence to the representation of individual propositional knowledge.

3. On Connectionist Epistemic Logic

The problems concerning the relations between subconceptual and conceptual individual knowledge and between individual and public knowledge are relevant to certain questions concerning epistemic logic. They open new ways to see its much discussed problems, at least in so far as we may assume that connectionist learning is analogous to human learning and that epistemic logic is a *descriptive theory* about human epistemic processes. If we are not entitled to assume so, then the logic that I shall ouline below is relevant to artificial networks only. In any case, from the limitivist relation between symbolic and subsymbolic representations (if they are presented, as above, by means of an appropriate Turing machine and connectionist network, respectively) it would follow on some plausible assumptions that a *normative* epistemic logic is a limiting case of a more realistic, descriptive, epistemic logic. The connectionist representation of knowledge outlined above would perhaps explain, for instance, why individuals are not logically omniscient and why they make mistakes even in simple cases.[13]

We may suppose that a normative logic is based on classical logic. Though the assumption that something like classical logic yields an ideal which human reasoning should pursue has been controversial, philosophers working on epistemic logic commonly think that way, and evidence to the contrary has raised arguments among philosophers against the relevance of epistemic logic.[14] However, the supposition that there is a distinction between public and individual knowledge is more important here since it implies that there must be a similar distinction between the logics they possibly obey. To say that the

[12] See, e.g., Smolensky (1988), pp. 4-5.
[13] See Bechtel and Abrahamsen (1991).
[14] For example, Quine's arguments against modal logic in general are well known.

former is classical would be dispensable and could be changed if needed.

If there exists a logic which can be associated with subconceptual knowledge, it is a kind of *internal logic* (of a connectionist system). In the same spirit, let us call *external* the logic (of the connectionist system) which conceptual individual knowledge possibly obeys. The latter results when the system has learned to recognize (some) logical principles. If a classical, symbolic representation (by means of a Turing machine) of public knowledge is in a limiting case correspondence to a subsymbolic representation (by means of a connectionist system) of individual knowledge, as proposed above, we may expect that classical logic (also representable by means of a Turing machine) is a limiting case of the external logic (of the connectionist system in question). This would imply that similarly epistemic (modal) logic in the normative sense is a limiting case of epistemic logic in the descriptive sense. In what follows, I shall only sketch an epistemic logic of connectionist systems, and not consider the limiting cases in question. It is a logic which the procedure by which such a system learns to recognize patterns suggests to us in a natural way.

Consider the network N, introduced above, and let the language L be now a formal language of classical propositional logic. In view of what was said about how N learns to recognize whether or not a given input represents an expression of L, it is obvious that it can also be trained to recognize whether a given atomic sentence of L is considered true or false by the trainer and how the truth value of a more complex sentence is determined, that is, how the truth tables of classical connectives are determined, and thus ultimately truth values of compound sentences.[15] Alternatively, it can be taught to recognize some tautologies and substitution. Assume that w_0 is the 'actual' world to which true and false sentences are related. As noted above, it is assumed as being a classical, or 'normal', world, obeying the classical truth tables.[16]

Consider next a *state* of N, let it be w, by which I mean the ability of N to adjust its connection weight values so as to be able to process the input values either in the training mode or test mode. A given state of N may change when new inputs are presented to it. In the context of epistemic logic, let us call w a ('nonnormal') *possible world* (i.e., epistemically possible[17]). If an input of N represents a sentence A of L, we say that the resulting output (at the state w) is the *valuation* of A at w, and denote it by $v(w,A)$, or simply $v(A)$ if no confusion will arise. It belongs to the open interval (0,1), whereas the desired ouput value

---

[15] In practice, only a finite number of atomic sentences can be taught to N, so in order to consider all of them we must idealize.

[16] In a sense, it can also be thought of as being representable in a Turing machine, since classical laws of propositional logic can be represented in such a machine.

[17] See Hintikka (1975).

would be either 0 or 1, depending on whether it is considered false or true by the trainer, that is, false or true at w_O.. Now I shall say that the truth value of A at w is *true*, if $v(w,A)$ exceeds (or equals) a certain value, say a, which is greater than 0.5, determined by the trainer, and *false* otherwise.[18]

Since the aim of the trainer is to teach N the truth tables of the connectives of classical propositional logic, it follows that if N learns the connectives up to the given degree of the output value a, it learns to recognize the classical tautologies up to a. Furthermore, it seems that the only way to teach N the connectives, given that the ideal, classical truth values are 0 and 1 (which can be considered as limit values of v), is to teach it the following rules:

$(\neg)$	$v(\neg A)$	$= 1\text{-}v(A)$;
$(\vee)$	$v(A\vee B)$	$= \max\{v(A),v(B)\}$;
$(\wedge)$	$v(A\wedge B)$	$= \min\{v(A),v(B)\}$;
$(\rightarrow)$	$v(A\rightarrow B)$	$= v(\neg A\vee B)$.

This many-valued logic (or, rather, semantics) is what the internal logic of N ought to be like since in a sense it approaches classical semantics when the values of v approach 1 or 0. As proposed above, the truth of A at w is defined as follows:

A is *true at w* iff $v(A)\geq a$.

It is evident that the respective two-valued logic is what we called external (individual) logic. It is easy to see, for example, that not all classical tautologies are true at w in cases where N has not yet learned to recognize them, as, for instance, if w belongs to the training mode or if N has to generalize from what it already knows. If A is a sentence whose truth value has already been taught to N, that is, $v(w,A)\geq a$ if A is true at w_O and $v(w,A)<a$ if A is false at w_O, we may suppose that the same holds for all forthcoming states w' in the test mode. Even if the network were stochastic, we may assume that once it has learned to recognize the truth value of a sentence, all actual tests yield a correct output for that sentence and all possible tests would do so. Only in cases where it has to generalize, tests may occasionally yield a wrong result.

Let now M be a Kripke model of the form $M=\langle W,R,w_O,V\rangle$ where W consists of w_O and of all possible (nonnormal) worlds (that is, states in the above sense) of N, R is an appropriate alternativenes relation in W. V is the truth relation as indicated above. R can be, for example, such that wRw' when w is w_O and w' belongs to a test mode or when both w and w' belong to a test mode in such a way that w' is later than w. This means that, in addition to the actual world we only need to consider alternative states of the network which come after the training mode. We may assume, furthermore, that R is reflexive. There may

[18] It is the question of N's recognizing A, analogously to what was said above.

exist other natural ways to characterize R, but it is not clear yet what they might be. Now it is a direct consequence of the above assumptions that it is natural to state:

N knows that A is true at w iff A is true at every w' such that wRw'.

Sentence A is ***true in*** M iff A is true at w_0.

Consider all Kripke models of the above form and define the validity of a sentence in the usual way; this means that we have to abstract and generalize from any concrete networks. If Ω is the set of all tautologies which any (abstract) network has learned to recognize as tautologies,[19] then the Rule of Necessitation will be semantically valid in the following restricted form (where N varies over all abstract networks):

(RNΩ) For all sentences A in Ω, if A is valid then the sentence *N knows that A* is valid.

It is clear that all the axioms of S4 are valid (assuming that R is reflexive and transitive), and the rule *modus ponens*, as well, whence this semantics provides a semantics for the subsystem of S4 in which the Rule of Necessitation is restricted as indicated. However, whether this semantics is complete and yet corresponds to connectionist learning in an abstract sense, depends on what kinds of abstract networks are considered admissible. Thus, for instance, if we want to define a canonical model in something like the standard sense (or rather a number of appropriate variants thereof) in the semantics, we must admit *as if* networks that learn the truth values of infinitely many sentences of the language.

With such reservations, then, this subsystem seems to correspond in a natural way to what knowing means logically for connectionist networks. If R is defined so that it is only reflexive, we get a subsystem T_Ω of T which was defined in Rantala (1982). There the notion of nonnormal ('impossible') world was quite arbitrary, even *ad hoc*, but now we have seen that it can be given a natural and substantial construal in terms of networks.[20] If network learning is at all analogous to human learning, as Bechtel and Abrahamsen appear to say, then this logic can be considered as a descriptive theory in the sense discussed above. It does not give rise logical omniscience and it simulates important features of how one learns logic in the semantic sense. It should be obvious that the logic for the full system T is in something like a limiting case correspondence to the logic for T_Ω, and similarly for S4.

---

[19] It is, of course, an idealization that all networks (actual and possible) would learn exactly the same set, but for logical purposes such idealizations are unavoidable.

[20] It is easy to see that the present kind of Kripke model can be thought of as a special case of the model defined there.

REFERENCES

Bechtel W., Abrahamsen A. Connectionism and the Mind. Blackwell. Oxford-Cambridge, Mass., 1991.

Fetzer J. H. Artificial Intelligence: Its Scope and Limits. Kluwer. Dordrecht-Boston-London, 1990.

Hintikka J. Imposible Possible Worlds Vindicated. // J. of Philosophical Logic. 1975. V. 4. P. 475-484.

Rantala V. Impossible Worlds Semantics and Logical Omniscience. // I. Niiniluoto, E. Saarinen (eds.). Intensional Logic: Theory and Applications. Acta Philosophica Fennica. Helsinki, 1982. V. 35. P. 106-115.

Rantala V. Explanatory Translation: Beyond Functionalism and Reductionism. // M. L. Dalla Chiara, K. Doets, D. Mundici, and J. van Benthem (eds.). Logic and Scientific Methods. Kluwer. Dordrecht-Boston-London, 1997. P. 399-412.

Rantala V., Vadén T. Idealization in Cognitive Science. A Study in Counterfactual Correspondence' // M. Kuokkanen (ed.). Idealization VII: Structuralism, Idealization and Approximation, Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities. Rodopi. Amsterdam-Atlanta, GA,1994. V. 42. P. 179-198.

Smolensky P. On the Proper Treatment of Connectionism (with open peer commentary and author's response). Behavioral and Brain Sciences, 1988. V. 11. P. 1-74.

Vadén T. Counterfactual Reduction and the Symbolic-Subsymbolic Relation. // R. Casati, G. White (eds.). Philosophy and the Cognitive Sciences. Papers of the 16th International Wittgenstein Symposium. The Austrian Ludwig Wittgenstein Society. Kirchberg am Wechsel, 1993.

Vadén T. From Limitivism to Correspondence: The Symbolic-Subsymbolic Relation. // L.Niklasson, M.Boden (eds.). Current Trends in Connectionism. Lawrence Erlbaum. New Jersey, 1995.

Vadén T. The Symbolic and Subsymbolic Theories in Cognitive Science. (diss.) University of Tampere, 1996.

С.А.Павлов

ЛОГИКА ЛОЖНОСТИ КАК ОБОБЩЕНИЕ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ ЛУКАСЕВИЧА

Abstract. *Logic of falsehood is presented as four-valued generalization of both Lukasiewich-Tarski's extended propositional logic and Lukasiewich's three-valued logic, which does not coinside with Lukasiewich's original generalization. The non-modal interpretation of unary operators for Lukasiewich's three-valued logic is suggested.*

Logic of falsehood FL4 *corresponds to Belnap's four-valued logic in various formal and non-formal aspects, likewise its three-valued sublogics correspond to Kleene's and Lukasiewich's logic, respectively. Here an interrelations between implications for Kleene's, Lukasiewich's, Belnap's logics, logic* E_{fde} *and logic of falsehood are considered.*

Введение

Логика ложности FL4 [6,7,8] позволяет корректно оперировать как с двузначными высказываниями (либо истинными, либо ложными), так и с высказываниями, содержащими противоречивую и неполную информацию.

1. Понятия истинности и ложности будем содержательно рассматривать в том смысле, в каком они выражаются в естественном языке в высказываниях следующего вида:

"Предложение 'S_1' истинно.", "Предложение 'S_2' ложно.",

в которых имена предложений образованы с помощью функции цитирования. Эти высказывания символизируем формулами $T(S_1^*)$, $F(S_2^*)$. Термообразующий оператор * исполняет роль функции цитирования и является обратным указателю акта утверждения (обозначается квадратными скобками [ ]), который использует В.А.Смирнов в комбинированном исчислении предложений и событий [12].

Ограничение рассмотрения понятий истинности и ложности только в высказываниях вышеуказанного вида принято для того, чтобы избежать трудностей, связанных с семантическими парадоксами типа парадокса лжеца и трудностей, связанных с определением высказывания и определением истины.

Высказывания $T(S_1^*)$, $F(S_2^*)$ являются высказываниями об истинности и ложности предложений 'S_1', 'S_2' и являются высказываниями в метаязыке относительно языка, в котором сформулированы предложения 'S_1', 'S_2'. Т.е. содержательно понятия истинности и ложности являются в этих высказываниях предикатами для имен предложений 'S_1', 'S_2'.

Также высказывания об истинности и ложности предложений 'S_1', 'S_2' можно символизировать более лаконично ($|S_1$), ($-S_2$) без использования функции цитирования. В такой записи символы | и – , отвечающие понятиям истинности и ложности, являются в этих высказываниях метапредикатами или операторами истинности и ложности для предложений 'S_1', 'S_2'.

Множество высказываний языка, метаязыка, метаметаязыка и т.д. рассматривается как одно целое без разделения на уровни, то есть с высказываниями S, $T(S^*)$, $F(S^*)$, $F((F(S^*))^*)$, $T((T(S^*)^*)$, ($|S$), ($-S$), ($|(|S)$), ($-(-S)$), … , будем оперировать совместно в языке логики ложности.

Приведем еще три содержательных тезиса, являющихся основными для логики ложности.

2. Понятия истинности и ложности будут в формальной системе играть роль как предикатов так и логических операторов. Предикат (или оператор) ложности рассматриваются в качестве исходного, неопределяемого логического символа.

Высказывание об истинности предложения 'S' рассматривается как сокращение для высказывания о ложности отрицания предложения 'S'.

Отрицание, в свою очередь, определяется в языке логики ложности.

3. Высказывания $T(S^*)$, $F(S^*)$, ($|S$), ($-S$) об истинности (ложности) предложения 'S' двузначны, в то время как не всякое предложение 'S' должно быть либо истинным, либо ложным.

Последнее означает, что в универсум предложений, подлежащих оценке на истинность или ложность, включаются предложения, которые могут оцениваться как истинные и ложные одновременно (противоречивые, парадоксальные, антиномичные, переопределенные), а также предложения, которые являются ни истинными, ни ложными (неопределенные, бессмысленные предложения, истиннозначные провалы).

4. Импликация также является исходной связкой логики ложности. Предложение с импликацией "если S_1, то S_2" будем записывать символически ($S_1 \to S_2$).

Будем полагать, как обычно, что

предложение '($S_1 \to S_2$)' истинно, если и только если

'S_1' ложно или 'S_2' истинно,

и предложение '($S_1 \to S_2$)' ложно, если и только если

'S_1' истинно и 'S_2' ложно.

1. Языки логики ложности

Начнем с формулировки языка исчисления одноместного предиката ложности FC4 [6, 10].

Язык исчисления предиката ложности FC4

Алфавит FC4:

$x, x_1, x_2, \ldots$ индивидные переменные для имен предложений;

$s, s_1, s_2, \ldots$ сентенциальные переменные;

$*$ символ оператора, преобразующего п.п.ф. в термы;

F предикатный символ для предиката ложности;

$\rightarrow, \forall$ логические константы;

(,) технические символы.

Правила образования п.п.ф.

1.1. Всякая индивидная переменная есть терм.

1.2. Всякая сентенциальная переменная есть п.п.ф.

1.3. Если A, B есть п.п.ф., t есть терм и x есть индивидная переменная, то $F(t)$, $(A \rightarrow B)$, $\forall x\, A$ есть п.п.ф.

1.4. Если A есть п.п.ф., то A^* есть терм.

Метапеременные: A, B, C, ... для п.п.ф.; t, t_1, t_2, для термов.

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок. Введем следующие

сокращения.

Определим формулу 0, являющуюся тождественно ложной, которая будет играть роль константы "ложь"

D1.1 $\quad 0 =_{df} F((F(x) \rightarrow F(x))^*)$.

Определим отрицание ~, соответствующее исходной импликации $\rightarrow$

D1.2 $\quad \sim A =_{df} (A \rightarrow 0)$.

Высказывание об истинности предложения 'S' рассматривается как сокращение для высказывания о ложности отрицания предложения 'S'. Формулу с предикатом истинности будем рассматривать как сокращение следующей формулы:

D1.3.1 $\quad T(A^*) =_{df} F((\sim A)^*)$.

Также определим операторы истинности и ложности:

D1.3.2 $\quad |A =_{df} T(A^*)$,

D1.3.3 $\quad -A =_{df} F(A^*)$.

Определим высказывание о строгой истинности, то есть об истинности и неложности, предложения 'A' ("$\ulcorner$" содержательно означает "есть истинно и неложно"):

D1.4 $\ulcorner A =_{df} -(\,|A \rightarrow -A)$

Определим импликацию $\supset$, которую назовем D-импликацией, так как именно она фигурирует в теореме дедукции:

D1.5 $(A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \rightarrow \ulcorner B)$.

Выделим подкласс T.F.-формул (T.F.-ф.), для которых будут иметь место аксиомы и правила вывода исчисления предикатов первого порядка.

2.1. Если t есть терм, то F(t) есть T.F.-ф.

2.2. Если P, P_1, P_2 есть T.F.-ф. и x есть индивидная переменная, то есть п.п.ф., то $(P_1 \rightarrow P_2)$ и $\forall x\, P$ есть T.F.-ф.

Пусть P, P_1, P_2, ... есть метапеременные для T.F.-ф.

D1.6.1 $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$

D1.6.2 $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$

D1.6.3 $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$

Схемы аксиом

A1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3 $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.4 $\forall x\, P(x) \supset P(t)$, если терм t свободен для x в P(x).

A1.5 $\forall x\, (P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset \forall x\, P_2))$, если P_1 не содержит свободных вхождений x.

К схемам аксиом исчисления предикатов первого порядка добавим следующие:

A2.1 $F((\sim P)^*) \equiv P$,

A2.2 $F(P^*) \equiv \sim P$,

A3.1 $T((A \rightarrow B)^*) \equiv F(A^*) \vee T(B^*)$,

A3.2 $F((A \rightarrow B)^*) \equiv T(A^*) \wedge F(B^*)$.

Правила вывода

$$\frac{A,\ (A \supset B)}{B} \quad \text{MP}$$

$$\frac{A}{\forall x\, A} \quad \text{Gen}$$

Язык исчисления оператора ложности

Язык исчисления предикатов первого порядка с одноместным предикатом ложности FC4 можно упростить, отказавшись от употребления оператора, преобразующего п.п.ф. в термы *, и оставив оператор (метапредикат) ложности вместо предиката ложности. При этом вместо индивидных переменных для имен предложений будем использовать сентенциальные переменные

В правила образования, аксиомы, правила вывода исчисления FC4 внесем необходимые изменения.

Определение D1.1 примет следующий вид:

$$0 =_{df} -(-s \to -s).$$

Аксиомы A2.1-2.2, A3.1-3.2 примут следующий вид:

$$|P \equiv P$$

$$-P \equiv \sim P,$$

$$|(A \to B) \equiv -A \vee |B$$

$$-(A \to B) \equiv |A \wedge -B$$

Полученное исчисление оператора ложности FC4 является обобщением расширенного пропозиционального исчисления.

Особенностью расширенного пропозиционального исчисления (см. [13]) Лукасевича-Тарского, Рассела, прототетики Лесневского является то, что они содержат, кроме символов пропозиционального исчисления, еще и кванторы с пропозициональными переменными в качестве операторных переменных.

Имеем теорему, связывающую различные определения (имеющие разный смысл) константы "ложь" в исчислении FC4 и в расширенном пропозициональном исчислении.

T1 $\quad 0 \equiv \forall s\, s$

Так же как расширенное пропозициональное исчисление и пропозициональное исчисление Cl эквивалентны друг другу, так и исчисление оператора ложности FC4 эквивалентно своему пропозициональному фрагменту (без кванторов) – логике ложности FL4.

Одноуровневая, односортная формулировка языка FL4

Пропозициональный фрагмент исчисления FC4 является логикой ложности FL4.

В формулировках языка логики FC4 и языка логики FL4 [8,9, 10] используются два сорта переменных: для п.п.ф. и TF-ф. Использование двух сортов переменных характерно для двухуровневых логик таких как логика Д.А.Бочвара [2], логики истины фон Вригта [3], комбинированная логики высказываний и событий В.А.Смирнова [12] и ряда других.

Перейдем к формулировке языка логики ложности FL4 с использованием только одного сорта переменных, что позволит рассматривать логику ложности FL4 как одноуровневую.

Имеем следующие теоремы:

T1.1 $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$, (B')[1]

T1.2 $(A \supset (B \supset A)$, (K)

T1.3 $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$. (P)

Из теоремы Тарского-Бернайса следует, что D-импликация $\supset$ является классической.

T1.4 $(0 \supset A)$ (N)

Из этих теорем следует, что D-импликация соответствует классической импликации в классификации А.С.Карпенко [4, 9].

Определим D-отрицание $\neg$, D-конъюнкцию, D-дизъюнкцию и D-эквивалентность, соответствующие D-импликации.

D1.7 $\neg A =_{df} (A \supset 0)$

Обобщим определения D1.6.1 – 6.3 на класс всех п.п.ф.

D1.8.1 $(A \wedge B) =_{df} \neg(A \supset \neg B)$

D1.8.2 $(A \vee B) =_{df} (\neg A \supset B)$

D1.8.3 $(A \equiv B) =_{df} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

Схемы аксиом (для односортной формулировки FL4)

В качестве схем аксиом можно принять положения, соответствующие теоремам T1.1 – 1.4,
либо положения, соответствующие теореме

T1.2 вместе со следующими теоремами:

T1.5 $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$,

T1.6 $((\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A))$.

Вместо аксиом A2.1-2.2 необходимо добавить аксиомы редукции операторов истинности и ложности, соответствующие следующим теоремам FL4:

T1.7.1[2] $| - A \equiv - A$ (редукция оператора истинности),

T1.7.2 $- - A \equiv \neg - A$ (редукция оператора ложности).

Аксиомы A3.1 – 3.2 и правило вывода MP остаются без изменений.

Таким образом формулируется логика FL4 [11] с использованием только одних метапеременных для п.п.ф.

Приведем также еще одно соотношение между операторами ложности, истинности и отрицанием.

T1.8 $-A \equiv | {\sim} A$

[1] B', K, P, N - обозначения формул в классификации А.С.Карпенко [4].

[2] Здесь последовательность операторов $|$ и $-$, а не знак выводимости.

2. Интерпретация языка логики FL4

Для интерпретации языка логики ложности принимаем 4 истинностных значения T (3)[3], F (0), B (2), N (1), содержательный смысл которых следующий: истинно и неложно; ложно и неистинно; ложно и истинно; ни истинно, ни ложно (см. также Мускенс [14]: true and not false, false and not true, both true and false, neither true nor false).

Выделенное значение – T (3).

Таблицы истинности для исходных и определенных выше связок:

A	−A	~A	¬A
0	3	3	3
1	0	1	3
2	3	2	3
3	0	0	0

→	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	0	1	2	3

A	|A	ΓA
0	0	0
1	0	0
2	3	0
3	3	3

⊃	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	3	3	3	3
2	3	3	3	3
3	0	0	0	3

∧	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	3	3	3
2	0	3	3	3
3	0	3	3	3

∨	0	1	2	3
0	0	3	3	3
1	3	3	3	3
2	3	3	3	3
3	3	3	3	3

≡	0	1	2	3
0	3	3	3	0
1	3	3	3	0
2	3	3	3	0
3	0	0	0	3

Для FL4 имеют место теоремы дедукции, непротиворечивости и семантической полноты.

В языке FL4 определимы J-операторы (см. [9]). Согласно определениям О.М.Аншакова (см. наст. выпуск) логика ложности является J-логикой, истинностно-полной и С-расширяющей.

Отметим, что ранее в работах [6, 7] истинностные значения B и N назывались "противоречивость" C (2) и "индифферентность"

[3] В скобках приводятся цифровые обозначения истинностных значений.

I (1). В связи с тем, что в языке FL4 имеется несколько видов противоречий, автор в дальнейшем предпочел более нейтральные обозначения Белнапа [1].

3. Соотношения FL4 и FL3N с логиками Белнапа и Клини

Четыре истинностных значения логики Белнапа [1] близки по смыслу истинностным значениям в интерпретации FL4.

Таблица истинности для отрицания ~ (D1.2) соответствует таблице истинности этой связки в логике Белнапа.

Определим конъюнкцию & и дизъюнкцию V в языке FL4, таблицы истинности которых соответствуют таблицам истинности этих связок в логике Белнапа.

D3.1 $(A \,\&\, B) =_{df} \sim(A \to \sim B)$

D3.2[4] $(A \vee B) =_{df} (\sim A \to B)$

&	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

V	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	3	3	3	3

В свою очередь в языке логики Белнапа можно определить исходную импликацию логики FL4, исходя из следующей теоремы FL4

T3.1 $(A \to B) \equiv (\sim A \vee B)$

Также в языке FL4 определяется импликация логики Белнапа, таблица истинности которой приведена ниже.

D3.3 $(A \to^{S} B) =_{df} ((|A \to |B) \,\&\, (--A \to --B))$

$\to^{S}$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	3	0	3
2	0	0	3	3
3	0	0	0	3

[4] Обращаем внимание на графические отличия вновь вводимого символа от символа дизъюнкции в D1.8.2.

Проф. Белнап согласился с таким определением. Также он указал автору на возможность применения бирешеток для интерпретации своей логики.

Истинностная таблица для импликации $\rightarrow^{S}$ совпадает с таблицей, предложенной Т.Смайли для логики тавтологических следований E_{fde}.

Таблицы истинности для импликации логики Клини SK_3 со связками в сильном смысле соответствуют таблицам истинности для исходной импликации трехзначной сублогики ложности FL3N.

FL3N есть логика, получаемую присоединением к аксиомам логики ложности FL4 формулы $(-|A \vee - -A)$ (подробнее см. [8,9]). В интерпретации это соответствует отбрасыванию четвертого истинностного значения B.

Сравнение FL3N с логикой Клини показывает, что таблицы истинности для отрицания, конъюнкции и дизъюнкции логики Клини соответствуют таковым в логике FL3N, детерминируемым определениями D1.2, D3.1, D3.2 (подробнее см. в [8,9]).

4. FL3N и трехзначная логика Лукасевича

А.С.Карпенко поставил вопрос о предполноте сублогики ложности FL3N. Следующим стал вопрос о функциональной эквивалентности трехзначной логики Лукасевича L_3 и логики ложности FL3N.

Сопоставим трехзначную логику Лукасевича логике FL3N.

