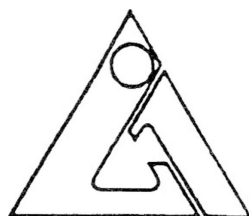


РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ



LOGICAL INVESTIGATIONS

Vol. 7



MOSCOW «NAUKA» 2000

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 7



МОСКВА «НАУКА» 2000

УДК 16
ББК 87.4
Л 69

Редколлегия:

Карпенко А.С. (отв. редактор)
Анисов А.М., Арутюнова Н.Д., Бежанишвили М.Н.,
Быстров П.И., Васюков В.Л., Войшвилло Е.К., Ивлев Ю.В.,
Маркин В.И., Непейвода Н.Н., Паёлов С.А. (уч. секретарь),
Смирнова Е.Д., Успенский В.А., Финн В.К.

Editor-in-Chief: Alexander S. Karpenko,
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences, Moscow

Логические исследования. Вып. 7. — М.: Наука 2000. — 318 с.
ISBN 5-02-008359-3

В седьмом выпуске «Логических исследований» опубликованы статьи, подготовленные по докладам, прочитанным на секциях «Символическая логика» и «Философская логика» Международной конференции «Вторые Смирновские чтения» (Москва, май 1999), а также результаты, полученные в различных областях современной неклассической логики. Сборник открывается большой статьей «Логика на рубеже тысячелетий», выявляющей наиболее значительные феномены развития логики в XX веке, подводящие к вопросам «Что есть логика?», «Что есть логическая система?»

Для логиков, философов, математиков.

The 7th issue of «Logical Investigations» contains the papers prepared on the bases of reports presented at sections «Symbolic Logic» and «Philosophical Logic» of the 2nd International Conference «Smirnov's Readings» (Moscow, May 1999) and some interesting and important results obtained in different fields of modern non-classical logic. The volume begins with the paper «Logic at the millenium» that makes clear the most important phenomena of development of logic in XXth century that lead to the questions «What is logic?» and «What is logical system?»

For logicians, philosophers and mathematicians.

ТП-2000-I-7

ISBN 5-02-008359-3

© Коллектив авторов, 2000

© Российская академия наук и издательство
«Наука», серия «Логические исследования»
(разработка, оформление),
1993 (год основания), 2000

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

Очередной выпуск «Логических исследований», издаваемый на рубеже XX-XXI веков, по нашему мнению, станет вехой в жизни и деятельности научного сообщества логиков.

В данном выпуске опубликованы статьи, подготовленные по докладам, прочитанным на секциях «Символическая логика» и «Философская логика» Международной конференции «Вторые Смирновские чтения» (Москва, май 1999), а также результаты, полученные в различных областях современной неклассической логики. Сборник открывается большой статьей «Логика на рубеже тысячелетий», выявляющей наиболее значительные феномены развития логики в XX веке, подводящие к вопросам «Что есть логика?», «Что есть логическая система?»

То, что эти вопросы стали активно обсуждаться в конце XX века, говорит о некоторой тайне, скрываемой в недрах логического универсума. И тайна эта заключена, видимо, в том, что Логика в своем развитии выходит за пределы собственно логического. Уже другой век попытается разрешить проблему, что представляет собой чисто логическое мышление человека.

Сборник предназначен для всех интересующихся логикой и её приложениями в различных научных дисциплинах.

EDITORS' NOTE

This issue of «Logical Investigations» published at the border-line of XX-XXIth centuries, on our opinion, will become a considerable event in the life and works of scientific logical community.

The volume contains the papers prepared on the bases of reports presented at sections «Symbolic Logic» and «Philosophical Logic» of the 2nd International Conference «Smirnov's Readings» (Moscow, May 1999) and some interesting and important results obtained in different fields of modern non-classical logic. The volume begins with the paper «Logic at the millenium» that makes clear the most important phenomena of development of logic in XXth century that lead to the questions «What is logic?» and «What is logical system?»

The fact that these question are intensively discussed just at the end of XXth century points at some mystery hidden in depths of logical universum. And this mystery is apparently that Logic in its development comes out of limits of what is properly logical. The next century will try to solve the problem: what is human logical thought?

The volume is intended for everybody who is interested in logic and its applications to different scientific disciplines.

ЛОГИКА НА РУБЕЖЕ ТЫСЯЧЕЛЕТИЙ

Abstract. *Development of logic at the end of 20th century generated such questions as «What is logic?» or «What is logical system?». The aim of this paper is to find out and analyze the phenomena that led to such unexpected questions. Firstly, that is a continual variety of logical systems; secondly, an extension of logical system as a result of its restriction; thirdly, an embedding (translation) of richer logical systems into weaker systems; fourthly, a tendency to the investigation of classes of logical systems in the fashion of certain constructions; fifthly, a completion of algebraization of logic; sixthly, the demands of computer revolution, etc. The result of logical concretization of two mathematical constructions – a closure operator introduced at the beginning of this century and a concept of category appeared at the middle of the century – was the beginning of investigations of different arrays of logical systems in a form of some lattice or category construction. Logic apparently loses the quality of science concerned with correctness of reasoning (and this is the phenomenon which expresses a crisis of modeling of truly human logic) and becomes the science about constructions that have an extremely abstract logical nature. In this sense logic is transformed just in metalogic with its new role. And the main point is that Logic comes out of limits of what is properly logical.*

Content of the paper: 1) Introduction; 2) Closure operator and deductive systems; 3) Logical comprehension of continuum; 4) An extension of classical logic as a consequence of its restriction (translations and embeddings); 5) Lattices of theories and logics; 6) Lattices of calculi and other constructions; 7) Constructions called as «category» and «topos»; 8) Closure operator and category together; 9) Algebraization of logic; 10) In a search of logical system.

Bibliogr.: 50-60 pp.

1. Введение

Работа над логическими статьями для «Новой философской энциклопедии», а также над статьей «Логика в России. Вторая половина XX века» [Карпенко 1999], к удивлению автора, заставила его задуматься не столько об итогах развития логики, сколько о некоторых необычных феноменах и фактах, которые к концу двух с половиной тысячелетнего периода развития логики со всей остротой поставили вопрос о том, что такое логика или, более конкретно, что такое логическая система?

Конечно, два традиционных направления развития логики остаются пока непоколебимыми. Это, с одной стороны, синтаксическое направление, проявившееся в наибольшей степени в фундаментальной работе Д. Габбая [Gabbay 1996] и получившее название «labelled» дедуктивные системы, а также непрекращающиеся попытки максимально обобщить генценовские исчисления (см. [Wansing 1998]). И в первом и во втором случае ставится цель единообразного охвата наибольшего числа различных логических систем и даже различных направлений в логике. С другой стороны, остается неизменной тенденция в выработке единого семантического основания для возможно большего разнообразия логических систем [Epstein 1990, Epstein 1994]. При обоих подходах логическая техника становится всё более утонченной и формально разработанной и не оставляет места философским спекуляциям. На IX Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки (Упсала, Швеция, 1991) Г. фон Вригт констатировал: «С логикой случилось то, что она расплавилась в разнообразных исследованиях математики...» [Вригт 1992, с. 89].

На самом деле – это титанические усилия строгой науки представить в совершенно точных терминах понятие «логической системы» и удовлетворить требования компьютерных наук в вопросе о том, что такое *дедуцирование*? То, что с применением аппарата универсальной алгебры, с развитием теории категорий и с возрастающими потребностями в вычислениях и обработке информации представления о логических системах и о самой логике принимают всё более абстрактный характер, как раз говорит о непостижимой глубине данной науки, а может быть даже о некоторой тайне, скрываемой в недрах логического универсума. И эта тайна периодически нежданно-негаданно проявляется в побочных эффектах, указывающих на нечто принципиально новое и требующих переосмысления статуса самой логики. На два таких примера неожиданного появления нового понятия логической системы (дедуктивная система в смысле Тарского и дедуктивная система как категория) мы обратим специальное внимание в нашей статье.

Эти примеры имеют немаловажное методологическое значение, поскольку указывают на то, что Логика имеет непосредственное отношение к базисным, фундаментальным *конструкциям*, которые зарождаются в недрах математического знания, создавая этим новый концептуальный аппарат. Такими конструкциями являются *теория множеств*, *оператор замыкания* с определенными свойствами, *топологические пространства*, *решетка* как определенным образом упорядоченное множество, *моноиды*, се-

мейство базисных комбинаторов, алгебра Линденбаума, понятие категории, и т.д. Сразу отметим, что первая и последняя из указанных конструкций стали парадигмами нового мышления, а некоторые их конкретизации дали необычайной силы импульс развитию самой логики.

Но открытым остается главный вопрос: представляет ли собой логика как таковая некоторую единую конструкцию или это даже невозможно для систем искусственного интеллекта? Один из основных итогов современного развития логики как раз заключается в постановке этого вопроса, на который мы попытаемся ответить, используя большой фактический материал.

2. Оператор замыкания и дедуктивные системы

В 1909 г. Ф.Рисс, как указывает К.Куратовский [1966], а затем и он сам в 1922 г. вводят оператор замыкания на множестве. *Оператором замыкания* на множестве A называется отображение C множества всех подмножеств $(P)A$ (множество всех подмножеств A иногда обозначают как 2^A) в себя, обладающее следующими свойствами [Кон 1968, с. 56]:

- (1) Если $X \subseteq Y$, то $C(X) \subseteq C(Y)$ (монотонность)
- (2) $X \subseteq C(X)$ (рефлексивность)
- (3) $CC(X) = C(X)$ (идемпотентность)

для всех $X, Y \in (P)A$.

Подмножество X из A называется *замкнутым подмножеством*, если $C(X) = X$.

Важную роль в математике играют операторы замыкания на множестве всех подмножеств $(P)A$, обладающие следующим дополнительным свойством: замыкание объединения двух подмножеств множества $(P)A$ равно объединению замыканий этих подмножеств. Такой оператор замыкания называется *топологией* в множестве $(P)A$.

Отсюда понятно значение оператора замыкания в топологии, и не в меньшей мере его роль в универсальной алгебре (см. кроме указанной книги П.Кона монографию [Stanley & Sankarpanavar, 1981]).

Оператор замыкания C на множестве A является *финитарным*, если для каждого $X \subseteq A$

- (4) $C(X) = \cup \{C(Y) : Y \subseteq X \text{ и } Y \text{ является финитным}\}$.

Заметим, что (4) влечет (3).

Одна из самых неожиданных конкретизаций конструкции под названием «оператор замыкания» была дана А.Тарским [Tarski

1930] в виде операции присоединения следствий (consequence operation). Эта конкретизация носит чисто логический характер.

Теория есть произвольное множество предложений некоторого установленного языка $\mathcal{L}$. Множество всех формул, построенных из пропозициональных переменных и логических связок языка $\mathcal{L}$, обозначим посредством Fm . Если X замкнуто относительно операции присоединения следствий (оператора замыкания), т.е. $X = C(X)$, тогда X называется теорией C . $C(X)$ есть наименьшая теория C , содержащая X , и $C(\emptyset)$ есть система всех логически доказуемых или общезначимых предложений C . В терминологии Тарского $C(X)$ называется дедуктивной системой.

Оператор присоединения следствий C называется структурным, если для всех подстановок e (эндоморфизмов) языка $\mathcal{L}$ выполняется условие

$$(5) e(C(X)) \subseteq Ce(X).$$

Открытие того, что подстановки являются эндоморфизмами, и введение условия (5) появилось в работе [Łoś & Suszko 1958].

Операция присоединения следствий C , выполняющая условия (1) – (5), называется стандартной [Wójcicki 1984, p. 20].

Под логикой (пропозициональной) понимается пара $\langle \mathcal{L}, C \rangle$ или сама C , где операция присоединения следствий C не обязательно финитарная, но структурная [Wójcicki 1984, p. 18]. Изучению логических свойств операции присоединения следствий посвящена фундаментальная монография Р. Вуйцицкого [Wójcicki 1988]; логико-алгебраические свойства операции C исследуются Я. Челаковским [Czelakowski 1992].

Связь между операцией C и обычным отношением следования $\vdash$ очевидна: $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ тогда и только тогда, когда $B \in C(\{A_1, A_2, \dots, A_n\})$. Тогда, эквивалентно, дедуктивная система L (в языке $\mathcal{L}$) есть пара $L = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, где $\vdash$ есть отношение следования между множествами формул и отдельными формулами, выполняющее следующие три условия для всех $\Gamma, \Delta \subseteq Fm$ и $A, B \in Fm$:

- (1) $A \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash A$,
- (2) $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \Delta \vdash A$,
- (3) $\Gamma \vdash A$ и $\Delta \vdash B$ для каждого $B \in \Gamma \Rightarrow \Delta \vdash A$,

Дополнительно, $\vdash$ является финитарным, если

$$(4) \Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma' \vdash A \text{ для некоторого конечного } \Gamma' \subseteq \Gamma,$$

и называется структурным, если

$$(5) \Gamma \vdash A \Rightarrow e(\Gamma) \vdash eA$$

для каждой подстановки e .

Другую конкретизацию оператора замыкания мы рассмотрим в следующем разделе на примере функции суперпозиции. Здесь только заметим, что процесс конкретизации не является рекурсивной операцией и в каждом случае требует неординарных способностей, а порой просто выдающегося интеллекта.

3. Логическое осмысление континуума

Самое удивительное, что одновременно с оформлением классической логики [Frege 1879], с построением на её основе грандиозного здания «Principia Mathematica» [Whitehead & Russell 1910-1913] и с появлением первых метатеорем для двузначной пропозициональной логики (непротиворечивость, дедуктивная полнота, функциональная полнота) [Post 1921], – наряду со всем этим проявляется тенденция к критике самих оснований классической логики. Это критика закона исключенного третьего $p \vee \neg p$ Л. Брауэром [Brouwer 1908] и критика закона непротиворечия $\neg(p \wedge \neg p)$, начатая в 1910 г. Я. Лукасевичем (см. [Łukasiewicz 1971]) и Н.А. Васильевым (см. [Васильев 1989]). В 1912 г. К.И. Льюис строит новую теорию *логического следования* взамен теории материальной (классической) импликации, изложенной в Principia Mathematica. Исходным мотивом Льюиса было избавиться от так называемых парадоксов материальной импликации: $p \supset (q \supset p)$, $p \supset (\neg p \supset q)$ и др. В результате вводится новая импликация, названная им «строгой» [Lewis 1912]. Особо обратим внимание на серьезную критику Лукасевичем в начале 20-х годов принципа двузначности (бивалентности) в знаменитой статье «О детерминизме» (см. [Лукасевич 1993]). В итоге, соответственно, появляются интуиционистская логика Гейтинга [Heyting 1930], паранепротиворечивые логики (подробно об этом в фундаментальном труде [Priest, Routley, Norman (eds.), 1989], модальные логики Льюиса [Lewis & Langford 1932], трехзначная логика Лукасевича L_3 [Łukasiewicz 1920] и её конечнозначные обобщения [Łukasiewicz 1922/23]. Заметим, что в знаменитой L_3 (как и во всех её обобщениях) не имеют места закон исключенного третьего, закон непротиворечия и закон сокращения $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (первая в мире логика без сокращения).

То, что эпоха бурного развития классической логики вплоть до великих ограничительных теорем К. Гёделя начала 30-х годов (см. [Gödel 1986]) совпала с появлением и развитием различных неклассических направлений в логике, факт сам по себе примечательный. Но долгое время ему не придавали особого значения, поскольку классическая первопорядковая логика считалась и в

основном считается и сейчас образцом математических рассуждений, а всё остальное от лукавого (и даже интуиционистская и конструктивная логики, представители которой бросили наиболее серьезный вызов классикам), пока У. Куайн [Quine 1970] не ввел термин «девиантная» (deviant) логика, т.е. логика альтернативная к классической, ставший названием для монографий С. Хаак [Haack 1974, 1996].