Лукасевич вводит третье значение истинности $^1/_2$, исходя из утверждений «... существуют высказывания, которые не являются ни истинными, ни ложными, а лишь только *безразличными*», «Используя не совсем точную философскую терминологию, можно было бы сказать, что этим высказываниям онтологически не соответствует ни бытие, ни небытие, но лишь *возможность*. Безразличные высказывания, которым онтологически соответствует возможность, имеют третье значение» [5]. Он конструирует логику L_3, в которой исходными связками являются $\rightarrow^{L}$ и отрицание ~, задаваемые следующими истинностными таблицами, где 0 – ложь, 1 – истина:

A	~A
0	1
$^1/_2$	$^1/_2$
1	0

$\to^L$	0	$^1/_2$	1
0	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	1	1
1	0	$^1/_2$	1

Ни истинным, ни ложным высказываниям, т.е. *безразличным (indifferent),* в логике Лукасевича соответствуют ни истинные, ни ложные высказывания, т.е. индифферентные I, в логике ложности FL3N. Таким образом, 1, $^1/_2$, 0 соответствуют T, I, F.

Импликация Лукасевича $\to_L$ определяется в FL3N следующим образом:

D4.1 $(A \to^L B) =_{df} (A \to B) \vee (A \to^S B)$.

Это определение поясняет смысл импликации Лукасевича, показывая, что она является дизъюнкцией исходной импликации логики FL3N (импликации Клини) и импликации Белнапа (импликации логики E_{fde}).

Отрицанию и импликации Лукасевича $\to^L$ в языке FL3N соответствуют следующие истинностные таблицы:

A	~A
F	T
I	I
T	F

$\to^L$	F	I	T
F	T	T	T
I	I	T	T
T	F	I	T

Унарным операторам необходимости N и возможности M логики Лукасевича соответствуют, в частности, оператор истинности | и оператор ложности ложности – – логики FL3N.

A	NA	MA
0	0	0
$^1/_2$	0	1
1	1	1

A	|A	– –A
F	F	F
I	F	T
T	T	T

Рассматривая третье значение как индифферентность, тем самым можно интерпретировать унарные операторы N и M логики Лукасевича немодальным образом.

Также и в логике Лукасевича L_3 определимы связки, соответствующие исходным связкам логики ложности FL3N:

$$(A \to B) =_{df} ((\sim A \to^{L} B) \to^{L} B)$$

$$-A =_{df} \sim MA.$$

Установленные соответствия доказывают теорему.

T4 *Трехзначная логика Лукасевича* L_3 *функционально эквивалентна логике ложности* FL3N.

Необходимо отметить, что в языке логики ложности возможно несколько различных определений операторов утверждения (включая оператор истинности | и оператор ложности ложности $--$) интерпретирующих операторы N и M логики Лукасевича (по 3 для каждого):

D4.2.1 $N^{T}A =_{df} |A$,

D4.2.2 $N^{F}A =_{df} \lceil A$,

D4.2.3 $N^{C}A =_{df} A \;\&\; |A$,

D4.3.1 $M^{F}A =_{df} --A$,

D4.3.2 $M^{T}A =_{df} \rceil\rceil A$,

D4.3.3 $M^{C}A =_{df} A \,V\, --A$.

Операторы N^{T}, N^{F}, N^{C} (M^{F}, M^{T}, M^{C}) эквивалентны друг другу в области трех истинностных значений T, I, F (то есть в языке FL3N), но эти операторы утверждения различаются в области четырех значений (то есть в языке FL4).

Все 9 унарных операторов из класса операторов утверждения представим своими таблицами истинности.

A	$\lceil A$	$\|A$	$A \& \|A$	$A \, V \|A$	$A \, V--A$	$--A$	$\rceil\rceil A$	$A \& --A$
F	F	F	F	F	F	F	F	F
I	F	F	F	I	T	T	T	I
C	F	T	C	T	C	F	T	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T

Операторы утверждения $|$, $\lceil$, $--$, $\rceil\rceil$ в общем случае изменяют валентность предложения A, на которое они действуют. Поэтому ни один из них не может быть исключен из рассмотрения, в отличие от классической логики, в которой результат действия оператора утверждения на предложение P эквивалентен предложению P. Так в частности для операторов $|$ и $\lceil$ имеем теоремы FL4, которые показывают неэлиминируемость истинности из языка FL4 (невыводимость обозначим $\nvdash$):

T4.1 $\nvdash \; (|A \to^{S} A)$.

T4.2 $\not\vdash$ $(|A \supset A)$.

T4.3 $\not\vdash$ $(\ulcorner A \to^{S} A)$.

T4.4 $(\ulcorner A \supset A)$.

Используя различные операторы утверждения, определим еще 3 из 4 возможных в языке FL4 классических импликаций в классификации А.С.Карпенко [4, 9].

D4.4.1 $(A \supset^{C} B) =_{df} (\ulcorner A \to (B \,\&\, |B))$.

D4.4.2 $(A \supset^{I} B) =_{df} (\ulcorner A \to (B \,\&\, {-}{-}B))$.

D4.4.3 $(A \supset^{IC} B) =_{df} (\ulcorner A \to B)$.

Для этих импликаций имеем следующие таблицы истинности:

$\supset^{C}$	F	I	C	T
F	T	T	T	T
I	T	T	T	T
C	T	T	T	T
T	F	F	C	T

$\supset^{I}$	F	I	C	T
F	T	T	T	T
I	T	T	T	T
C	T	T	T	T
T	F	I	F	T

$\supset^{IC}$	F	I	C	T
F	T	T	T	T
I	T	T	T	T
C	T	T	T	T
T	F	I	C	T

5. Обобщение трехзначной логики Лукасевича до четырехзначной

Рассмотрим один из вариантов аксиоматизации трехзначной логики Лукасевича, предложенный Слупецким, Брылем и Пруцналем в [15]. Аксиоматизация L_3 проводится ими в сигнатуре $\{\vee, \sim, N\}$. Будем сокращенно называть это исчисление SBP для удобства отличения его от других аксиоматизаций логики Лукасевича.

Таблицы истинности для отрицания ~ и оператора необходимости N представлены выше, а для дизъюнкции $\vee$ следующая:

$\vee$	0	$^1/_2$	1
0	0	$^1/_2$	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1
1	1	1	1

V	F	I	T
F	F	I	T
I	I	I	T
T	T	T	T

Эта таблица соответствует таблице для дизъюнкции V логики ложности FL3N. Поэтому сигнатура исчисления SBP $\{\vee, \sim, N\}$ соответствует сигнатуре $\{V, \sim, |\}$.

Связки $V, \sim, |$ определены в языке FL4, а четырехзначные таблицы для них представлены выше.

Добавим к трем истинностным значениям логики Лукасевича четвертое значение истинности и обозначим его цифрой 2.

Теперь расширим таблицы для связок $\vee, \sim, N$ в соответствии с таблицами для $V, \sim, |$:

A	$\sim A$	NA
0	1	0
$^1/_2$	$^1/_2$	0
2	2	1
1	0	1

$\vee$	0	$^1/_2$	2	1
0	0	$^1/_2$	2	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1	1
2	2	1	2	1
1	1	1	1	1

Таким образом задана четырехзначная логика Лукасевича L'_4 в сигнатуре $\{\vee, \sim, N\}$. При этом таблица истинности для дизъюнкции отличается от таблицы, которая получается для дизъюнкции при собственном четырехзначном обобщении Лукасевича.

Чтобы показать, что полученное четырехзначное обобщение логики Лукасевича L'_4 функционально эквивалентно четырехзначной логике ложности FL4, определяем оператор ложности $-$ и импликацию $\rightarrow$ в соответствии с теоремами T1.8, T3.1. Последних соответствий вместе с приведенными ранее достаточно, чтобы доказать теорему.

T5.1 *Четырехзначная логика Лукасевича* L'_4 *функционально эквивалентна логике ложности* FL4.

Тем самым проведено обобщение трехзначной логики Лукасевича до четырехзначной, отличающееся от собственного обобщения Лукасевича.

Дополнительный интерес представляет также сопоставление этих логик на синтаксическом уровне.

Для этого приведем формулировку исчисления SBP [15].

В этой работе предлагается определение импликации [5]

$$(p \supset q) =_{df} \sim Np \vee q \ ,$$

для которой имеем следующую таблицу истинности:

---

[5] Некоторые символы могут совпадать с ранее введенными, но это не должно приводить к недоразумениям, так как они используются только в контексте определенных исчислений.

$\supset$	0	$^1/_2$	1
0	1	1	1
$^1/_2$	1	1	1
1	0	$^1/_2$	1

Таблица для этой импликации для трех значений истинности соответствует классическим импликациям $\supset^{I}$, $\supset^{IC}$, определенным выше.

Аксиомы SBP

A1 $((p \supset q) \supset r)) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))$

A2 $(p \supset q) \supset ((p \vee q) \supset q))$

A3 $p \supset (p \vee q)$

A4 $p \supset (q \vee p)$

A5 $p \supset {\sim}{\sim}p$

A6 ${\sim}{\sim}p \supset p$

A7 ${\sim} (p \vee q) \supset {\sim}p$

A8 ${\sim} (p \vee q) \supset {\sim}q$

A9 ${\sim}p \supset ({\sim} q \supset {\sim}(p \vee q))$

A10 $\mathrm{N}p \supset p$

A11 ${\sim}\mathrm{N}{\sim} (p \vee {\sim}p)$

A12 $\mathrm{N}p \vee {\sim}\mathrm{N}p$

Правила вывода: подстановка и modus ponens.

Аксиоме A10 этого исчисления соответствует следующая теорема FL3N.

T5.2 $|A \supset A$ (FL3N)

В то же время формула $|A \supset A$ невыводима в FL4 (см. T4.2).

На основании последних положений имеет смысл задача так модифицировать SBP (в т.ч. отбрасывая A10), чтобы полученное исчисление SBP′, было эквивалентно FL4.

В заключение отметим, что проведенное рассмотрение показывает, что имеется ряд содержательных и формальных соответствий между исходными и производными связками и операторами таких логик как трехзначная логика Лукасевича, логика Клини с сильными связками SK_3, логика Белнапа, логика E_{fde}, логика ложности FL4 и ее сублогика FL3N.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белнап Н.* Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М., 1981.
2. *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении //Математический сборник. 1938. Т.4. N2.
3. *Вригт Г.Х.* Логика истины. // Вригт Г.Х. Логико-философские исследования. М. 1986
4. *Карпенко А.С.* Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С.224-258.
5. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190-205.
6. *Павлов С.А.* Исчисление предикатов истинности и ложности. // Логический анализ естественных языков. 2-ой Советско - финский коллоквиум по логике. М., 1979.
7. *Павлов С.А.* Логика с терминами 'истинно' и 'ложно' //Философские основания неклассических логик. Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР. М., 1990.
8. *Павлов С.А.* Логика ложности FL4 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. 1993. М., 1994.
9. *Павлов С.А.* Классификация трех- и четырехзначных логик в рамках логики ложности FL4 // Логические исследования. Вып. 3. М., 1995.
10. *Павлов С.А.* Классификация трех- и четырехзначных логик в рамках логики ложности // XI Международная конференция. Логика, методология, философия науки, т.II. Москва-Обнинск. 1995, с.52-56.
11. *Павлов С.А.* Трехзначная логика Лукасевича и логика ложности FL4 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 1997.
12. *Смирнов В.А.* Комбинированные исчисления предложений и событий и логика истины фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. IV Советско-финский коллоквиум. М.,1989.
13. *Чёрч А.* Введение в математическую логику. М.,1960.
14. *Muskens R.A.* Meaning and partiality. Amsterdam, 1989.
15. *Słupecki J., Bryll G., Prucnal T.* Some Remarks on Three-valued Logic of J. Lukasiewicz. // Studia Logica. 1967. Vol. XXI. P.45-70.

В. Л. Васюков

КОМБИНИРОВАННАЯ ЛОГИКА В. А. СМИРНОВА С СИТУАЦИОННОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ (НЕ-ФРЕГЕВСКИЙ ПОДХОД)

Abstract. *In his papers [3], [7], [4], [5] V.A.Smirnov considers systems of two-leveled combined logic in which extrinsic level (external logic) would be a propositional logic while intrinsic level (internal logic) would be an algebra of events (the latter are the terms). In the paper a situational formulation of combined logic is proposed when instead of a notion of "event" the notion of "situation" is exploited and we accept the principle allowing to conclude from situations to statements (Suszko's principle). Given combined logic a situational semantic is constructed based on the ideas of situational semantic of non-fregean logic.*

В ряде работ (см., напр., [3], [7], [4], [5]) В.А.Смирнов рассматривает системы двухуровневой логики, в которых внешний уровень (внешняя логика) является пропозициональной логикой, в то время как внутренний уровень (внутренняя логика) представляет собой алгебру событий (последние являются термами). Расширяя одну из подобных систем **СМ** (логика де Моргана с внешней классической логикой) за счет утверждений о тождестве событий, В.А.Смирнов вводит правило $\dfrac{\theta a \leftrightarrow \theta b}{a = b}$, которое, следуя идеям Р.Сушко, он называет принципом Фреге (здесь $a=b$ означает тождество событий, а $\theta a \leftrightarrow \theta b$ означает эквивалентность актов утверждений о том, что эти события имеют место). Он указывает, что при этом алгебра событий может варьироваться в широких пределах.

Как известно, не-фрегевская логика, разработанная Р.Сушко, предполагает отмену принципа Фреге, что приводит к введению в синтаксис новой связки тождества $\equiv$ (кореференциальности), утверждающей совпадение референтов предложений, и к необходимости использования так называемой ситуационной семантики. Если следовать и дальше идеям Р.Сушко, то следовало бы принцип Фреге заменить правилом $\frac{a = b}{\theta a \leftrightarrow \theta b}$, которое можно было бы назвать принципом Сушко. Подобный принцип предполагает независимость онтологической части, когда структура познаваемого мира находит свое отображение в исчислении предложений.

Возникающая на этом пути проблема связана с понятием "событие", принимаемым в комбинированной логике. В.А.Смирнов различает акт предикации (синтез свойства с объектом или отношения с объектами) и акт утверждения (соотнесение мыслимого содержания с реальностью). Эти акты различаются формой записи. Так, согласно [4, с. 27], $P(a)$ и $P(a_1,\ldots,a_n)$ описывают некоторое положение дел, но не выражают акт утверждения. Запись суждения, утверждения изображается в виде $\theta P(a)$ и $\theta P(a_1,\ldots,a_n)$. Таким образом, $P(a)$ обозначает не истинностное значение, а некоторое событие.

Существующие в логике взгляды на соотношение событий и ситуаций (концепция Ф.Рамсея, трактовка Б.Расселом факта как принципиально не именующего, классификация видов значений К.И.Льюиса) не позволяют однозначно связывать события и ситуации. В частности, сам Р.Сушко [8] предложил теорию реификации ситуаций, устанавливающую связь между событиями и ситуациями на основе понимания событий как особого рода абстрактных предметов, являющихся результатом гипостазирования ситуаций. Подобная концепция приводит к онтологической первичности ситуации по отношению к событиям.

Для системы комбинированной логики с принципом Сушко можно построить ситуационную семантику типа семантики Р.Вуйцицкого [2], если принять концепцию события как совокупности не возможных миров, но совокупности ситуаций, т. е. понимать тождество событий так, что события определяются ситуациями, в которых они имеют место. И если, в случае принятия принципа Фреге, мы умозаключаем от акта утверждения к положению дел, то в случае принятия принципа Сушко мы умозаключаем от положения дел к акту утверждения, т.е. онтологический аспект является решающим.

Прежде чем двигаться дальше, приведем формулировку комбинированной логики В.А.Смирнова. Согласно [4, с. 27-28], язык комбинированного исчисления высказываний и событий выглядит следующим образом. Буквы p, q, …, возможно с индексами, суть событийные переменные. Событийные переменные суть термы. Если a и b — термы, то $(a \cap b)$, $(a \cup b)$, $\sim a$ суть термы. Если a - терм, то θa есть формула; если α и β - формулы, то $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\neg \alpha$ суть формулы. θa есть утверждение, говорящее, что имеет место событие a. Выражения типа $\theta p \rightarrow p$, $\theta p \cap \theta q$ не являются правильно построенными выражениями.

Семантика описывается с помощью модельной пары <W,П>, где W – множество возможных миров, а П - семейство всех его подмножеств. Пусть φ - функция, приписывающая каждой переменной значение из П. Функция φ распространяется на все термы, т. е. выполняет все следующие условия:

$\varphi(a \cap b) = \varphi a \cap \varphi b,$

$\varphi(a \cup b) = \varphi a \cup \varphi(a \cap b) = \varphi a \cap \varphi b,$

$\varphi(\neg a) = \sim \varphi(a).$

Будем использовать одни и те же знаки в объектном языке и метаязыке.

Понятие истинности формулы относительно приписывания значений свободной переменной определяется следующим образом:

$w \models_{\varphi} \theta a \Leftrightarrow w \in \varphi(a)$

(событие имеет место, истинно в данном мире, если и только если (е.т.е.) этот мир принадлежит событию, поскольку событие рассматривается как множество возможных миров).

Понятие истинности стандартным образом распространяется на все формулы:

$w \models_{\varphi} \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow w \models_{\varphi} \alpha \wedge w \models_{\varphi} \beta,$

$w \models_{\varphi} \alpha \vee \beta \Leftrightarrow w \models_{\varphi} \alpha \vee w \models_{\varphi} \beta,$

$w \models_{\varphi} \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \neg w \models_{\varphi} \alpha \vee w \models_{\varphi} \beta,$

$w \models_{\varphi} \neg \alpha \Leftrightarrow \neg w \models_{\varphi} \alpha.$

Стандартным образом определяя понятие общезначимости, В.А.Смирнов аксиоматизирует следующим образом класс общезначимых формул системы **CM** – комбинированного исчисления с внешней классической и внутренней де моргановской частями:

B0. Схемы аксиом классического пропозиционального исчисления.

B1. $\theta(a \cap b) \leftrightarrow \theta a \wedge \theta b,$

B2. $\theta(a \cup b) \leftrightarrow \theta a \vee \theta b,$

B3. $\theta\text{\textasciitilde}(a\cap b) \leftrightarrow \theta\text{\textasciitilde}a \vee \theta b$,

B4. $\theta\text{\textasciitilde}(a\cup b) \leftrightarrow \theta\text{\textasciitilde}a \wedge \theta\text{\textasciitilde}b$,

B5. $\theta\text{\textasciitilde\textasciitilde}a \leftrightarrow \theta a$.

Единственным правилом вывода является правило модус поненс.

Неудобство использования семантики событий и правомерность перехода к ситуационной семантике становятся более понятными, если рассматривать системы слабее **CM**. Дело в том, что в общем случае мы можем ограничиться принятием для внутренней логики лишь обычной аксиомы $a = a$, обычных правил $\dfrac{a = b}{b = a}, \dfrac{a = b \;\; b = c}{a = c}$, описывающих свойства тождества событий, и правилом

$$\frac{a_1 = b_1, \ldots, a_{s(i)} = b_{s(i)}}{R_i(a_i, \ldots, a_{s(i)}) \to R_i(b_i, \ldots, b_{s(i)})}, i = 1, \ldots, m,$$

описывающим подстановочные свойства термов-событий. Но, согласно подходу Смирнова, $R_i(a_i, \ldots, a_{s(i)})$ будет не формулой, но сентенциальным термином, и поэтому последняя аксиома не может быть принята. В этом случае предложением *ad hoc* могут быть правила

$$\frac{\theta(a = b)}{\theta a \leftrightarrow \theta b}, \frac{\theta(a_1 = b_1), \ldots, \theta(a_{s(i)} = b_{s(i)})}{\theta R_i(a_1, \ldots, a_{s(i)}) \to \theta R_i(b_1, \ldots, b_{s(i)})}, i = 1, \ldots, m,$$

аксиома $\theta(a = a)$ и правила $\dfrac{\theta(a = b)}{\theta(b = a)}, \dfrac{\theta(a = b) \;\; \theta(b = c)}{\theta(a = c)}$, которые трудно интерпретировать в рамках рассмотренной В.А.Смирновым семантики возможных миров для комбинированной логики.

Для описания семантики подобной комбинированной логики мы воспользуемся ситуационной семантикой Р.Вуйцицкого системы ограниченной не-фрегевской логики **R-NFL** [2]. Понятие ситуации в модельной структуре $\mathbf{M}=(\mathbf{U},\mathbf{R}_1,\ldots,\mathbf{R}_n)$ здесь описывается следующим образом:

(s1) Пусть i=0,1,...,m и пусть $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{s(i)} \in \mathbf{U}$. Тогда $(\mathbf{R}_i,\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{s(i)})$ и (*не*-$\mathbf{R}_i,\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{s(i)}$) являются элементарными ситуациями в **M**.

(s2) Если для каждого $t \in \mathrm{T}$ Σ_t есть непустое множество элементарных ситуаций в **M**, то $\{\Sigma_t: t \in \mathrm{T}\}$ является ситуацией в **M**.

(s3) Если s_1 и s_2 – ситуации в **M**, то $(=,s_1,s_2)$ и $(\neq,s_1,s_2)$ являются элементарными ситуациями в **M**.

(s4) Ничто другое не является ни ситуацией, ни элементарной ситуацией.

Если дана подобная модель, то будем обозначать посредством L_U язык, который получается добавлением имен a, a_1, a_2,... для элементов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$,... универсума **U** из **M.** Функция D из множества всех предложений L_U в класс всех ситуаций называется **R-NFL**-допустимой интерпретацией, если и только если (е. т. е.) выполняются следующие условия:

(i) $D(R_i(a_1,...,a_{s(i)}))$ есть факт, е. т. е. $\mathbf{R}_i(\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_{s(i)})$, где $i=0,1,...,n$; $\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_{s(i)}\in\mathbf{U}$;

(ii) $D(\alpha\wedge\beta)$ есть факт, е. т. е. $D(\alpha)$ и $D(\beta)$ - факты;

(iii) $D(\alpha\vee\beta)$ есть факт, е. т. е. хотя бы одна из ситуаций $D(\alpha)$ и $D(\beta)$ есть факт;

(iv) $D(\alpha\rightarrow\beta)$ есть факт, е. т. е. неверно, что $D(\alpha)$ - факт, а $D(\beta)$ не факт;

(v) $D(\alpha\leftrightarrow\beta)$ есть факт, е. т. е. либо $D(\alpha)$ и $D(\beta)$ - факты, либо $D(\alpha)$ и $D(\beta)$ не факты;

(vi) $D(\neg\alpha)$ есть факт, е. т. е. $D(\alpha)$ не факт;

(vii) $D(\forall x\alpha)$ есть факт, е. т. е. для всех $\boldsymbol{a}\in\mathbf{U}$ фактами являются $D(\alpha(a/x))$;

(viii) $D(\exists x\alpha)$ есть факт, е. т. е. для некоторого $\boldsymbol{a}\in\mathbf{U}$, $D(\alpha(a/x))$ есть факт;

(ix) $D(\alpha\equiv\beta)$ есть факт, е. т. е. $D(\alpha)=D(\beta)$;

(x) $D(\alpha(a/x))=D(\beta(a/x))$, если $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

Поскольку в семантике возможных миров интерпретацией $R_i(a_i,...,a_{s(i)})$ будет событие, то, следуя ситуационной семантике Р.Вуйцицкого, мы получаем ситуационную трактовку сентенциальных термов, т. е. мы говорим, что $(R_i,a_i,...,a_{s(i)})$ является ситуацией, такой, что $\mathbf{R}_i(\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_{s(i)})$,. Более того, $a=b$ очевидным образом также будет сентенциальным термом и, следовательно, может пониматься как элементарная ситуация. Конечно, переход к ситуационной семантике не означает отмены интерпретации в возможных мирах: мы всегда можем перейти к возможным мирам, рассматривая их как предельно большие ситуации.

Заметим, что для большей корректности нашего не-фрегевского подхода вместо рассматриваемых правил нам следует принять следующие правила:

$$\frac{\theta(a=b)}{\theta a \leftrightarrow \theta b \;\; \theta \sim a \leftrightarrow \theta \sim b},$$

$$\frac{\theta(a_1=b_1),\ldots,\theta(a_{s(i)}=b_{s(i)})}{\theta R_i(a_1,\ldots,a_{s(i)}) \to \theta R_i(b_1,\ldots,b_{s(i)})\theta \sim R_i(a_1,\ldots,a_{s(i)}) \to \theta \sim R_i(b_1,\ldots,b_{s(i)})}$$

$i=1,\ldots m$, где $\sim$ есть внутреннее отрицание, т. е. $\sim(R_i, a_i,\ldots,a_{s(i)})$ означает *не*$-(R_i, a_i,\ldots,a_{s(i)})$. Это следует из принимаемой Смирновым концепции тождества событий, как определяющихся не только возможными мирами, в которых они имеют место, но и возможными мирами, в которых они не имеют места.

Поскольку версия ситуационной семантики, предложенная Вуйцицким, предполагает, что каждое множество Σ элементарных ситуаций совпадает с ситуацией {Σ}, и наоборот, то, в сущности, различие между ситуациями и событиями исчезает: мы всегда в состоянии сопоставить соответствующую ситуацию нашему событию, совпадающему с множеством ситуаций (т. е. наш универсум ситуаций представляет собой транзитивное множество). Следовательно, список условий стандартной интерпретации для ситуационной семантики должен быть дополнен следующим пунктом:

$D(\theta R_i(a_i,\ldots,a_{s(i)}))$ *есть факт всякий раз, когда* $\mathbf{R}_i(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{s(i)})$.

Покажем, что при подобной интерпретации справедлив принцип Сушко, чего нет при интерпретации в возможных мирах. Действительно, событийная интерпретация данного правила дает нам следующее:

$\forall\varphi\forall w(w \models_\varphi \theta a \Leftrightarrow w \models_\varphi \theta b)$,

$\forall\varphi\forall w(w\in\varphi(a) \Leftrightarrow w\in\varphi(b))$,

$\forall\varphi(\varphi(a) = \varphi(b))$.

Однако подобное доказательство проходит и в обратную сторону, т. е. на самом деле мы получаем правило $\dfrac{\theta a \leftrightarrow \theta b}{a=b}$.

В ситуационной семантике очевидным образом выполняются следующие условия:

$D(a=b)$ есть факт, е. т. е. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,

$D(\theta a)$ есть факт, е. т. е. $\boldsymbol{a}\in\mathbf{U}$.

Отсюда ситуационная интерпретация принципа Сушко дает нам

$D(a=b) \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,

$\{\boldsymbol{a}\} = \{\boldsymbol{b}\}$,

$\boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{a}\} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{b}\}$,

$\boldsymbol{x}\in\mathbf{U} \Rightarrow (\boldsymbol{a}\in\mathbf{U} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}\in\mathbf{U})$,

$D(\theta a)$ есть факт $\Leftrightarrow D(\theta b)$ есть факт.

В обратную же сторону подобное рассуждение не проходит. Поскольку мы имеем вдобавок ($\boldsymbol{a}\notin\mathbf{U} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}\notin\mathbf{U}$), то справедлив и расширенный вариант принципа Сушко, приведенный выше в виде $\dfrac{\theta(a=b)}{\theta a \leftrightarrow \theta b\ \ \theta\sim a \leftrightarrow \theta\sim b}$. Нетрудно убедиться в справедливости и следующего за ним правила.

Развивая наш подход, мы можем использовать упорядочение ситуаций типа упорядочения в формальной онтологии ситуаций Б.Вольневича [9], когда $a\leq b$ означает “a вовлечена в b”, и принять слабый принцип Сушко в форме правила

$$\frac{\theta(a \leq b)}{\theta b \to \theta a\ \ \theta\neg a \to \theta\neg b}$$

или

$$\frac{\theta(a_1 \leq b_1),\ldots,\theta(a_{s(i)} \leq b_{s(i)})}{\theta R_i(b_1,\ldots,b_{s(i)}) \to \theta R_i(a_1,\ldots,a_{s(i)})\theta\neg R_i(a_1,\ldots,a_{s(i)}) \to \theta\neg R_i(b_1,\ldots,b_{s(i)})}$$

$i=1,\ldots m$. Помимо этого, вводим аксиому обычного типа $\theta(a \leq a)$ и правило $\dfrac{\theta(a\leq b)\ \ \theta(b\leq c)}{\theta(a\leq c)}$.

Однако семантически это означает принятие упорядоченного универсума, поскольку приводит к условию $\boldsymbol{a}\leq\boldsymbol{b}$, и возникает вопрос о смысле этого упорядочения. Можно попытаться воспользоваться предложением из работы [1] и прибегнуть к экспликации мейнонговского типа: связывать с каждым элементом универсума множество ситуаций, в которых он “участвует”. Это предполагает существование функции SD^{-1}:$\mathbf{U}\to\boldsymbol{P}(\mathbf{S})$ из универсума во множество подмножеств ситуаций. Тогда можно потребовать, чтобы $\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{y}$ влекло $SD^{-1}(\boldsymbol{x})\in SD^{-1}(\boldsymbol{y})$, и наоборот.

С другой стороны, вместо равенства ситуаций мы получаем теперь лишь их упорядоченность по отношению $\in$ (это следует из (s2)). Таким образом, нам требуется теперь выполнимость условия

$D(a \leq b)$ есть факт, е. т. е. $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{b}$.

Как следствие, мы рассуждаем теперь следующим образом:

$D(a \leq b) \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{b}$,

$\{\boldsymbol{a}\} \subseteq \{\boldsymbol{b}\}$,

$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{a}\} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{b}\}$,

$\boldsymbol{x} \in \mathbf{U} \Rightarrow (\boldsymbol{b} \in \mathbf{U} \Rightarrow \boldsymbol{a} \in \mathbf{U})$,

$D(\theta b)$ есть факт $\Rightarrow D(\theta a)$ есть факт.

Поскольку по контрапозиции ($\boldsymbol{a} \notin \mathbf{U} \Rightarrow \boldsymbol{b} \notin \mathbf{U}$), то отсюда мы получаем выполнимость слабого принципа Сушко.

Заметим, что аксиома $\theta(a \leq a)$ при принятой интерпретации приводит к циркулярности множества ситуаций и, как следствие, к его нефундируемости (см. [6, с. 192]). Последнее обстоятельство можно истолковать как необходимость использования нестандартных теоретико-множественных построений для описания структуры ситуаций, что значительно усложняет ситуационную семантику.

В каком-то смысле рассматриваемые системы кажутся чересчур аморфными в отношении ситуационных аспектов, поскольку мы не накладываем никаких ограничений на структуру ситуаций. С одной стороны это приводит к случайности ситуационных связей, а с другой стороны – к отсутствию уверенности, что мы имеем дело с онтологическим упорядочиванием ситуаций (можно предположить, что принятое упорядочение является лишь следствием нашего восприятия ввиду подразумеваемого смысла θ-оператора).

Чтобы преодолеть эти трудности, обратимся к Обобщенной комбинированной логике предложений и событий В.А.Смирнова [5, с. 23]. В языке этого исчисления имеется оператор [-], такой, что если α является формулой, то $[\alpha]$ будет сентенциальным термом. Используя подобный оператор, мы обогащаем нашу систему за счет аксиомы

$\theta[\alpha] \leftrightarrow \alpha$.

Как следствие, мы получаем вспомогательные правила $\dfrac{\theta([\alpha] \leq [b])}{\beta \to \alpha}$ и $\dfrac{\theta([\alpha] = [b])}{\alpha \leftrightarrow \beta}$. В некотором смысле последнее правило можно считать действительно “не-фрегевским”: если принять, что $[\alpha]$ дает нам референт высказывания α, то мы получаем, что кореферентность формул (в данном случае тождественность положений дел) влечет их логическую эквивалентность.

Список условий допустимой интерпретации теперь пополняется следующим пунктом:

$$[\alpha]=\{D(\alpha):D(\alpha)\ \textit{есть факт}\}.$$

Попросту говоря, мы сопоставляем каждой формуле множество всех отвечающих ей фактических ситуаций при данной допустимой интерпретации – максимальный факт. Заметим, тем не менее, что мы все еще нуждаемся в аксиоме $\theta(a \leq a)$ и правиле $\dfrac{\theta(a \leq b)\ \theta(b \leq c)}{\theta(a \leq c)}$, поскольку соответствующие утверждения все еще не становятся необязательными условиями структуры ситуационной алгебры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васюков В. Л.* Пост-Трактатная онтология и не-фрегевская логика // Тезисы международной конференции “Развитие логики в России: итоги и перспективы”. М., 1997. С. 25-28.
2. *Вуйцицкий Р.* Формальное построение ситуационной семантики // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С. 5-26.
3. *Смирнов В. А.* Утверждение и предикация. Логика высказываний и логика событий // Нестандартные семантики неклассических логик. М., 1986.
4. *Смирнов В. А.* Утверждение и предикация. Комбинированное исчисление высказываний и событий // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С. 27-35.
5. *Смирнов В. А.* Комбинированные исчисления предложений и событий и логика времени фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. М., 1989. С. 16-29.
6. *Barwise J.* The Situation in Logic. Stanford: CSLI, 1989.
7. *Smirnov V. A.* Internal and External Logics // Bulletin of the Section of Logic, 17 (3/4) (1988), pp. 170-181.
8. *Suszko R.* Reifikacja sytuacji // Studia Filozoficzne, № 2, 1971
9. *Wolniewicz B.* A Formal Ontology of Situations // Studia Logica XLI (1981), pp. 381-413.

М.И. Бежанишвили

ОБ ОДНОМ ЧАСТИЧНО ИНТЕРПРЕТИРУЕМОМ ТАБЛИЧНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Abstract. *The aim of the article is to construct and investigate a version of tableaux calculus for a partially interpreted first order predicate logic (with one epistemic modal operator). No pure classical tautologies are provable in it. Take into account the other its peculiarities, we will be able to obtain its type free extension and newly examine the logistic thesis this time on the ground of epistemic logic.*

Целью работы является построение и исследование версии табличного исчисления в стиле Фиттинга (ср.[4]) для частично интерпретируемой логики предикатов первого порядка **E4**, которая была семантически описана в [1]. Логика **E4** родственна трехзначному исчислению Д.Бочвара (ср. [2]). Как и в последнем, в ней не верна ни одна не содержащая неклассического оператора классическая тавтология, она также позволяет формально выразить бессмысленность некоторых парадоксальных выражений. Если учтем и другие сходные особенности, мы сможем расширить **E4** без введения типовых ограничений, допуская возможность появления некоторых формул и предикатных букв на местах индивидных переменных и, несмотря на это, исключить возможность возникновения логических и семантических антиномий.

Алфавит E4 содержит неограниченные списки индивидных переменных **Ind**, n-арных (n≥0) предикатных букв **Prd**, логические связки для отрицания и дизъюнкции: $\neg$ и $\vee$, квантор существования: $\exists$ и модальный оператор знания: $\Box$ (читается: "известно, что"). Множества формул **Frm**, атомарных формул **Atm**, а также свободные и связанные вхождения индивидных переменных в формулу определяются обычно. В случае надобности, можно стандартно ввести в виде сокращений знаки конъюнкции, импликации, эквиваленции и квантор всеобщности: $\wedge$, $\supset$, $\equiv$ и $\forall$. Знаки кондиционала, бикондиционала, равнозначности и бессмысленности: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\approx$ и $\downarrow$, вводятся с помощью следующих определений:

$A\rightarrow B = \Box A\supset\Box B$,

$A\leftrightarrow B=(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$,

$A\approx B=(A\leftrightarrow B)\wedge(\neg A\leftrightarrow\neg B)$,

$\downarrow A=\neg\Box A\wedge\neg\,\neg A$.

Семантика. **E4**-фреймом является упорядоченная тройка **Fr=<H,R,D>**, где **H** – непустое множество (частичных возможных миров), $\mathbf{R}\subseteq\mathbf{H}\times\mathbf{H}$, причем **R** рефлексивно и транзитивно, а **D** – функция областей, определенная на **H**, такая, что $\mathbf{D(v)}\neq\varnothing$ для $\mathbf{v}\in\mathbf{H}$, и

(d) если $(\mathbf{v}, \mathbf{u})\in\mathbf{R}$, то $\mathbf{D(v)}\subseteq\mathbf{D(u)}$, $\mathbf{v}, \mathbf{u}\in\mathbf{H}$.

E4-моделью будем называть пару **<Fr,V>**, где **Fr** – **E4**-фрейм, а **V** – бинарная частичная функция из **AtmrH** в $\{\mathrm{T}, \perp\}$, такая, что для любых $P^n\in\mathbf{Prd}$ и **vOH**, если n=0, то $\mathbf{V}(P^n,\mathbf{v})$=T или $\perp$ или ни T, ни $\perp$. В первых двух случаях будем говорить, что **V** определена для P^n, **v** и писать $!\mathbf{V}(P^n, \mathbf{v})$, а в третьем случае – что **V** не определена для P^n, **v** и писать $!\mathbf{V}(P^n, \mathbf{v})$. Если же n>0, то $\mathbf{V}(P^n, \mathbf{v})$ есть пара **(P;Q)**, такая, что $\mathbf{P}, \mathbf{Q}\subseteq[\mathbf{D(v)}]^{\mathbf{n}}$ и $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}=\varnothing$, где $[\mathbf{D(v)}]^{\mathbf{n}}$ – n–кратное декартово произведение множества **D(v)** на себя.

Пусть $\mathbf{U}=\cup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}}\mathbf{D(v)}$. Если задана **E4**-модель **M**, мы для каждой формулы A и каждого $\mathbf{v}\in\mathbf{H}$ сможем найти значение T или $\perp$ при данном сопоставлении элементов множества **U** индивидным переменным из списка **Ind**, входящим в A, в случае, когда $!\mathbf{V}(A,\mathbf{v})$.

Если $A\in\mathbf{Atm}$, то A совпадает с $P^0\in\mathbf{Prd}$ или имеет вид $P^n(x_1,\ldots,x_n)$, n>0. В первом случае $\mathbf{V}(P^n,\mathbf{v})$ уже задана моделью. Во втором случае предположим, что $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ из **U** сопоставляются соответственно индивидным переменным $x_1,\ldots,x_n$ и пусть $\mathbf{V}(P^n,\mathbf{v})$ есть пара **(P;Q)**. При таком сопоставлении $\mathbf{V}(P^n(x_1,\ldots,x_n),\mathbf{v})=\mathrm{T} \Leftrightarrow (\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)\in\mathbf{P}$; $\mathbf{V}(P^n(x_1,\ldots,x_n),\mathbf{v})=\perp \Leftrightarrow (\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)\in\mathbf{Q}$; в противном случае, не $!\mathbf{V}(P^n(x_1,\ldots,x_n), \mathbf{v})$.

На произвольные формулы из **Frm V** индуцируется следующим образом: для всех A , $B\in\mathbf{Frm}$ и $\mathbf{v}\in\mathbf{H}$ при данном сопоставлении элементов $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$, из **U** свободным индивидным переменным $x_1,\ldots x_n$, входящим в A и B.

$\mathbf{V}(\neg A,\mathbf{v})=\mathrm{T} \Leftrightarrow \mathbf{V}(A,\mathbf{v})=\perp$; $\mathbf{V}(\neg A,\mathbf{v})=\perp \Leftrightarrow \mathbf{V}(A,\mathbf{v})=\mathrm{T}$; в противном случае не $!\mathbf{V}(\neg A,\mathbf{v})$.

$\mathbf{V}(A\vee B,\mathbf{v})=\mathrm{T} \Leftrightarrow \mathbf{V}(A,\mathbf{v})=\mathrm{T}$ или $\mathbf{V}(B,\mathbf{v})=\mathrm{T}$; $\mathbf{V}(A\vee B,\mathbf{v})=\perp \Leftrightarrow \mathbf{V}(A,\mathbf{v})=\mathbf{V}(B,\mathbf{v})=\perp$, в противном случае не $!\mathbf{V}(A\vee B,\mathbf{v})$.

$\mathbf{V}(\Box A,\mathbf{v})=\mathrm{T} \Leftrightarrow$ для всякого $\mathbf{u}\in\mathbf{H}$, такого, что $(\mathbf{v},\mathbf{u})\in\mathbf{R}$, $\mathbf{V}(A,\mathbf{u})=\mathrm{T}$ и $\mathbf{V}(\Box A,\mathbf{v})=\perp$ в противном случае (т.е. когда $\mathbf{V}(A,\mathbf{u})\neq\mathrm{T}$ для некоторого **u**, такого, что $(\mathbf{v},\mathbf{u})\in\mathrm{P}$).

$\mathbf{V}(\exists yA(x_1,\ldots,x_n,y),\mathbf{v})=\mathrm{T} \Leftrightarrow$ существует $\mathbf{b}\in\mathbf{D(v)}\subseteq\mathrm{Y}$, такой, что $\mathbf{V}(A(x_1,\ldots,x_n,y),\mathbf{v})=\mathrm{T}$, в случае, когда при том же сопоставлении элементов $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ из **U** переменным $x_1,\ldots x_n$, **b** сопоставляется переменной y. $\mathbf{V}(\exists yA(x_1,\ldots,x_n,y),\mathbf{v})=\perp \Leftrightarrow \mathbf{V}(A(x_1,\ldots,x_n,y),\mathbf{v})=\hat{}$, когда при том же сопоставлении элементов $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ из **U** переменными $x_1,\ldots x_n$, переменной y сопоставляется любой элемент $\mathbf{b}\in\mathbf{D(v)HU}$; в противном случае не $!\mathbf{V}(\exists yA(x_1,\ldots,x_n, y),\mathbf{v})$.

Истинность в модели, в фрейме и общезначимость в классе фреймов **E4** определяются обычно.

Теория доказательств. Пусть ~**Frm** – множество всех меченых знаком "~" формул из **Frm**. Таблицей будем называть некоторое подмножество множества **Frm**∪~**Frm**, альтернативной системой таблиц – упорядоченное в виде дерева множество таблиц, а диаграммой – множество альтернативных систем таблиц. В каждой такой системе S одна из таблиц (а именно, начало дерева) является главной. Остальные таблицы S вспомогательны. Притом как главная, так и вспомогательная таблицы из S могут быть альтернативными напарницами таблиц, принадлежащих другим альтернативным системам.

Составление диаграммы мы начинаем включением ~*A* в главную таблицу. А затем продолжаем построение согласно следующим пропозициональным правилам:

$$\mathrm{NN}\ \frac{A,\ \neg\neg A}{A,\ \neg\neg A,\ A},\qquad \mathrm{\sim NN}\ \frac{A,\ \sim\neg\neg A}{A,\ \sim\neg\neg A,\ \sim A},$$

$$\mathrm{ND}\ \frac{A,\ \neg(A\vee B)}{A,\ \neg(A\vee B),\ \neg A,\ \neg B},\qquad \mathrm{\sim D}\ \frac{A,\ \sim(A\vee B)}{A,\ \sim(A\vee B),\ \sim A,\ \sim B},$$

$$\mathrm{D}\ \frac{A,\ (A\vee B)}{A,\ (A\vee B),\ A\ \mid\ A,\ (A\vee B),\ BA},\qquad \mathrm{\sim ND}\ \frac{A,\ \sim\neg(A\vee B)}{\sim\neg(A\vee B),\ \sim\neg A\ \mid\ A,\ \sim\neg(A\vee B),\ \sim\neg B},$$

$$\mathrm{\sim K}\ \frac{A,\ \sim\Box A}{A,\ \neg\Box A},\qquad \mathrm{\sim NK}\ \frac{A,\ \sim\neg\Box A}{A,\ \neg\neg\Box A},$$

$$\mathrm{K}\ \frac{A,\ \Box A}{A_{\Box},\ A},\qquad \mathrm{NK}\ \frac{A,\ \neg\Box A}{A_{\Box},\ \sim A}$$

и кванторным правилам:

$$\mathrm{\sim E}\ \frac{\Gamma,\ \exists x A(x)}{\Gamma,\ \exists x A(x),\ A(y)},\qquad \mathrm{\sim NE}\ \frac{\Gamma,\ \sim\neg\exists x A(x)}{\Gamma,\ \sim\neg\exists x A(x),\ \sim\neg A(y)},$$

$$\mathrm{NE}\ \frac{\Gamma,\ \neg\exists x A(x)}{\Gamma,\ \neg\exists x A(x),\ \neg A(z)},\qquad \mathrm{\sim E}\ \frac{\Gamma,\ \sim\exists x A(x)}{\Gamma,\ \sim\exists x A(x),\ \sim A(z)}.$$

где $\Gamma\subseteq$(**Frm**$\cup$~**Frm**), $\Gamma_{\Box}=\{\Box B{:}\Box B\subseteq\Gamma\}$, $x,y,z\in$**Ind**, причем y – новая, еще не втречающаяся ни в одной таблице переменная, z – каждая уже использованная переменная, и $A,B,A(x)\in$**Frm**. При этом вместо $\Gamma\cup\{A\}$ мы просто пишем Γ, A. Элементы множества **Frm**$\cup$~**Frm** в дальнейшем будем называть выражениями.

Пропозициональные правила: NN, ~NN, ND, ~D, K, ~K, ~NK, а также все кванторные правила предписывают заменить в таблице t множество выражений, находящееся выше горизонтальной черты правила, множеством выражений, находящимся ниже его черты. Правило NK предписывает из тыблицы t, содержащей множество выражений, находящееся выше горизонтальной черты правила, открыть новую таблицу t', такую, что (t,t')OR, и поместить в t' множество выражений, находящееся ниже его горизонтальной черты. Наконец, правила D и ~ND предписывают, исходя из таблицы tOS, содержащей множество выражений, находящееся выше горизонтальной черты правила, составить новую альтернативную систему таблиц S'= (S\{t})$\cup$\{t'\}, где множество выражений, находящееся выше горизонтальной черты правила, заменено в t множеством выражений, находящимся ниже горизонтальной черты правила с левой стороны, а в t' – с правой стороны. t$\in$S и t'$\in$S' называются альтернативными напарницами друг друга.

Таблица тривиально замкнута, если она содержит некоторую формулу B вместе с $\neg B$ или вместе с $\sim B$. Таблица замкнута, если она тривиально замкнута или находится в отношении R хотя бы с одной замкнутой таблицей. Альтернативная система таблиц замкнута, если замкнута ее главная таблица. **E4** – диаграммой для A будем называть множество всех альтернативных систем таблиц с главной таблицей, содержащей исходную меченую формулу $\sim A$ (в контрмодели, если последняя существует, это будет означать, что A не истинна, т.е. ложна или неопределена). **E4** – диаграмма для A замкнута, если замкнуты все ее альтернативные системы таблиц. В противном случае, она открыта.

Оставляя здесь открытым вопрос об аксиоматизации гильбертовского типа логики **E4,** замкнутую диаграмму для формулы A, следуя Фиттингу (ср. [4]), будем называть доказательством A. Будем также говорить, что A является доказуемой в табличном исчислении **E4** или теоремой **E4** (и писать $\vdash$A), если существует замкнутая диаграмма для A.

В [1] были установленны некоторые семантические особенности логики **E4** и ее связь с другими системами. Здесь мы покажем, что табличное исчисление **E4** является корректным и полным, а его пропозициональный фрагмент – разрешимым.

Корректность. Подмножество t множества **Frm**$\cup$~**Frm** будем называть реализуемым, если существует **E4** - модель **M=<H,R,D,V>** и **v**$\in$**H**, такие, что при некотором сопоставлении элементов **U** свободным индивидным переменным формулы A в **v**

истинна каждая формула из t, принадлежащая **Frm**, и в **v** не истинна (т.е. неопределена или ложна) каждая формула из t, находящаяся слева знака "~". Очевидно, что ни одна тривиально замкнутая таблица и, следовательно, ни одна замкнутая диаграмма не может быть реализуемой.

Нетрудно также проверить, что все наши правила построения таблиц сохраняют реализуемость. Другими словами, всякий раз, когда реализуемы множества формул, находящиеся выше горизонтальной черты этих правил, реализуемы и множества формул, находящиеся ниже горизональной черты.

Рассмотрим, к примеру, правило NK и предположим, что реализуемо множество формул $\{\Gamma, \neg\Box A\}$. Тогда существует модель **<H,R,D,V>** и **v**$\in$**H** такие, что для некоторого сопоставления элементов **U** всем свободным идивидным переменным формулы A, в v истинны все немеченые формулы из Γ, а также $\neg\Box A$ и не истинна ни одна меченая формула из Γ. Истинность $\neg\Box A$ означает, что существует **v**$\in$**H,** такой, что **(v,u)**$\in$**R** и в **u** не истинна A при том же сопоставлении элементов **U** свободным индивидным переменным формулы A (**D(v)**$\subseteq$**D(u)**). Но тогда **<H,R,D,V>** и **v**$\in$**H** реализуют множество формул $\{\Gamma\Box, \sim A\}$, поскольку $\Gamma\Box \subseteq \Gamma$ и, ввиду транзитивности **R**, все формулы из $\Gamma\Box$ истинны и в **u**.

Аналогично можно убедиться, что наши остальные правила также сохраняют реализуемость.

ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ. Если $\vdash A$ в табличном исчислении **E4**, то A общезначима в классе фреймов **E4.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим справедливость контрапозиции нашего утверждения. В самом деле, предположим, что A не общезначима в классе фреймов **E4**. В таком случае, существуют **E4** – модель **<H,R,D,V>** и **v**$\in$**H**, такие, что в **v** не истинна A при некотором сопоставлении элементов **U** свободным индивидным переменным формулы A. Но тогда реализуема главная таблица **E4** –диаграммы с исходным выражением $\sim A$. С другой стороны, мы убедились, что наши правила построения таблиц сохраняют реализуемость. Поэтому диаграмма с исходным выражением $\sim A$ не может быть замкнутой и, следовательно, A не может быть доказуемой в табличном исчислении **E4**.

Полнота. Если диаграмма для A не замкнута, не замкнута, по крайней мере, одна из ее альтернативных систем таблиц. Значит, не замкнута главная таблица такой системы с исходной меченой формулой $\sim A$. Но тогда не замкнута ни одна из ее вспомогательных таблиц. Выберем одну такую открытую альтернативную систему таблиц S. Множество **S** частично упорядочено отношением R между таблицами, являющимся рефлексивным и транзитивным. С помощью **S** и R следующим образом определим фрейм $\mathbf{F_0}$= **<H,R,D>.**

Пусть θ – взаимно-однозначная функция, отображающая S на **H**, такая, что если
$t_1, t_2 \in S$, $\mathbf{v_1}=\theta(t_1)$ и $\mathbf{v_2}=\theta(t_2)$, то $(\mathbf{v_1 v_2})\in\mathbf{R}$, е. и т. е. $(t_1,t_2)\in R$.

Остается определить функцию областей **D** для $\mathbf{F_0}$. Каждой таблице t из **S** сопоставимо множество $Y_t \subseteq \mathbf{Ind}$, не пересекающееся с сопоставленными другим таблицам множествами. Если t – главная и $\mathbf{v}=\theta(t)$, то $\mathbf{D(v)}=X\cup X_t$, где X – множество всех свободных индивидных переменных исходной меченой формулы $\sim A$ из t, а $X_t\subseteq Y_t\subseteq \mathbf{Ind}$. Если A не содержит ни свободных индивидных переменных, ни кванторов, то $\varnothing\neq\mathbf{D(v)}=X_t\subseteq Y_t$. Пусть, далее, $s,t\in S$, $\mathbf{v}=\theta(s)$, $\mathbf{u}=\theta(t)$, $(\mathbf{v},\mathbf{u})\in\mathbf{R}$ и предположим, что мы уже определили $\mathbf{D(v)}$. Тогда $\mathbf{D(u)} = \mathbf{D(v)}\cup X_t$, где $X_t\subseteq Y_t$; если t не содержит ни одной формулы с кванторами, X_t – произвольное подмножество множества Y_t. Для всякого $\mathbf{v}=\theta(t)$ и соответствующей таблицы t, в построении которой используются кванторные правила E, ~NE, X_t является множеством всех новых переменных, вводимых согласно этим правилам из Y_t. Очевидно, что условие (d) функции областей **D** всегда будет соблюдаться, поскольку если $(\mathbf{v},\mathbf{u})\in\mathbf{R}$, то $\mathbf{D(v)}\subseteq\mathbf{D(v)}\cup X_u = \mathbf{D(u)}$.

Теперь, **E4** - модель $\mathbf{M_0}$ можно определить как пару $<\mathbf{F_0},\mathbf{V_0}>$, где $\mathbf{F_0}$ – вышеописанный фрейм, а $\mathbf{V_0}$ – бинарная частичная функция из $\mathbf{Atm}\times\mathbf{H}$ в $\{T,\wedge\}$, которая с каждой таблицей t из S связана следующими условиями.

Пусть $\mathbf{v}=\theta(t)$, $t\in S$. Если n=0, $\mathbf{V_0}(P^n, \mathbf{v})=T$, если t содержит P^n; $\mathbf{V_0}(P^n,\mathbf{v})=\perp$, если t содержит $\neg P^n$ и не $!\mathbf{V_0}(P^n,\mathbf{v})$, если t содержит одно из выражений $\sim P^n$ или $\sim\neg P^n$, причем в первом случае $\neg P^n$ не входит в **t**, а во втором, P^n не входит в **t** (в частности, не $!\mathbf{V_0}(P^n,\mathbf{v})$, если t содержит оба выражения $\sim P^n$ и $\sim\neg P^n$).

Если же n>0, мы полагаем, что $\mathbf{V_0}(P^n,\mathbf{v})=(\mathbf{P},\mathbf{Q})$, где $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}\subseteq[\mathbf{D(v)}]^{\mathbf{n}}$, $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}=\varnothing$ и $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{P}$, если t содержит $P^n(x_1,\dots,x_n)$; $(x_1,\dots,x_n)\notin\mathbf{P}$, если t содержит $\neg P^n(x_1,\dots,x_n)$; $(x_1,\dots,x_n)\notin\mathbf{P}$ и $(x_1,\dots,x_n)\notin\mathbf{Q}$, если t содержит одно из выражений $\sim P^n(x_1,\dots,x_n)$ или $\sim\neg P^n(x_1,\dots,x_n)$, причем, в первом случае, в t не входит

$\neg P^n(x_1,...,x_n)$, а во втором -- $P^n(x_1,...,x_n)$ (в частности, $(x_1,...,x_n)\notin \mathbf{P}$ и $(x_1,...,x_n)\notin \mathbf{Q}$, если t содержит оба выражения $\sim P^n(x_1,...,x_n)$ и $\sim\neg P^n(x_1,...,x_n)$).