Имеются весьма веские основания для предпочтения классической двузначной логики высказываний C_2 (о логике предикатов мы скажем позже) всем остальным. В первую очередь – это исключительно простая интерпретация её логических связей посредством двузначных таблиц истинности. Сейчас это кажется и правда до смешного простым, но сто лет назад это не было даже очевидным для Фреге, Рассела и Уайтхеда. Но еще более поразительной (и редкой удачей в науке) оказалась возможность интерпретации функций алгебры логики C_2 посредством контактно-релейных схем, предложенная независимо друг от друга В. И. Шестаковым в 1935 г. (опубликовано в [Шестаков 1941]), К. Шенноном [Shannon 1938] и в этом же году в целой серии работ А. Накасимой.

Применимость классической логики в строгих научных рассуждениях и особенно применимость ее в компьютерных науках оказались настолько плодотворными и впечатляющими, что ряд феноменов, проявившихся в логическом универсуме, вообще остался без внимания.

Во-первых, это *множественность логик*. Сначала появление различных классов конечнозначных логик ([Post 1921] и [Łukasiewicz 1922/23]) и пяти льюисовских модальных систем $S1 - S5$ [Lewis & Langford 1932]¹ не навело на особые размышления. Но тогда же К. Гёдель [Gödel 1932] заметил, что существует счётное

¹ Базисная модальная логика K аксиоматизируется посредством добавления к C_2 аксиомы $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$, где $\Box$ есть оператор необходимости. Правила вывода: modus ponens (MP), подстановка (Subst) и правило Гёделя (RN): из формулы A следует $\Box A$. Эта логика примечательна тем, что в семантике Крипке для модальных логик на отношение достижимости между мирами из W не накладывается никаких ограничений. Другими словами, множество формул K общезначимо во всех шкалах (frames). Логика $K4$ есть $K + \Box p \supset \Box \Box p$ и характеризуется классом всех транзитивных шкал. Логика $S4$ есть $K4 + \Box p \supset p$ и характеризуется классом всех транзитивных и рефлексивных шкал. Наконец, логика $S5$ есть $S4 + p \supset \Box \Diamond p$ и характеризуется отношением эквивалентности на множестве миров W (логика необходимости). Логика называется *квази-нормальной*, если она не удовлетворяет правилу RN. (Модальным логикам посвящена фундаментальная монография [Chagrova & Zakharyashev 1997]).

число логик между интуиционистской логикой **H** и классической **S₂**, которые впоследствии получили название *суперинтуиционистских* логик (si-логики). А это уже было событием в логическом мире. Исходя из этого факта Т. Умезава в 1955 г. (см. [Umezawa 1959]) начинает изучение целых классов логик. Параллельно С. Скрогс [Scroggs 1951] описывает нормальные расширения модальной логики Льюиса **S5**, а М. Дамметт и Е. Леммон [Dummett & Lemmon 1959] рассмотрели логики между **S4** и **S5** и перевод si-логик в них.

Появляются всё новые логики, каждая из которых представляет особый интерес, например, *цепная* логика Дамметта **LC**² [Dummett 1959] или модальная логика Гжегорчика **Grz**³ [Grzegorzcyk 1967]. В середине 60-х годов в результате критики «парадоксов» строгой импликации Льюиса $p \rightarrow (q \rightarrow q)$, $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$ (т.е. истина следует из чего угодно и из лжи следует всё, что угодно) оформляется релевантное направление в логике во главе с системой **R**⁴, добавление к **R** «безобидной» аксиомы $p \supset (p \supset p)$ приводит к логике **RM** с весьма необычными свойствами (о релевантных логиках см. монографию [Anderson & Belnap 1975]). Можно подумать, что идёт «игра в бисер» – конструирование всё более экзотических логик, но с хорошими металогическими свойствами. В то же время, поскольку считается, что существует счетное число логик, то их все можно будет описать и изучить.

Постепенно сложилось понимание логики в гильбертовском духе. Под *логикой* (пропозициональной) в языке $\mathcal{L}$ понимается произвольное множество $L \subseteq Fm$, которое замкнуто относительно правил вывода MP и Subst. Если L конечное множество, то L называется *исчислением*. Анализируя объекты (логики) той же самой природы, например из класса si-логик, мы надеемся изучить и понять саму *природу* данного феномена и подняться на новый уровень знания. Поэтому открываются различные способы конструирования новых логик из данного класса с заданными свойствами. Так, Т. Хосои [Hosoi 1967] вводит понятие «слоя» (slice) для классификации si-логик. В течение долгого времени оставалась надежда найти полное описание *решетки* (см. ниже раздел 5) модальных и si-логик – тогда можно было бы «обозреть» любую логику и даже, может быть, представить их в виде исчисления.

² Получается из интуиционистской логики **H** посредством добавления закона линейности $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$. Так появилась первая si-логика.

³ Получается из минимальной модальной логики **K** посредством добавления аксиомы $\Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \supset p$.

⁴ Грубо говоря, это **H** без закона утверждения консеквента $p \supset (q \supset p)$.

Все эти надежды были разрушены открытием В.А.Янковым [Янков 1963] континуального класса si -логик (напомним, суперинтуиционистских логик, по-другому, промежуточных) и обнаружением способов конструирования модальных и si -логик с весьма «нежелательными» свойствами (неразрешимость, неаксиоматизируемость и т. д.). Более того, А.В.Кузнецов доказывает теорему о континуальности всякого интервала между $\mathbf{H}$ и её собственным расширением [Кузнецов 1971]. Имея в виду исходный гёделевский перевод $\mathbf{H}$ в $\mathbf{S4}$ [Gödel 1933b], можно распространить его и на весь класс si -логик. В результате был установлен изоморфизм всех si -логик в нормальные расширения $\mathbf{S4}$, которых, следовательно, тоже континуум [Максимова и Рыбаков 1974]. Более того, имеет место континуальность для всякого интервала между модальной логикой $\mathbf{K4}$ и её собственным расширением. Впоследствии были обнаружены континуальные классы релевантных логик, например, В.Дзёбьяк [Dziobiak 1983] показал это для промежутка между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{RM}$. Оказалось, что даже одних импликативных si -логик тоже континуум (см. [Chagroff & Zakharyashev 1997, p. 382]). Существует континуум предикатных si -логик с равенством, имеющих интерполяционное свойство [Максимова 1997] и т.д. Наверное, не одному человеку приходила в голову мысль, что если логик даже одного класса континуум, а людей (разумных существ) всего конечное число и пусть каждый рассуждает по-своему, то что же тогда представляет собой Логика как таковая?

С другой стороны, логическая континуальность проявилась уж совершенно неожиданно. В начале 50-х годов для изучения функциональных свойств многозначных логик А.В.Кузнецовым был введен следующий терминологический аппарат, основанный на свойствах оператора замыкания (см. предыдущий раздел). Пусть P_n обозначает множество всех n -значных функций; P_n есть множество всех функций, соответствующее n -значным логикам Поста ($n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$) [Post 1921], и пусть $\mathcal{R} \subseteq P_n$. Определим на множествах функций, содержащихся в P_n , операцию замыкания $[\]$ такую, что $[\mathcal{R}]$ означает множество всех суперпозиций функций из $\mathcal{R}$. Тогда множество всех функций, которые могут быть получены из функций системы $\mathcal{R}$ с помощью операции суперпозиции, называется замыканием $\mathcal{R}$. Очевидно, что операция $[\]$ обладает следующими свойствами:

- (i) Если $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{R}$, то $[\mathfrak{I}] \subseteq [\mathcal{R}]$
- (ii) $\mathcal{R} \subseteq [\mathcal{R}]$
- (iii) $[[\mathcal{R}]] = [\mathcal{R}]$.

Множество функций $\mathcal{R}$ называется замкнутым, если $[\mathcal{R}] = \mathcal{R}$.

Таким образом, условия (i) – (iii) есть не что иное, как ещё один пример конкретизации оператора замыкания C .

Заметим, что множество функций $\mathcal{R}$ называется функционально *полным*, если $[\mathcal{R}] = P_n$. Оказалось, что n -значная ($n > 2$) функционально полная логика образует континуум замкнутых классов функций [Янов & Мучник 1959], в то время как в C_2 таких классов счетное множество. Таким образом, посредством добавления только одного нового истинностного значения к классической логике C_2 совершается переход от дискретности к непрерывности (!), и это является еще одним феноменом логического универсума. Вообще-то говоря, точная природа такого различия между двузначной и трехзначной логиками неясна.

Обратим внимание, что, как и в случае с конкретизацией Тарского, имеем ещё одно понимание логической системы, правда, совсем отличное от $\langle \mathcal{L}, C \rangle$. Для многих специалистов, связанных с вычислительной техникой, инженеров, прикладных математиков и физиков гораздо большее значение имеет представление модели многозначной логики в виде *функциональной системы* [Кудрявцев 1981], обозначаемой (P_n, C) , где P_n есть множество всех функций n -значной логики (или множество всех функций счетнозначной логики P_ω) с заданной на нем операцией суперпозиции C . Тогда функциональная система (P_n, C) зачастую отождествляется с самой многозначной логикой и предстает в виде *алгебры функций*.

Стоит отметить, что уровень конкретизации Кузнецова на порядок выше предыдущего, что ничуть не умаляет значимости введения оператора присоединения следствий Тарским, с чем нам еще придется не раз столкнуться, и непосредственно в следующем разделе.

В итоге, критика «основных» законов и принципов классической логики привела к феномену *логической континуальности*, выраженному как в континуальности самих классов логических систем, так и в наличии континуальности замкнутых классов логических функций. Отсюда возникает вопрос, является ли логическое мышление человека дискретным или континуальным? Ответ на этот вопрос также зависит от того, что мы понимаем под *логикой* или *логической системой*. И в рамках одной ли логической системы мыслит человек?

4. Расширение классической логики как следствие её ограничения (переводы и погружения)

Если изучение функциональных свойств (замкнутые классы, полнота, предполнота, базисы и т.д.) является прерогативой спе-

циалистов в области дискретной математики, инженеров, программистов, физиков, то изучение логики как объекта в виде *исчисления* относится к сфере «чистой» логики. Именно здесь самым удивительным образом проявился феномен, обозначенный в заглавии этого раздела.

Указанная в предыдущем разделе критика законов и основ классической логики носила бескомпромиссный характер в своей тенденции ограничить сферу последней, но никто из перечисленных авторов не мог даже предположить, что на самом деле неявным образом происходит процесс расширения средств и аппарата классической логики C_2 . Из результата В.Гливенко [Glivenko 1929] о погружении C_2 в H следует, что интуиционистская логика даже «богаче» C_2 . Более того, Гёдель показал [Gödel 1933a], что классические законы, включающие только отрицание, конъюнкцию и квантор всеобщности, являются интуиционистскими законами. Поскольку импликация, дизъюнкция и квантор существования определяются через указанные «интуиционистские» логические связки, то можно строго утверждать, что классическая логика предикатов есть подсистема интуиционистской, а значит, вторая есть расширение первой. Гёделем был также предложен метод аксиоматизации льюисовских модальных систем как расширение C_2 [Gödel 1933b]. Оказалось, что n -значные логики (в том числе и предикатные) аксиоматизируются подобным образом [Аншаков & Рычков 1982, 1984.], [Anshakov & Rychkov 1994]. Одним из самых первых примеров в этой области является аксиоматизация в 1971 г. трехзначной логики бессмысленности Д.А.Бочвара B_3 (см. [Финн 1974]), которая, заметим, по своим функциональным свойствам слабее L_3 , в то время как L_3 не является функционально полной. Уже в 1938 г. Д.А.Бочвар при построении B_3 выделяет её трехзначный фрагмент, изоморфный C_2 , т.е. этот фрагмент верифицирует всю классическую пропозициональную логику [Бочвар 1938]. Уже отсюда следует, что B_3 можно строить на основе C_2 ⁵. Отметим

⁵ Оказалось, что трехзначная логика Поста P_3 , которая является функционально полной, содержит 65 нормальных трехзначных изоморфов C_2 и только два из них с одним выделенным значением. Этот результат был получен с помощью компьютерной программы [Комендантский 2000]. Логическая n -значная матрица называется *нормальной*, если ограничение операций на классическое множество истинностных значений $\{0, 1\}$ суть обычные классические операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации. Поскольку затронута тема многозначных логик, обратим внимание на то исключительное развитие, которое они получили к концу XX века. В какой-то степени об этом говорит публикация следующих пяти монографий: [Bołc & Borowik 1992, 1998], [Malinowski 1993], [Карпенко 1997]. [Cignoli, D'Ottaviano, Mundici 2000]. Однако только в [Карпенко 1997] имеется специальный

также, что и релевантная логика R может быть построена на основе C_2 [Meyer 1974] (отрицание де Моргана заменяется на булево отрицание).

Феномен этот, конечно, несколько неожидан и требует своего философского, логического и алгебраического (на самом деле категорного) осмысления. Как и в предыдущем случае, мы имеем дело с расширением логического универсума. Расширение классической логики за счет введения не-булевых операций в первую очередь означает нарушение истинностно-функционального характера последней. Необычайный прогресс в хранении и, главное, в обработке информации на основе булевой (классической) логики имеет не только свои естественные физические пределы. Номо-логический универсум не является *счётным*, а процессы, в нем происходящие, не являются *истинностно-функциональными*. Всё, что можно извлечь из предельного огрубления человеческой логики, впервые представленного работами Шеннона, Шестакова и Накасимы (а это было не что иное, как одна из конкретизаций булевого универсума), как раз извлекает происходящая сейчас компьютерная революция. Но в конечном итоге эта конкретизация тупиковая для создания искусственного интеллекта хоть мало-мальски соответствующего человеческому. Обозначилась явная тенденция к разработке новой логики, которая по своим выразительным средствам намного богаче классической. Этим объясняется пристальное внимание специалистов к многозначным (бесконечнозначным) и нечеткозначным логикам (которые континуальны) в работах по искусственному интеллекту (см. в трудах International Symposium on Multiple-Valued Logic) и в других работах⁶. То, что вначале это выразилось различными внешними ограничениями C_2 , было только сигналом (непонятым) того, что потре-

раздел, посвященный функциональным свойствам многозначных логик. Применению многозначных логик в компьютерных науках посвящена монография Г.Эпштейна [Epstein 1993]. Наконец, обратим внимание, что начиная с 1971 г. проводятся International Symposium on Multiple-Valued Logic, работы которого в основном носят прикладной характер. В [Butler & Butler 1992] дается обзор и анализ работы первых 21 симпозиумов и приводятся различные статистические данные, разработана также база данных статей, авторов и тем.

⁶ Обратим внимание, что к концу 70-х годов под руководством В.К.Финна [Финн 1976] образовалась группа исследователей, которая существенно продвинулась в формализации средствами многозначных логик и теории предикатов с кванторами по конечным множествам ДСМ-метода правдоподобных рассуждений и ДСМ-метода автоматического порождения гипотез. Название «ДСМ-метод» образовано от инициалов Джона Стюарта Милля. Сейчас это целое направление в логике искусственного интеллекта. См. [Финн 1988], [Anshakov, Finn, Skvortsov 1989], [Аншаков, Скворцов, Финн 1993], [Аншаков 2000].

буется более глубокая ревизия логики и, главное, её характера и статуса. Но для этого, как сейчас выяснилось, нужно все-таки определиться в понимании того, что такое *логическая система*? В последующих разделах мы рассмотрим этот вопрос.

Погружение или перевод (embedding или translation) одной логической системы в другую (первым примером которого является теорема Гливенко) к концу нашего века становится темой тщательного исследования. Самое общее понятие перевода состоит в следующем: система S переводима в S' , если существует функция (возможно, но не необходимо отображение) между двумя универсумами рассуждений, которая *сохраняет* (по крайней мере, в одну сторону) *отношение дедуцируемости*. Первая работа, в которой дано общее определение *перевода*, принадлежит Д.Правицу и П.Мамносу [Prawitz & Malmnäs 1968]. Отдельные главы, посвященные этой проблеме, появляются в книгах В.А.Смирнова [Смирнов 1987], Р.Вуйцицкого [Wójcicki 1988] и Р.Эпштейна [Epstein 1990]. О том, что мы имеем дело с важнейшей тенденцией в развитии современной логики, свидетельствует *манифест*: «Переводы между логическими системами» [Carnielli & D'Ottaviano 1997]⁷.