Теперь можно показать, что если диаграмма для A не замкнута, $\mathbf{M_0}$ является опровергающей моделью для A. Рассмотрим объединение $\mathbf{U_0}$ всех $\mathbf{D(v)}$, где $\mathbf{v}=\theta(\mathrm{t})$, $\mathrm{t}\in \mathrm{S}$, и каждую формулу из любой таблицы S будем оценивать для сопоставления, при котором всякой ее свободной индивидной переменной соотносится одноименная переменная из $\mathbf{U_0}$, т.е. когда каждой свободной индивидной переменной мы в качестве объекта сопоставляем ту же самую переменную.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Если $\mathbf{M_0}$ – вышезаданная модель, то для всякой формулы B и всякой таблицы $\mathrm{t}\in \mathrm{S}$, при тождественном сопоставлении переменных из $\mathbf{U_0}$ всем свободным переменным B, $\mathbf{M_0}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) Если формула B входит в t, то $\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})=\mathrm{T}$,

2) Если формула $\neg B$ входит в t, то $\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})=\perp$,

3) Если выражение $\sim$ШB входит в t, то не $!\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})$ или $\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})=\mathrm{T}$,

4) Если выражение $\sim B$ входит в t, то не $!\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})$ или $\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})=\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем одновременной индукцией по числу входящих в B логических знаков.

Если $B\in \mathbf{Atm}$, справедливость условий 1) - 4) непосредственно следует из определения $\mathbf{V_0}$.

Предположим поэтому, что $B\notin \mathbf{Atm}$. Тогда B имеет один из следующих видов: $\neg C$, $C_1\vee C_2$, $\exists xC(x)$ или $\Box C$.

Пусть B имеет вид $\neg C$ и покажем, что утверждение 1) справедливо. Вновь воспользуемся индукцией по числу логических знаков, входящих уже в формулу C, которая, в свою очередь, может быть атомарной или иметь один из слудующих видов: $\neg D$, $D_1\vee D_2$, $\exists xD(x)$ или $\Box D$. В случае, когда $C\in \mathbf{Atm}$, B имеет вид $\neg C$ и справедливость условия 1) следует из определения $\mathbf{V_0}$.

Если C имеет вид $\neg D$, тогда B есть формула $\neg\neg D$, и поскольку она входит в открытую таблицу t, к ней применимо правило NN, согласно которому в t также включается формула D, содержащая одним логическим знаком меньше, чем формула C.

Поэтому, в силу индуктивного предположения, $\mathbf{V_0}(D,\mathbf{v})=T$. Но согласно правилу оценки для отрицания, $\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})=\mathbf{V_0}(\neg\neg D,\mathbf{v})=T$.

Пусть C имеет вид $(D_1 \vee D_2)$. В таком случае B есть формула вида $\neg(D_1 \vee D_2)$ и в открытой таблице t к ней применимо правило ND, согласно которому в t включаются формулы $\neg D_1$ и $\neg D_2$, содержащие меньше логических знаков, чем формула B. Согласно индуктивному предположению для условия 2), $\mathbf{V_0}(D_1,\mathbf{v})=\mathbf{V_0}(D_2,\mathbf{v})=\perp$, откуда, по правилам оценок для дизъюнкции и отрицания, следует, что $\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})=\mathbf{V_0}(\neg(D_1 \vee D_2), \mathbf{v})=T$.

Если C имеет вид $\exists xD(x)$, B является формулой $\neg\exists xD(x)$ и, так как t открыта, к ней применимо правило NE, согласно которому для каждой индивидной переменной $z \in \mathbf{D}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v}=\theta(\mathbf{t})$ в t включается формула $\neg D(z)$, содержащая одним логическим знаком меньше, чем B. Поэтому к $\neg D(z)$ применимо индуктивное предположение для условия 2), в силу которого $\mathbf{V_0}(D(z),\mathbf{v})=\perp$ при тождественном сопоставлении переменных из $\mathbf{U}_0$ всем отличным от z свободным индивидным переменным, входящим в $D(z)$, когда переменной z сопоставляется любая переменная из $\mathbf{D}(\mathbf{v})$. Откуда, согласно правилу оценки для квантора существования, $\mathbf{V_0}(\exists xD(x),\mathbf{v})=\perp$, а по правилу для отрицания, $\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})=\mathbf{V_0}(\neg\exists xD(x),\mathbf{v})=T$.

Наконец, если C имеет вид $\Box D$, то B есть формула $\neg\Box D$ и, поскольку t открыта, к последней формуле применимо правило NK, согласно которому составляется новая таблица t', такая, что (t, t')OR и в нее помещается выражение $\sim D$. Но D содержит меньшее число логических знаков, чем B, и к ней применимо индуктивное предположение для условия 4), согласно которому при тождественном сопоставлении элементов $\mathbf{U}$ всем свободным переменным D не $!\mathbf{V_0}(D,\mathbf{u})$ или $\mathbf{V_0}(D,\mathbf{u})=\perp$, где $\mathbf{u}=\theta(\mathbf{t}')$. Но тогда, в силу правила оценки для оператора знания, $\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})=\mathbf{V_0}(\neg\Box D,\mathbf{v})=T$.

Следовательно, условие 1) справедливо, когда B имеет вид $\neg C$. Остается рассмотреть случаи, когда, B имеет один из следующих видов: $C_1 \vee C_2$, $\exists xC(x)$ или $\Box C$.

Если B имеет вид $C_1 \vee C_2$, то, поскольку t открыта, к $C_1 \vee C_2$ применимо правило D, согласно которому составляется новая альтернативная система таблиц $S'=(S\setminus\{t\})\cup\{t'\}$, причем t' целиком копирует t за исключением того, что в t дополнительно включается формула C_1, а в t' – формула C_2. В выбранной альтернативной системе входит совместимая таблица с C_i (i=1,2) и в виду того, что C_i содержит меньшее число логических знаков, чем B, в силу индуктивного предположения, $\mathbf{V_0}(C_i,\mathbf{v})=T$, а согласно правилу оценки для знака дизъюнкции, $\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})=\mathbf{V_0}(C_1 \vee C_2, \mathbf{v})=T$ при тождественном сопоставлении элементов $\mathbf{U}_0$ всем свободным переменным B.

Если же B имеет вид $\exists xC(x)$, поскольку t открыта, к ней применимо правило E, согласно которому в t включается формула $C(y)$ с ранее не встречающейся ни в одной таблице индивидной переменной $y \in X_t \subseteq Y_t$. Кроме того, число логических знаков $C(y)$

на единицу меньше, чем соответствующее число для B. Поэтому, в силу индуктивного предположения, $\mathbf{V_0}(C(y),\mathbf{v})$=T при тождественном сопоставлении элементов $\mathbf{U_0}$ всем отличным от y свободным индивидным переменным $C(y)$, когда переменной y сопоставляется $y \in X_t \subseteq \mathbf{D}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v}=\theta(t)$. Но тогда, согласно правилу оценки для квантора существования, при том же сопоставлении $\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})=\mathbf{V_0}(\exists x C(x),\mathbf{v})$=T.

Наконец, если B имеет вид $\Box C$, так как t открыта, к ней применимо правило K и в каждую таблицу t_1, такую, что $(t,t_1) \in R$, помещается формула C с меньшим, чем B, числом логических знаков. Поэтому, в силу индуктивного предположения, $\mathbf{V_0}(C,\mathbf{u})$=T для всякого $\mathbf{u}$, такого, что $(\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathbf{R}$, $\mathbf{v}=\theta(t)$, $\mathbf{u}=\theta(t_1)$. Но тогда, по правилу оценки для модального оператора знания, $\mathbf{V_0}(B,\mathbf{v})=\mathbf{V_0}(\Box C,\mathbf{v})$=T.

Точно также устанавливается справедливость условий 2) - 4), в случае, когда построение диаграммы завершается. А, если ее построение не завершается, т.е. после каждого шага какое-то из наших правил всегда будет применимым, то для получения контрмодели мы воспользуемся псевдотаблицами, как это сделано в [5].

ТЕОРЕМА ПОЛНОТЫ. Если A общезначима в классе фреймов **E4**, то $+A$ в табличном исчислении **E4**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установимо, что если диаграмма для A не замкнута, то A не общезначима в классе фреймов **E4**. В самом деле, если диаграмма для A не замкнута, то не замкнута, по крайней мере, одна из ее альтернативных систем таблиц. Следовательно, не замкнута также главная таблица такой системы с исходной формулой A. Но тогда, согласно условию 4) основной леммы, существует опровергающая модель $\mathbf{M_0}$ для A и поэтому A не общезначима в классе фреймов **E4**.

Разрешимость пропорциональной части E4. Мы каждый раз стремимся завершить построение диаграммы. Поэтому всегда предполагаем выполненными следующие соглашения о недопустимости повторения результата: наши правила нельзя применять к формулам тривиально замкнутой таблицы, а также в тех случаях, когда они предписывают включить в таблицу формулу, уже содержащуюся в ней (так как таблицы мы рассматриваем как множества формул). Однако, несмотря на это, построение диаграммы не для всякой формулы завершается в конечное число шагов.

Конечную последовательность таблиц $s_0,\dots,s_n$ из S, такую, что $s = s_0$, $t=s_n$ и $(s_i,s_{i+1}) \in R$ $(0 \le i < n)$ будем называть путь из s в t. А цепью таблиц в S назовем такое подмножество S, для любых двух элементов s и t которого существует путь из s в t или из t в s.

Пусть **Sb(t)** обозначает множество всех подформул формул, входящих в t, а $\sim\mathbf{Sb(t)}=\{\neg \boldsymbol{B}:\boldsymbol{B}\in\mathbf{Sb(t)}\}\cup\{\sim\boldsymbol{B}:\boldsymbol{B}\in\mathbf{Sb(t)}\}$. Очевидно, что если t конечно, то и $\mathbf{Sb(t)}\cup\sim\mathbf{Sb(t)}$ конечно. Покажем теперь, что построение диаграммы для любой бескванторной формулы всегда завершится в конечное число шагов. В самом деле, из особенностей пропозициональных правил построения таблиц следует, что каждая таблица, входящая в диаграмму бескванторной формулы A, является подмножеством конечного множества **Sb(**{A}**)**∪**~Sb(**{A}**).** Но поскольку число всех подмножеств конечного множества является конечным, в случае, когда построение некоторой цепи в диаграмме для A не завершается, какая-то таблица t_j обязательно совпадет с ранее построенной таблицей t_i в той же цепи таблиц ($i<j$). Для того чтобы исключить возникновение подобных случаев, мы примем еще одно соглашение о недопустимости повторения результата: если таблица t_j полностью совпадет с таблицей t_i в той же цепи таблиц, мы полагаем, что $(t_j,t_i)\in R$ ($i<j$) и никакое правило не применимо к t_j.

Это гарантирует завершение построения **E4** - диаграммы любой бескванторной формулы в конечное число шагов и показывает, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА РАЗРЕШИМОСТИ. Пропозициональная часть табличного исчисления **E4** разрешима.

Применения. Изложенный подход к эпистемической логике позволяет без привлечения типовых ограничений в стиле Бочвара расширить узкое исчесление предикатов, избегая при этом возникновения логических и семантических антиномий (ср. [2]), а также [3]). Ни одна формула классического расширенного исчисления предикатов не будет теоремой в такой расширенной логике **E4** и, когда некоторая формула A в расширенном классическом исчислении предикатов ведет к антиномии вида $A\epsilon\neg A$**,** где ϵ – знак материальной эквивалентности, аналогичное рассуждение в расширенной логике **E4** приводит не к противоречию, а с помощью теорем **E4**: $(A\approx\neg A)\approx\downarrow A$ и $\downarrow A\approx\downarrow\neg A$, устанавливает истинность положений $\downarrow A$ и $\downarrow\neg A$. Поэтому такой подход позволяет еще раз испытать возможность реализации логистического тезиса уже на новой основе эпистемической предикатной логики, расширенной без типовых ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бежанишвили М.* Об одной частичной пропозициональной логике // Международная конференция “Смирновские чтения”. М., 1997, 10-11 (обобщенный для предикатного случая вариант на англ. языке: On a partially interpreted logic, печатается в Bulletin of the Section of Logic).
2. *Бочвар Д.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник 1938. Т. 4 (46). №2. С. 287-308.

3. *Feferman S.* Toward useful type-free theories. I // The Journal of Symbolic Logic. 1984. №49. P. 75-111.
4. *Fitting M.* Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing. Amsterdam. North-Holland Publishing Company, 1969.
5. *Kripke S.* Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi // Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1963. №9. P. 67-96.

В.И.Маркин

ФОРМАЛЬНАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ТРАДИЦИОННОЙ СИНГУЛЯРНОЙ НЕГАТИВНОЙ СИЛЛОГИСТИКИ[1]

Abstract. *I set out the formal reconstruction of traditional singular negative syllogistic by means of modern logic. I introduce the formal language of syllogistic with singular and negative terms adequate for the problem solution. The traditional logic had several dominant assumptions concerning the usage of singular and negative terms within the propositions. The main idea was to minimize the syntactical difference between singular and general terms. According to this idea, singular terms can take predicate as well as subject position. Singular propositions are treated as a kind of general or particular propositions. Negative terms could be constructed not only from general but also from singular terms.*

In this language I formulate a deductive system **TS** *– the extension of Łukasiewicz' syllogistic.*

The translation of syllogistic formulas is done into the language of first order predicate calculus with equality. Let Σ *be a function assigning for each syllogistic term a predicate of this language:* $\Sigma(v) = (x = v)$, $\Sigma(S) = Sx$, $\Sigma({\sim}\alpha) = \neg\Sigma(\alpha)$, *where* v *is a singular term,* S *is a primitive general term,* α *is any syllogistic term. Let* $*$ *be standard («fundamental») translation of* **TS** *syllogistic formulas into the language of the first order predicate calculus with equality:* $(\alpha\mathbf{a}\beta)^* = \forall x(\Sigma(\alpha) \supset \Sigma(\beta))$, $(\alpha\mathbf{e}\beta)^* = \forall x(\Sigma(\alpha) \supset \neg\Sigma(\beta))$, $(\alpha\mathbf{i}\beta)^* = \exists x(\Sigma(\alpha) \& \Sigma(\beta))$, $(\alpha\mathbf{o}\beta)^* = \exists x(\Sigma(\alpha) \& \neg\Sigma(\beta))$, $(\neg\mathbf{A})^* = \neg\mathbf{A}^*$, $(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \nabla \mathbf{B}^*$. *Finally I define the translation* Θ: $\Theta(\mathbf{A}) = (\exists xS_1x \& \exists x\neg S_1x \& \ldots \& \exists xS_nx \& \exists x\neg S_nx) \supset \mathbf{A}^*$, *where* $S_1, \ldots, S_n$ *is a list of all primitive general terms in* **A**.

I prove that for each syllogistic formula **A**, **A** *is a theorem of* **TS** *iff its translation* $\Theta(\mathbf{A})$ *is a theorem of the first order predicate calculus with equality completed with the axiom* $\exists x\exists y\neg(x = y)$.

В традиционной логике аристотелевская силлогистика была серьезным образом дополнена, что проявилось, прежде всего, в существенном расширении выразительных возможностей силлогистического языка. Ассерторическая силлогистика Аристотеля, изложенная им в начальных главах Первой книги “Первой Анали-

---

[1] Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда (грант № 96-03-04631).

тики", представляет собой теорию выводов из категорических высказываний, в состав которых входят лишь *общие термины* (репрезентирующие классы предметов) и их структура игнорируется. Это позволяет рассматривать их в качестве *примитивных, положительных терминов*. Теории в данном языке называют *чистыми позитивными силлогистиками*.

Аристотель не оставил стройной дедуктивной системы, где наряду с общими положительными терминами в составе высказываний разрешалось использование *сингулярных терминов* (репрезентирующих индивиды) и *отрицательных терминов* (образующихся с помощью оператора *терминного отрицания*). Подобные теории называют *сингулярными негативными силлогистиками*. Лишь отдельные фрагменты "Органона" содержат анализ выводов из высказываний с сингулярными и отрицательными терминами, например, *правил превращения*.

Систематическое построение сингулярной негативной силлогистики было осуществлено в рамках традиционной логики. Причем подход к исследованию логических свойств высказываний с сингулярными и отрицательными терминами в ряде моментов существенно отличался от того, который был намечен Аристотелем.

Прежде всего, указанные различия проявляются в синтаксических особенностях оперирования сингулярными и отрицательными терминами. Аристотель не употребляет сингулярные термины в составе общих и частных высказываний. Они используются только в качестве субъектов и не могут выступать в качестве предикатов. Единичные суждения "*P* присуще *v*" и "*P* не присуще *v*" представляют собой высказывания особых типов, не сводимых к общим и частным. Связки "присуще" и "не присуще" в их составе по существу являются новыми силлогистическими константами, отличными от **a**, **i**, **e**, **o**. Терминное отрицание не приложимо к сингулярным терминам. Оно образует из общих терминов общие отрицательные термины.

В традиционной логике, напротив, доминировало представление о том, что сингулярные термины могут занимать не только место субъекта, но и место предиката. Единичные высказывания рассматривались обычно в качестве разновидности общих или же частных высказываний. Таким образом, наблюдалась тенденция к стиранию различий в употреблении сингулярных и общих терминов. При последовательном проведении данной линии (например, В. Оккамом) отрицательные термины разрешалось образовывать не только из общих, но также из сингулярных терминов.

Другое отличие традиционной силлогистики от аристотелевской состояло в том, что ряд ее законов не принимался Стагиритом, например, *законы силлогистического тождества* "Всякий *S* есть *S*" и "Некоторый *S* есть *S*". Существенно различалась также трактовка *правил превращения*: Аристотель считал корректными лишь превращения утвердительных высказываний в отрицательные; в традиционной логике объявлялись также правомерными превращения отрицательных высказываний в утвердительные. Важной семантической особенностью традиционной силлогистики, по сравнению с аристотелевской, было явное принятие экзистенциальной предпосылки о непустоте и неуниверсальности терминов в составе категорических высказываний.

Реконструкцию чистого позитивного фрагмента традиционной силлогистики осуществил Я. Лукасевич [2] в виде аксиоматической системы, надстраиваемой над классическим исчислением высказываний. Рядом авторов (В.А. Смирновым [4], мною [3] и др.) была доказана погружаемость силлогистики Лукасевича в классическое исчисление предикатов. Особый интерес представляет рассмотренная М.Н. Бежанишвили и Л.И. Мчедлишвили [1] погружающая операция, которая фиксирует экзистенциальную пресуппозицию традиционной логики.

В данной статье предпринимается попытка современной реконструкции традиционной сингулярной негативной силлогистики. Будет построено исчисление, представляющее собой обобщение системы Лукасевича в языке, содержащем дополнительно сингулярные термины и оператор терминного отрицания. Предлагается перевод, эксплицирующий принятую в традиционной логике трактовку категорических высказываний. Демонстрируется погружаемость посредством данного перевода построенной силлогистической системы в подходящее логическое исчисление.

Зададим адекватный для решения поставленной задачи формализованный язык сингулярной негативной силлогистики.

Алфавит содержит бесконечные списки сингулярных и примитивных общих терминов, силлогистические константы **a**, **i**, **e**, **o**; оператор терминного отрицания ~, пропозициональные связки и скобки.

Силлогистическими терминами являются сингулярные, простые общие термины и выражения вида $\sim\alpha$, где α – силлогистический термин. В дальнейшем для обозначения сингулярных терминов будем использовать метапеременные v, w; для обозначения примитивных общих терминов – S, S_1; для обозначения произвольных силлогистических терминов – α, β.

Формулами являются $\alpha\mathbf{a}\beta$, $\alpha\mathbf{i}\beta$, $\alpha\mathbf{e}\beta$, $\alpha\mathbf{o}\beta$ (α и β – любые силлогистические термины) и их булевы комбинации.

Перевод силлогистических формул будем осуществлять в язык исчисления предикатов с равенством. Определим сначала функцию Σ, сопоставляющую каждому силлогистическому термину некоторый предикат данного языка:

$$\Sigma(v) = (x = v), \qquad \Sigma(S) = Sx, \qquad \Sigma(\sim\alpha) = \neg\Sigma(\alpha).$$

Далее, зададим стандартный ("фундаментальный") перевод * формул силлогистического языка в язык логики предикатов с равенством:

$$(\alpha\mathbf{a}\beta)^* = \forall x(\Sigma(\alpha) \supset \Sigma(\beta)), \qquad (\alpha\mathbf{e}\beta)^* = \forall x(\Sigma(\alpha) \supset \neg\Sigma(\beta)),$$
$$(\alpha\mathbf{i}\beta)^* = \exists x(\Sigma(\alpha) \,\&\, \Sigma(\beta)), \qquad (\alpha\mathbf{o}\beta)^* = \exists x(\Sigma(\alpha) \,\&\, \neg\Sigma(\beta)),$$
$$(\neg\mathbf{A})^* = \neg\mathbf{A}^*, \qquad (\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \nabla \mathbf{B}^*,$$

где ∇ – любая бинарная пропозициональная связка.

Наконец, сформулируем перевод Θ, учитывающий принимавшуюся в традиционной силлогистике предпосылку о непустоте и неуниверсальности терминов:

$$\Theta(\mathbf{A}) = (\exists x S_1 x \,\&\, \exists x \neg S_1 x \,\&\, \ldots \,\&\, \exists x S_n x \,\&\, \exists x \neg S_n x) \supset \mathbf{A}^*,$$

где $S_1, \ldots, S_n$ – список всех примитивных общих терминов в составе **A**. В случае, когда **A** не содержит примитивных общих терминов, $\Theta(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^*$.

Обратим внимание на то, что формула $\exists x S_1 x \,\&\, \exists x \neg S_1 x \,\&\, \ldots \,\&\, \exists x S_n x \,\&\, \exists x \neg S_n x$ в обычной логике предикатов с равенством не является выполнимой в том случае, когда предметная область содержит ровно один индивид. Однако адекватная экспликация "традиционной" трактовки категорических высказываний может быть достигнута лишь в рамках такой логической теории, где выполнимость указанной формулы обеспечена во всех предметных областях, допустимых в данной теории.

Поэтому перевод Θ будем осуществлять в исчисление $\mathbf{ИП}^2$, которое получается из стандартного исчисления предикатов с равенством за счет добавления аксиомы $\exists x \exists y \neg(x = y)$.

Семантический постулат, адекватный этой аксиоме, гласит: предметная область содержит как минимум два индивида.

При переводе силлогистических формул в исчисление $\mathbf{ИП}^2$ нет необходимости явно выражать предпосылку о непустоте и неуниверсальности сингулярных терминов, поскольку соответствующая ей формула $\exists x(x = v) \,\&\, \exists x \neg(x = v)$ является теоремой $\mathbf{ИП}^2$. Излишним оказывается также указание на непустоту и неуниверсальность отрицательных терминов вида $\sim\alpha$, поскольку формула $\exists x \Sigma(\sim\alpha) \,\&\, \exists x \neg\Sigma(\sim\alpha)$ эквивалентна в $\mathbf{ИП}^2$ $\exists x \Sigma(\alpha) \,\&\, \exists x \neg\Sigma(\alpha)$.

Адекватной реконструкцией традиционной сингулярной негативной силлогистики будет такая силлогистическая теория, которая погружается в исчисление $\mathbf{ИП}^2$ посредством перевода Θ.

Построим в сформулированном силлогистическом языке систему **ТС**. Ее аксиомами, наряду с аксиомами классического исчисления высказываний, являются формулы следующих видов:

A1. $v\mathbf{a}v$, **A5**. $\alpha\mathbf{e}\beta \equiv \neg\alpha\mathbf{i}\beta$,

A2. $v\mathbf{a}w \supset w\mathbf{a}v$, **A6**. $\alpha\mathbf{o}\beta \equiv \neg\alpha\mathbf{a}\beta$,

A3. $(\alpha\mathbf{a}\beta \,\&\, v\mathbf{a}\alpha) \supset v\mathbf{a}\beta$, **A7**. $v\mathbf{e}\alpha \equiv v\mathbf{a}{\sim}\alpha$,

A4. $(v\mathbf{a}\beta \,\&\, v\mathbf{a}\alpha) \supset \alpha\mathbf{i}\beta$, **A8**. $\alpha\mathbf{i}\alpha$.

Правилами вывода в системе **ТС** являются:

R1. *modus ponens*,

R2. $\dfrac{(\nu \mathbf{a} \alpha \mathbin{\&} \nu \mathbf{a} \beta) \supset \mathbf{A}}{\alpha \mathbf{i} \beta \supset \mathbf{A}}$, **R3**. $\dfrac{(\nu \mathbf{a} \alpha \mathbin{\&} \nu \mathbf{e} \beta) \supset \mathbf{A}}{\alpha \mathbf{o} \beta \supset \mathbf{A}}$,

причем ν не содержится в заключениях правил **R2** и **R3**.

Все законы силлогистики Лукасевича являются теоремами построенной системы.

Дальнейшая часть работы представляет собой развернутую схему доказательства погружаемости сингулярной негативной силлогистики **ТС** в расширенное исчисление предикатов с равенством **ИП**^{2} посредством перевода Θ.

Идея данного доказательства состоит в следующем. Строится „промежуточное" силлогистическое исчисление **ФС**^{2}, которое погружается в **ИП**^{2} посредством „фундаментального" перевода *. Затем демонстрируется погружаемость силлогистики **ТС** в силлогистику **ФС**^{2} посредством следующей операции θ:

$$\theta(\mathbf{A}) = (S_1 \mathbf{i} S_1 \mathbin{\&} {\sim} S_1 \mathbf{i} {\sim} S_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} S_n \mathbf{i} S_n \mathbin{\&} {\sim} S_n \mathbf{i} {\sim} S_n) \supset \mathbf{A},$$

где $S_1, \ldots, S_n$ – список примитивных общих терминов в составе **A**.

Нетрудно показать, что композиция функций θ и * равносильна функции Θ, т.е. что теоремой **ИП**^{2} для произвольной формулы **A** является $[\theta(\mathbf{A})]^* \equiv \Theta(\mathbf{A})$. Из перечисленных утверждений вытекает, что Θ погружает **ТС** в **ИП**^{2}.

Начнем с построения „промежуточной" системы сингулярной негативной силлогистики. В [3] мною было предложено исчисление $\mathbf{НФС}_0^{\mathbf{c}}$, которое перевод * погружает в стандартное (не обогащенное аксиомой $\exists x \exists y \neg(x = y)$) исчисление предикатов с равенством. Это исчисление получается из системы **ТС** отбрасыванием схемы аксиом **A8**. Если же мы хотим получить силлогистику, погружающуюся посредством * в **ИП**^{2}, необходимо добавить к $\mathbf{НФС}_0^{\mathbf{c}}$ схему аксиом

A8^0. ${\sim}\nu \mathbf{i} {\sim}\nu$.

Вариант сингулярной негативной силлогистики, получающийся из **ТС** заменой схемы **A8** на **A8**^{0}, назовем **ФС**^{2}.

Способ доказательства погружаемости **ФС**^{2} в **ИП**^{2} аналогичен подробно описанному в [3] методу доказательства погружаемости $\mathbf{НФС}_0^{\mathbf{c}}$ в стандартное исчисление предикатов с равенством. Поэтому ограничимся изложением общего плана данного доказательства, обращая особое внимание лишь на принципиально новые моменты в нем.

Для **ФС**^{2} строится теоретико-множественная семантика.

Моделью называется пара <**D**, φ>, где **D** – произвольное множество, содержащее как минимум два элемента (для системы $\mathbf{НФС}_0^c$ постулировалась лишь непустота **D**); φ есть функция, приписывающая значения сингулярным и примитивным общим терминам: $\varphi(v) \in \mathbf{D}$, $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$. В модели <**D**, φ> определяется семантическая функция ψ, которая произвольному силлогистическому термину сопоставляет некоторое подмножество **D**: $\psi(v) = \{\varphi(v)\}$, $\psi(S) = \varphi(S)$, $\psi(\sim\alpha) = \mathbf{D} \setminus \psi(\alpha)$. Формулируются условия истинности формул силлогистического языка в модели <**D**, φ>:

И1. $|\alpha\mathbf{a}\beta| = \mathbf{1}$, е.т.е. $\psi(\alpha) \subseteq \psi(\beta)$;

И2. $|\alpha\mathbf{i}\beta| = \mathbf{1}$, е.т.е. $\psi(\alpha) \cap \psi(\beta) \neq \varnothing$;

И3. $|\alpha\mathbf{e}\beta| = \mathbf{1}$, е.т.е. $\psi(\alpha) \cap \psi(\beta) = \varnothing$;

И4. $|\alpha\mathbf{o}\beta| = \mathbf{1}$, е.т.е. $\psi(\alpha) \setminus \psi(\beta) \neq \varnothing$.

Условия истинности сложных формул, понятия истинности в модели и $\mathbf{ФС}^2$-общезначимости стандартные.

Доказывается непротиворечивость исчисления $\mathbf{ФС}^2$ относительно предложенной семантики. Ограничимся демонстрацией общезначимости аксиом схемы $\mathbf{A8}^0$:

$|\sim v\mathbf{i}\sim v| = \mathbf{1}$, е.т.е. (в силу **И2**) $\psi(\sim v) \cap \psi(\sim v) \neq \varnothing$, е.т.е. (в силу свойств $\cap$) $\psi(\sim v) \neq \varnothing$, е.т.е. (по определению ψ) $\mathbf{D} \setminus \{\varphi(v)\} \neq \varnothing$. Последнее условие выполняется в любой модели, поскольку $\{\varphi(v)\}$ является одноэлементным множеством (ведь $\varphi(v) \in \mathbf{D}$), а **D** имеет мощность, большую единицы.

Далее, методом Хенкина доказывается семантическая полнота $\mathbf{ФС}^2$. Обычным образом вводятся понятия $\mathbf{ФС}^2$-непротиворечивого и $\mathbf{ФС}^2$-максимального множества формул. $\mathbf{ФС}^2$-максимальное множество формул Δ называется насыщенным, если для любой формулы вида $\alpha\mathbf{i}\beta$ из Δ существует сингулярный термин w, такой что $w\mathbf{a}\alpha$ & $w\mathbf{a}\beta \in \Delta$, и для любой формулы $\alpha\mathbf{o}\beta$ существует w, такой что $w\mathbf{a}\alpha$ & $w\mathbf{e}\beta \in \Delta$. Показывается, что произвольное $\mathbf{ФС}^2$-непротиворечивое множество можно расширить до насыщенного.

С каждым насыщенным множеством формул Δ связывается каноническая модель $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$. Пусть $\mathbf{V}_v$ есть множество всех сингулярных терминов w таких, что $w\mathbf{a}v \in \Delta$. Определим $\mathbf{D}_\Delta$ как семейство множеств $\mathbf{V}_v$ для любого сингулярного термина v, а φ_Δ как функцию следующего типа: $\varphi_\Delta(v) = \mathbf{V}_v$, $\varphi_\Delta(S) = \{\mathbf{V}_v\colon v\mathbf{a}S \in \Delta\}$.

Необходимо продемонстрировать, что $\mathbf{D}_\Delta$ содержит как минимум два элемента. В силу максимальности множества Δ, в нем содержится аксиома $\mathbf{A8}^0$ – $\sim v\mathbf{i}\sim v$. Поскольку Δ – насыщенное множество, найдется такой сингулярный термин w, что $w\mathbf{a}\sim v \in \Delta$. В Δ содержатся также аксиома **A7** – $w\mathbf{e}v \equiv w\mathbf{a}\sim v$ и теорема $\mathbf{ФС}^2$ $w\mathbf{e}v \equiv \neg w\mathbf{a}v$. Поэтому $w\mathbf{e}v \in \Delta$, а $w\mathbf{a}v \notin \Delta$. Последнее означает, что $w \notin$

$\mathbf{V}_v$. Вместе с тем, $w \in \mathbf{V}_w$, так как аксиома **A1** – $w\mathbf{a}w$ – содержится в Δ. Таким образом, в составе $\mathbf{D}_\Delta$ имеем, по крайней мере, два различных элемента – $\mathbf{V}_v$ и $\mathbf{V}_w$.

Дальнейший ход доказательства семантической полноты $\mathbf{ФС}^2$ в точности совпадает с приведенным в [3] доказательством полноты для системы $\mathbf{НФС}_0^-$.

Итак, для любой формулы **A** языка сингулярной негативной силлогистики верно: **A** является теоремой $\mathbf{ФС}^2$, е.т.е. **A** общезначима в предложенной семантике.

Пару <**D**, φ> можно использовать также в качестве стандартной модели для оценки формул языка логики предикатов с равенством. В [3] показано, что условия истинности произвольной формулы **A** языка сингулярной негативной силлогистики и условия истинности ее перевода **A***совпадают в произвольной модели <**D**, φ>. Отсюда следует, что формула **A** общезначима в семантике для $\mathbf{ФС}^2$, е.т.е. ее перевод **A*** общезначим в классе моделей логики предикатов с равенством, в которых предметная область имеет мощность большую или равную двум. Указанный класс моделей адекватен исчислению $\mathbf{ИП}^2$.

Все сказанное свидетельствует о том, что функция * погружает силлогистику $\mathbf{ФС}^2$ в исчисление $\mathbf{ИП}^2$: произвольная силлогистическая формула **A** доказуема в системе $\mathbf{ФС}^2$, е.т.е. ее перевод **A*** является теоремой исчисления $\mathbf{ИП}^2$.

Следующий этап рассуждения – доказательство погружаемости силлогистики **ТС** в силлогистику $\mathbf{ФС}^2$ посредством перевода θ:

$$\theta(\mathbf{A}) = (S_1\mathbf{i}S_1 \;\&\; {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \;\&\; \ldots \;\&\; S_n\mathbf{i}S_n \;\&\; {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset \mathbf{A},$$

где $S_1, \ldots, S_n$ – список всех примитивных общих терминов в составе **A**. Следует заметить, что если **A** не содержит примитивных общих терминов, то θ(**A**) = **A**.

Будем использовать сформулированный В.А. Смирновым критерий погружаемости одной логической системы в другую: исчисление $\mathbf{S}_1$ погружается в исчисление $\mathbf{S}_2$, е.т.е. (1) существует перевод τ_1 из $\mathbf{S}_1$ в $\mathbf{S}_2$, такой что если **A** доказуема в $\mathbf{S}_1$, то $\tau_1(\mathbf{A})$ доказуема в $\mathbf{S}_2$; и существует перевод τ_2 из $\mathbf{S}_2$ в $\mathbf{S}_1$, такой что (2) если **A** доказуема в $\mathbf{S}_2$, то $\tau_2(\mathbf{A})$ доказуема в $\mathbf{S}_1$, и (3) для любой формулы **A** языка $\mathbf{S}_1$ теоремой данной системы является формула $\mathbf{A} \equiv \tau_2(\tau_1(\mathbf{A}))$.

В нашем случае роль $\mathbf{S}_1$ играет система **ТС**, роль $\mathbf{S}_2$ – система $\mathbf{ФС}^2$, τ_1 есть перевод θ, а в качестве τ_2 рассмотрим тождественное преобразование σ: σ(**A**) = **A** для любой формулы **A**.

Докажем первую часть критерия Смирнова, т.е. продемонстрируем, что θ-переводы всех теорем **ТС** доказуемы в $\mathbf{ФС}^2$.

Рассмотрим доказательство $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_k$ произвольной теоремы **ТС**. Методом возвратной индукции покажем, что θ-перевод каждого C_i (в том числе и $\theta(C_k)$) доказуем в $\mathbf{ФС}^2$. Предположим, что наше утверждение верно для любого C_j, где $j< i$.

Пусть C_i – одна из аксиом **А1** – **А2** системы **ТС**. В этих аксиомах отсутствуют примитивные общие термины. Поэтому $\theta(C_i) = C_i$, и она доказуема в $\mathbf{ФС}^2$, ведь **А1** и **А2** являются также аксиомами $\mathbf{ФС}^2$. Пусть C_i – одна из аксиом **А3** – **А7** системы **ТС**. Если C_i не содержит примитивных общих терминов, то $\theta(C_i) = C_i$ – аксиома $\mathbf{ФС}^2$. Если в состав C_i входят примитивные общие термины $S_1, ..., S_n$, то $\theta(C_i)$, т.е. $(S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&\, ... \,\&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset C_i$, может быть доказана в $\mathbf{ФС}^2$ исходя из аксиомы C_i с использованием закона утверждения консеквента.

Рассмотрим подробнее случай, когда C_i есть аксиома **А8**, т.е. имеет вид $\alpha\mathrm{i}\alpha$. Термин α может выглядеть двояко: как ${\sim}...{\sim}v$ или же как ${\sim}...{\sim}S$, где негативная приставка ${\sim}...{\sim}$ содержит некоторое число (возможно, равное нулю) вхождений терминного отрицания. Заметим, что в $\mathbf{ФС}^2$ доказуемы формулы вида ${\sim}{\sim}\beta\mathbf{i}{\sim}{\sim}\beta \equiv \beta\mathbf{i}\beta$. Поэтому если α имеет вид ${\sim}...{\sim}v$, то θ-перевод аксиомы **ТС** $\alpha\mathrm{i}\alpha$ равносилен в исчислении $\mathbf{ФС}^2$ либо формуле $v\mathrm{i}v$ (при четном числе знаков ~ в негативной приставке), либо формуле ${\sim}v\mathrm{i}{\sim}v$ (при нечетном их числе), а обе они доказуемы в $\mathbf{ФС}^2$. Если же α имеет вид ${\sim}...{\sim}S$, то $\theta(\alpha\mathrm{i}\alpha)$ равносилен в исчислении $\mathbf{ФС}^2$ либо формуле $(S\mathbf{i}S \,\&\, {\sim}S\mathbf{i}{\sim}S) \supset S\mathbf{i}S$, либо формуле $(S\mathbf{i}S \,\&\, {\sim}S\mathbf{i}{\sim}S) \supset {\sim}S\mathbf{i}{\sim}S$, а обе они являются пропозициональными тавтологиями.

Пусть C_i получено из $C_j \supset C_i$ и C_j по *modus ponens*. Согласно индуктивному допущению, $\theta(C_j \supset C_i)$ и $\theta(C_j)$ доказуемы в $\mathbf{ФС}^2$. Требуется доказать, что $\theta(C_i)$ – теорема данной системы.

Если ни C_j, ни C_i не содержат примитивных общих терминов, то $\theta(C_j \supset C_i) = C_j \supset C_i$, а $\theta(C_j) = C_j$. Тогда из этих теорем системы $\mathbf{ФС}^2$ формула $\theta(C_i)$, в данном случае совпадающая с C_i, может быть получена по *modus ponens*.

Если C_j не содержит, а C_i содержит примитивные общие термины ($S_1, ..., S_n$), то $\theta(C_j \supset C_i) = (S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&\, ... \,\&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset (C_j \supset C_i)$, а $\theta(C_j) = C_j$. Тогда из данных теорем с использованием закона коммутации и *modus ponens* можно вывести формулу $(S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&\, ... \,\&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset C_i$, т.е. $\theta(C_i)$.

Если, наоборот, C_i не содержит, а C_j содержит примитивные общие термины ($S_1, ..., S_n$), то $\theta(C_j \supset C_i) = (S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&\, ... \,\&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset (C_j \supset C_i)$, а $\theta(C_j) = (S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&\, ... \,\&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset C_j$. Тогда с использованием закона самодистрибутивности импликации из этих теорем получаем доказуемую в $\mathbf{ФС}^2$ формулу $(S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&\, ... \,\&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset C_i$.

Рассуждением „от противного“ покажем, что и C_i в данном случае будет теоремой $\mathbf{ФС}^2$. Допустим, что C_i не доказуема. Тогда она не является общезначимой в построенной выше семантике исчисления $\mathbf{ФС}^2$, т.е. существует модель $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$, в которой C_i ложна. Сконструируем модель $\langle\mathbf{D}, \varphi'\rangle$, в которой φ' всем силлогистическим терминам, кроме $S_1, ..., S_n$, приписывает те же значения, что и φ; выберем из универсума **D** произвольный объект **d** (такой объект существует в силу непустоты **D**) и положим, что $\varphi'(S_1) = \ldots = \varphi'(S_n) = \{\mathbf{d}\}$. Очевидно, что формулы $S_1\mathbf{i}S_1, \ldots, S_n\mathbf{i}S_n$ истинны в модели $<\mathbf{D}, \varphi'>$. Кроме этого, окажутся истинными формулы $\sim S_1\mathbf{i}\sim S_1, \ldots, \sim S_n\mathbf{i}\sim S_n$, поскольку $\psi'(\sim S_1) = \ldots = \psi'(\sim S_n) = \mathbf{D} \setminus \{\mathbf{d}\} \neq \varnothing$, ведь **D** содержит как минимум два элемента. Таким образом, конъюнкция $S_1\mathbf{i}S_1$ & $\sim S_1\mathbf{i}\sim S_1$ & ... & $S_n\mathbf{i}S_n$ & $\sim S_n\mathbf{i}\sim S_n$ истинна в $<\mathbf{D}, \varphi'>$. Что же касается формулы $\mathbf{C}_i$, то в данной модели она принимает то же значение, что и в $<\mathbf{D}, \varphi>$, т.е. ложна в ней, поскольку термины $S_1, \ldots, S_n$ отсутствуют в $\mathbf{C}_i$. Поэтому формула $(S_1\mathbf{i}S_1$ & $\sim S_1\mathbf{i}\sim S_1$ & ... & $S_n\mathbf{i}S_n$ & $\sim S_n\mathbf{i}\sim S_n) \supset \mathbf{C}_i$ ложна в модели $<\mathbf{D}, \varphi'>$, а значит не доказуема в $\mathbf{ФС}^2$, что свидетельствует о получении противоречия в нашем рассуждении. Итак, и в этом случае $\theta(\mathbf{C}_i)$, которая здесь совпадает с $\mathbf{C}_i$, является теоремой $\mathbf{ФС}^2$.

Наиболее громоздким является случай, когда и $\mathbf{C}_j$, и $\mathbf{C}_i$ содержат примитивные общие термины. Пусть $M_1, \ldots, M_r$ – список такого рода терминов, входящих в $\mathbf{C}_j$, но не входящих в $\mathbf{C}_i$; $P_1, \ldots, P_m$ – список терминов, входящих и в $\mathbf{C}_j$, и в $\mathbf{C}_i$, а $Q_1, \ldots, Q_s$ – список терминов, не входящих в $\mathbf{C}_j$, но входящих в $\mathbf{C}_i$. Ясно, что в рассматриваемом случае по отдельности каждый из трех списков может, в принципе, оказаться пустым, но, по крайней мере, один – первый или второй, а также второй или третий – обязательно непуст. Обозначим через $\mathbf{K}_M$ формулу $M_1\mathbf{i}M_1$ & $\sim M_1\mathbf{i}\sim M_1$ & ... & $M_r\mathbf{i}M_r$ & $\sim M_r\mathbf{i}\sim M_r$, через $\mathbf{K}_P$ – формулу $P_1\mathbf{i}P_1$ & $\sim P_1\mathbf{i}\sim P_1$ & ... & $P_m\mathbf{i}P_m$ & $\sim P_m\mathbf{i}\sim P_m$, и через $\mathbf{K}_Q$ – формулу $Q_1\mathbf{i}Q_1$ & $\sim Q_1\mathbf{i}\sim Q_1$ & ... & $Q_s\mathbf{i}Q_s$ & $\sim Q_s\mathbf{i}\sim Q_s$. Очевидно, что $\theta(\mathbf{C}_j) = (\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P) \supset \mathbf{C}_j$, $\theta(\mathbf{C}_i) = (\mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset \mathbf{C}_i$, а $\theta(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = (\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$. Согласно индуктивному допущению, первая и третья формулы доказуемы в $\mathbf{ФС}^2$. Покажем, что тогда теоремой $\mathbf{ФС}^2$ будет и вторая формула.

Из доказуемости $(\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P) \supset \mathbf{C}_j$ и $(\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$, в силу законов логики высказываний, вытекает доказуемость в $\mathbf{ФС}^2$ формулы $\mathbf{K}_M \supset ((\mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset \mathbf{C}_i$, т.е. $\mathbf{K}_M \supset \theta(\mathbf{C}_i)$.

Если список $M_1, \ldots, M_r$ пуст, то последнее выражение есть просто $\theta(\mathbf{C}_i)$, и мы уже получили утверждение о доказуемости θ-перевода $\mathbf{C}_i$. В случае непустоты указанного списка продолжим рассуждение методом „от противного“.

Допустим, что $\theta(\mathbf{C}_i)$ недоказуема в $\mathbf{ФС}^2$. Тогда данная формула не является $\mathbf{ФС}^2$-общезначимой, т.е. существует модель $<\mathbf{D}, \varphi>$, в которой она ложна. Рассмотрим модель $<\mathbf{D}, \varphi'>$, где φ' всем терминам, отличным от $M_1, \ldots, M_r$, приписывает те же значения, что и φ, а $\varphi'(M_1) = \varphi'(M_2) = \ldots = \varphi'(M_r) = \{\mathbf{d}\}$, где **d** – произвольный элемент **D**. В модели $<\mathbf{D}, \varphi'>$ каждая из формул $M_1\mathbf{i}M_1, \ldots, M_r\mathbf{i}M_r$ примет значение **1** в силу непустоты множества **D**. Истинными здесь по причине непустоты $\mathbf{D} \setminus \{\mathbf{d}\}$ будут также формулы $\sim M_1\mathbf{i}\sim M_1, \ldots, \sim M_r\mathbf{i}\sim M_r$. Поэтому конъюнкция $\mathbf{K}_M$ истинна в рассматриваемой модели. Что же касается формулы $\theta(\mathbf{C}_i)$, то поскольку она не содержит терминов $M_1, \ldots, M_r$, значение ее в $<\mathbf{D}, \varphi'>$ будет тем же, что и в модели <**D**, φ>, т.е. **0**. Из сказанного следует, что формула $\mathbf{K}_M \supset \theta(\mathbf{C}_i)$ ложна в <**D**, φ'> и потому она не является теоремой $\mathbf{ФС}^2$, что противоречит выведенному ранее из индуктивного предположения следствию. Таким образом, $\theta(\mathbf{C}_i)$ доказуема в $\mathbf{ФС}^2$.

Пусть $\mathbf{C}_i$ получена из $\mathbf{C}_j$ по правилу **R2**. Случай, когда $\mathbf{C}_j$ не содержит примитивных общих терминов, очевиден. При наличии подобных терминов $S_1, ..., S_n$ в $\mathbf{C}_j$ по индуктивному допущению имеем: $\theta(\mathbf{C}_j) = (S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&... \&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset ((\nu\mathbf{j}\alpha \,\&\, \nu\mathbf{j}\beta) \supset \mathbf{A})$ доказуемо в $\mathbf{ФС}^2$. Отсюда, по закону коммутации, получаем теорему $(\nu\mathbf{j}\alpha \,\&\, \nu\mathbf{j}\beta) \supset ((S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&... \&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset \mathbf{A})$. Применяем правило **R2**: $\alpha\mathbf{i}\beta \supset ((S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&... \&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset \mathbf{A})$. Используя вновь закон коммутации, выводим $(S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&... \&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset (\alpha\mathbf{i}\beta \supset \mathbf{A})$, т.е. $\theta(\mathbf{C}_i)$ в качестве теоремы $\mathbf{ФС}^2$.

Случай, когда $\mathbf{C}_i$ получена по правилу **R3**, рассматривается аналогично.

Таким образом, θ-перевод любой теоремы **ТС** доказуем в $\mathbf{ФС}^2$, и доказательство первой части критерия Смирнова завершено.

Для доказательства второй его части рассмотрим перевод σ из $\mathbf{ФС}^2$ в **ТС**: $\sigma(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$. Поскольку $\mathbf{ФС}^2$ является подсистемой **ТС**, σ-перевод любой теоремы $\mathbf{ФС}^2$ доказуем в исчислении **ТС**.

Остается удостовериться в выполнении третьей части критерия Смирнова – в том, что для любой формулы **A** теоремой системы **ТС** является $\mathbf{A} \equiv \sigma(\theta(\mathbf{A}))$. Если **A** не содержит примитивных общих терминов, то $\sigma(\theta(\mathbf{A}))$ совпадает с **A**, и $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$ – теорема **ТС**. Если же **A** содержит примитивные общие термины $S_1, ..., S_n$, то $\sigma(\theta(\mathbf{A})) = \theta(\mathbf{A}) = (S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&... \&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset \mathbf{A}$. В системе **ТС** с использованием аксиом схемы **A8** и правила введения конъюнкции легко доказать формулу $S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&... \&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n$. Из нее, по законам логики высказываний, выводима импликация $((S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&... \&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset \mathbf{A}) \supset \mathbf{A})$. Обратная импликация представляет собой закон утверждения консеквента. Таким образом, в **ТС** имеем теорему $\mathbf{A} \equiv (S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&... \&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset \mathbf{A})$.

Итак, все три части критерия Смирнова выполняются. Поэтому силлогистика **ТС** погружается в силлогистику $\mathbf{ФС}^2$ посредством перевода θ.

Метатеорема. *Для любой формулы* **A** *языка сингулярной негативной силлогистики верно, что она доказуема в системе* **ТС** *тогда и только тогда, когда ее перевод* Θ(**A**) *доказуем в исчислении* $\mathbf{ИП}^2$.

Выше было показано, что операция θ погружает систему сингулярной негативной силлогистики **ТС** в „промежуточное“ силлогистическое исчисление $\mathbf{ФС}^2$, а последнее, в свою очередь, погружается в расширенное исчисление предикатов с равенством $\mathbf{ИП}^2$

посредством перевода *. Отсюда следует, что силлогистика **ТС** погружается в **ИП**^{2} посредством композиции переводов θ и *. Остается продемонстрировать равносильность в исчислении **ИП**^{2} данной композиции переводу Θ.

Если силлогистическая формула **А** не содержит примитивных общих терминов, то $[\theta(\mathbf{A})]^* = \mathbf{A}^* = \Theta(\mathbf{A})$.

Если же **А** содержит примитивные общие термины $S_1, \ldots, S_n$, то $[\theta(\mathbf{A})]^* = [(S_1\mathbf{i}S_1 \,\&\, {\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_n\mathbf{i}S_n \,\&\, {\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n) \supset \mathbf{A}]^* = ((S_1\mathbf{i}S_1)^* \,\&\, ({\sim}S_1\mathbf{i}{\sim}S_1)^* \,\&\, \ldots \,\&\, (S_n\mathbf{i}S_n)^* \,\&\, ({\sim}S_n\mathbf{i}{\sim}S_n)^*) \supset \mathbf{A}^* = (\exists x(S_1x \,\&\, S_1x) \,\&\, \exists x(\neg S_1x \,\&\, \neg S_1x) \,\&\, \ldots \,\&\, \exists x(S_nx \,\&\, S_nx) \,\&\, \exists x(\neg S_nx \,\&\, \neg S_nx)) \supset \mathbf{A}^* \equiv (\exists xS_1x \,\&\, \exists x\neg S_1x \,\&\, \ldots \,\&\, \exists xS_nx \,\&\, \exists x\neg S_nx) \supset \mathbf{A}^* = \Theta(\mathbf{A})$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Бежанишвили М.Н., Мчедлишвили Л.И.* Позитивная силлогистика и логика предикатов // Логика Аристотеля. Тбилиси, 1985.
2. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
3. *Маркин В.И.* Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.
4. *Смирнов В.А.* Погружение систем позитивной силлогистики в одноместное исчисление предикатов // Логические исследования. М., 1983.

В.М. Попов, И.И. Хорохорин

ДИАДИЧЕСКИЕ СЕМАНТИКИ ДЛЯ СИСТЕМ ФОРМАЛЬНОЙ СИЛЛОГИСТИКИ[1]

Abstract. *It was shown in* [1] *that there are any operations which embed into monadic first-order predicate calculus the* C1 *and* C3 *syllogistic systems constructed in* [2]. *This result excludes an opportunity to yield for* C1 *and* C3 *set-theoretical semantics in a «canonical» way, i.e. to yield set-theoretical semantics based on embedding of related syllogistic system into monadic first-order predicate calculus. In paper proposed the set-theoretical semantics both for* C1, C3 *and* C2, C4 *systems is «non-canonically» yielded.*

В [1] показано, что не существует операций, погружающих построенные в [2] силлогистические системы C1 и C3 в одноместное исчисление предикатов первого порядка. Этот результат исключает относительно C1 и C3 возможность «канонического» для силлогистических систем наведения теоретико-множественной семантики, т.е. такого конструирования теоретико-множественной семантики, которое опирается на погружение соответствующих силлогистических систем в первопорядковое одноместное исчисление предикатов. В предлагаемой работе строятся «неканоническим» способом теоретико-множественные семантики для систем C1, C3, а также для систем C2, C4. Описание систем, которое дается ниже, следует [2] и [3] во всем, что касается общей концепции этих систем, но не в деталях формулировок и изложения. Формулы всех рассматриваемых систем принадлежат к одному и тому же языку, алфавит которого содержит только термы t_1, t_2, t_3, ..., бинарные пропозициональные связки &, $\equiv$, $\supset$, унарную пропозициональную связку $\neg$, силлогистические связки *A, E, J, O* и скобки (,).

Определение формулы: 1). Если *Q* — силлогистическая связка, а *t* и *d* — термы, то *Qtd* — формула; 2). Если α и β формулы, то $(\alpha\&\beta)$, $(\alpha\&\beta)$, $(\alpha\equiv\beta)$, $(\neg\alpha)$ — формулы. Принимаются обычные соглашения об опускании скобок. При задании систем будут использованы, в частности, следующие восемь схем формул, в которых *t*, *d*, *r* — метапеременные для термов:

Ax1 $Atd\&Adr\supset Atr$, *Ax2* $Atd\&Jtr\supset Jdr$, *Ax3* $Jtd\supset Jdt$, *Ax4* $Atd\supset Jtd$,

[1] Работа выполнена при поддержке российского гуманитарного научного фонда (грант 96-03-04631).

$Ax5\ Etd \equiv \neg Jtd$, $Ax6\ Otd \equiv \neg Atd$, $Ax7\ Jtd \supset Att$, $Ax8\ Jtt$.