Здесь под логической системой понимается уже хорошо известная нам дедуктивная система в смысле Тарского (берутся первые три пункта определения; см. выше раздел 1). В общем случае под *логикой* $\mathcal{A}$ понимается пара $\langle A, C_A \rangle$, где A есть множество, называемое *областью* (domain) или универсумом A , и C_A есть оператор (замыкания) присоединения следствий. Тогда переводы между логическими системами характеризуются как отображения, которые сохраняют операцию присоединения следствий, т.е. как непрерывные функции между множествами:

Переводом (из) логики $\mathcal{A} = \langle A, C_A \rangle$ в логику $\mathcal{B} = \langle B, C_B \rangle$ является отображение $f: A \rightarrow B$ такое, что для любого $X \subseteq A$

$$f(C_A(X)) \subseteq C_B(f(X)).$$

f называется также *непрерывным отображением*.

Если f есть перевод, то очевидно, что для любой формулы пропозиционального языка $\alpha \in C_A(X)$ следует, что $f(\alpha) \in C_B(f(X))$, но обратное не имеет места. В частности, если $\vdash_A$ и $\vdash_B$ являются синтаксическим отношением следования в логиках $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, соответственно, то f является переводом тогда и только тогда, когда

⁷ Нельзя не отметить поразительный результат В.М.Попова о погружении классической логики предикатов в свой экзистенциальный импликативный фрагмент, доложенный на научно-исследовательском семинаре Логического центра Института философии РАН (12 марта 200 г.).

$$X \vdash_A \varphi \Rightarrow f(X) \vdash_B f(\varphi).$$

Конечно, могут рассматриваться различные ограничения, как на само понятие логики, так и на отображение f . Обычно в литературе при определении перевода между логиками требуется также, чтобы имело место и обратное, т.е.

$$X \vdash_A \varphi \Leftrightarrow f(X) \vdash_B f(\varphi).$$

В этом случае перевод называется *консервативным переводом* [Carnielli & D'Ottaviano 1997, p.72].

Исследование переводов логических систем обеспечивает: новые семантики для неклассических логик, сводит метаматематические и металогические свойства одной системы к другой, чтобы получить нужные результаты, позволяет точно выявить смысл дуальности между логиками (в первую очередь это относится к интуиционистской логике), проясняет и выявляет взаимоотношения между совершенно различными логическими системами⁸.

5. Решетки теорий и логик

Имеется два стандартных (эквивалентных) определения понятия *решетки*. В первом случае выделяется специальный класс частично-упорядоченного множества $\langle L; \leq \rangle$, и преимущество здесь чисто геометрическое (см. ниже); во втором случае решетка $\langle L; \leq \rangle$ характеризуется как алгебра $\langle L; \vee, \wedge \rangle$, т.е. как множество с заданными на нем операциями. В этом случае частичный порядок $\leq$ вводится так: $x \leq y$ означает $x \wedge y = x$.

Непустое множество L с двумя бинарными операциями $\vee$ (дизъюнкция) и $\wedge$ (конъюнкция) на L называется *решеткой*, если L удовлетворяет следующим тождествам [Гретцер 1982]:

- I. (a) $x \vee x = x$
- (b) $x \wedge x = x$ (идемпотентность)
- II. (a) $x \vee y = y \vee x$
- (b) $x \wedge y = y \wedge x$ (коммутативность)
- III. (a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
- (b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (ассоциативность)
- IV. (a) $x \vee (x \wedge y) = x$
- (b) $x \wedge (x \vee y) = x$ (поглощение).

⁸ Заметим, что обнаружение 65 нормальных трехзначных изоморфов C_2 означает не что иное, как существование 65 функций перевода (погружения) f логики C_2 в P_3 ; из них только две переводят C_2 в B_3 .

Решетка L называется *дистрибутивной*, если выполняются законы дистрибутивности:

$$V. (a) x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$(b) x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Решетка L с двумя нульарными операциями 0 и 1 называется *ограниченной*, если:

$$VI. (a) x \vee 0 = x$$

$$(b) x \wedge 1 = x$$

$$VII. (a) x \vee 1 = 1$$

$$(b) x \wedge 0 = 0.$$

Ограниченные решетки обычно называются алгебрами.

В ограниченной решетке L элемент y называется *дополнением* x , если $x \wedge y = 0$ и $x \vee y = 1$. В этом случае элемент y обозначают $\sim x$. *Булевой алгеброй* называется дистрибутивная решетка с дополнениями. Имеется большое число различных (эквивалентных) систем тождеств, определяющих класс булевых алгебр.

Например, алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$ называется *булевой алгеброй*, если $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ есть ограниченная дистрибутивная решетка и выполняются следующие два тождества:

$$(B1). x \vee \sim x = 1$$

$$(B2). x \wedge \sim x = 0.$$

Особое место в исследовании различных логик занимают алгебры (решетки) Гейтинга⁹. Пусть $x, y \in L$. Элемент $z \in L$ называется *псевдодополнением* элемента x относительно y , если z – наибольший элемент со свойством $x \wedge z \leq y$. Тогда $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ есть алгебра Гейтинга, если $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ есть ограниченная дистрибутивная решетка и для бинарной операции $\Rightarrow$ выполняются следующие три тождества [Эсакиа 1985, с. 23]:

$$(H1). x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$$

$$(H2). x \wedge (y \Rightarrow z) = x \wedge (x \wedge y \Rightarrow x \wedge z).$$

$$(H3). (x \wedge y \Rightarrow x) \wedge z = z.$$

Сразу отметим, что рассмотрение различных множеств логических систем в виде определенной структуры (решеточной, псевдобулевой, булевой и т.д.) будет занимать все более значительное место в логических исследованиях и явится одним из главных феноменов развития логики во второй половине XX века.

⁹ Алгебры Гейтинга изучаются под названием *псевдобулевых алгебр* в [Расёва & Сикорский 1972].

Пусть S есть множество всех предложений языка $\mathcal{L}$ и пусть $Th(C)$ есть семейство теорий C (см. раздел 2). Уже Тарский заметил [Tarski 1930a], что $Th(C)$ относительно теоретико-множественного включения образует брауэрову алгебру, т.е. алгебру дуальную к алгебре Гейтинга, с S в качестве её наибольшего элемента и с $C(\emptyset)$ в качестве её наименьшего элемента.

Итак, впервые было установлено, что само множество логических систем (в данном случае, дедуктивных систем в смысле Тарского) образует некоторую конструкцию.

В свою очередь, класс конечно-аксиоматизируемых теорий образует булеву решетку [Смирнов 1987, с. 34].

Интересное развитие результатов Тарского в этой области принадлежит В.Дзику [Dzik 1982], который, в частности, показал, что *содержание решетки* всех теорий классической пропозициональной логики равно множеству интуиционистских теорем.

Обратим внимание на тот факт, что свойства оператора замыкания C индуцируют решетку замкнутых множеств с соответствующими свойствами, которую будем обозначать посредством L_c . Тогда, если оператор замыкания финитарный, т.е. выполняются условия (1) – (C), то получаем *алгебраическую решетку*¹⁰ замкнутых множеств. Понятие алгебраической решетки используется ниже в этом разделе.

В последнее время особое внимание привлекает проблема интерпретируемости теорий в смысле Дж.Мак-Кинси и А.Тарского [McKinsey & McKinsey 1948], доказавших, что система интуиционистских теорем интерпретируема в модальной системе Льюиса S_4 . Понятие интерпретируемости часто используется в современной логике. Классическими применениями являются доказательство относительной непротиворечивости, результаты разрешимости и неразрешимости теорий. Вопрос об интерпретируемости теорий рассмотрен в обстоятельной работе [Mycielski, Pudlak, Stern 1990]¹¹. Под теорией (математической) здесь понимается то, что может быть формализовано средствами первопорядковой логики. При этом желательно было бы выделить классы теорий, которые совместно интерпретируемы одна в другой, поскольку понятно, что теории зависят от выбора языка и исходных понятий.

¹⁰ Полная решетка называется *алгебраической*, если любой её элемент является решеточным объединением $\bigvee$ компактных элементов. Пусть L – полная решетка и $a \in L$. Элемент a называется *компактным*, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из $a \leq \bigvee X$ следует $a \leq \bigvee X_1$ для некоторого конечного подмножества $X_1 \subseteq X$. Заметим, что компактные элементы в L_c есть в точности замкнутые множества $C(X)$, где X является конечным подмножеством A .

¹¹ Исходной работой здесь является статья Я.Мыцельского [Mycielski 1977].

Последнее приводит к конструкции весьма абстрактных объектов, а именно классов эквивалентности первопорядковых теорий. Имеются различные отношения эквивалентности на множестве теорий (см., например, понятие дефинициальной эквивалентности [Смирнов 1987, с. 56]). Мысельский и др. изучают одно из наиболее абстрактных отношений эквивалентности, названное *локальной интерпретируемостью*¹², а сами классы эквивалентности названы *главами* (chapters) математики.

Чтобы избежать тривиальных исключений, рассматриваются только непротиворечивые теории T , с моделями, имеющими более одного элемента. T_1 является локально интерпретируемой в теории T_2 если для каждой теоремы $\delta \in T_1$ существует интерпретация I такая, что $\delta^I \in T_2$. Интерпретация может иметь параметры, переменные могут переводиться как n -ки переменных (в этом случае говорят о n -мерной интерпретации). Будем говорить, что теории T_1 и T_2 имеют одну и ту же *главу* (т.е. попадают в один и тот же класс эквивалентности), если T_1 является локально интерпретируемой в теории T_2 , и наоборот.

Собрание всех глав не является собственным классом и имеет мощность континуума $2^{\aleph_0}$. Локальная интерпретируемость индуцирует частичный порядок на множестве глав. Этот порядок таков, что образует дистрибутивную алгебраическую решетку, названную авторами LC (*the lattice of chapters*).

Обратим внимание, что на самом деле *локальную интерпретируемость* эквивалентным образом можно задать в терминах алгебраического оператора замыкания [Mycielski, Pudlák, Stern 1990, p. 11-12].

Большой интерес представляет изучение алгебраических свойств решетки LC, в особенности, если иметь в виду инвариантность глав теории T относительно языка, в котором T выражена. Отметим некоторые свойства: конечно-аксиоматизируемые теории соответствуют компактным элементам в LC; множество компактных глав и множество глав, содержащих рекурсивно перечислимые теории, являются подрешетками LC; эквациональные главы образуют алгебраическую решетку мощности $2^{\aleph_0}$, но она недистрибутивна и даже немодулярна, и т.д.

Кроме *теорий*, понимаемых как множества предложений, т.е. формул без вхождений свободных переменных, и замкнутых относительно тех или иных операций, особый интерес представляет

¹² Обычная интерпретируемость определяется авторами следующим образом: для теории T_1 в языке $\mathcal{L}_1$ и теории T_2 в языке $\mathcal{L}_2$ говорят, что I есть интерпретация T_1 в T_2 тогда и только тогда, когда $\{\delta^I : \delta \in T_1\} \subseteq T_2$.

изучение *классов логик*, замкнутых относительно соответствующих правил вывода, в первую очередь *modus ponens* (MP) и подстановки (Subst), и каждый из которых является непротиворечивым расширением какой-либо исходной (базисной) логики. При этом желательно представить такие классы логик в виде хорошо известной конструкции.

Первым подобным примером явилось изучение множества всех суперинтуиционистских логик (si-логик), мощность которого $2^{\aleph_0}$ (см. выше раздел 3). Был получен следующий результат: множество всех si-логик, упорядоченное отношением включения, образует алгебру Гейтинга [Hosoi 1969]. Поскольку континуум описать нельзя, то представляет интерес изучение различных подклассов si-логик (см. [Кузнецов 1975], [Rautenberg 1979], [Gabbay 1981], [Chagroff & Zakharyashev 1997]). Одной из наиболее популярных тем является исследование классов семантик, для которых различные si-логики полны.

Изучение решетки одного класса логик может оказаться полезным для другого класса логик. В связи с этим обратим внимание на поразительный результат, полученный одновременно и независимо друг от друга в 1976 г. В.Блоком [Blok 1976] и Л.Эсакиа (см. [Эсакиа 1979]), установившими изоморфизм между *решеткой* всех si-логик и всех нормальных расширений логики Гжегорчика Grz. Решетки модальных логик изучались также в [Максимова & Рыбаков 1974], [Blok 1980] и т.д.

Еще А.Роуз [Rose 1953] показал, что мощность множества всех собственных расширений бесконечнозначной логики Лукасевича L_{ω} , т.е. мощность множества всех логик между L_{ω} и C_2 , является счетной. Элементы этого множества будем называть *sl-логиками*. Р.Григолия [Григолия 1976] установил, что множество всех sl-логик образует алгебру Гейтинга. См. также [Komori 1981] и [Beavers 1993].

Конечно, возникает вопрос, почему решетка теорий является брауэровой? Природа этого феномена скорее всего заключается в природе операции присоединения следствий (замыкания), используемой Тарским при определении логики. Эта операция является топологическим замыканием, а логики — замкнутые множества, в том числе si-логики и sl-логики. Остается вспомнить связь топовбулевых алгебр, псевдобулевых алгебр (алгебр Гейтинга) и брауэровых алгебр: так, всякая псевдобулева (брауэрова) алгебра является алгеброй открытых (замкнутых) элементов подходящей топовбулевой алгебры; во всякой топовбулевой алгебре совокупность открытых (замкнутых) элементов образует псевдобулеву (брауэрову) алгебру.

6. Решетки исчислений и другие конструкции

Выше рассматривались решетки однотипных логик, например класс логик без закона исключенного третьего (si-логики), или класс логик без закона сокращения (sl-логики), или определенный класс нормальных модальных логик. А нельзя ли построить такую *конструкцию*, в которой по крайней мере *основные логические системы* являются «равноправными» элементами? С другой стороны, если исходить из каких-то естественных предпосылок при построении искомой конструкции, то она и должна определить эти основные логические системы.

Пусть мир наполнен объектами, которые обозначим терминами $x, y, z, \dots$. Всё, что можно с ними делать, это переставлять местами, брать в скобки, сокращать и/или воспроизводить термины, т.е. выполнять следующие операции:

$$\begin{array}{ll} I\ x = x, & W\ xy = xyy, \\ B\ xyz = x(yz), & K\ xy = x, \\ C\ xyz = xzy, & S\ xyz = xz(yz) \end{array}$$

для произвольных терминов x, y, z . Наши обозначения для операций есть не что иное, как базисные *комбинаторы* I, B, C, W, K и S , впервые введенные М.Шёнфинкелем [Schönfinkel 1924], а затем Х.Карри (см. [Curry & Feys 1958])¹³. Из исходных комбинаторов получают другие комбинаторы, например $B'\ xyz = x(zy) (=CB)$. Следующие исходные множества комбинаторов $\{B, C, W, K\}$, $\{B', W, K\}$, и $\{S, K\}$ являются эквивалентными и для последнего (а значит и для остальных) доказана *теорема о комбинаторной полноте*, т.е. все другие возможные комбинаторы можно построить из исходных [там же, p.189; см. также: Энгелер 1987, с. 96-97]. Обратим внимание, что множество базисных комбинаторов с операцией аппликации образует структуру моноида¹⁴. Открытие принадлежит Х.Карри, а первая работа А.Чёрчу [Church 1937; см. также: Böhm & Dezani-Ciancaglini 1989]. Такие моноиды еще называют *C-моноидами*.

Оказалось, что между комбинаторами и импликативными формулами существует однозначное соответствие [там же, ch.9E].

¹³ Заметим, что Шёнфинкель и Карри исходили из других соображений при введении комбинаторов.

¹⁴ Моноидом называется упорядоченная тройка $\mathcal{M} = \langle M, *, e \rangle$, где

- (i) M – некоторое множество;
- (ii) $*$ – бинарная операция на M , которая *ассоциативна*, т.е. $(x * y) * z = x * (y * z)$ для любых $x, y, z \in M$;
- (iii) e – элемент множества M , называемый *единицей* моноида, для которого $e * x = x * e$ при всех $x \in M$.

Главным результатом этого соответствия является следующий важный факт: полное множество исходных комбинаторов определяет собой импликативный фрагмент $H_{\rightarrow}$ интуиционистской пропозициональной логики H [там же, р.315].

В силу указанного соответствия (оно еще называется *изоморфизмом Карри-Ховарда*) теперь в качестве *элементарных* (логических) объектов, из которых будет строиться логическая конструкция, возьмем следующие импликативные формулы:

- I. $(p \rightarrow p)$ (тождественность)
- B. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ (слабая транзитивность)
- C. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ (перестановка)
- W. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (сокращение)
- K. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (ослабление).

А в качестве операций над нашими объектами будут следующие два логические правила вывода: *modus ponens* (MP) и *подстановка* (Subst).

Основным требованием к нашим элементарным объектам, т.е. к импликативным формулам, будет требование их *независимости* друг от друга [Чёрч 1960, § 19]. Легко показать, что формула I не является независимой в приведенном выше исходном множестве объектов, поскольку она доказуема из C, K или W, K. Поэтому ослабим формулу K посредством K_1 :

$$K_1. (p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow (p \rightarrow q)).$$

Утверждение 1. *Множество формул I, B, C, W, K_1 является независимой аксиоматизацией $H_{\rightarrow}$* , [Карпенко 1997а, с. 112].

Теперь, в силу доказательства независимости элементов множества $\{I, B, C, W, K_1\}$, мы можем перейти к построению того, что будем называть *логической конструкцией*. Рассмотрим семейство всех подмножеств этого множества. Как известно, семейство всех подмножеств некоторого множества образует булеву решетку, упорядоченную отношением включения. В нашем случае булева решетка имеет $32 (=2^5)$ элементов с $H_{\rightarrow}$ в качестве единицы. Остальные вершины решетки представляют собой подлогики $H_{\rightarrow}$. Построенную конструкцию обозначим посредством $L(H_{\rightarrow})$.

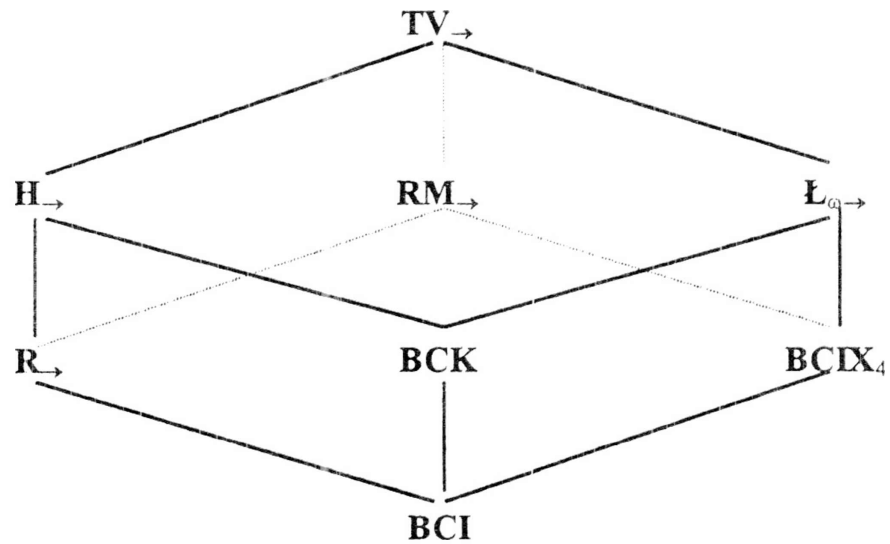
Пусть $TV_{\rightarrow}$ обозначает импликативный фрагмент классической пропозициональной логики S_2 . Тогда возникает следующая нетривиальная проблема, впервые поставленная автором этой статьи в 1992 г.: *существует ли независимая аксиоматизация $TV_{\rightarrow}$ формулами I, B, C, W, K_1 и X?* Поскольку для формулы X в силу

изоморфизма Карри–Ховарда не существует соответствующего комбинатора, то мы с необходимостью должны выйти за пределы «интуиционистского универсума» объектов, обозначенных терминами $x, y, z, \dots$ Как оказалось, существуют различные кандидаты на место мета-формулы X (в отличие от объектных формулах I, B, C, W, K_1), например,

$$X_4. (p \rightarrow p) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow r \rightarrow (((((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r).$$

Утверждение 2. Множество формул I, B, C, W, K_1, X_4 является независимой аксиоматизацией $TV_{\rightarrow}$ [Карпенко 1997а, с. 120].

В результате получаем конструкцию $L(TV_{\rightarrow})$:



Две импликативные логики из этой конструкции заслуживают особого разъяснения. $RM_{\rightarrow}$ есть импликативный фрагмент логики RM , которая получается за счёт добавления к релевантной логике R формулы $p \rightarrow (p \rightarrow p)$ (см. [Anderson & Belnap 1975]). $L_{\omega\rightarrow}$ есть импликативный фрагмент бесконечнозначной логики Лукасевича L_{ω} [Łukasiewicz 1929]. В нашей аксиоматизации $L_{\omega\rightarrow}$ есть $IBCK_1X_4 = BCKX_3$ [Karpenko & Popov 1997], где X_3 есть X_4 без антецедента $(p \rightarrow p)$.

Обратим внимание, что конструкция $L(TV_{\rightarrow})$ является *максимальной* в том смысле, что между $RM_{\rightarrow}$ и $TV_{\rightarrow}$ нет промежуточных логик [Avron 1984]¹⁵. В силу этого можно считать что данная конструкция $L(TV_{\rightarrow})$ содержит *фундаментальные* (базисные) импликативные логики.

¹⁵ В [Карпенко 1999а] построена также булева решетка импликативных логик с $TV_{\rightarrow}$ в качестве единицы, включающая в себя такие подлогики, как $E_{\rightarrow}$, $S4_{\rightarrow}$ и $S5_{\rightarrow}$.

Теперь рассмотрим конструкцию полной (full) классической пропозициональной логики $L(TV)$.

Из работы М.Вайсберга [Wajsberg 1937, §5] следует, что добавление формулы $0 \rightarrow p$ (где 0 является константой, интерпретируемой как *ложь*) к произвольной $TV_{\rightarrow}$ дает TV . Обозначим формулу $0 \rightarrow p$ посредством N .

Утверждение 3. Множество формул I, B, C, W, K, X_4, N является независимой аксиоматизацией TV .

Обратим внимание, что $BCKX_4N$ есть полная (full) L_{ω} (см. [Turquette 1963]). Таким образом, в максимальной конструкции $L(TV_{\rightarrow})$ только две импликативные логики с 0 имеют решеточную структуру, определяемую естественным путем. Это является следствием того, что в импликативных фрагментах данных логик имеет место полином

$$p \vee q = (p \rightarrow q) \rightarrow q^{16}.$$

Из построения нашей конструкции следует, что две логики занимают особое положение: это классическая пропозициональная логика и бесконечнозначная логика Лукасевича L_{ω} (о последней см. в [Карпенко 1997, гл.6]). Заметим, что изучение алгебраических свойств последней стало отдельным направлением в алгебраической логике (см. [Mundici 1986]; о самой логике L_{ω} см. в [Карпенко 1997, гл.6]).

Наконец, выделим два основных принципа порождения новых пропозициональных логик и целых их классов:

1. В каждом случае нахождение *нового* X_i определяет различные подлогики из множества $\{I, B, C, W, K_1, X_i, N\}$;
2. Применение операции подстановки порождает целые классы (бесконечные) подлогик в $TV_{\rightarrow}$ (и других) конструкциях.

В сущности мы имеем дело с классификацией логических исчислений посредством построения различных конструкций в виде конечных булевых решеток [Карпенко 1997а; Karpenko 2000].

Подводя итог, можно сказать, что рассмотренные конструкции в виде решеток пропозициональных логик хорошо показывают взаимоотношения между различными логиками, пути их расширения и то, какое место они занимают по отношению к классической двужначной логике TV . Но и сама конструкция $L(TV)$ есть модель для TV , причем довольно-таки сложной природы, которая содержит в себе, например, специальным образом упорядоченные топологические пространства, соответствующие алгеб-

¹⁶ См. работу об импликативных алгебрах, в которых имеет место данный полином [Tortens 1988].

рам для $\mathbf{L}_\omega$ [Martinez 1990]. Булева решетка различных подлогики приводит к мысли о том, что логическое пространство является весьма неоднородным. Вопрос о какой-то *выделенной* логике, свойственной человеческому разуму, вообще нельзя ставить. В каком-то смысле в одном из приближений конструкция $L(\mathbf{TV})$ и есть логика.

Конечно, остается проблема построения такой конструкции $L(\mathbf{TV})$, элементами которой являются полные (full) логики, как это получилось для $\mathbf{L}_\omega$. Оказывается, «подобные» конструкции имеются, но не в виде конечной булевой решетки, а в виде обыкновенного куба с вершиной $\mathbf{TV}$. Разница в том, что вопрос о *независимости* исчисления, являющегося одной из вершин куба, вообще не ставится. По-видимому, первая такая конструкция была представлена в [Ono 1990], где в качестве исходного исчисления берется так называемое *полное исчисление Ламбека* $\mathbf{FL}$ (грубо говоря, это интуиционистская логика без структурных правил). Кроме комбинирования $\mathbf{FL}$ со структурными правилами, соответствующих формулам $\mathbf{C}$, $\mathbf{W}$ и $\mathbf{K}$, к некоторым логикам добавляется еще закон снятия двойного отрицания $\neg\neg p \rightarrow p$. В чистом виде куб логических исчислений с вершиной $\mathbf{TV}$ представлен [Battilotti & Sambin 2000], где строится секвенциальное исчисление *базисной* (basic) логики $\mathbf{B}$. Комбинирование последней осуществляется с тремя независимыми свойствами $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{S}$, где $\mathbf{C}$ есть аксиомы (правила) для двойного отрицания, $\mathbf{D}$ состоит из обычных свойств импликации, удовлетворяющих теореме дедукции, и $\mathbf{S}$ есть структурные правила, соответствующие формулам $\mathbf{W}$ и $\mathbf{K}$, плюс идентификация двух констант, выражающих ложь. Заметим, что логика $\mathbf{B}$ подобрана таким образом, что $\mathbf{BD}$ есть *интуиционистская линейная логика* (без экспоненциалов), а $\mathbf{BCS}$ является *ортологикой*.

Поскольку построение данного куба выглядит довольно-таки искусственно, то о едином «логическом пространстве» не может быть и речи. Это является следствием того, что *независимость* аксиом и *независимость* свойств – совершенно разные принципы для построения логических конструкций. Отметим, что в первом случае неожиданно проявились преимущества гильбертовских исчислений.

Имеются и другие конструкции логики в виде кубов. Весьма примечательным (учитывая связь λ -абстракции, введенной А. Чёрчем, с комбинаторами) является λ -куб, который состоит из 8 типовых систем лямбда-исчислений. При этом каждое ребро куба представляет отношения включения [Howard 1980].

Таким образом, логика из науки о *правильных рассуждениях* постепенно превращается в науку о классах логических систем, а

на самом деле в науку о логических конструкциях. О том, что это так, – в следующих разделах.

7. Конструкции под названием «категория» и «топос»

Более 50 лет назад усилиями С.Мак-Лэйна и С.Эйленберга была создана *теория категорий*, одна из наиболее важных математических теорий нашего века [Eilenberg & MacLane 1945]. Новая теория позволила обнаружить совсем неожиданные и удивительные взаимоотношения внутри различных разделов математики и, самое главное, под влиянием идей В.Ловера выступила мощным средством для разработки новых оснований математики (см. его последнюю работу с весьма примечательным названием «Концептуальная математика» [Lawvere & Schanuel 1997]).

Во всем этом наблюдается некоторая негативная реакция на теорию множеств («основу всех основ»). Теперь в явном виде постулируется, что наши исходные элементы «структурированы»¹⁷, а сама конструкция теории множеств должна быть более гибкой.

Итак, «мир» наполнен не *элементами*, по некоторым свойствам которых образуются множества этих элементов, а *категориями* с образующими их свойствами, которые, конечно, могут быть различными.

Стандартное определение категории C [Lawvere & Schanuel 1997] включает в себя:

- (1) Объекты $A, B, C, \dots$
- (2) Отображения (морфизмы, стрелки и т.д.): $f, g, h, \dots$
- (3) Чтобы указать, что f есть отображение, мы пишем $A \xrightarrow{f} B$ (или $f: A \rightarrow B$) и говорим, что « f есть отображение из A в B ».
- (4) Для каждого объекта A имеет место тождественное отображение, которое обозначаем тождеством 1_A , так что $A \xrightarrow{1_A} A$ есть одно из отображений из A в A .

¹⁷ Тема структурализации логических и математических объектов заслуживает специального рассмотрения. Следствием ситуационной семантики явилась потребность рассматривать объекты теории как структурированные, в которые могут входить другие объекты как их компоненты [Hartonas 1997]. Следствием семантик для неклассических логик, в первую очередь многозначных, стала структурализация истинностных значений (см. гл. 10 в [Карпенко 1997]). О структурализации «возможных миров» см. там же (сноска 3 в гл. 9). Отметим также, что одним из следствий примечательной связи между функциональными свойствами конечнозначных логик Лукасевича и простыми числами, открытой В.К.Финном в 1970 г. (см. [Бочвар & Финн 1972]), является структурализация самих простых чисел в виде корневых деревьев (см. гл. 12 в [Карпенко 1997], а также [Karpenko 1989]).

(5) Для каждой пары отображений

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

композиция отображения

$$A \xrightarrow{g \text{ следует за } f} C \text{ (мы обозначаем это отображение посредством } g \circ f)$$

удовлетворяет следующим правилам

(i) ЗАКОНЫ ИДЕНТИЧНОСТИ: если $A \xrightarrow{f} B$,
то $1_B \circ f = f$ и $f \circ 1_A = f$.

(ii) ЗАКОН АССОЦИАТИВНОСТИ:
если $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$,
то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Закон ассоциативности позволяет нам не обращать внимания на расстановку скобок.

Очень многие и хорошо известные нам конструкции обладают свойством быть *категорией*.

Например,

Категория	Объекты	Стрелки
Set	все множества	все функции между множествами
Top	все топологии	непрерывные функции между топологическими пространствами
Mon	моноиды ¹⁸	гомоморфизмы моноидов
Pos	частично упорядоченные множества	монотонные функции

Последняя категория играет центральную роль в построении *топосов*.

Как подчеркивает П.Т.Джонстон, одной из принципиальных особенностей теории категорий является то, что она принимает «морфизм» как первичное понятие на одном уровне с понятием «объект» [Джонстон 1986, с. 16].

Как и в случае с операцией замыкания определение понятия *категория* слишком общее, поэтому накладываются различные ограничения. Важным понятием в теории категорий является *произведение* объектов. Произведением двух объектов a и b в категории $\mathcal{C}$ есть объект c из $\mathcal{C}$ вместе с двумя морфизмами (отображениями), которые называются проекциями $p: c \rightarrow a$ и $q: c \rightarrow b$ такими, что для всех объектов d с морфизмами $f: d \rightarrow a$ и $g: d \rightarrow b$ есть

¹⁸ Заметим, что между моноидом M и категорией $\mathcal{C}$ имеется связь: если $\mathcal{C}$ категория с единственным объектом a , а M совокупность её стрелок, то тройка $\langle M, \circ, 1_a \rangle$ является моноидом [Голдблатт 1983, с. 44]. П.Кон называет категорию *частичной полугруппой* [Кон 1968, с.68].