Изучаемые здесь системы являются исчислениями гильбертовского типа с единственным правилом вывода — правилом *modus ponens* — и со стандартным определением понятия доказательства. Пусть K — некоторое фиксированное конечное множество схем формул, удовлетворяющее условию: замыкание по правилу *modus ponens* множества всех формул, полученных из K, равно множеству всех классических тавтологий в рассматриваемом языке. Аксиомы системы C1 (C2, C3, C3, C4) это те и только те формулы, каждая из которых получается, по крайней мере, по одной из схем, принадлежащих $K \cup \{Ax1\text{-}Ax6\}$ (соответственно: $K \cup \{Ax1\text{-}Ax7\}$, $K \cup \{Ax1\text{-}Ax3, Ax5, Ax6, Ax8\}$, $K \cup \{Ax1\text{-}Ax3, Ax5\text{-}Ax8\}$).

Определение диады: диадой называется упорядоченная пара $<x,y>$ множеств (при этом x называется левым, а y — правым крылом диады $<x,y>$). На протяжении всего последующего текста «$\Leftrightarrow$» является сокращением для «тогда и только тогда, когда», а «$\approx$» — для «графически равно».

Определение отношения $\supset\subset$ совместимости диад по левым крыльям: $<x,y> \supset\subset <v,w> \Leftrightarrow x \cap v \neq 0$.

Определение отношения $\sqsubseteq$ включения диад по правым крыльям: $<x,y> \sqsubseteq <v,w> \Leftrightarrow y \subseteq w$.

Определение C1-модели: C1-моделью называется упорядоченная шестерка $m = <\Gamma, \Delta, \Sigma, \supset\subset, \sqsubseteq, \varphi>$, где

(1) Γ — непустое множество диад;

(2) $\Delta \subseteq \Gamma$;

(3) $\Sigma \subseteq \Delta$;

(4) для любых $a, b, c \in \Gamma$: если $a \sqsubseteq b$ и $a \supset\subset c$, то $b \supset\subset c$;

(5) φ есть всюдуопределенная (на множестве $Term$ всех термов) однозначная функция типа $Term \rightarrow \Gamma$, удовлетворяющая следующим условиям для любых $t_k, t_l \in Term$:

(Iφ) если $t_k \not\approx t_l$ и при этом $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l)$ и $\varphi(t_l) \sqsubseteq \varphi(t_k)$, то $\varphi(t_k) \in \Sigma$;

(IIφ) если $t_k \not\approx t_l$ и $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l)$, то $\varphi(t_l) \in \Delta$;

(IIIφ) если $t_k \not\approx t_l$ и $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l)$, то $\varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_l)$.

Определение функции $|\ |^m$ значения формулы в C1-модели $m = <\Gamma, \Delta, \Sigma, \supset\subset, \sqsubseteq, \varphi>$: $|\ |^m$ есть всюдуопределенная (на множестве $Form$ всех формул) однозначная функция типа $Form \rightarrow \{u, \Lambda\}$, удовлетворяющая следующим условиям для любых $t_k, t_l \in$ Term и любых $\alpha, \beta \in Form$:

$$|At_kt_l|^m = u \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l), \text{ если } t_k \not\approx t_l; \\ \varphi(t_k) \in \Sigma, \text{ если } t_k \approx t_l, \end{cases}$$

$$|Jt_kt_l|^m = \text{u} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_l), \text{ если } t_k \not\approx t_l; \\ \varphi(t_k) \in \Sigma, \text{ если } t_k \approx t_l, \end{cases}$$

$$|Ot_kt_l|^m = \text{u} \Leftrightarrow |At_kt_l|^m = \Lambda,$$

$$|Et_kt_l|^m = \text{u} \Leftrightarrow |Jt_kt_l|^m = \Lambda.$$

Для формул вида $(\alpha\&\beta)$, $(\alpha\supset\beta)$, $(\alpha\equiv\beta)$, $(\neg\alpha)$ функция $|\ |^m$ определяется стандартно.

Определение С2-модели: С2-моделью называется упорядоченная пятерка $m = \langle\Gamma, \Delta, \supset\subset, \sqsubseteq, \varphi\rangle$ такая, что выполняются условия (1), (2) и (4) из определения С1-модели, φ есть всюдуопределенная однозначная функция типа $Term \to \Gamma$, удовлетворяющая условию (IIIφ) из определения С1-модели, и выполняется следующее условие: (6): для любых a, b $\in \Gamma$, если a?b, то a$\in\Delta$.

Определение функции $|\ |^m$ значения формулы в С2-модели m=<Г,Δ,$\supset\subset$,$\sqsubseteq$,φ>: $|\ |^m$ отличается от определения функции значения формулы в С1-модели только для формул вида At_kt_l:

$$|At_kt_l|^m = \text{u} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l), \text{ если } t_k \not\approx t_l. \\ \varphi(t_k) \in \Delta, \text{ если } t_k \approx t_l. \end{cases}$$

Определение С3-модели: С3-моделью называется упорядоченная пятерка $m = \langle\Gamma, \Sigma, \supset\subset, \sqsubseteq, \varphi\rangle$ такая, что Г — непустое множество диад, каждая из которых имеет непустое левое крыло, $\Sigma \subseteq \Gamma$, выполняется условие (4) из определения С1-модели, φ есть всюдуопределенная однозначная функция типа $Term \to \Gamma$, удовлетворяющая условию (Iφ) из определения С1-модели.

Определение функции $|\ |^m$ значения формулы в С3-модели m=<Г,Σ, $\supset\subset$,$\sqsubseteq$,φ>: $|\ |^m$ отличается от определения функции значения формулы в С1-модели только для формул вида Jt_kt_l:

$$|Jt_kt_l|^m = \text{u} \Leftrightarrow \varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_l).$$

Определение С4-модели: С4-моделью называется упорядоченная четверка $m = \langle\Gamma, \supset\subset, \sqsubseteq, \varphi\rangle$ такая, что Г — непустое множество диад, каждая из которых имеет непустое левое крыло, выполняется условие (4) из определения С1-модели, φ есть всюдуопределенная однозначная функция типа $Term \to \Gamma$.

Определение функции $|\ |^m$ значения формулы в С4-модели m=<Г, $\supset\subset$,$\sqsubseteq$,φ>: $|\ |^m$ отличается от определения функции значения формулы в С1-модели только для формул вида At_kt_l и Jt_kt_l:

$$|At_kt_l|^m = \text{u} \Leftrightarrow \varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l),$$

$$|Jt_kt_l|^m = \text{u} \Leftrightarrow \varphi(t_k)\, ?\, \varphi(t_l).$$

Замечание 1. Для всякой Сi-модели m существует единственная функция значения формулы в m^2. Это утверждение легко доказывается возвратной индукцией по числу вхождений пропозициональных связок в формулу.

Имеет место следующая **теорема 1** (об адекватности системы С*i* классу всех С*i*-моделей):

Формула α доказуема в С*i* $\Leftrightarrow$ в каждой С*i*-модели m $|\alpha|^m = u$.

Теорема 1 вытекает из теорем 2 и 3.

Теорема 2 о непротиворечивости системы С*i* относительно класса всех С*i*-моделей: если формула α доказуема в С*i*, то в каждой С*i*-модели m $|\alpha|^m = u$.

Теорема 3 о полноте системы С*i* относительно класса всех С*i*-моделей: если формула α такова, что в каждой С*i*-модели m $|\alpha|^m = u$, то формула α доказуема в С*i*.

Доказательство теоремы 2 методом возвратной индукции по длине доказательства в С*i* формулы α стандартно. Поэтому здесь демонстрируется только то, что значение любой силлогистической аксиомы системы С*i* есть «*u*» в каждой С*i*-модели[3].

Случай 1: $i=1$.

Пусть $m=\langle\Gamma,\Delta,\Sigma, \supset\subset,\sqsubseteq,\varphi\rangle$ является С1-моделью, $|\ |^m$ функция значения формулы в m.

(I1): $|At_kt_l \,\&\, At_lt_n \supset At_kt_n|^m = u$.

В силу определения $|\ |^m$, для доказательства (I1) достаточно доказать (I1)': если $|At_kt_l|^m = u$ и $|At_lt_n|^m = u$, то $|At_kt_n|^m = u$.

Ясно, что для доказательства утверждения (I1)' достаточно показать, что (I1)' имеет место в каждом из следующих трех случаев: (I1a) $t_k \approx t_l$ или $t_n \approx t_l$, (I1b) $t_k \not\approx t_l$, $t_l \not\approx t_n$ и $t_k \not\approx t_n$, (I1c) $t_k \not\approx t_l$ и $t_k \approx t_n$.

В случае (I1a) утверждение (I1)' имеет место, так как является тавтологией.

Доказательство (I1)' в случае (I1b):

1) $|At_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $|At_lt_n|^m = u$ (допущение)

3) $t_k \not\approx t_l$ (условие, определяющее случай (I1b))

4) $t_l \not\approx t_n$ (условие, определяющее случай (I1b))

5) $t_k \not\approx t_n$ (условие, определяющее случай (I1b))

6) $\varphi(t_k)\sqsubseteq\varphi(t_l)$ (из 1), 3) и определения $|\ |^m$)

7) $\varphi(t_l)\sqsubseteq\varphi(t_n)$ (из 2), 4) и определения $|\ |^m$)

---

[2] Здесь и далее $i\in\{1,2,3,4\}$.

[3] Множество всех силлогистических аксиом системы С*i* это в точности множество всех тех формул, для каждой из которых существует порождающая ее схема из {*Ax1-Ax6*} при i=1, из {*Ax1-Ax7*} при i=2, из {*Ax1-Ax3, Ax5, Ax6, Ax8*} при i=3, из {*Ax1-Ax3, Ax5-Ax8*} при i=4.

8) $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_n)$ (из 6), 7) в силу очевидной транзитивности $\sqsubseteq$)

9) $|At_kt_n|^m = u$ (из 5), 8) и определения $|\ |^m$).

Доказательство (I1)' в случае (I1c):

1) $|At_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $|At_lt_n|^m = u$ (допущение)

3) $t_k \not\approx t_l$ (условие, определяющее случай (I1c))

4) $t_k \approx t_n$ (условие, определяющее случай (I1c))

5) $|At_lt_k|^m = u$ (из 2), 4))

6) $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l)$ (из 1), 3) и определения $|\ |^m$)

7) $\varphi(t_l) \sqsubseteq \varphi(t_k)$ (из 3), 5) и определения $|\ |^m$)

8) $\varphi(t_k) \in \Sigma$ (из 3), 6), 7) и условия (Iφ), сформулированного для φ в определении C1-модели)

9) $|At_kt_k|^m = u$ (из 8) и определения $|\ |^m$)

10) $|At_kt_n|^m = u$ (из 9) и 4)).

(I2): $|At_lt_k \& Jt_kt_n \supset Jt_lt_n|^m = u$.

По определению $|\ |^m$, для доказательства (I2) достаточно доказать (I2)': если $|At_lt_k|^m = u$ и $|Jt_kt_n|^m = u$, то $|Jt_lt_n|^m = u$. Если $t_k \approx t_n$, то утверждение (I2)' имеет место, так как является тавтологией. Поэтому для доказательства (I2)' остается доказать, что (I2)' имеет место в каждом из следующих случаев: (I2a) $t_k \approx t_n$ и $t_l \not\approx t_n$, (I2b) $t_k \not\approx t_n$ и $t_l \approx t_n$, (I2c) $t_k \not\approx t_l$, $t_k \not\approx t_n$ и $t_l \not\approx t_n$.

Доказательство (I2)' в случае (I2a):

1) $|At_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $|Jt_kt_n|^m = u$ (допущение)

3) $t_k \approx t_n$ (условие, определяющее случай (I2a))

4) $t_l \not\approx t_n$ (условие, определяющее случай (I2a))

5) $t_k \not\approx t_l$ (из 3), 4))

6) $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l)$ (из 1), 5) и определения $|\ |^m$)

7) $\varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_l)$ (из 5), 6) и условия (IIIφ), сформулированного для φ в определении C1-модели)

8) $\varphi(t_l) \supset\subset \varphi(t_k)$ (из 7) в силу очевидной симметричности $\supset\subset$)

9) $|Jt_lt_k|^m = u$(из 8), 5) и определения $|\ |^m$)

10) $|Jt_lt_n|^m = u$(из 9) и 3)).

Доказательство (I2)' в случае (I2b):

1) $|At_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $|Jt_kt_n|^m = u$ (допущение)

3) $t_k \not\approx t_n$ (условие, определяющее случай (I2b))

4) $t_l \approx t_n$ (условие, определяющее случай (I2b))

5) $t_k \not\approx t_l$ (из 3), 4))

6) $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l)$ (из 1), 5) и определения $| \, |^m$)

7) $\varphi(t_l) \in \Delta$ (из 5), 6) и условия (IIφ), сформулированного для φ в определении C1-модели)

8) $|Jt_lt_l|^m = u$ (из 7) и определения $| \, |^m$)

9) $|Jt_lt_n|^m = u$ (из 8), 4)).

Доказательство (I2)' в случае (I2c):

1) $|At_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $|Jt_kt_n|^m = u$ (допущение)

3) $t_k \not\approx t_l$ (условие, определяющее случай (I2c))

4) $t_k \not\approx t_n$ (условие, определяющее случай (I2c))

5) $t_l \not\approx t_n$ (условие, определяющее случай (I2c))

6) $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l)$ (из 1), 3) и определения $| \, |^m$)

7) $\varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_n)$ (из 2), 4) и определения $| \, |^m$)

8) $\varphi(t_l) \supset\subset \varphi(t_n)$ (из 6), 7) и пункта (4) определения C1-модели)

9) $|Jt_lt_n|^m = u$ (из 5), 8) и определения $| \, |^m$).

(I3): $|Jt_kt_l \supset Jt_lt_n|^m = u$.

В силу определения для доказательства (I3) достаточно доказать утверждение (I3)': если $|Jt_kt_l|^m = u$, то $|Jt_lt_k|^m = u$.

Если $t_k \approx t_l$, то утверждение (I3)' имеет место, так как является тавтологией.

Доказательство (I3)' в случае, когда $t_k \not\approx t_l$:

1) $|Jt_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $t_k \not\approx t_l$ (условие, определяющее рассматриваемый случай)

3) $\varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_l)$ (из 1), 2) и определения $| \, |^m$)

4) $\varphi(t_l) \supset\subset \varphi(t_k)$ (из 3) и симметричности ?)

5) $|Jt_lt_k|^m = u$ (из 2), 4) и определения $| \, |^m$).

(I4): $|At_kt_l \supset Jt_kt_l|^m = u$.

В силу определения $| \, |^m$ для доказательства (I4) достаточно доказать утверждение (I4)': если $|At_kt_l|^m = u$, то $|Jt_kt_l|^m = u$.

Доказательство (I4)' в случае, когда $t_k \approx t_l$:

1) $|At_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $t_k \approx t_l$ (условие, определяющее рассматриваемый случай)

3) $|At_kt_k|^m = u$ (из 1) и 2)

4) $\varphi(t_k) \in \Sigma$ (из 3) и определения $| \, |^m$)

5) $\varphi(t_k) \in \Delta$ (из 4) и пункта (3) определения C1-модели)

6) $|Jt_kt_k|^m = u$ (из 5) и определения $| \, |^m$)

7) $|Jt_kt_l|^m = u$ (из 6), 2)).

Доказательство (I4)' в случае, когда $t_k \not\approx t_l$:

1) $|At_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $t_k \not\approx t_l$ (условие, определяющее рассматриваемый случай)

3) $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l)$ (из 1), 2) и определения $|\ |^m$)

4) $\varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_l)$ (из 2), 3) и условия (IIIφ), сформулированного для φ в определении C1-модели)

5) $|Jt_kt_l|^m = u$ (из 2), 4) и определения $|\ |^m$).

(I5): $|Et_kt_l \equiv \neg Jt_kt_l|^m = u$.

Доказательство:

1) $|Et_kt_l|^m = u \Leftrightarrow |Jt_kt_l|^m = \Lambda$ (из определения $|\ |^m$)

2) $|Jt_kt_l|^m = \Lambda \Leftrightarrow |\neg Jt_kt_l|^m = u$ (из определения $|\ |^m$)

3) $|Et_kt_l|^m = u \Leftrightarrow |\neg Jt_kt_l|^m = u$ (из 1), 2))

4) $|Et_kt_l \equiv \neg Jt_kt_l|^m = u$ (из 3) и определения $|\ |^m$).

(I6): $|Ot_kt_l \equiv \neg At_kt_l|^m = u$.

Доказательство:

1) $|Ot_kt_l|^m = u \Leftrightarrow |At_kt_l|^m = \Lambda$ (из определения $|\ |^m$)

2) $|At_kt_l|^m = \Lambda \Leftrightarrow |\neg At_kt_l|^m = u$ (из определения $|\ |^m$)

3) $|Ot_kt_l|^m = u \Leftrightarrow |\neg At_kt_l|^m = u$ (из 1), 2))

4) $|Ot_kt_l \equiv \neg At_kt_l|^m = u$ (из 3) и определения $|\ |^m$).

Случай 2: i=2.

Пусть m=<Γ,Δ, $\supset\subset$,$\sqsubseteq$,φ> является C2-моделью, $|\ |^m$ — функция значения формулы в m.

(II1): $|At_kt_l\&At_lt_n \supset At_kt_n|^m = u$.

В силу $|\ |^m$ определения, для доказательства (II1) достаточно доказать (II1)': если $|At_kt_l|^m = u$ и $|At_lt_n|^m = u$, то $|At_kt_n|^m = u$.

Очевидно, что для доказательства (II1)' достаточно доказать, что (II1)' имеет место в каждом из следующих случаев: (II1a) $t_k \approx t_l$ или и $t_n \approx t_l$, (II1b) $t_k \not\approx t_l$, $t_k \not\approx t_n$ и $t_l \not\approx t_k$, (II1c) $t_k \approx t_n$ и $t_l \not\approx t_k$.

Доказательство (II1)' в случае (II1a) аналогично доказательству (I1)' в случае (I1a), а доказательство (II1)' в случае (II1b) аналогично доказательству (I1)' в случае (I1b).

Доказательство (II1)' в случае (II1c):

1) $|At_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $|At_lt_n|^m = u$ (допущение)

3) $t_l \not\approx t_k$ (условие, определяющее случай (II1c))

4) $t_k \approx t_n$ (условие, определяющее случай (II1c))

5) $|At_lt_k|^m = u$ (из 2), 4))

6) $\varphi(t_l) \sqsubseteq \varphi(t_k)$ (из 3), 5) и определения $|\ |^m$)

7) $\varphi(t_l) \supset\subset \varphi(t_k)$ (из 3), 6) и выполняющегося в С2-модели условия (III), сформулированного в определении С1-модели)

8) $\varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_l)$ (из 7) и симметричности $\supset\subset$)

9) $\varphi(t_k) \in \Delta$ (из 7) и условия (6), сформулированного в определении С2-модели)

10) $|At_kt_k|^m = u$ (из 9) и определения $|\ |^m$)

11) $|At_kt_n|^m = u$ (из 10), 4)).

(II2): $|At_kt_l \& Jt_kt_n \supset Jt_lt_n|^m = u$.

По определению $|\ |^m$, для доказательства (II2) достаточно доказать (II2)': если $|At_kt_l|^m = u$ и $|Jt_kt_n|^m = u$, то $|Jt_lt_n|^m = u$.

Если $t_k \approx t_l$, то (II2)' имеет место, так как является тавтологией. Поэтому остается доказать (II2)' в каждом из следующих случаев: (II2a) $t_k \approx t_n$ и $t_l \not\approx t_n$, (II2b) $t_k \not\approx t_n$ и $t_l \approx t_n$, (II2c) $t_k \not\approx t_l$, $t_k \not\approx t_n$ и $t_l \not\approx t_n$.

Доказательство (II2)' в случае (II2a) аналогично доказательству (I2)' в случае (I2a).

Доказательство (II2)' в случае (II2b):

1) $|At_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $|Jt_kt_n|^m = u$ (допущение)

3) $t_k \not\approx t_n$ (условие, определяющее случай (II2b))

4) $t_l \approx t_n$ (условие, определяющее случай (II2b))

5) $t_k \not\approx t_l$ (из 3), 4))

6) $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l)$ (из 1), 5) и определения $|\ |^m$)

7) $\varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_l)$ (из 5), 6) и выполняющегося в С2-модели условия (IIIφ), сформулированного в определении С1-модели)

8) $\varphi(t_l) \supset\subset \varphi(t_k)$ (из 7) и симметричности ?)

9) $\varphi(t_l) \in \Delta$ (из 8) и условия (6), сформулированного в определении С2-модели)

10) $|Jt_lt_l|^m = u$ (из 9) и определения $|\ |^m$)

11) $|Jt_lt_n|^m = u$ (из 10), 4)).

Доказательство (II2)' в случае (II2c) аналогично доказательству (I2)' в случае (I2c).

(II3): $|Jt_kt_l \supset Jt_lt_k|^m = u$.

Доказательство (II3) аналогично доказательству утверждения (I3).

(II4): $|At_kt_l \supset Jt_kt_l|^m = u$.

В силу $|\ |^m$ определения, для доказательства (II4) достаточно доказать (II4)': если $|At_kt_l|^m = u$, то $|Jt_kt_l|^m = u$.

Доказательство (II4)' в случае, когда $t_k \approx t_l$:

1) $|At_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $t_k \approx t_l$ (условие, определяющее рассматриваемый случай)

3) $|At_kt_k|^m = u$ (из 1), 2))

4) $\varphi(t_k) \in \Delta$ (из 3) и определения $|\,|^m$)

5) $|Jt_kt_n|^m = u$ (из 4) и определения $|\,|^m$)

6) $|Jt_kt_l|^m = u$ (из 5), 2)).

Доказательство (II4)' в случае, когда $t_k \not\approx t_l$ аналогично соответствующему случаю в доказательстве (I4).

(I5): $|Et_kt_l \equiv \neg Jt_kt_l|^m = u$.

(I6): $|Ot_kt_l \equiv \neg At_kt_l|^m = u$

Доказательство (II5) и доказательство (II6) аналогичны доказательству (I5) и (I6) соответственно.

(I7): $|Jt_kt_l \supset At_kt_k|^m = u$.

В силу определения $|\,|^m$, для доказательства (II7) достаточно доказать (II7)': если $|Jt_kt_l|^m = u$, то $|At_kt_k|^m = u$.

Доказательство (II7)' в случае, когда $t_k \approx t_l$:

1) $|Jt_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $t_k \approx t_l$ (условие, определяющее рассматриваемый случай)

3) $|Jt_kt_k|^m = u$ (из 1), 2))

4) $\varphi(t_k) \in \Delta$ (из 3) и определения $|\,|^m$)

5) $|At_kt_k|^m = u$ (из 4) и определения $|\,|^m$).

Доказательство (II7)' в случае, когда $t_k \not\approx t_l$:

1) $|Jt_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $t_k \not\approx t_l$ (условие, определяющее рассматриваемый случай)

3) $\varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_l)$ (из 1), 2) и определения $|\,|^m$)

4) $\varphi(t_k) \in \Delta$ (из 3) и условия (6), сформулированного в определении C2-модели)

5) $|At_kt_k|^m = u$ (из 4) и определения $|\,|^m$).

Случай 3: i=3.

Пусть m=<Γ,Σ, ⊃⊂,⊑,φ> является C3-моделью, а $|\,|^m$ — функция значения формулы в m.

(III1): $|At_kt_l \& At_lt_n \supset At_kt_n|^m = u$.

Доказательство (III1) аналогично доказательству утверждения в случае (I1).

(III2): $|At_kt_l \& Jt_kt_n \supset Jt_lt_n|^m = u$.

По определению $|\,|^m$, для доказательства (III2) достаточно доказать (III2)': если $|At_kt_l|^m = u$ и $|Jt_kt_n|^m = u$, то $|Jt_lt_n|^m = u$.

Если $t_k \approx t_l$, то (III2) имеет место, так как является тавтологией.

Доказательство (III2)' в случае, когда $t_k \not\approx t_l$:

1) $|At_k t_l|^m = u$ (допущение)

2) $|Jt_k t_n|^m = u$ (допущение)

3) $t_k \not\approx t_l$ (условие, определяющее рассматриваемый случай)

4) $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l)$ (из 1), 3) и определения $| \, |^m$)

5) $\varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_n)$ (из 2) и определения $| \, |^m$)

6) $\varphi(t_l) \supset\subset \varphi(t_n)$ (из 3), 4) и выполняющегося в С3-модели условия (4), сформулированного в определении С1-модели)

7) $|Jt_l t_n|^m = u$ (из 6) и определения $| \, |^m$).

(III3): $|Jt_k t_l \supset Jt_l t_k|^m = u$.

По определению достаточно доказать, что если $|Jt_k t_l|^m = u$, то $|Jt_l t_k|^m = u$.

Доказательство:

1) $|Jt_k t_l|^m = u$ (допущение)

2) $\varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_l)$ (из 1) и определения $| \, |^m$)

3) $\varphi(t_l) \supset\subset \varphi(t_k)$ (из 2) и симметричности $\supset\subset$)

2) $|Jt_l t_k|^m = u$ (из 3) и определения $| \, |^m$).

(III4): $|Et_k t_l \equiv \neg Jt_k t_l|^m = u$.

(III5): $|Ot_k t_l \equiv \neg At_k t_l|^m = u$.

Доказательство (III4) и доказательство (III5) аналогичны доказательству (I5) и доказательству (I6) соответственно.

(III6): $|Jt_k t_k|^m = u$.

Доказательство:

1) для всякого $a \in \Gamma : a \supset\subset a$ (из того, что всякая диада из Γ имеет, по определению С3-модели, непустое левое крыло, и определения $\supset\subset$)

2) для всякого $t_k \in Term$: $\varphi(t_k) \in \Gamma$ (из определения φ)

3) $\varphi(t_k) \supset\subset \varphi(t_k)$ (из 1), 2))

4) $|Jt_k t_k|^m = u$ (из 3) и определения $| \, |^m$).

Случай 4: i=4.

Пусть $m = \langle \Gamma, \Sigma, \supset\subset, \sqsubseteq, \varphi \rangle$ является С4-моделью, а $| \, |^m$ — функция значения формулы в m.

(IV1): $|At_k t_l \& At_l t_n \supset At_k t_n|^m = u$.

В силу $| \, |^m$ определения, для доказательства (IV1) достаточно доказать, что если $|At_k t_l|^m = u$ и $|At_l t_n|^m = u$, то $|At_k t_n|^m = u$.

Доказательство:

1) $|At_k t_l|^m = u$ (допущение)

2) $|At_l t_n|^m = u$ (допущение)

3) $\varphi(t_k) \sqsubseteq \varphi(t_l)$ (из 1) и определения $| \, |^m$)

4) $\varphi(t_l)\sqsubseteq\varphi(t_n)$ (из 2) и определения $|\ |^m$)

5) $\varphi(t_k)\sqsubseteq\varphi(t_n)$ (из 3), 4) и транзитивности $\sqsubseteq$)

6) $|At_kt_n|^m = u$ (из 5) и определения $|\ |^m$).