единственный морфизм $h: d \rightarrow c$, такой, что $p \circ h = f$ и $q \circ h = g$. Как и другие свойства категорий произведение объектов является *универсальным свойством*. В действительности, с категорной точки зрения, теоретико-множественное произведение, прямое произведение групп, произведение топологических пространств и конъюнкция высказываний в дедуктивной системе – всё это примеры категорного понятия: произведения объектов.

Говорят, что категория $\mathcal{C}$ допускает экспоненцирование, если в ней существует произведение любых двух объектов и если для любых двух объектов a и b существует отображающий объект b^a (отображение объекта a в объект b), называемый *экспоненциалом*, и отображение (стрелка) $ev: b^a \times a \rightarrow b$, называемое *отображением значения*. Например, если A и B – конечные множества с m и n элементами соответственно, то множество B^A (множество всех функций из A в B ; поэтому отображающие объекты также называются *пространствами функций*) также конечно и имеет n^m элементов. В выражении n^m число m называется *экспонентой*. Это объясняет выбранную выше терминологию.

Многие категории обладают произведениями (и суммами), но только некоторые имеют отображающие объекты. Категории с произведениями, в которых каждая пара объектов имеет отображающий объект, называются *декартово замкнутыми категориями*. Почему декартово – понятно, а замкнутость (как обычно) обозначает, что отображение от одного объекта в другой не образует ничего вне категории.

Только в 1960 г. А. Гротендик (A. Grothendieck) пришел к открытию класса категорий, который впоследствии назвал *топосами*¹⁹ и которые являются исключительно сложными теоретико-множественными конструкциями. Ф. Ловер к концу 60-х годов заметил, что каждый топос Гротендика имеет объект истинностных значений, а само двухэлементное множество $\{\text{истина}, \text{ложь}\}$ можно рассматривать как «объект истинностных значений» в категории множеств. Этим фундаментальным открытием была значительно продвинута разработка теории топосов. В результате появилось понятие *классификатора подобъекта*, которое в свою очередь вводит в обиход понятие «подобъекта», являющегося категорным аналогом понятия подмножества. Классификатор подобъектов обозначается посредством Ω и следствием существования такого объекта является всё то, что мы можем сказать о

¹⁹ Распространена точка зрения, что греческое слово *topos*, означающее местоположение или ситуацию, было принято, чтобы обозначить особый вид категории. Однако К. Мак-Ларти [McLarty 1990] отмечает, что «(topos)» есть не греческое, а французское слово, образованное от «(topologie)».

подобъектах X и что может быть переведено в разговор об отображениях X в Ω . Заметим, что *категория* подобъектов может содержательно интерпретироваться как «множество истинностных значений». В итоге *элементарный топос* (т.е. его свойства могут быть описаны в первопорядковом языке) может быть определен как декартово замкнутая категория с классификатором подобъектов [Голдблатт 1983, с. 97]. Заметим, что *категория подобъектов данного объекта в любой категории является категорией Pos*, играющей такую важную роль в логике. Как отмечается в [Lawvere & Schanuel 1997, p. 344], логика в узком смысле слова является преимущественно логикой о подобъектах: главное то, как они соотносятся, и то, что их наиболее основные взаимоотношения даны посредством отображений в любой категории.

Самым простым примером топоса, который служит обоснованием введения такового, является категория **Set**. Таким образом, теория топосов подводит к новому способу понимания множеств. Образно говоря, топос есть категория, которая также обладает достаточно богатой логической структурой. С философской точки зрения интересен тот факт, что все топосы есть модели для интуиционистской логики **I**. Это является следствием того, что алгебра подобъектов любого элементарного топоса является алгеброй Гейтинга. Отметим также, что поиски категорных вариантов логики первого порядка привели к понятию *логической категории* (см. [Кок & Рейес 1982]). Использование же аппарата теории категорий для изучения самой логики привело к появлению понятия *категорной логики*.

Применение теории категорий к логике получило новый и весьма эффективный импульс, когда *сама дедуктивная система* была представлена в виде *категории* [Lambek 1968], а на самом деле в категорных терминах можно дать определение дедуктивной системы.

Пусть под объектами дедуктивной системы, как обычно, понимаются формулы $A, B, \dots$ с индексами или без них, а под стрелками – доказательства $f: A \rightarrow B$ или $f: A \vdash B$. Дедуктивная система должна иметь следующие операции над стрелками: для каждого объекта A нульарную операцию, называемую *идентичной стрелкой* $1_A: A \vdash A$, и бинарную операцию, композицию, которая является сингулярной формой правила сечения

$$\frac{f: A \vdash B \quad g: B \vdash C}{gf: A \vdash C}$$

Дедуктивная система является категорией тогда и только тогда, когда следующие уравнения между стрелками (доказательствами) имеют место [Došen 1996, p. 250]

$$f1 = f, \quad 1f = f$$

$$(hg)f = h(gf).$$

Большим достижением оказалась формулировка доказательства Ламбеком *теоремы о функциональной полноте* [Lambek 1974] (см. также [Lambek & Scott 1986, Part I]), которая явилась категорным аналогом и обобщением теоремы дедукции, приведшей к усилению генценовской характеристики интуиционистской импликации, и одновременно явилась категорным обобщением теоремы о комбинаторной полноте. К.Дошен переформулирует и упрощает доказательство этой теоремы и дает ей название *теоремы о дедуктивной полноте*, извлекая из нее новые следствия. В работе Дошена разрабатываются также важные виды категорий, соответствующие фрагментам различных пропозициональных логик. Специально для импликативных логик, являющихся подлогиками $\mathbf{H}_\rightarrow$ (см. выше раздел 6), категорный подход разрабатывается В.Л.Васюковым [Васюков 2000].

Однако вернемся к исходной работе Ламбека [Lambek 1968]. Здесь впервые в литературе изучается понятие *эквивалентности доказательств*. Это понятие оказывается довольно-таки громоздким, поскольку Ламбек использует системы генценовского типа (логистического) с правилами введения связок слева и справа от стрелок. В связи с этим обратим внимание на работу Г.Минца [Минц 1977], сумевшего значительно упростить аппарат за счет перехода от выводов к соответствующим им термам. Это позволило сочетать преимущества натуральных и логистических выводов. Минц строит дедуктивную систему **НСС** гильбертовского типа, в которой определяет отношение эквивалентности для выводов. Это превращает **НСС** в замкнутую категорию: объектами являются формулы, а морфизмами – классы эквивалентности выводов. Особо отметим приведенный *перевод* с языка теории категорий в язык теории доказательств, например, такого сложного понятия, как «естественное преобразование».

8. Оператор замыкания и категория – вместе

С построением теории категорий появилась возможность создания логического универсума гораздо более богатого, чем конструкция под названием «решетка», элементами которой являются логики в том или ином смысле.

В самом общем случае объектами являются логики вида $\mathcal{A} = \langle A, C_A \rangle$, где A есть множество (предложений) и C_A есть оператор (замыкания) присоединения следствий, выполняющий условия (1) – (3). Такие дедуктивные системы Вуйцицкий назвал пропозициональными исчислениями [Wójcicki 1984, p. 18]. Тогда морфизмы между объектами есть не что иное, как переводы (см. выше раздел 3). В результате мы получаем конструкцию, которая является категорией. В [Inoue 1996, p. 312] такая категория обозначается посредством **Emb** (погружение), а в [Carnielli & D'Ottaviano 1997, p. 74] – **Tr** (перевод). В последней работе отмечается, что логики вместе с переводами образуют биполную категорию, т.е. категорию, для которой определены произведения и суммы.

Уже отмечалось, что топологические пространства можно определить как множества с оператором замыкания, более строго это выглядит следующим образом. К свойствам монотонности (i), рефлексивности (ii) и идемпотентности (iii) добавляются еще два:

$$(iv) C(\emptyset) = \emptyset,$$

$$(v) C(X \cup Y) = C(X) \cup C(Y).$$

Тогда категория топологических пространств с непрерывными функциями (в качестве морфизмов) является полной подкатегорией **Tr**, т.е. переводы между топологическими пространствами есть непрерывные функции в топологическом смысле. Таким образом, некоторые топологические результаты представляют также и логический интерес.

Подчеркнем, что элементами решетки теорий, обнаруженной Тарским, являются теории, сформулированные в одном и том же языке. В алгебраической решетке **LS** элементами являются теории, сформулированные в разных языках, т.е. с разными словарями нелогических терминов. Остается еще одна возможность: рассмотреть класс разноязыких теорий, основанных на различных логиках. Тогда возникает следующий вопрос: образует ли совокупность таких теорий какую-либо конструкцию? [Васюков 1995, с. 279]. В этой работе показывается, что в общем случае не образуется даже решетка теорий. Чтобы обойти эту трудность, В.Л.Васюков прибегает к теоретико-категорному подходу. В этом случае класс разноязыких теорий рассматривается как некоторая категория **Th**, объекты которой есть элементарные теории (удовлетворяющие первым трем условиям для оператора замыкания), сформулированные в различных языках и основанные на различных логических исчислениях, а морфизмами являются сформулированные определенным образом переводы одной теории в другую. Полученная категория является дуально-замкнутой категорией, где вместо про-

изведения берется сумма, а вместо импликации – дуальная ей операция. В итоге построенная конструкция **Th** названа «котопосом» [Васюков 1995, с.291]. Подобный результат Васюков рассматривает как категорное обобщение результата Тарского: там исчисление систем образует алгебру Брауэра одноязычных теорий, а здесь получен топос Брауэра разноразличных теорий.

Отметим также, что с категорной точки зрения может быть рассмотрена и интерпретируемость теорий [Gaifman 1976]: I называется точной (faithful) интерпретацией теории T_1 в теорию T_2 , если

$$T_1 \vdash \delta \text{ тогда и только тогда, когда } T_2 \vdash \delta^I.$$

Точная интерпретируемость T_1 в T_2 и *наоборот* влечет категорную эквивалентность T_1 - и T_2 - пополнений *предтопоса*²⁰. Для обычной интерпретируемости это не имеет места.

В начале данного раздела мы видели, что в качестве объектов могут выступать сами дедуктивные системы, а морфизмами между такими объектами считаются переводы одной дедуктивной системы в другую. Теперь можно выйти на уровень еще большего обобщения. Представление дедуктивных систем в виде категории наводит на мысль использовать понятие *функтора*, являющегося одним из основных понятий в исходной работе родоначальников теории категорий [Eilenberg & Mac Lane 1945] в качестве погружающей операции. Функтор – это отображение из одной категории в другую, сохраняющее категорную структуру. На категорном языке это выглядит следующим образом.

Функтором F из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ называется функция, ставящая в соответствие каждому объекту A из $\mathcal{C}$ объект $F(A)$ из $\mathcal{D}$, и еще одна функция, ставящая в соответствие каждой стрелке $f: A \vdash B$ из $\mathcal{C}$ стрелку $F(f): F(A) \vdash F(B)$ такую, что

$$F(1_A) = 1_{F(A)}, \quad F(gf) = F(g) F(f).$$

В общем случае такие функторы можно рассматривать как *переводы* одной дедуктивной системы в другую.

9. Алгебраизация логики

Одновременно с традицией развития логики как дедуктивной системы, идущей от Фреге, Уайтхеда и Рассела, развивался совершенно другой подход к логике, наиболее полно выраженный Э.Шрёдером в его трехтомных «Лекциях по алгебре логики» (1890-1905). В третьем томе развивается исчисление отношений и вводятся кванторы, но нигде нет понятия формального доказатель-

²⁰ Определение *предтопоса* см. в [Джонстон 1986, с.258].

ства. Предшественники Шрёдера Дж. Буль, В. Девонс и Ч. С. Пирс, впервые применили алгебраические методы к логике. Отсюда и сам термин «алгебра логики».

Первоначально алгебра логики имела своим предметом классы (как объемы понятий), соотношения между ними по объему и связанные с этим операции над ними. Поэтому исследования в области теории множеств сыграли существенную роль в становлении алгебры логики. Впоследствии основным предметом алгебры логики стало изучение свойств логических операций над множеством высказываний, рассматриваемых лишь со стороны их логических значений: исследуются равносильности между формулами, приведение к нормальным формам, минимизация формул и т.д.²¹

Постепенно были выделены *основные свойства* (классических) логических операций в виде некоторого количества тождеств (равносильностей). В совокупности эти тождества образовали конструкцию под названием «булева алгебра». Изящной аксиоматизацией класса булевых алгебр являются пары тождеств из раздела 5: (II), (III), (IV), (V) и (B1), (B2). Одно из тождеств (V) выводимо (см. Биркгоф [1952, с. 191]). Таким образом, булева алгебра есть результат алгебраической формализации классической логики высказываний.

Несмотря на простоту формулировки булевы алгебры исключительно богаты по своему содержанию и давно превратились в самостоятельный раздел абстрактной алгебры. Они нашли самое широкое применение в логико-математических исследованиях, в области инженерии контактно-релейных схем, компьютерных наук, аксиоматической теории множеств, теории моделей и в других областях науки и математики (см. трехтомный справочник по булевым алгебрам [Monk (ed.) 1989]).

Результатом алгебраической формализации логики предикатов явились «цилиндрические алгебры», введенные в 1961 г. Л. Хенкиным и А. Тарским (см. фундаментальный труд [Henkin & Monk & Tarski 1971]).

В алгебраизации логики особую роль сыграла оригинальная идея А. Линденбаума (1926/27), который предложил рассматривать формализованный пропозициональный язык как универсальную алгебру с операциями, соответствующими логическим связкам этого же языка. Но самое главное, затем строится логическая матрица из формул и логических связей, которые составляют само логическое исчисление. Полное признание этот метод получил в

²¹ Проблематика, которая здесь возникает, лучше всего рассмотрена в книге [Гиндикин 1972].

40-е годы в терминологии «алгебры Линденбаума», или «алгебры Линденбаума–Тарского» (см. историю вопроса в [Sutma 1982]). Кратко этот метод можно описать следующим образом.

Рассмотрим бинарное отношение $\approx$ на множестве формул For пропозиционального языка $\mathcal{L}$: $A \approx B$ т.т.т., когда $A \equiv B$ есть тавтология. Легко убедиться, что $\approx$ есть отношение эквивалентности на множестве формул For . Для произвольных классов эквивалентности $|A|$ и $|B|$ из $For/\approx$ пусть $|A| \cup |B| = |A \vee B|$, $|A| \cap |B| = |A \wedge B|$ и $\neg|A| = |\neg A|$. Тогда алгебра $L^* = \langle For/\approx, \cup, \cap, \neg, 0, 1 \rangle$ называется *алгеброй Линденбаума* (классической логики) и есть не что иное, как *булева алгебра*. Нулевым элементом 0 здесь является класс всех противоречий $|A \wedge \neg A|$, а единицей 1 – класс эквивалентности, состоящий из всех тавтологий $|A \vee \neg A|$.

Легко видеть, что между эквивалентностями классической логики высказываний C_2 и тождествами булевой алгебры существует соответствие. Например, между формулой $(A \vee B) \equiv (A \vee B)$ и первым тождеством в (II). Более того, $\vdash A$ в C_2 т.т.т., когда $A^* = 1$ в L^* , где A^* есть аналог A на языке алгебры L^* . Таким образом, возникают средства для *алгебраического* доказательства дедуктивной полноты логических исчислений.

Постепенно алгебраизация логики привела к появлению нового термина «алгебраическая логика», который стал названием монографии П. Халмша [Halmos 1962], где методы и аппарат универсальной алгебры стали систематически применяться к изучению логики. В следующем году выходит «Математика метаматематики» (см. [Расёва & Сикорский 1972]), а затем книга Расёвой, ставшая классической [Rasiowa 1974], в которой алгебраические методы применяются к неклассическим логикам. Имеется обзор результатов по алгебраической логике [Эсакиа 1983].