(IV2): $|At_kt_l\&Jt_kt_n\supset Jt_lt_n|^m = u$.

По $|\ |^m$ определению, для доказательства (IV2) достаточно доказать, что если $|At_kt_l|^m = u$ и $|Jt_kt_n|^m = u$, то $|Jt_lt_n|^m = u$.

Доказательство:

1) $|At_kt_l|^m = u$ (допущение)

2) $|Jt_kt_n|^m = u$ (допущение)

3) $\varphi(t_k)\sqsubseteq\varphi(t_l)$ (из 1) и определения $|\ |^m$)

4) $\varphi(t_k)\supset\subset\varphi(t_n)$ (из 2) и определения $|\ |^m$)

5) $\varphi(t_l)\supset\subset\varphi(t_n)$ (из 3), 4) и и выполняющегося в C4-модели условия (4), сформулированного в определении C1-модели)

6) $|Jt_lt_n|^m = u$ (из 5) и определения $|\ |^m$).

(IV3): $|Jt_kt_l\supset Jt_lt_k|^m = u$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству (III3).

(IV4): $|Et_kt_l\equiv\neg Jt_kt_l|^m = u$.

(IV5): $|Ot_kt_l\equiv\neg At_kt_l|^m = u$.

Доказательство (IV4) и доказательство (IV5) аналогичны доказательству (I5) и доказательству (I6) соответственно.

(IV6): $|Jt_kt_l\supset At_kt_k|^m = u$.

По определению $|\ |^m$, для доказательства (IV6) достаточно доказать (IV6)': если $|Jt_kt_l|^m = u$, то $|At_kt_k|^m = u$. Очевидно, что (IV6)' следует из утверждения $|At_kt_k|^m = u$, имеющего следующее доказательство:

1) $\varphi(t_k)\sqsubseteq\varphi(t_k)$ (из рефлексивности $\sqsubseteq$)

2) $|At_kt_k|^m = u$ (из 1) и определения $|\ |^m$)

(IV7): $|Jt_kt_k|^m = u$.

Доказательство:

1) $\varphi(t_k)\supset\subset\varphi(t_k)$ (из определения $\supset\subset$ и того, что каждая диада, принадлежащая Г, имеет непустое левое крыло)

2) $|Jt_kt_k|^m = u$ (из 1) и определения $|\ |^m$).

Предлагаемое здесь доказательство теоремы 3 проводится методом Хенкина. Предварительно формулируется аналог леммы Линденбаума и строятся Сi-модели из синтаксических объектов. Для того чтобы сформулировать требуемый аналог леммы Линденбаума, вводятся следующие два определения.

Определение Ci-непротиворечивого множества формул: множество М формул называется Ci-непротиворечивым $\Leftrightarrow$ не существует такой формулы α и таких, принадлежащих множеству М формул $\beta_1,\ldots,\beta_n$, что формулы $\beta_1\&\ldots\&\beta_n\supset\alpha$ и $\beta_1\&\ldots\&\beta_n\supset\neg\alpha$ доказуемы в Ci.

Определение максимального Ci-непротиворечивого множества формул: множество М формул называется максимальным Ci-непротиворечивым множеством формул $\Leftrightarrow$ выполняются два условия:

1) множество М является Ci-непротиворечивым множеством формул;

2) не существует такого Ci-непротиворечивого множества N формул, что $M\subseteq N$ и $M\neq N$.

Можно доказать, не затрагивая силлогистическую специфику Ci, следующее **замечание 2**: всякое максимальное Ci-непротиворечивое множество М формул таково, что для любых формул α и β:

a) если α доказуема в Ci, то $\alpha\in$M,

b) если $\alpha\supset\beta\in$M и $\alpha\in$M, то $\beta\in$M,

c) $\neg\alpha\in\text{M}\Leftrightarrow\alpha\notin\text{M}$,

d) $\alpha\&\beta\in\text{M}\Leftrightarrow\alpha\in\text{M}$ и $\beta\in$M,

e) $\alpha\supset\beta\in\text{M}\Leftrightarrow\alpha\notin\text{M}$ или $\beta\in$M,

f) $\alpha\equiv\beta\in\text{M}\Leftrightarrow(\alpha\in\text{M}\Leftrightarrow\beta\in\text{M})$.

Аналог леммы Линденбаума: всякое Ci-непротиворечивое множество формул является подмножеством некоторого максимального Ci-непротиворечивого множества формул.

Доказательство этого утверждения проводится обычным способом[4] и здесь не приводится. Для построения Ci-модели по максимальному Ci-непротиворечивому множеству формул потребуются нижеследующие определения и лемма 0.

Определение J-описания терма t_k относительно множества М формул: J-описанием терма t_k относительно множества формул М называется множество $\{Jt_lt_n\in Form | t_k\approx t_l$ или $t_k\approx t_n$ и $Jt_lt_n\in\text{M}\}$.

Определение А-описания терма t_k относительно множества М формул: А-описанием терма t_k относительно множества формул М называется множество $\{At_lt_n\in Form | t_k\approx t_n$ и $At_lt_n\in\text{M}\}$.

Определение описания терма t_k относительно множества М формул: описанием терма t_k относительно множества формул М называется объединение J-описания терма t_k относительно М с А-описанием терма t_k относительно М.

Определение λ-выражения: λ-выражением называется последовательность символов, состоящая в точности из трех символов, первый из которых есть А, второй — любой из символов t_1, t_2, t_3, ... , а третий символ есть λ.

[4] См, например, [3].

Определение λ-A-образа терма t_k относительно множества M формул: λ-A-образом терма t_k относительно множества формул M называется объединение множества, единственным элементом которого является λ-выражение $At_k\lambda$, с множеством всех таких λ-выражений $At_l\lambda$, что формула At_lt_k принадлежит M.

Определение диады терма t_k относительно множества M формул: диадой терма t_k относительно множества формул M называется диада (обозначаемая $[t_k]^{\mathrm{M}}$), левое крыло которой является описанием терма t_k относительно M, а правое — λ-A-образом терма t_k относительно M.

Лемма 0: $t_k \approx t_l \Leftrightarrow [t_k]^{\mathrm{M}}=[t_l]^{\mathrm{M}}$.

Очевидно, что если $t_k \approx t_l$, то $[t_k]^{\mathrm{M}}=[t_l]^{\mathrm{M}}$. Поэтому для доказательства леммы 0 достаточно доказать, что если $t_k \not\approx t_l$, то $[t_k]^{\mathrm{M}}\neq[t_l]^{\mathrm{M}}$.

Допустим, что $t_k \not\approx t_l$. Если A-описание терма t_k относительно M является пустым множеством, то (в силу определения A-описания терма относительно множества формул, определения λ-A-образа терма относительно множества формул и определения диады терма относительно множества формул) правому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ принадлежит единственный элемент $At_k\lambda$, но (по определению λ-A-образа терма относительно множества формул и по определению диады терма относительно множества формул) правому крылу диады $[t_l]^{\mathrm{M}}$ принадлежит λ-выражение $At_l\lambda$, которое в силу графического неравенства терма t_k терму t_l не равно графически λ-выражению $At_k\lambda$. Поэтому если A-описание терма t_k относительно M пусто, то $[t_k]^{\mathrm{M}}\neq[t_l]^{\mathrm{M}}$ (в предположении, что $t_k \not\approx t_l$). Если A-описание терма t_k относительно M не является пустым множеством, то (по определению диады терма относительно множества формул и определению описания терма относительно множества формул) левому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ принадлежит формула At_nt_k (для некоторого терма t_k), но (в силу определения диады терма относительно множества формул и допущения о том, что $t_k \not\approx t_l$) эта формула не принадлежит левому крылу диады $[t_l]^{\mathrm{M}}$. Поэтому если A-описание терма t_k относительно M не является пустым, то $[t_k]^{\mathrm{M}}\neq[t_l]^{\mathrm{M}}$ (в предположении, что $t_k \not\approx t_l$). Итак, при допущении, что $t_k \not\approx t_l$, утверждение $[t_k]^{\mathrm{M}}\neq[t_l]^{\mathrm{M}}$ доказано как в случае пустого, так и в случае непустого A-описания терма t_k относительно M. Поэтому если $t_k \not\approx t_l$, то $[t_k]^{\mathrm{M}}\neq[t_l]^{\mathrm{M}}$.

Лемма 1 *о построении C1-модели по максимальному C1-непротиворечивому множеству формул*

Пусть M — максимальное C1-непротиворечивое множество формул, $\Gamma_M = \{x|x=[t_k]^{\mathrm{M}}$ для некоторого терма $t_k\}$, $\Delta_M=\{x|x\in\Gamma_{\mathrm{M}}$ и существует такой терм t_k, что формула Jt_kt_k принадлежит левому крылу диады $x\}$, $\Sigma_M=\{x|x\in\Gamma_{\mathrm{M}}$, и существует такой терм t_k, что формула At_kt_k принадлежит левому крылу диады $x\}$, φ_{M} — функция типа $Term\to\Gamma_M$, удовлетворяющая условию $\varphi_{\mathrm{M}}(t_k)= [t_k]^{\mathrm{M}}$ (для любого терма).

Тогда m_M=<$\Gamma_M,\Delta_M,\Sigma_M$, $\supset\subset$,$\sqsubseteq$,φ_M> является C1-моделью.

Согласно определению C1-модели, для доказательства леммы 1 достаточно доказать, что (1C1) Γ_M — непустое множество диад, (2C1) $\Delta_M\subseteq\Gamma_M$, (3C1) $\Sigma_M\subseteq\Delta_M$, (4C1) для любых $[t_k]^M$, $[t_l]^M$, $[t_n]^M$: если $[t_k]^M\sqsubseteq[t_l]^M$ и $[t_k]^M\supset\subset[t_n]^M$, то $[t_l]^M\supset\subset[t_n]^M$, (5C1) φ_M — всюду-определенная однозначная функция, удовлетворяющая следующим условиям для любых $t_k,t_l\in Term$:

(Iφ_M) если $t_k \not\approx t_l$ и при этом $\varphi_M(t_k)\sqsubseteq\varphi_M(t_l)$ и $\varphi_M(t_l)\sqsubseteq\varphi_M(t_k)$, то $\varphi_M(t_k)\in\Sigma_M$,

(IIφ_M) если $t_k \not\approx t_l$ и $\varphi_M(t_k)\sqsubseteq\varphi_M(t_l)$, то $\varphi_M(t_l)\in\Delta_M$,

(IIIφ_M) если $t_k \not\approx t_l$ и $\varphi_M(t_k)\sqsubseteq\varphi_M(t_l)$, то $\varphi_M(t_l)\supset\subset\varphi_M(t_k)$.

Доказательство (1C1):

Из определения Γ_M и определения $[t_k]^M$ следует, что Γ_M — множество диад. Из определения Γ_M и того, что $Term\neq0$ и для каждого t_k существует $[t_k]^M$, следует, что $\Gamma_M\neq0$.

Доказательство (2C1):

Если $y\in\Delta_M$, то, по определению множества Δ_M, $y\in\Gamma_M$. Поэтому $\Delta_M\subseteq\Gamma_M$.

Доказательство (3C1):

Требуется доказать, что если $y\in\Sigma_M$, то $y\in\Delta_M$.

1) $y\in\Delta_M$ (допущение).

2) $y\in\Gamma_M$ (из 1) и определения множества Σ_M).

3) Существует терм t_k такой, что $y=[t_k]^M$ (из определения множества Γ_M).

4) Существует терм t_n такой, что формула At_nt_n принадлежит левому крылу диады y (из 1) и определения множества Σ_M).

5) Существует терм t_k и существует терм t_n такие, что $y=[t_k]^M$ и формула At_nt_n принадлежит левому крылу диады y (из 3), 4)).

6) Если $y=[t_k]^M$ и формула At_nt_n принадлежит левому крылу диады y, то $t_k \approx t_n$ (из определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

7) Существует терм t_k и существует терм t_n такие, что $y=[t_k]^M$ и при этом формула At_nt_n принадлежит левому крылу диады y и $t_k \approx t_n$ (из 5), 6)).

8) Существует терм t_k такой, что $y=[t_k]^M$ и формула At_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^M$ (из 7)).

9) Если формула At_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^M$, то формула Jt_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^M$.

(Доказательство утверждения 9:

а) Формула At_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^M$ (допущение).

б) Формула At_kt_k принадлежит M (из а), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

в) Формула $At_kt_k \supset Jt_kt_k$ принадлежит М (из того, что формула $At_kt_k \supset Jt_kt_k$ доказуема в С1, М — максимальное С1-непротиворечивое множество формул, и замечания 2).

г) Формула Jt_kt_k принадлежит М (из б), в), того, что М — максимальное С1-непротиворечивое множество формул, и замечания 2).

д) Формула Jt_kt_k принадлежит описанию терма t_k относительно М (из г) и определения описания терма относительно множества формул).

е) Формула Jt_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ (из 9) и определения диады терма относительно множества формул).

10) Существует терм t_k такой, что $y=[t_k]^{\mathrm{M}}$ и формула Jt_kt_k принадлежат левому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ (из 8), 9)).

11) Если $y=[t_k]^{\mathrm{M}}$, то $y \in \Gamma_{\mathrm{M}}$ (из определения Γ_{M}).

12) $y \in \Gamma_{\mathrm{M}}$ и существует терм t_k такой, что формула Jt_kt_k принадлежит левому крылу диады y (из 10), 11)).

13) $y \in \Delta_{\mathrm{M}}$ (из 12) и определения Δ_{M}).

Доказательство (4С1):

В случае, когда $[t_k]^{\mathrm{M}}=[t_l]^{\mathrm{M}}$, утверждение (4С1) является тавтологией.

Доказательство (4С1) в случае, когда $[t_k]^{\mathrm{M}} \neq [t_l]^{\mathrm{M}}$.

Имеются два подслучая: a) $[t_k]^{\mathrm{M}} \neq [t_n]^{\mathrm{M}}$ и b) $[t_k]^{\mathrm{M}}=[t_n]^{\mathrm{M}}$.

Доказательство (4С1) в подслучае а):

1) $[t_k]^{\mathrm{M}} \sqsubseteq [t_l]^{\mathrm{M}}$ (допущение).

2) $[t_k]^{\mathrm{M}} \supset\subset [t_n]^{\mathrm{M}}$ (допущение).

3) $[t_k]^{\mathrm{M}} \neq [t_l]^{\mathrm{M}}$ (условие, определяющее рассматриваемый случай).

4) $[t_k]^{\mathrm{M}} \neq [t_n]^{\mathrm{M}}$ (условие, определяющее рассматриваемый случай).

5) λ-выражение $At_k\lambda$ принадлежит правому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ (из определения диады терма относительно множества формул).

6) λ-выражение $At_k\lambda$ принадлежит правому крылу диады $[t_l]^{\mathrm{M}}$ (из 1), 5) и определения $\sqsubseteq$).

7) λ-выражение $At_k\lambda$ принадлежит λ-А-образу терма t_l относительно М (из 6) и определения диады терма относительно множества формул).

8) $t_k \not\approx t_k$ (из 3) и леммы 0).

9) $At_kt_l \in \mathrm{M}$ (из 7), 8) и определения λ-А-образа терма относительно множества формул).

10) $t_k \not\approx t_k$ (из 4) и леммы 0).

11) По крайней мере, одна из формул Jt_kt_n, Jt_nt_k, At_kt_n, At_nt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ и левому крылу диады $[t_n]^{\mathrm{M}}$ (из 2), 10), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

12) По крайней мере одна из формул Jt_kt_n, Jt_nt_k, At_kt_n, At_nt_k принадлежит множеству M (из 11), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).
13) $Jt_kt_n \in$M (из 12), замечания 2, того, что M — максимальное C1-непротиворечивое множество формул, и того, что каждая из формул $Jt_nt_k \supset Jt_kt_n$, $At_kt_n \supset Jt_kt_n$, $At_nt_k \supset Jt_kt_n$ доказуема в C1).
14) $Jt_lt_n \in$M (из 9), 13), замечания 2, того, что M — максимальное C1-непротиворечивое множество формул, и того, что формула $At_kt_l \& Jt_kt_n \supset Jt_lt_n$ доказуема в C1).
15) Формула Jt_lt_n принадлежит левому крылу диады $[t_l]^{M}$ и левому крылу диады $[t_n]^{M}$ (из 14), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).
16) $[t_l]^{M} \supset\subset [t_n]^{M}$ (из 15) и определения $\supset\subset$).

Доказательство (4C1) в подслучае b):
1) $[t_k]^{M} \sqsubseteq [t_l]^{M}$ (допущение).
2) $[t_k]^{M} ? [t_n]^{M}$ (допущение).
3) $[t_k]^{M} \neq [t_n]^{M}$ (условие, определяющее рассматриваемый случай).
4) $[t_k]^{M} = [t_n]^{M}$ (условие, определяющее рассматриваемый случай).
5) $t_k \not\approx t_l$ (из 3) и леммы 0).
6) λ-выражение $At_k\lambda$ принадлежит правому крылу диады $[t_k]^{M}$ (из определения диады терма относительно множества формул и определения λ-A-образа терма относительно множества формул).
7) λ-выражение $At_k\lambda$ принадлежит правому крылу диады $[t_l]^{M}$ (из 1), 6) и определения $\sqsubseteq$).
8) Формула At_kt_l принадлежит левому крылу диады $[t_l]^{M}$ (из 5), 7), определения диады терма относительно множества формул и определения λ-A-образа терма относительно множества формул).
9) $At_kt_l \in$M (из 8), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).
10) $Jt_kt_l \in$M (из 9), замечания 2, того, что M — максимальное C1-непротиворечивое множество формул, и того, что $At_kt_l \supset Jt_kt_l$ формула доказуема в C1).
11) Формула Jt_kt_l принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{M}$ и левому крылу диады $[t_l]^{M}$ (из 10), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).
12) $[t_k]^{M} ? [t_l]^{M}$ (из 11) и определения $\supset\subset$).

Доказательство (5C1):

То, что φ_{M} — всюдуупорядоченная однозначная функция, очевидно (в силу замечания 2 она является даже взаимнооднозначной функцией). Поэтому для доказательства (5C1) остается доказать

(Iφ_M), (IIφ_M), (IIIφ_M).

Доказательство (Iφ_M):

1) $t_k \not\approx t_l$ (допущение).
2) $\varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$ (допущение).
3) $\varphi_M(t_l) \sqsubseteq \varphi_M(t_k)$ (допущение).
4) $[t_k]^M \sqsubseteq [t_l]^M$ (из 2) и определения φ_M).
5) $[t_l]^M \sqsubseteq [t_k]^M$ (из 3) и определения φ_M).
6) λ-выражение $At_k\lambda$ принадлежит правому крылу диады $[t_k]^M$ (из определения диады терма относительно множества формул и определения λ-A-образа терма относительно множества формул).
7) λ-выражение $At_k\lambda$ принадлежит правому крылу диады $[t_l]^M$ (из 2), 6) и определения $\sqsubseteq$).
8) Формула At_lt_k принадлежит множеству M (из 1), 7), определения диады терма относительно множества формул и определения λ-A-образа терма относительно множества формул).
9) λ-выражение $At_l\lambda$ принадлежит правому крылу диады $[t_l]^M$ (из определения диады терма относительно множества формул и определения λ-A-образа терма относительно множества формул).
10) λ-выражение $At_l\lambda$ принадлежит правому крылу диады $[t_k]^M$ (из 3), 9) и определения $\sqsubseteq$).
11) Формула At_lt_k принадлежит множеству M (из 1), 10), определения диады терма относительно множества формул и определения λ-A-образа терма относительно множества формул).
12) Формула At_kt_k принадлежит множеству M (из 8), 11), замечания 2, того, что M — максимальное C1-непротиворечивое множество формул, и того, что $At_lt_k \supset At_kt_k$ формула доказуема в C1).
13) Формула At_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^M$ (из 12) и определения диады терма относительно множества формул).
14) Диада $[t_k]^M$ принадлежит множеству Σ_M (из 13 и определения множества Σ_M).
15) $\varphi_M(t_k) \in \Sigma_M$(из 14) и определения φ_M).

Доказательство (IIφ_M):

1) $t_k \not\approx t_l$ (допущение).
2) $\varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$ (допущение).
3) $[t_k]^M \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$(из 2) и определения φ_M).
4) λ-выражение $At_k\lambda$ принадлежит правому крылу диады $[t_k]^M$ (из определения диады терма относительно множества формул и определения λ-A-образа терма относительно множества формул).
5) λ-выражение $At_k\lambda$ принадлежит правому крылу диады $[t_l]^M$ (из 3), 4) и определения $\sqsubseteq$).

6) Формула At_kt_l принадлежит множеству М (из 1), 5), определения диады терма относительно множества формул и определения λ-А-образа терма относительно множества формул).

7) Формула Jt_kt_l принадлежит множеству М (из 6), замечания 2 и того, что формула $At_kt_l \supset Jt_kt_l$ доказуема в С1).

8) Формула Jt_kt_l принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{M}$ и левому крылу диады $[t_l]^{M}$ (из 7), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

9) $[t_k]^{M} \supset\subset [t_l]^{M}$ (из 8) и определения ?).

10) $\varphi_M(t_k) \supset\subset \varphi_M(t_l)$(из 9) и определения φ_M).

Доказательство (IIIφ_M):

В силу определения функции φ_M для доказательства (IIIφ_M) достаточно доказать следующее утверждение: для любых термов t_k, t_l: если $t_k \not\approx t_l$ и $[t_k]^{M} \sqsubseteq [t_l]^{M}$, то $[t_k]^{M} \supset\subset [t_l]^{M}$. Доказательство указанного утверждения является результатом вычеркивания второго и третьего шагов доказательства утверждения (4С1) в подслучае b).

Лемма 2 *о построении С2-модели по максимальному С2-непротиворечивому множеству формул*

Пусть М — максимальное С2-непротиворечивое множество формул и определения множеств Γ_M, Δ_M и функции φ_M аналогичны соответствующим определениям из условия леммы 1.

Тогда $m_M = \langle \Gamma_M, \Delta_M, \supset\subset, \sqsubseteq, \varphi_M \rangle$ является С2-моделью.

Согласно определению С2-модели, для доказательства леммы 2 достаточно доказать: что

(1С2) Γ_M — непустое множество диад,

(2С2) $\Delta_M \subseteq \Gamma_M$,

(3С2) для любых $[t_k]^{M}$, $[t_l]^{M}$, $[t_n]^{M}$: если $[t_k]^{M} \sqsubseteq [t_l]^{M}$ и $[t_k]^{M} ? [t_n]^{M}$, то $[t_l]^{M} ? [t_n]^{M}$,

(4С2) φ_M — всюдуопределенная однозначная функция, удовлетворяющая для любых $t_k, t_k \in Term$ следующему аналогу условия (IIIφ_M) из леммы 1:

если $t_k \not\approx t_l$ и $\varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$, то $\varphi_M(t_k) \supset\subset \varphi_M(t_l)$,

(5С2) для любых $[t_k]^{M}$, $[t_l]^{M}$: если $[t_k]^{M} \supset\subset [t_l]^{M}$, то $[t_k]^{M} \in \Delta_M$.

Доказательства утверждений (1С2), (2С2) и (3С2) аналогичны доказательствам из леммы 1 утверждений (1С1), (2С1) и (4С1) соответственно.

Доказательство (4С2):

То, что φ_M — всюдуопределенная однозначная функция, очевидно. Далее доказательство утверждения (4С2) аналогично доказательству утверждения (IIIφ_M) из леммы 1.

Доказательство (5С2):

1) $[t_k]^{M} ? [t_l]^{M}$ (допущение).

2) Левое крыло диады $[t_k]^{M}$ непусто (из 1) и определения ?).

3) Существует терм t_n такой, что, по крайней мере, одна из формул Jt_kt_n, Jt_nt_k, At_kt_n, At_nt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ (из 2), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

4) Существует терм t_n такой, что, по крайней мере, одна из формул Jt_kt_n, Jt_nt_k, At_kt_n, At_nt_k принадлежит M (из 3), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

5) $Jt_kt_k \in \mathrm{M}$(из 4), замечания 2, того, что M — максимальное C2-непротиворечивое множество формул, и того, что формулы $Jt_kt_n \supset Jt_kt_k$, $Jt_nt_k \supset Jt_kt_k$, $At_kt_n \supset Jt_kt_k$, $At_nt_k \supset Jt_kt_k$ доказуемы в C2).

6) Формула Jt_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ (из 5), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

7) $[t_k]^{\mathrm{M}} \in \Delta_{\mathrm{M}}$ (из 6) и определения Δ_{M}).

Лемма 3 *о построении C3-модели по по максимальному C3-непротиворечивому множеству формул*

Пусть M — максимальное C3-непротиворечивое множество формул и определения множеств Γ_{M}, Σ_{M} и функции φ_{M} аналогичны соответствующим из условия леммы 1.

Тогда $m_{\mathrm{M}}=<\Gamma_{\mathrm{M}},\Sigma_{\mathrm{M}}, \supset\subset, \sqsubseteq, \varphi_{\mathrm{M}}>$ является C3-моделью.

Согласно определению C3-модели, для доказательства леммы 3 достаточно доказать: что (1C3) Γ_{M} — непустое множество диад, каждая из которых имеет непустое левое крыло; (2C3) $\Sigma_{\mathrm{M}} \subseteq \Gamma_{\mathrm{M}}$; (3C3) для любых $[t_k]^{\mathrm{M}}$, $[t_l]^{\mathrm{M}}$, $[t_n]^{\mathrm{M}}$: если $[t_k]^{\mathrm{M}} \sqsubseteq [t_l]^{\mathrm{M}}$ и $[t_k]^{\mathrm{M}} \supset\subset [t_n]^{\mathrm{M}}$, то $[t_l]^{\mathrm{M}} \supset\subset [t_n]^{\mathrm{M}}$; (4C3) φ_{M} — однозначная функция, удовлетворяющая для любых t_k, $t_k \in Term$ следующему условию: если $t_k \not\approx t_l$ и при этом $\varphi_{\mathrm{M}}(t_k) \sqsubseteq \varphi_{\mathrm{M}}(t_l)$ и $\varphi_{\mathrm{M}}(t_l) \sqsubseteq \varphi_{\mathrm{M}}(t_k)$, то $\varphi_{\mathrm{M}}(t_k) \in \Sigma_{\mathrm{M}}$.

Доказательство (1C3):

Доказательство того, что Γ_{M} — непустое множество диад, аналогично доказательству (1C1). Доказательство непустоты левого крыла любой диады из Γ_{M}:

1) $y \in \Gamma_{\mathrm{M}}$ (допущение).

2) Существует терм t_k такой, что $y=[t_k]^{\mathrm{M}}$ (из 1) и определения Γ_{M}).

3) Для всякого терма t_k формула Jt_kt_k принадлежит множеству M (из 3), того, что эта формула доказуема в C3, и того, что M — максимальное C3-непротиворечивое множество формул).

4) Для всякого терма t_k формула Jt_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ (из 3), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

5) Существует терм t_k такой, что формула Jt_kt_k принадлежит

левому крылу диады y (из 2), 4)).

Доказательства утверждений (2C3) и (3C3) аналогичны доказательствам утверждений (2C1) и (4C1) соответственно.

Доказательство (4C3):

То, что φ_M — однозначная функция, очевидно.

Далее доказательство утверждения (4C3) аналогично доказательству утверждения ($I\varphi_M$) из леммы 1.

Лемма 4 *о построении C4-модели по максимальному C4-непротиворечивому множеству формул*

Пусть M — максимальное C4-непротиворечивое множество формул и определения множеств Γ_M, и функции φ_M аналогичны соответствующим из условия леммы 1.

Тогда m_M=<Γ_M, $\supset\subset$,$\sqsubseteq$,φ_M> является C4-моделью.

Согласно определению C4-модели, для доказательства леммы 4 достаточно доказать, что: (1C4) Γ — непустое множество диад, каждая из которых имеет непустое левое крыло; (2C4) для любых $[t_k]^M$, $[t_l]^M$, $[t_n]^M$: если $[t_k]^M \sqsubseteq [t_l]^M$ и $[t_k]^M ? [t_n]^M$, то $[t_l]^M \supset\subset [t_n]^M$; (3C4) φ_M всюдуопределенная однозначная функция.

Доказательства утверждений (1C4) и (2C4) аналогичны доказательствам утверждений (1C3) и (4C1). То, что φ_M — всюдуопределенная однозначная функция, следует из ее определения.

Лемма 5

Пусть M — максимальное C*i*-непротиворечивое множество формул, m_M — C*i*-модель, построенная по лемме *i*, $|\ |^m M$ — всюдуопределенная на *Form* функция типа $Form \rightarrow \{u, \Lambda\}$, удовлетворяющая для любой формулы α следующему условию: $|\alpha|^m M = u \Leftrightarrow \alpha \in M$.

Тогда $|\ |^m M$ является функцией значения формулы в C*i*-модели m_M.

Доказательство леммы 5 в случае, когда i=1.

В силу определения функции $|\ |^m M$ очевидно, что $|\ |^m M$ является однозначной функцией. Согласно определению функции значения формулы в C1-модели, остается доказать для любых t_k, $t_l \in Term$ и любых α, β∈*Form* следующие восемь утверждений:

(1.1) $|At_kt_l|^m M = u \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l), \text{ если } t_k \not\approx t_l \\ \varphi_M(t_k) \in \Sigma_M, \text{ если } t_k \approx t_l \end{cases}$

(1.2) $|Jt_kt_l|^m M = u \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_M(t_k) \supset\subset \varphi_M(t_l), \text{ если } t_k \not\approx t_l \\ \varphi_M(t_k) \in \Delta_M, \text{ если } t_k \approx t_l \end{cases}$

(1.3) $|Ot_kt_l|^m M = u \Leftrightarrow |At_kt_l|^m M = \Lambda$

(1.4) $|Et_kt_l|^m M = u \Leftrightarrow |Jt_kt_l|^m M = \Lambda$

(1.5) $|\alpha \& \beta|^m M = u \Leftrightarrow |\alpha|^m M = u$ и $|\beta|^m M = u$

(1.6) $|\alpha \supset \beta|^m M = u \Leftrightarrow |\alpha|^m M = \Lambda$ или $|\beta|^m M = u$

(1.7) $|\alpha\equiv\beta|^m M=u \Leftrightarrow (|\alpha|^m M=u \Leftrightarrow |\beta|^m M=u)$

(1.8) $|\neg\alpha|^m M=u \Leftrightarrow |\alpha|^m M=\Lambda$.

Доказательство проводится методом возвратной индукции по числу вхождений пропозициональных связок в формулу. Утверждения (1.1) - (1.4) доказываются без использования индуктивного предположения. Очевидно, что для доказательства (1.1) достаточно доказать следующие четыре утверждения:

(1.1a) если $|At_kt_l|^m M=u$, то $\varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$;

(1.1b) если $|At_kt_l|^m M=u$ и $t_k \approx t_l$, то $\varphi_M(t_k) \in \Sigma_M$;

(1.1c) если $\varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$ и $t_k \not\approx t_l$, то $|At_kt_l|^m M=u$;

(1.1d) если $\varphi_M(t_k) \in \Sigma_M$ и $t_k \approx t_l$, то $|At_kt_l|^m M=u$.

Доказательство (1.1a):

1) $|At_kt_l|^m M=u$ (допущение).
2) $At_kt_l \in$ M (из 1) и определения $|\ |^m M$).
3) Для всякого терма t_n: если $At_nt_k \in$ M, то $At_nt_l \in$ M (из 2), замечания 2, того, что M -- максимальное C1-непротиворечивое множество формул, и того, что для любых термов t_k, t_l, t_n формула $At_nt_k \& At_kt_l \supset At_nt_l$ доказуема в C1).
4) Правое крыло диады $[t_k]^M$ включается в правое крыло диады $[t_l]^M$ (из 2), 3), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).
5) $[t_k]^M \sqsubseteq [t_l]^M$ (из 4) и определения $\sqsubseteq$).
6) $\varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$ (из 5) и определения φ_M).

Доказательство (1.1b):

1) $|At_kt_l|^m M=u$ (допущение).
2) $t_k \approx t_l$ (допущение).
3) $|At_kt_k|^m M=u$ (из 1), 2)).
4) $At_kt_k \in$ M (из 3) и определения $|\ |^m M$).
5) Формула At_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^M$ (из 4), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).
6) $[t_k]^M \in \Sigma_M$ (из 5) и определения Σ_M).
7) $\varphi_M(t_k) \in \Sigma_M$ (из 6) и определения φ_M).

Доказательство (1.1c):

1) $\varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$ (допущение).
2) $t_k \not\approx t_l$ (допущение).
3) $[t_k]^M \sqsubseteq [t_l]^M$ (из 1) и определения φ_M).
4) λ-А-образ терма t_k относительно множества M формул включается в λ-А-образ терма t_l относительно множества M формул (из 3), определения $\sqsubseteq$ и определения λ-А-образа терма относительно множества формул).
5) λ-выражение $At_k\lambda$ принадлежит λ-А-образу терма t_k относительно множества M формул (из определения λ-А-образа

терма относительно множества формул).

6) λ-выражение $At_k\lambda$ принадлежит λ-А-образу терма t_l относительно множества М формул (из 4), 5)).

7) $At_kt_l \in$M (из 2), 6) и определения λ-А-образа терма относительно множества формул).

8) $|At_kt_l|^m M{=}u$ (из 7) и определения $|\ |^m M$).

Доказательство (1.1d):

1) $\varphi_{\text{M}}(t_k) \in \Sigma_{\text{M}}$ (допущение).

2) $t_k \approx t_l$ (допущение).

3) $[t_k]^{\text{M}} \in \Sigma_{\text{M}}$ (из 1) и определения φ_{M}).

4) Существует терм t_n такой, что формула At_nt_n принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{\text{M}}$ (из 3) и определения Σ_{M}).

5) Формула At_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{\text{M}}$ (из 4), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

6) $At_kt_k \in$M (из 5), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

7) $At_kt_l \in$M (из 2), 6)).

8) $|At_kt_l|^m M{=}u$ (из 7) и определения $|\ |^m M$).

Очевидно, что для доказательства (1.2) достаточно доказать следующие четыре утверждения:

(1.2a) если $|Jt_kt_l|^m M{=}u$, то $\varphi_{\text{M}}(t_k) \supset\subset \varphi_{\text{M}}(t_l)$;

(1.2b) если $|Jt_kt_l|^m M{=}u$ и $t_k \approx t_l$, то $\varphi_{\text{M}}(t_k) \in \Delta_{\text{M}}$;

(1.2c) если $\varphi_{\text{M}}(t_k) \supset\subset \varphi_{\text{M}}(t_l)$ и $t_k \not\approx t_l$, то $|Jt_kt_l|^m M{=}u$;

(1.2d) если $\varphi_{\text{M}}(t_k) \in \Delta_{\text{M}}$ и $t_k \approx t_l$, то $|Jt_kt_l|^m M{=}u$.

Доказательство (1.2a):

1) $|Jt_kt_l|^m M{=}u$ (допущение).

2) $Jt_kt_l \in$M (из 1) и определения $|\ |^m M$).

3) Формула Jt_kt_l принадлежит описанию терма t_k относительно множества М и описанию терма t_l относительно множества М (из 2) по определению описания терма относительно множества формул).

4) $[t_k]^{\text{M}} \supset\subset [t_l]^{\text{M}}$ (из 3), определения диады терма относительно множества формул и определения $\supset\subset$).

5) $\varphi_{\text{M}}(t_k) \supset\subset \varphi_{\text{M}}(t_l)$ (из 4) и определения φ_{M}).

Доказательство (1.2b):

1) $|Jt_kt_l|^m M{=}u$ (допущение).

2) $t_k \approx t_l$ (допущение).

3) $|Jt_kt_k|^m M{=}u$ (из 1), 2)).

4) $Jt_kt_k \in$M (из 3) и определения $|\ |^m M$).

5) Формула Jt_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{\text{M}}$ (из 4), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества

формул).

6) $[t_k]^{\mathrm{M}} \in \Delta_{\mathrm{M}}$ (из 5) и определения Δ_{M}).

7) $\varphi_{\mathrm{M}}(t_k) \in \Delta_{\mathrm{M}}$(из 6) и определения φ_{M}).

Доказательство (1.2c):

1) $\varphi_{\mathrm{M}}(t_k) \supset\subset \varphi_{\mathrm{M}}(t_l)$ (допущение).

2) $t_k \not\approx t_l$ (допущение).

3) $[t_k]^{\mathrm{M}} \supset\subset [t_l]^{\mathrm{M}}$ (из 1) и определения φ_{M}).

4) По крайней мере, одна из формул Jt_kt_l, Jt_lt_k, At_kt_l, At_lt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ и левому крылу диады $[t_l]^{\mathrm{M}}$ (из 2), 3), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

5) По крайней мере, одна из формул Jt_kt_l, Jt_lt_k, At_kt_l, At_lt_k принадлежит множеству M (из 4), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

6) $Jt_kt_l \in \mathrm{M}$ (из 5), замечания 2, того, что M — максимальное C1-непротиворечивое множество формул, и того, что каждая из формул $Jt_lt_k \supset Jt_kt_l$, $At_kt_l \supset Jt_kt_l$, $At_lt_k \supset Jt_kt_l$ доказуема в C1).

7) $|Jt_kt_l|^m M = u$ (из 6) и определения $|\ |^m M$).

Доказательство (1.2d):

1) $\varphi_{\mathrm{M}}(t_k) \in \Delta_{\mathrm{M}}$ (допущение).

2) $t_k \approx t_l$ (допущение).

3) $[t_k]^{\mathrm{M}} \in \Delta_{\mathrm{M}}$ (из 1) и определения φ_{M}).

4) Существует терм t_n такой, что формула Jt_nt_n принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ (из 3) и определения Δ_{M}).

5) Формула Jt_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^{\mathrm{M}}$ (из 4), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

6) $Jt_kt_k \in \mathrm{M}$ (из 5), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).

7) $Jt_kt_l \in \mathrm{M}$ (из 2), 6)).

8) $|Jt_kt_l|^m M = u$ (из 7) и определения $|\ |^m M$).

Доказательство (1.3):

1) $|Ot_kt_l|^m M = u \Leftrightarrow Ot_kt_l \in \mathrm{M}$ (из определения $|\ |^m M$).

2) $Ot_kt_l \in \mathrm{M} \Leftrightarrow \neg At_kt_l \in \mathrm{M}$ (из замечания 2, того, что M — максимальное C1-непротиворечивое множество формул, и того, что формула $Ot_kt_l \equiv \neg At_kt_l$ доказуема в C1).

3) $\neg At_kt_l \in \mathrm{M} \Leftrightarrow At_kt_l \notin \mathrm{M}$(из замечания 2, того, что M — максимальное C1-непротиворечивое множество формул).

4) $At_kt_l \notin \mathrm{M} \Leftrightarrow |At_kt_l|^m M = \Lambda$ (из определения $|\ |^m M$).

5) $|Ot_kt_l|^m M = u \Leftrightarrow |At_kt_l|^m M = \Lambda$ (из 1), 2), 3), 4)).

Доказательство (1.4):

1) $|Et_kt_l|^m M=u \Leftrightarrow Et_kt_l \in$ M (из определения $|\ |^m M$).
2) $Et_kt_l \in \mathrm{M} \Leftrightarrow \neg Jt_kt_l \in$ M (из замечания 2, того, что M — максимальное C1-непротиворечивое множество формул, и того, что формула $Et_kt_l \equiv \neg Jt_kt_l$ доказуема в C1).
3) $\neg Jt_kt_l \in \mathrm{M} \Leftrightarrow Jt_kt_l \notin$ M (из замечания 2, того, что M — максимальное C1-непротиворечивое множество формул).
4) $Jt_kt_l \notin \mathrm{M} \Leftrightarrow |Jt_kt_l|^m M=\Lambda$ (из определения $|\ |^m M$).
5) $|Et_kt_l|^m M=u \Leftrightarrow |Jt_kt_l|^m M=\Lambda$ (из 1), 2), 3), 4)).

Доказательства утверждений (1.5) - (1.8) не затрагивают «силлогистических» свойств множества M. Стандартные доказательства (с использованием индуктивного допущения) этих утверждений здесь не приводятся.

Доказательство леммы 5 в случае, когда $i=2$.

В силу определения функции $|\ |^m M$, очевидно, что $|\ |^m M$ является однозначной функцией. Согласно определению функции значения формулы в C2-модели, остается доказать для любых термов t_k, t_l и любых формул α, β утверждения (2.2) - (2.8), являющиеся, соответственно, аналогами утверждений (1.2) - (1.8), и утверждение (2.1).

$$(2.1)\ |At_kt_l|^m M=u \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_\mathrm{M}(t_k) \sqsubseteq \varphi_\mathrm{M}(t_l), \text{ если } t_k \not\approx t_l \\ \varphi_\mathrm{M}(t_k) \in \Delta_\mathrm{M}, \text{ если } t_k \approx t_l \end{cases}$$

Очевидно, что для доказательства (2.1) достаточно доказать следующие четыре утверждения:

(2.1a) если $|At_kt_l|^m M=u$, то $\varphi_\mathrm{M}(t_k) \sqsubseteq \varphi_\mathrm{M}(t_l)$;

(2.1b) если $|At_kt_l|^m M=u$ и $t_k \approx t_l$, то $\varphi_\mathrm{M}(t_k) \in \Delta_\mathrm{M}$;

(2.1c) если $\varphi_\mathrm{M}(t_k) \sqsubseteq \varphi_\mathrm{M}(t_l)$ и $t_k \not\approx t_l$, то $|At_kt_l|^m M=u$;

(2.1d) если $\varphi_\mathrm{M}(t_k) \in \Delta_\mathrm{M}$ и $t_k \approx t_l$, то $|At_kt_l|^m M=u$.

Доказательство (2.1a) аналогично доказательству (1.1a).

Доказательство (2.1b):

1) $|At_kt_l|^m M=u$ (допущение).
2) $t_k \approx t_l$ (допущение).
3) $|At_kt_k|^m M=u$ (из 1), 2)).
4) $At_kt_k \in$ M (из 3) и определения $|\ |^m M$).
5) $Jt_kt_k \in$ M (из 4), замечания 2, того, что M — максимальное C2-непротиворечивое множество формул, и того, что формула $At_kt_k \supset Jt_kt_k$ доказуема в M).
6) Формула Jt_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^\mathrm{M}$ (из 5), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).
7) $[t_k]^\mathrm{M} \in \Delta_\mathrm{M}$ (из 6) и определения Δ_M).
8) $\varphi_\mathrm{M}(t_k) \in \Delta_\mathrm{M}$ (из 7) и определения φ_M).

Доказательство (2.1c) аналогично доказательству (1.1c).

Доказательство (2.1d):

1) $\varphi_M(t_k) \in \Delta_M$ (допущение).
2) $t_k \approx t_l$ (допущение).
3) $[t_k]^M \in \Delta_M$ (из 1) и определения φ_M).
4) Существует терм t_n такой, что формула Jt_nt_n принадлежит левому крылу диады $[t_k]^M$ (из 3) и определения $[t_k]^M$).
5) Формула Jt_kt_k принадлежит левому крылу диады $[t_k]^M$ (из 4), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).
6) $Jt_kt_k \in M$ (из 5), определения диады терма относительно множества формул и определения описания терма относительно множества формул).
7) $At_kt_k \in M$ (из 6), замечания 2, того, что M — максимальное C2-непротиворечивое множество формул, и того, что формула $Jt_kt_k \supset At_kt_k$ доказуема в C2).
8) $At_kt_l \in M$ (из 2), 7)).
9) $|At_kt_l|^m M = u$ (из 8) и определения $|\ |^m M$).

Доказательства утверждений (2.2) - (2.8) аналогичны доказательствам утверждений (1.2) - (1.8) соответственно.

Доказательство леммы 5 в случае, когда i=3.

В силу определения функции $|\ |^m M$, очевидно, что $|\ |^m M$ является однозначной функцией. Согласно определению функции значения формулы в C3-модели, остается доказать для любых термов t_k, t_l и любых формул α, β утверждения (3.1), (3.3) - (3.8), являющиеся, соответственно, аналогами утверждений (1.1), (1.3) - (1.8), и утверждение (3.2).

(3.2) $|Jt_kt_l|^m M = u \Leftrightarrow \varphi_M(t_k) \supset\subset \varphi_M(t_l)$.

Доказательства (3.1), (3.3) - (2.8) аналогичны доказательствам утверждений (1.1.), (1.3) - (1.8) соответственно.

Доказательство (3.2):

Достаточно доказать следующие два утверждения: (3.2a) и (3.2b).

(3.2a) если $|Jt_kt_l|^m M = u$, то $\varphi_M(t_k) \supset\subset \varphi_M(t_l)$,

(3.2b) если $\varphi_M(t_k) \supset\subset \varphi_M(t_l)$, то $|Jt_kt_l|^m M = u$.

Доказательство (3.2a) аналогично доказательству (1.2a).

Доказательство (3.2b):

Имеются два случая: случай, когда $t_k \not\approx t_l$, и случай, когда $t_k \approx t_l$. В первом случае доказательство (3.2b) аналогично доказательству (1.2c). Во втором случае доказательство (3.2b) следующее:

1) $\varphi_M(t_k) \supset\subset \varphi_M(t_l)$ (допущение).
2) $t_k \approx t_l$ (условие, определяющее рассматриваемый случай).
3) $Jt_kt_k \in M$ (из замечания 2, того, что M — максимальное C3-непротиворечивое множество формул, и того, что формула Jt_kt_k доказуема в C3).
4) $Jt_kt_l \in M$ (из 2), 3)).

5) $|Jt_kt_l|^m M=u$ (из 2) и определения $| \,|^m M$).

Доказательство леммы 5 в случае, когда i=4.

В силу определения функции $| \,|^m M$, очевидно, что $| \,|^m M$ является однозначной функцией. Согласно определению функции значения формулы в С4-модели, остается доказать для любых термов t_k, t_l и любых формул α, β утверждения (4.3) - (4.8), являющиеся, соответственно, аналогами утверждений (1.3) - (1.8), и следующие утверждения: (4.1) и (4.2).

(4.1) $|At_kt_l|^m M=u \Leftrightarrow \varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$,

(4.2) $|Jt_kt_l|^m M=u \Leftrightarrow \varphi_M(t_k) \supset\subset \varphi_M(t_l)$.

Доказательства (4.3) - (4.8) аналогичны доказательствам утверждений (1.3) - (1.8), соответственно.

Доказательство (4.1):

Достаточно доказать следующие два утверждения: (4.1a) и (4.1b).

(4.1a) если $|At_kt_l|^m M=u$, то $\varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$;

(4.1b) если $\varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$, то $|At_kt_l|^m M=u$.

Доказательство (4.1a) аналогично доказательству (1.1a).

Доказательство (4.1b):

Имеются два случая: случай, когда когда $t_k \not\approx t_l$, и случай, когда $t_k \approx t_l$. В первом случае доказательство (4.1b) аналогично доказательству (1.1c). Во втором случае доказательство (4.1b) следующее:

1) $\varphi_M(t_k) \sqsubseteq \varphi_M(t_l)$ (допущение).

2) $t_k \approx t_l$ (условие, определяющее рассматриваемый случай).

3) $At_kt_k \in$ M (из замечания 2, того, что M — максимальное С4-непротиворечивое множество формул, и того, что формула At_kt_k доказуема в С4).

4) $At_kt_l \in$ M (из 2), 3)).

5) $|At_kt_l|^m M=u$ (из 2) и определения $| \,|^m M$).

Доказательство (4.2) аналогично доказательству (3.2).

Доказательство теоремы 3.

Для доказательства теоремы 3 достаточно доказать ее контрпозицию: если формула α не доказуема в Сi, то существует такая Сi-модель m, что $|\alpha| \quad \neq u$.

Доказательство:

1) Формула α не доказуема в Сi (допущение).

2) Множество $\{\neg\alpha\}$ является Сi-непротиворечивым множеством формул (из 1) и дедуктивных свойств Сi).

3) Существует максимальное Сi-непротиворечивое множество формул, включающее множество $\{\neg\alpha\}$ (из 2) и аналога леммы Линденбаума).

4) Существует такая Сi-модель m, что $|\alpha|^m=m$ (из 3), леммы i и леммы 5).

5) Существует такая Сi-модель m, что $|\alpha|^m \neq m$ (из 4) и определения

значения формулы в Ci-модели).

В тексте работы [4] имеются ошибки и опечатки. Для того чтобы сформулированная в [4] теорема имела место, достаточно сделать следующие исправления в определениях из [4]:

Исправления в C1-модели: устраняется условие (5), добавляются условия (Iφ), (IIφ), (IIIφ). Исправления в определении C2-модели: устраняется условие (5), добавляется условие (IIIφ). Исправления в определении C3-модели: добавляется условие (Iφ). Исправление в C4-модели: термин «правое крыло» в конце определения C4-модели заменяется термином «левое крыло». Исправления в определении значения формулы в C1-модели для формул вида Jtd: символ «Σ» заменяется символом «Δ». И, наконец, непосредственно следующее за определением C3-модели предложение «Определение функции $|\;|^m$ значения формулы в C3-модели отличается от определения функции значения в C1-модели только в двух случаях для элементарных формул:

$$|Atd|^m = u \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(t) \sqsubseteq \varphi(t), \text{ если } t \not\approx d \\ \varphi(t) \in \Sigma, \text{ если } t \approx d \end{cases}$$

$$|Jtd|^m = u \Leftrightarrow \varphi(t) \supset\subset \varphi(t)».$$

заменяется предложением: «Определение функции $|\;|^m$ значения формулы в C3-модели отличается от определения функции значения в C1-модели только для формул вида Jtd: $|Jtd|^m = u \Leftrightarrow \varphi(t) \supset\subset \varphi(t)$».

В заключение следует заметить, что имеющееся в [4] требование непустоты правого крыла каждой диады, принадлежащей носителю любой Ci-модели, не нарушает справедливости, сформулированной в [4] теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мчедлишвили Л.И.* Позитивная ассерторическая силлогистика и логика одноместных предикатов // Логика и системные методы анализа научного знания. М., 1986.
2. *Смирнов В.А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики и исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев., 1980.
3. *Маркин В.И.* Силлогистические теории в современной логике. М.: МГУ, 1991.
4. *Попов В.М.* Диадические семантики для силлогистических систем. (в печати).

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Научное издание

Логические исследования
Вып. 5

Утверждено к печати
Ученым советом
Института философии РАН

Заведующая редакцией
"Наука – экономика, философия, право" *Т.В. Савич*

Редактор *Л.В. Пеняева*

Художественный редактор *Г.М. Коровина*

Компьютерный набор выполнен
в Институте философии РАН
Компьютерная верстка *С.А. Павлов*

ЛР № 020297 от 23.06.1997

Подписано к печати 15.06.98
Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 18,1. Усл.кр.-отт. 18,4. Уч.-изд.л. 20,1
Тираж 400 экз. Тип. зак. 3707

Издательство "Наука"
117864 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

Санкт-Петербургская типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12

Логические исследования. Вып. 1

М.: Наука, 1993

СОДЕРЖАНИЕ

Логические исследования. Вып. 2

М.: Наука, 1993

СОДЕРЖАНИЕ

Логические исследования. Вып. 3

М.: Наука, 1995

СОДЕРЖАНИЕ

Логические исследования. Вып. 4
М.: Наука, 1997

СОДЕРЖАНИЕ

Коллективные труды,
подготовленные сектором логики
Института философии РАН
и выпущенные издательством "Наука"

1. Логические исследования. М., 1959
2. Применения логики в науке и технике. М., 1960
3. Философские проблемы современной формальной логики. М., 1962
4. Проблемы логики. М., 1963
5. Проблемы логики научного познания. М., 1964
6. Формальная логика и методология науки. М., 1964
7. Логическая структура научного познания. М., 1965
8. Логическая семантика и модальная логика. М., 1967
9. Исследования логических систем. М., 1970
10. Неклассическая логика. М., 1970
11. Логика и эмпирическое познание. М., 1972
12. Философия в современном мире. Философия и логика. М., 1974
13. Методы логического анализа. М., 1977
14. Логический вывод. М., 1979
15. Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М., 1984
16. Индуктивная логика и формирование научного знания. М., 1987
17. Логика научного познания. М., 1987
18. Исследования по неклассическим логикам. М., 1989
19. Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989
20. Логические исследования. Вып. 1. М., 1993
21. Логические исследования. Вып. 2. М., 1993
22. Логические исследования. Вып. 3. М., 1995
23. Логические исследования. Вып. 4. М., 1997

АДРЕСА КНИГОТОРГОВЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ РОССИЙСКОЙ ТОРГОВОЙ ФИРМЫ "АКАДЕМКНИГА"

Магазины "Книга—почтой"

117393 Москва, ул. Академика Пилюгина, 14, корп. 2
197345 Санкт-Петербург, ул. Петрозаводская, 7

Магазины "Академкнига" с указанием отделов "Книга—почтой"

690088 Владивосток, Океанский проспект, 140 ("Книга—почтой")
620151 Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 137 ("Книга—почтой")
664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 289 ("Книга—почтой")
660049 Красноярск, проспект Мира, 84
117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7
117383 Москва, Мичуринский проспект, 12
103642 Москва, Б. Черкасский пер., 4
630200 Новосибирск, ул. Восход, 15, комн. 508б
630090 Новосибирск, Морской проспект, 22 ("Книга—почтой")
142292 Пущино Московской обл., МР "В", 1 ("Книга—почтой")
443022 Самара, проспект Ленина, 2 ("Книга—почтой")
191104 Санкт-Петербург, Литейный проспект, 57
199164 Санкт-Петербург, Таможенный пер., 2
194064 Санкт-Петербург, Тихорецкий проспект, 4
634050 Томск, наб. реки Ушайки, 18
450059 Уфа, ул. Р. Зорге, 10 ("Книга—почтой")
450025 Уфа, ул. Коммунистическая, 49

По вопросам приобретения книг
просим обращаться также
в издательство по адресу:
117864, Москва, ул. Профсоюзная, 90;
тел. (095) 334-98-59