Однако не всякая логика может быть алгебраизуема подобным образом. Например, в релевантной логике R и логике следования E (см. [Anderson & Belnap 1975]) существуют теоремы A и B , для которых импликация $A \rightarrow B$ не есть теорема. Следовательно, множество всех теорем не совпадает с классом эквивалентности, определенным отношением $\approx$. Поэтому встал вопрос об обобщении метода Линденбаума. Обобщение было предложено в обстоятельной работе [Blok & Pigozzi 1989], где вводится *лейбницевское отношение эквивалентности* между формулами p и q :

$$p \approx q \leftrightarrow \forall P(P(p) \leftrightarrow P(q)),$$

где P есть переменная, пробегающая по множеству унарных предикатов.

Что очень важно, берется строгое определение дедуктивной

системы (логики), относительно которой и ставится вопрос об алгебраизации. Таковой взята *стандартная* дедуктивная система, выполняющая условия (1)–(5) для операции присоединения следствий (см. выше раздел 2). В итоге мы имеем *алгебраическую семантику* для исключительно широкого класса логических систем. См. также [Font & Jansana 1996].

Однако, как и ранее, неалгебраизуемы льюисовские модальные логики $S1$, $S2$ и $S3$, но теперь они обладают более слабым свойством *протоалгебраизуемости*. Зато релевантная логика R является алгебраизуемой, но не E . Неалгебраизуемыми оказываются импликативные фрагменты этих логик, в то время как $H_{\rightarrow}$ и $TV_{\rightarrow}$ алгебраизуемы (см. выше решетку импликативных логик в разделе 6). Недавно было доказано, что известная паранепротиворечивая логика да Косты $C1$ неалгебраизуема [Lewin, Mikenberg, Schwarze 1991], а следовательно все логики из класса C_n .

Современное бурное развитие алгебраической логики представляет собой систематическое применение методов и, главное, аппарата универсальной алгебры к символической логике. Именно на это как на тенденцию возможного дальнейшего развития алгебры логики указывал А. В. Кузнецов, когда говорил о возможности «охватить алгебраическими методами значительную часть современной математической логики» [Кузнецов 1960]. На самом деле вопрос сейчас стоит об охвате всей символической логики, и результаты здесь весьма впечатляющи (см. [Andréka, Monk, Némethi 1991] и [Andréka *et al.* 1994]). Приведем некоторые примеры.

Пусть $Alg(L)$ обозначает класс алгебр, который соотносится с некоторой логикой L . Например, если L есть классическая логика высказываний, то $Alg(L)$ есть класс булевых алгебр. Теперь можно формулировать теоремы, утверждающие, что L имеет определенное логическое свойство т.т.т., когда $Alg(L)$ имеет определенное алгебраическое свойство. Это позволяет дать алгебраическую характеристику таких логических свойств, как полнота, наличие теоремы дедукции, компактность, разрешимость, интерполяционность Крейга, истинность формул в модели и т.д. Например, первые два свойства принимают следующий вид: L допускает строго полную гильбертовскую аксиоматизацию ($\Gamma \vdash A$ т.т.т., когда $\Gamma \models A$) т.т.т., когда $Alg(L)$ есть финитно аксиоматизируемое квази-многообразие; L допускает теорему дедукции т.т.т., когда $Alg(L)$ имеет эквационально определимые главные конгруэнции.

Заметим, что алгебраическая логика является хорошим инструментом для выяснения такого сложного вопроса, как взаимоотношение между различными логическими системами, и вообще для уточнения статуса логики. О последнем говорит название

книги П.Халмоша и С.Гиванта «Логика как алгебра» [Halmos & Givant 1998], где показывается, что стандартные результаты в логике хорошо соотносятся с известными алгебраическими теоремами. С другой стороны, такой единый подход к логике представляет также философский интерес. Поэтому статья по алгебраической логике помещается в новое издание «Справочника по философской логике» [Andréka, Némethi, Sain 1999].

Наконец, в силу появления новой парадигмы – теории категорий, представляет интерес работа Дж.Ламбека [Lambek 1988], где аргументируется, что с категорной точки зрения алгебра и логика представляют собой *одно и то же*: и логика и алгебра имеют дело со стрелками $A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow A_{n+1}$. В первом случае A_i называются *формулами* и стрелка рассматривается как *дедукция*. Во втором случае A_i называются *сортами* и стрелка осознается как *операция*.

Если утверждение Ламбека имеет силу, то это наводит на некоторые серьезные размышления, поскольку тогда аппарат теории категорий становится универсальным не только для всей математики (или почти всей) [Mac Lane 1971], но и для логики. Введение в теории категорий конструкции под названием *функтор* естественным образом привело к образованию конструкции под названием *категория категорий* [Lawvere 1966]. Не случайно, что с объяснения, что такое категория категорий, по существу начинается монография Мак-Ларти [McLarty 1992].

Каждая категория A имеет тождественный функтор $1_A: A \rightarrow A$, который оставляет объекты и стрелки из A неизменными, и для заданных функторов $F: A \rightarrow B$ и $G: B \rightarrow C$ имеется композиция $G \circ F: A \rightarrow C$. Поэтому естественно говорить о категории всех категорий, которую назовём **CAT**, объекты которой есть все категории и стрелки которой есть все функторы. Тогда возникает настоящая проблема: является ли **CAT** сама по себе категорией? Ответ Мак-Ларти состоит в том, чтобы рассматривать **CAT** как регулятивную идею, т.е. как неизбежный способ мышления о категориях и функторах, но не как строго легитимную сущность. Такими регулятивными идеями являются, например, собственная личность, универсум и Бог у Канта (1781).

Подобным образом и логика приближается к статусу регулятивной идеи, симптомами чего является поиск всё более строгого и и по возможности универсального объекта (конструкции) с заданными логическими свойствами. В предыдущем разделе таким объектом выступила категория *пропозициональных исчислений* в смысле Вуйцицкого, которая оказалась биполной. Другим подобным объектом, в одном из приближений, может выступить *категория алгебраизуемых логических систем*, где под последними

понимаются «алгебраизуемые дедуктивные системы» из рассмотренной здесь работы [Blok & Pigozzi 1989], или «строго компактное следование в хороших (nice) общих логиках» [Andréka *et al.* 1994]. В [Jánosy, Kurucz, Eiben 1996] доказано, что категория алгебраизуемых логических систем изоморфна категории соответствующих первопорядковых теорий. Показано также, что эти категории *кополны*. Более того, ставится вопрос о том, чтобы при построении подобных конструкций вместе с отношением следования рассматривать также семантики данных систем. Алгебраизация таких видов логик дана, например, в [Andréka & Némethi 1994]. Понятно, что различные вариации на понятие операции присоединения следствий, или на отношение следования, или на семантические свойства будут приводить к разным категорным объектам логической природы. И тогда, рано или поздно, встанет подлинный вопрос о регулятивной идее *логики всех логик*.

Однако завершим данный раздел ностальгией о простой и удобной логической системе, поиск которой к самому концу тысячелетия со всей силой поставил вопрос «Что есть логическая система?» и даже «Что есть логика?»

10. В поисках логической системы

Ровно через сто лет после выхода в свет знаменитой работы Г.Фреге [Frege 1879], в которой вводятся предикаты, отрицание, условная связь (the conditional) и кванторы как основа логики, а также введена идея формальной системы, в которой демонстрации должны осуществляться посредством явно сформулированных синтаксических правил²², – после ста лет триумфального развития логики как самостоятельной науки, вызывающей поклонение, удивление, а порой горькое отрешение и даже мщение у её бывших адептов и мистический страх у большинства остальных, вдруг появляется статья Я.Хэкинга под названием «Что есть логика?» [Hacking 1979]. Хэкинг высоко оценивает введение Г.Генценом структурных правил, работа с которыми позволяет выражать те аспекты логических систем, которые не имеют непосредственного

²² Напомним, что только в 1928 г. в книге Д.Гильберта и В.Аккермана (см. русский перевод со 2-го издания, значительно переработанного [Гильберт & Аккерман 1947]) окончательно оформилась концепция *первопорядковой логики*, или *логики предикатов*, или *чистой теории квантификации* с кванторами «все» и «некоторые» и была поставлена проблема о доказательстве её полноты. Эта проблема, как известно, была решена К.Гёделем в 1930 г. (см. [Gödel 1986]), хотя к 1928 г. это доказательство уже имелось у Т.Сколема (см. [Goldfarb 1979, p. 363]).

отношения к логическим константам²³. Статья Хэкинга переиздается и открывает собой большой сборник работ под названием «Что есть логическая система?» [Gabbay (ed.) 1994], который издается в Англии и Америке. В этом же году и с тем же названием, что и статья Хэкинга, публикуется философская работа логика с мировым именем Хао Вана [Wang 1994], которая открывается определениями логики, начиная от Канта и вплоть до Гёделя, и заканчивается характеристикой логики, данной Л. Витгенштейном в 1921 г. в его «Трактате...» (см. [Витгенштейн 1958]):

2.0121 *«Логика трактует каждую возможность, и все возможности суть её факты».*

Но самое удивительное, что в этом же году под названием «Что есть истинная элементарная логика?» появляется статья выдающегося логика и философа Яакко Хинтикки [Hintikka 1994], в которой развивается *новая* концепция первопорядковой логики.

Приходится констатировать, что конец века и конец второго тысячелетия, а именно 1994 г. стал той критической точкой, когда под неимоверным давлением окончательно рухнула конструкция под названием «классическая логика», тем самым ещё раз подтвердив неправоту Канта, который в предисловии ко второму изданию «Критики чистого разума» в 1787 г. писал, что «судя по всему, она (логика. – А.С.) кажется наукой вполне законченной и завершённой» (см. [Кант 1994, с. 14]).

Дедуктивная полнота логики предикатов ещё более укрепила убеждение Гильберта, что вся классическая математика в конечном счете выражима в первопорядковой логике. К этому времени были уже выявлены два важнейших теоретико-модельных свойства теорий в первопорядковом языке:

Теорема Лёвенгейма-Скулема. Если T имеет бесконечную модель, то T имеет модель любой бесконечной мощности τ , большей или равной мощности теории T .

Теорема компактности. Пусть T – произвольное множество аксиом логики. Если для каждого конечного подмножества T_0 множества T существует модель для всех аксиом из T_0 , то существует модель для всех аксиом из T .

Обе эти теоремы используются для доказательства неаксиоматизируемости теорий (см. [Барвайс 1982]).

Вышеприведенный тезис Гильберта разделялся и разделяется многими логиками, отдающими предпочтение классической

²³ Это важное открытие сделано Генценом в 1935 г. См. [Генцен 1967].

логике предикатов перед всеми другими логическими системами. К тому же в 1969 г. была выявлена уникальность первопорядковой логики, заключающейся в том, что классическая логика предикатов является наиболее сильной логикой, обладающей свойством Лёвенгейма-Скулема и свойством компактности [Lindström 1969].

Теорема Линдстрёма. Логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно $\wedge$, $\neg$, $\exists$ и удовлетворяющей теоремам компактности и Лёвенгейма-Скулема.

По существу теорема Линдстрёма даёт определение первопорядковой логики в терминах её глобальных свойств. Интересно, что первоначально результат Линдстрёма не привлёк к себе особого внимания, о чём говорит издание в 1973 г. знаменитой книги Г. Кейслера и Ч. Чэна (см. русский перевод [Кейслер & Чэн 1977], где эта теорема вообще не обсуждается. Только в третьем издании [Chang & Keisler 1990] уже в предисловии говорится, что этот результат является отправной точкой для развития *абстрактной теории моделей* и вводится новый раздел (2.5), где дается определение «абстрактной логики» как пары классов $(I, \models)$, где I есть класс *предложений* и $\models$ есть отношение выполнимости (satisfaction), удовлетворяющее определенным условиям. Наиболее известным примером абстрактной логики как раз и является обычная первопорядковая логика, которая обозначается посредством $I_{\omega, \omega}$.

Абстрактная теория моделей претендует на обозрение всего спектра логик, связей между ними и их сравнение. С начала 70-х годов эта теория бурно развивается, а Дж. Барвайс назвал результат Линдстрёма «одним из первых и до сих пор наиболее поразительных результатов в абстрактной теории моделей» [Барвайс 1982, с. 54].

Имеется много интересных логик, которые богаче первопорядковой логики, такие, как *слабая логика второго порядка*, которая пытается построить понятие *конечного* в логике некоторым естественным образом; логики с формулами бесконечной длины; логики с различными *экстра-кванторами* типа «существует конечно много», «существует бесконечно много», «большинство» и т.д.; логики высших порядков²⁴. Однако не имеет значения, как мы

²⁴ Интересно, что статья о логике высшего порядка [Van Benthem & Doets 1983] попала не в «Справочник по математической логике» [Барвайс (ред.) 1982], а в первый том «Справочника по философской логике». Интерес к логике высших порядков, объясняют авторы, в основном исходит из (логистической) проблемы оснований математики и из разработки формальной семантики естественного языка (Р. Монтегю).

будем расширять первопорядковую логику – в любом случае теряется или свойство компактности, или свойство Лёвенгейма-Скулема, или оба вместе. Уже второпорядковая логика, допускающая квантификацию по подмножествам, отношениям и функциям, кроме указанных свойств теряет также свойство полноты, и на самом деле является не столько логикой, сколько теорией множеств. Отсюда вся теоретико-множественная проблематика может быть сформулирована во второпорядковых терминах. Это является основным возражением против второпорядковой логики в недавно вышедшей монографии, посвященной расширениям первопорядковой логики [Manzano 1996], и поэтому автор отдает предпочтение *многосортовой* первопорядковой логике, которая является переинтерпретацией второпорядковой логики или даже логики высших порядков в первопорядковую с различными видами объектов. Редукция к первопорядковой логике настолько сильна, что мы приходим к рекурсивно-аксиоматизируемому множеству истин. Еще ранее А. Мальцев, Хао Ван и С. Феферман, среди прочих, подчеркивали удобство работы с такой логикой, хотя, заметим, она только внешне выглядит более богатой. Хорошее введение можно найти у Фефермана [Feferman 1974].

Первой работой, поставившей вопрос о введении новых кванторов, является статья А. Мостовского [Mostowski 1957], где на самом деле обсуждаются лингвистические операторы нового вида, представляющие «естественное обобщение логических кванторов». Идея Мостовского заключается в том, что любое второпорядковое свойство рассматривается как логический квантор, если оно инвариантно относительно биективных преобразований (перестановок). Построение логики с обобщенными кванторами в последние десятилетия привлекло к себе большое внимание лингвистов, математиков, философов, когнитологов. Некоторым итогом развития этого направления является фундаментальный труд «Модельно-теоретические логики» [Barwise & Feferman (eds.) 1985], где Дж. Барвайс приходит к следующему выводу: «Нет обратной дороги к точке зрения, что логика является первопорядковой». А в монографии Г. Шер [Sher 1991] в связи с данной проблематикой ставится вопрос «Что есть логика?», обсуждаются границы логики и делается вывод, что *логика шире, чем традиционное мышление*.

Отметим, что появляются всё новые попытки расширения и изменения первопорядковой логики и построения искомой логической системы. Видимо, одной из наиболее интересных здесь работ является уже упоминавшаяся статья Хинтикки [Hintikka 1994], а также статья с вызывающим названием «Революция в логике?» [Hintikka & Sandu 1996], и вообще целый комплекс работ Хин-

тики, связанный с применением созданной им *IF-логики* (Independence Friendly – дружественной к независимости).

Основная идея Хинтикки состоит в осознании того, что кванторы обычной первопорядковой логики являются *зависимыми*. Последнее означает, что если мы имеем дело с выражениями типа «для всех x имеются некоторые y , такие, что $R(x,y)$ », то выбор подобных y не независим, а детерминирован выбором x -ов, иначе говоря, между x и y существует некоторая функциональная зависимость. Понимание этого факта уже отмечалось в литературе (см. [Goldfarb 1979, p. 364]), но главная заслуга Хинтикки состоит в восприятии идеи *независимости* кванторов, т.е. следует указывать, какие квантификационные переменные зависят от каких. Так, если мы имеем дело с выражением «для всех x , для всех z имеются некоторые y , имеются некоторые w , такие, что $S(x,y,z,w)$ », то в случае, когда нам требуется независимость x от y , z от w , следует преобразовать искомую фразу в следующую: «для всех x , для всех z имеются некоторые y (не зависящие от z), имеются некоторые w (не зависящие от x), такие, что $S(x,y,z,w)$ ».

Оказалось, что в языке первопорядковой логики не существует средств, позволяющих соответствующим образом записывать последнюю фразу. Хинтикка предлагает осуществить это в виде « $(\forall x)(\forall z)(\exists y/\forall z)(\exists w/\forall x)S(x,y,z,w)$ », где косая черта (/) означает независимость квантификации одной переменной от другой. То же самое предлагается и в случае дизъюнкции и конъюнкции.

Особенностью *IF-логики* является её неполнота, что означает невозможность дать список аксиом, из которых все значимые формулы первопорядковой *IF-логики* могут быть выведены по чисто формальным правилам. Но в то же время она удовлетворяет свойствам компактности и Лёвенгейма-Скулема. Поэтому мы бы предположили, что *IF-логика* является подсистемой классической логики предикатов или, по крайней мере, последняя погружается в *IF-логику*. Революционный характер *IF-логики*, считают Хинтикка и Санду, нельзя изложить в одном томе; особенно важной чертой является её неполнота с далеко идущими последствиями для оснований математики [Hintikka & Sandu 1996, p. 177]. Фактически Хинтикка пытается свести всю обычную математику к расширенной первопорядковой *IF-логике* [Hintikka 1996].

Однако тематика абстрактной логики и общетеоретические проблемы обоснования математики несколько отступают перед новыми тенденциями в развитии логики конца XX века. Логика становится всё более насущной в компьютерных науках, искусст-

венном интеллекте и программировании²⁵. Подобное приложение логики порождает большое число новых логических систем, но уже нацеленных непосредственно на их практическое применение. Именно этим и обусловлен выход сборника статей под названием «Что есть логическая система?» [Gabbay (ed.) 1994]²⁶.

Вообще-то говоря, вопрос стоит так: существует ли одна «истинная» логика (среди бесконечных классов логик), а если нет, то как ограничить наше понимание логики или, более конкретно, логической системы? Возникают и другие вопросы: существует ли реальное различие между синтаксисом и семантикой с точки зрения приложений? И, конечно, стоит вопрос о традиционных свойствах логических систем: полноте, устранимости сечения, интерполяционном свойстве и др. Например, Г. Булос [Boolos 1975], защищая второпорядковую логику, спрашивает: почему логика обязательно должна обладать свойством компактности?²⁷ Интересно, что всё в том же сакраментальном 1994 году на страницах «The New Encyclopedia Britannica» спрашивается, почему свойство Лёвенгейма-Скулема должно соответствовать внутренней природе логики? (Vol. 23, p. 250).

Еще больше возникает вопросов в связи с развитием и применением альтернативных (неклассических) логик (см. выше раздел 3). В статье Жана Безье с примечательным названием «Универсальная логика» [Béziau 1994]²⁸ (обратите внимание на год пуб-

²⁵ Языки программирования, являющиеся средствами общения человека и компьютера, используют языки описания вычислимых функций и отношений, созданных в рамках логики и математики. Так, в 70-е годы появляется термин «Вычислительная логика», а затем «Компьютерная логика». Сейчас публикация книг с названием «Логическое программирование» и «Логика программ» – обычное дело. Что представляет собой современное применение логики в программировании, можно найти в сборнике переводов [Захарьящев & Янов (ред.) 1991]. В обзорной статье в этом сборнике сообщается, что написание полного обзора по применению логики в программировании уже не представляется возможным [Антимиров и др. 1991, с. 334]. О логическом подходе к искусственному интеллекту (применение теории логического вывода в программировании) см. также монографию [Тей и др. 1990]. О логико-философском подходе к искусственному интеллекту см. сборник статей [Thomason (ed.) 1989]. Обратим внимание на многотомные справочники (укажем только последние тома): [Abramsky, Gabbay, Maibaum (eds.) 1995] и [Gabbay, Hogger, Robinson (eds.) 1998].

²⁶ Имеется обстоятельный обзор статей этого сборника [Sher 1996].

²⁷ В книге А.М.Анисова строится первопорядковая логика неопределенности, которая не обладает этим свойством [Анисов 2000, гл. 9]. Последняя предназначена для изучения темпоральных свойств универсума.

²⁸ Логика $\mathcal{L}$ есть пара $\langle L, \vdash \rangle$, где L есть множество без всякой спецификации; $\vdash$ есть отношение дедуцируемости: $\mathcal{P}(L) \times L$.

фикации) спрашивается, почему логика обязательно должна быть монотонной?²⁹ Заметим, что только такие логики являются элементами указанных выше решеток. Хотя на самом деле исследования в области немонотонных логик давно превратились в отдельное направление в силу их применения [Gabbay 1985], [Nerode & Shore 1993]. К этой области принадлежит целая серия работ Д. Батенса и его учеников, где разработана логика, способная моделировать рассуждения, в ходе которых смысл логических терминов может измениться. В итоге возникло новое направление исследований, названное «адаптивными логиками» [Batens 1994].

Универсальная логика, предложенная Безье, является логикой со свойством сокращения (комбинатор W). Но опять же давно возникло целое направление, получившее название «логики без сокращения» [Ono & Komori 1985].³⁰ Одним из наиболее интересных примеров логик без сокращения являются многозначные логики Лукасевича, как *конечные*, так и *бесконечные*. Свойства их столь необычны, что изучение этих логик к концу века стало исключительно интенсивным, что объясняется, в первом случае, их связью с теорией простых чисел [Карпенко & Шалак 2000] и, во втором случае, их связью с фундаментальными алгебраическими структурами совершенно различной природы [Mundici & Signoli 1997]. Обратим внимание, что многозначные логики Лукасевича как логические исчисления строились по образцу и подобию классической логики. Возникает нетривиальный вопрос, как возможна логика, которая, с одной стороны, имеет *чисто* арифметическую интерпретацию [Карпенко 1999] а с другой стороны, появляются такие конструкции, как *решеточно-упорядоченные абелевы группы*, *бесконечномерные пространства* и т.д.? И если это логика, то что всё это значит?

²⁹ Некоторые авторы (см., например, [Scott 1971]) свойство *монотонности* в операции присоединения следствий Тарского

C1. Если $X \subseteq Y$, то $C(X) \subseteq C(Y)$

приравнивают к генценовскому структурному правилу *утончения*

$$X, Y \vdash Z$$

$$\frac{}{X, A, Y \vdash Z},$$

которое, в свою очередь, эквивалентно *закону утверждения консеквента* (комбинатор K)

$$A \supset (B \supset A).$$

³⁰ Хао Ван в работе «На пути к механической математике» [Хао Ван 1962] выдвинул гипотезу о том, что разрешимые фрагменты исчисления предикатов можно формализовать без привлечения правил сокращения. Первая работа в этом направлении появилась только в 1971 г. и принадлежит В.А.Смирнову (см. [Смирнов 1972, гл. 5]). См. также [Kiriyaama & Ono 1991].

В 1987 г. появилась логическая система под названием «линейная логика» [Girard 1987], импликативный фрагмент которой представляет собой **BCI**-логику, т.е. логику без утончения и сокращения. Кроме обычных операций линейная логика снабжена различными другими операциями и нашла широкое применение в компьютерных науках. За удивительно короткое время образовалось новое направление [Troelstra 1992]. Категорное рассмотрение линейной логики представлено в [Dožen & Petrić 1999].

Логика без утончения, сокращения и перестановки (комбинатор **C**) есть ассоциативное исчисление Ламбека для грамматических категорий или синтаксических типов [Lambek 1958]. Логика проявила огромный лингвистический интерес к этой работе (см. литературу в [Buszkowski et al. (eds.) 1988] и [Van Benthem 1991]). Хотя первоначально исчисление Ламбека не было представлено как *новая* логика, но получила развитие в чисто логических работах, итогом чего явились полные (full) секвенциальные и гильбертовские исчисления без указанных выше трех структурных правил (или аксиом). См., например [Mac Caull 1998], где строится по существу интуиционистское исчисление без структурных правил, которое автор рассматривает как наиболее фундаментальное из всех *субструктурных* логик и играющее важную роль в теоретических приложениях компьютерной науки. На самом деле построение подобных логик можно считать результатом развития направления, названного «субструктурные логики», где исчисления получаются за счёт элиминации, ограничения и комбинирования различных структурных правил [Dožen & Schroeder-Heister (eds.) 1993].

В итоге, с одной стороны, в силу невозможности объять необъятное намечена тенденция к выявлению *минимальной* логики. К.Дошен предлагает считать таковой неассоциативное исчисление Ламбека с единственной бинарной связкой «мультипликации» [Dožen 1993, p. 20]. Вопрос о минимальной логике впервые был поставлен А.Чёрчем [Church 1951], где в качестве примера предложена «слабая позитивная импликация» – **IBCW** (импликативный фрагмент релевантной логики **R**), для которой Чёрчем была доказана ослабленная теорема дедукции. Идея о минимальной логике оказалась очень близкой релевантистам и в [Anderson & Belnap, jr. 1975, § 8.11] таковой объявлена логика **IB'B**. Тема получила дальнейшее развитие в [Anderson & Belnap, jr. & Dunn 1992, p.149], где таковой объявляется логика **IB** с правилами 1) **MP** и 2) из *A* следует $(A \rightarrow B) \rightarrow B$. Эту логику авторы обозначали посредством **M_→**. Для неё строится модель $\langle S, v \rangle$ такая, что *S* есть ассоциативный моноид, и множество всех

формул, истинных во всех $\langle S, v \rangle$ -моделях, аксиоматизируется посредством логики $M_{\rightarrow}$.

Поскольку понятие моноида удовлетворяет условиям быть категорией, то данное понятие минимальной логики также обладает данными свойствами. Другими словами, дедуктивная система, отношение следования (дедуцируемости) которой рефлексивно и транзитивно, является категорией. Поэтому с полным основанием логику $M_{\rightarrow}$ можно было бы считать минимальной логической системой³¹. Но в том-то и дело, что стали появляться совсем «экзотические» логические системы, в которых, например, закон идентичности $A \rightarrow A$ не проходит, поскольку, согласно Э.Шрёдингеру, этот закон в общем случае не имеет места для микрообъектов. Такие логики получили название «логики Шрёдингера» [da Costa & Krause 1994].

С другой стороны, проявилась тенденция к объявлению какой-либо достаточно богатой системы *металогикой*, как это делает К.Дошен [Došen 1992], снабжая субструктурные логики различными модальными операторами, или Д.Миллер [Miller 1997], разрабатывающий язык программирования, названный *Forum*, который основан на линейной логике высшего порядка.

Между двумя этими крайностями пробивает себе дорогу тенденция, которую мы обозначили бы как выбор (или конструирование) *базисной* логики. С одной стороны, она должна быть достаточно богата, чтобы обладать некоторыми хорошими логическими свойствами, а с другой стороны, достаточно бедна, чтобы её можно было положить в основание иерархии (или конструкции) интересных и важных логических систем. Так, например, в классе модальных логик таковой выбрана логика **K** (см. выше примеч. 1). В связи с этим представляет интерес базисная «специальная промежуточная» логика **BPC** [Ruitenburg 1995], которая соотносится с модальной логикой **K4** в таком же смысле, как интуиционистская логика **H** с модальной логикой **S4**. В качестве базисной логики выступает также полное исчисление Ламбека **FL** или специально построенная для этой цели базисная логика **B** (см. раздел 6). Недавно было заявлено *базисное исчисление предикатов* **BQC** [Ruitenburg 1998], представляющее собой собственную подсистему интуиционистской логики предикатов **IQC**, использующее семантику Крипке с транзитивным, но не обязательно рефлексивным отношением достижимости. Понятно, что выбор *базисной* логики — дело довольно-таки произвольное. Однако одним из строгих кри-

³¹ Заметим, что для логики **IB** с правилом **MP** доказана своего рода теорема дедукции [Cignu 1954].

териев мог бы служить тот *минимальный фрагмент* классической (интуиционистской) логики предикатов, в которую погружается сама классическая логика предикатов. Например, в докладе В.М.Попова (см. сноску 7) таким фрагментом выступает импликативно-экзистенциальный фрагмент IQC.

Видимо, стоит согласиться с Дж. ван Бентемом и К.Дэтсом [Van Benthem & Doets 1983, p. 326], что «никакая специфическая теория не является священной в современной логике». Но что-то ведь должно остаться! В.Карниэлли в рецензии на [Gabbay (ed.) 1994] выдвигает *основное* предположение: «Нет доказательств, нет логики» [Carnielli 1996, p. 6417]. Но и здесь не так всё просто. Ламбек в статье под названием «Что есть дедуктивная система» [Lambek 1994] выделяет *пять* стилей дедуктивных систем: (1) гильбертовский стиль (дедукция вида $f: \rightarrow B$, для формулы B); (2) стиль Ловера ($f: A \rightarrow B$, для формул A и B); (3) генценовский интуиционистский стиль ($f: A_1 \cdots A_m \rightarrow B$); (4) генценовский классический стиль ($f: A_1 \cdots A_m \rightarrow B_1 \cdots B_n$), и (5) стиль Шютте (Schütte) ($f: \rightarrow B_1 \cdots B_n$). Ламбек уделяет особое внимание *равенствам* между выводами. Последнее стало особенно актуальным под влиянием теории категорий и компьютерных наук. Заметим, что Ламбек отдает предпочтение генценовскому стилю в силу введения структурных правил.

Мы начали эту статью с указания различных *конструкций*, являющихся важными для понимания логики в той или иной форме и степени. Кроме того, нами была предложена конструкция в виде конечной булевой решетки, элементами которой являются сами логические системы, и эта совокупность базисных логических систем может образовать своего рода металогику. На самом деле вопросы, обсуждаемые в этой статье, относятся именно к металогике, но не в её традиционном понимании как исследовании металогических свойств (непротиворечивость, полнота, разрешимость, независимость и т.д.) какой-то конкретной логической системы или даже класса однотипных систем, а именно к *металогике* как глобальному подходу в исследовании различных совокупностей логик, выявлении структуры не отдельных логических систем, а их целого класса; взаимоотношения между различными логиками, множествами логик и структурами этих множеств; переводу и погружению одних логических систем в другие; построению какой-либо по возможности богатой конструкции, объединяющей как можно больше логических систем, и изучению уже её свойств. Всё это и есть современная металогика.

В связи с этим возникает *фундаментальный* вопрос о существовании конструкции под названием ЛОГИКА. Написание всего

этого раздела, да и всей статьи, свидетельствует, что такой конструкции нет и не может быть. Но это дискурсивный вывод и слишком аналитический. Поэтому закончим мы эту работу впечатляющим рассуждением Я. Лукасевича, взятым из его статьи «В защиту логики», написанной в 1937 г., где выявляется сущность той основы, на которой возникает логика.

«Итак, сколько бы я ни занимался даже мельчайшей логической проблемой, ища, например, самую короткую аксиому имплицитного исчисления, всякий раз меня не покидает чувство, что я нахожусь рядом с какой-то мощной, неслыханно плотной и неизмеримо устойчивой конструкцией. Эта конструкция действует на меня как некий конкретный осязаемый предмет, сделанный из самого твердого материала, стократ более крепкого, чем бетон и сталь. Ничего в ней я изменить не могу, ничего сам произвольно не создаю, но изнурительным трудом открываю в ней все новые подробности, достигая непоколебимых и вечных истин. Где и чем является эта идеальная конструкция? Верующий философ сказал бы, что она в Боге и является Его мыслью» [Лукасевич 1999, с. 232].

ЛИТЕРАТУРА

- [Анисов А.М. 2000] Темпоральный универсум и его познание. М.: ИФРАН (в печати).
- [Антимиров и др. 1991] Математическая логика в программировании // [Захарьяшев М.В. & Янов Ю.И. (ред.) 1991]. С. 331-407.
- [Аншаков О.М. 2000] *Логико-математические основания ДСМ-метода автоматического порождения гипотез* (докторская диссертация).
- [Аншаков О.М. & Рычков С.В. 1982] О многозначных логических исчислениях // *Семиотика и информатика*. Вып. 19. С. 90-117.
- [Аншаков О.М. & Рычков С.В. 1984] Об одном способе формализации и классификации многозначных логик // *Семиотика и информатика*. Вып. 23. С. 78-106.
- [Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К. 1993] О дедуктивной имитации некоторых вариантов ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // *Семиотика и информация*. Вып. 33. С. 164-233.
- [Барвайс Д. (ред.) 1982] Справочная книга по математической логике: В 4-х частях. М.: Наука. С. 13-54. (Перевод с английского: Barwise J. (ed.) *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1977).
- [Барвайс Д. 1982] Введение в логику первого порядка // [Барвайс Д. (ред.) 1982] Часть I. *Теория моделей*. С. 13-54.
- [Биркгоф Г. 1952] *Теория структур*. М.: ИЛ. (Перевод с английского: Birkhoff G. *Lattice theory* (revised edition). N.Y., 1948).
- [Бочвар Д.А. 1938] Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // *Математический сборник*. Т. 4. №2. С. 287-308. (Английский перевод в: *History and Philosophy of Logic*. 1981. Vol. 2).

- [Бочвар Д.А. & Финн В.К. 1972] О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий. 1 // *Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам*. М. С. 238-295.
- [Васильев Н.А. 1989] *Воображаемая логика*. Избранные труды. Отв. ред. В.А.Смирнов. М.: Наука.
- [Васюков В.Л. 1995] Развивая Тарского: катопос теорий // *Логические исследования*. Вып. 3. М.: Наука. С. 276-291.
- [Васюков В.Л. 2000] Импликативные логики, дедуктивные импликативные системы и экспоненциальные мультикатегории // *Логические исследования*. Вып. 7. М.: Наука.
- [Витгенштейн 1958] *Логико-философский трактат*. М.: ИЛ.
- [Вригт Г.Х., фон 1992] Логика и философия в XX веке // *Вопросы философии*. № 8. С. 80-91.
- [Генцен Г. 1967] Исследование логических выводов // А.В.Идельсон & Г.Е.Минц (ред.) *Математическая теория логического вывода*. М.: Наука.
- [Гильберт Д. & Аккерман В. 1947] *Основы теоретической логики*. М.: ИЛ.
- [Гиндикин С.Г. 1972]. *Алгебра логики в задачах*. М.: Наука.
- [Голдблатт Р. 1983] *Топосы. Категорный анализ логики*. М.: Мир. (Перевод с английского: Goldblatt R. *TOPOI. The categorical analysis of logic*. Amsterdam: North-Holland, 1979).
- [Гретцер Г. 1982] *Общая теория решеток*. М.: Мир. (Пер. с англ.: Grätzer G. *General lattice theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1978.)
- [Григолия Р.Ш. 1976] Решетка всех финитно-аппроксимируемых расширений счетнозначной логики Лукасевича // *Исследования по теории множеств и неклассическим логикам*. М. С. 221-246.
- [Джонстон П.Т. 1986] *Теория топосов*. М.: Наука. (Перевод с английского: Johnstone P.T. *Topos theory*. London: Academic Press, 1977).
- [Захарьящев М.В. & Янов Ю.И. (ред.) 1991] *Математическая логика в программировании*. М.: Мир.
- [Кант 1994] *Критика чистого разума*. М.: Мысль.
- [Карпенко А.С. 1997] *Многозначные логики (монография)*. Логика и компьютер. Вып. 4. М.: Наука.
- [Карпенко А.С. 1997а] Классификация пропозициональных логик // *Логические исследования*. Вып. 4. М.: Наука. С. 107-133.
- [Карпенко А.С. 1999] Логика в России. Вторая половина XX века // *Вопросы философии*, № 9. С. 148-158.
- [Карпенко А.С. 1999а] Импликации следования, строгая, релевантная, интуиционистская и классическая и их взаимоотношения // *Логические исследования*. Вып. 6. М.: Наука. С. 76-80.
- [Карпенко А.С. 1999b] Характеризация классов натуральных чисел посредством логических матриц // *Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН*. М. С. 217-225.
- [Карпенко А.С. & Шалак В.И. 2000] *Логики Лукасевича и простые числа*. М.: Наука (в печати).
- [Кейслер Г. & Чэн Ч.Ч. 1977] *Теория моделей*. М. (Пер. с англ.: Chang C.C. & Keisler H.J. *Model theory*. Amsterdam: North-Holland, 1973).
- [Кок А. & Рейес Г.Э. 1982] Доктрины в категорной логике // [Барвайс Д. (ред.) 1982] *Часть I. Теория моделей*. С. 289-319.

- [Комендантский В. Е. 2000] *N-значные изоморфы классической логики* (дипломная работа).
- [Кон П. 1968] *Универсальная алгебра*. М.: Мир. (Пер. с английского: Cohn P.M. *Universal algebra*. N.Y.: Harper & Row, 1965).
- [Кудрявцев В. Б. 1981] *О функциональных системах*. М.
- [Кузнецов А.В. 1960] Алгебра логики. *Философская Энциклопедия*. Т. 1. М. С. 33-38.
- [Кузнецов А.В. 1971] Некоторые свойства структуры многообразий псевдобулевых алгебр // *XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум*. Кишинев. - С. 225-256.
- [Кузнецов А.В. 1975] О суперинтуиционистских логиках // *Математические исследования*. Т. 10. Вып. 2.
- [Куратовский К. 1966] *Топология*. Т. 1. М.: Мир. (Перевод с английского: Kuratowski K. *Topology*. Vol. 1. Warszawa: PWN, 1966).
- [Лукасевич Я. 1993] О детерминизме // *Логические исследования*. Вып. 2. М.: Наука. С. 190-205. (Переизд.: *Вопросы философии*, 1995, № 5. С. 60-71; *Философия и логика Львовско-Варшавской школы*. М., 1999. С. 179-198).
- [Лукасевич Я. 1999] В защиту логики // *Философия и логика Львовско-Варшавской школы*. М.: РОССПЭН. С. 219-232.
- [Максимова Л.Л. 1997] Интерполяция в суперинтуиционистских логиках предикатов с равенством // *Алгебра и логика*. Т. 26, № 6. С. 318-357.
- [Максимова Л.Л. & Рыбаков В.В. 1974]. Решетки модальных логик // *Алгебра и логика*. Т. 13. С. 105-122.
- [Минц Г.Е. 1977] Замкнутые категории и теория доказательств // Г.Е.Минц & В.П.Оревков (ред.) *Теоретическое применение методов математической логики*. II. Ленинград: Наука. С. 83-114. (Англ. пер.: Closed categories and the theory of proofs // Mints G. *Selected Papers in Proof Theory*. Bibliopolis and North-Holland. 1992. P. 183-212).
- [Расёва Е. & Сикорский Р. 1972] *Математика метаматематики*. М.: Наука. (Перев. с англ.: Rasiowa H. & Sikorski R. *The Mathematics of Metamathematics*. Warszawa: PWN, 1963).
- [Смирнов В.А. 1972] *Формальный вывод и логические исчисления*. М.: Наука. (Переиздано с комментариями: Смирнов В.А. *Теория логического вывода*. М.: РОССПЭН, 1999. С. 16-233).
- [Смирнов В.А. 1987] *Логические методы анализа научного знания*. М.: Наука.
- [Тей А. и др. 1990] *Логический подход к искусственному интеллекту*. М.: Мир.
- [Финн В.К. 1974] Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // *Философия в современном мире: Философия и логика*. М.: Наука. С. 398-438.
- [Финн В.К. 1976] О возможностях формализации правдоподобных рассуждений средствами многозначных логик // *VII Всесоюзный симпозиум по логике и методологии науки*. Киев: Наук. думка. С. 82-83.
- [Финн В.К. 1988] Правдоподобные выводы и правдоподобные рассуждения // *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика*. Т. 28. М.: ВИНТИ. С. 3-84.

- [Хао Ван 1962] На пути к механической математике // *Кибернетический сборник*. Вып. 5. С. 114-165. (Пер. с англ.: Wang Hao. Toward mechanical mathematics. IBM J. Res. Devel. 1960. Vol. 4. N 1. P. 2-22).
- [Чёрч А. 1960] *Введение в математическую логику*. М.: ИИЛ. (Пер. с англ.: Church A. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton Univ. Press, 1956).
- [Шестаков В.И. 1941] Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников // *Журнал физической техники*. Т. 11. Вып. 6. - С. 532-549.
- [Энгелер Э. 1987] *Метаматематика элементарной математики*. М.
- [Эсакиа Л.Л. 1979] О многообразиях алгебр Гжегорчика // *Исследования по неклассическим логикам и теории множеств*. М.: Наука, 1979. С. 257-287.
- [Эсакиа Л.Л. 1983] Алгебры логики // *Упорядоченные множества и решетки*. Саратов: СГУ. С. 115-126.
- [Эсакиа Л.Л. 1985] *Алгебры Гейтинга I. Теория двойственности*. Тбилиси: Мецниереба.
- [Янков В.А. 1968] Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // *Доклады Академии Наук СССР*. Т. 181. № 1. С. 33-34.
- [Янов Ю.И. & Мучник А.А. 1959] О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // *Там же*. Т. 127. С. 44-46.
- [Abramsky S., Gabbay D.M., Maibaum T.S.E. (eds.) 1995]. *Handbook of Logic in Computer Science*. Vol. IV. Semantic modelling. Oxford Science Publications.
- [Anderson A.R. & Belnap N.D., jr. 1975] *Entailment: The logic of relevance and necessity*. Vol. 1. Princeton Univ. Press.
- [Anderson A.R., Belnap N.D., jr., Dunn J.M. 1992] *Entailment: The logic of relevance and necessity*. Vol. 2. Princeton Univ. Press.
- [Andréka H., Monk J.D., Németi I. (eds.) 1991] *Algebraic Logic*. Dordrecht: North-Holland Publ. Co.
- [Andréka H., Németi I., Sain I. 1999] Algebraic logic. *Handbook of Philosophical Logic* (second edition). Dordrecht.
- [Andréka H. et al. 1994] Applying algebraic logic; a general methodology. Technical Report, Mathematical Institute. Budapest.
- [Anshakov O.M., Finn V.K., Skvortsov D.P. 1989] On axiomatization of many-valued logics associated with formalization of plausible reasoning // *Studia Logica*. Vol. 48, N 4. P. 423-447.
- [Anshakov O. & Rychkov S. 1994] On finite-valued propositional logical calculi // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 36, N 4. P. 606-629.
- [Avron A. 1984] Relevant entailment – semantics and formal systems // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 49. N 2. P. 334-342.
- [Barwise J.K. & Feferman S. (eds.) 1985] *Model-Theoretic Logics*. Berlin: Springer-Verlag.
- [Batens D. 1994] Inconsistency-adaptive logics and the foundation of non-monotonic logic // *Logique et Analyse*. N 145. P. 57-94.
- [Battilotti G. & Sambin G. 2000] Basic logic and the cube of its extension Proceedings of LMPS. Florence, 1995 (to appear).
- [Beavers G. 1993] Extensions of the $\aleph_0$ -valued Łukasiewicz propositional logic // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 34, N. 2. P. 251-262.

- [Béziau J.-Y. 1994] Universal logic // Childers T. & Majer O. (eds.) *Logica' 94 Proceedings of the 8th International Symposium*. Prague. P. 73-93.
- [Blok W.J. 1976] *Varieties of interior algebras*. PhD thesis, University of Amsterdam.
- [Blok W.J. 1980] The lattice of modal logics: an algebraic investigation // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 45. P.221-236.
- [Blok W.J. & Pigozzi D. 1989] Algebraizable logics (monograph). *Memoirs of the American Mathematical Society*. N 396.
- [Bolc L. & Borowik P. 1992] *Many-valued logics: Theoretical foundations*. Vol. 1. Berlin: Springer-Verlag.
- [Bolc L. & Borowik P. 1998] *Many-valued logics 2. Automated reasoning and practical applications*. Berlin: Springer-Verlag.
- [Boolos G. 1975] On second-order logic // *The Journal of Philosophy*. Vol. 72. P. 509-526.
- [Böhm C. & Dezani-Ciancaglini M. 1989] Combinatory logic as monoids. *Fundamenta Informaticae*. Vol. 12. N 4. P. 525-539.
- [Brouwer L.E.J. 1908] De onbetrouwbaarheid der logische principes. *Tijdschrift voor wijsbegeerte*. Vol. 2, p. 152-158. (Англ. пер.: The unreliability of the logical principles // Brouwer L.E.J. *The collected works*. Dordrecht, 1975)
- [Burris S. & Sankappanavar H.P 1981]. *A course in universal algebra*. Berlin: Springer-Verlag.
- [Buszkowski W. et al. (eds.) 1988] *Categorical Grammar*. Amsterdam: Benjamins.
- [Butler S.W. & Butler J.T. 1992] Profiles of topics and authors of the International Symposium on Multiple-Valued Logic for 1971-1991. *International Symposium on Multiple-Valued Logic*. 22th. Sendai. P. 372-379.
- [Carnielli W.A. 1996] Review of [Gabbay D.M. (ed.) 1994] // *Mathematical Review*. 96k: 03008.
- [Carnielli W.A. & D'Ottaviano M.L. 1997] Translations between logical systems: A MANIFESTO // *Logique et Analyse*. N 157. P. 67-81.
- [Chagrov A. & Zakharyashev M. 1997] *Modal logic*. Oxford: Clarendon Press.
- [Chang C.C. & Keisler H.J. 1990] *Model Theory*. Amsterdam: Elsevier Science Publ.
- [Chelakowski J. 1992] *Consequences operations: Foundational studies*. Warszawa. Prepublication.
- [Cignoli R., D'Ottaviano I.M.L., Mundici D. 2000] *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*. Trends in Logic. Vol. 7. Dordrecht: Kluwer.
- [Church A. 1937] Combinatory logic as a semigroup (abstract) // *Bull. Amer. Math. Soc.* Vol. 43. P. 233.
- [Church 1951] Minimal logic (abstract) // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 16. P. 239.
- [da Costa N.C.A. & Krause D. 1994] Schrödinger logics // *Studia Logica*. Vol. 53. P. 533-550.
- [Curry H.B. 1954] Generalisation of the deduction theorem. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Vol. 2. Amsterdam. P. 399-400.
- [Curry H.B. & Feys R. 1958] *Combinatory Logic*. Vol. 1. Amsterdam.
- [Došen K. 1992] Modal logic as metalogic // *Journal of Logic, Language and Information*, Vol. 1, N 3. P. 173-201.

- [Dožen K. 1993] A historical introduction to substructural logics // [Dožen K. & Schroeder-Heister P. (eds.) 1993]. P. 1-30.
- [Dožen K. 1996] Deductive completeness // *The Bulletin of Symbolic Logic*. Vol. 2. N 3. P. 243-283.
- [Dožen K. & Schroeder-Heister P. (eds.) 1993] *Substructural logics*. Oxford: Clarendon Press.
- [Dožen K. & Petrić Z. 1999] Cartesian isomorphism are symmetric monoidal: A justification of linear logic // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 64, N 1. P. 227-242.
- [Dummett M. 1959] A propositional calculus with denumerable matrix. // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 24. P. 97-106.
- [Dummett M. & Lemmon E. 1959] Modal logics between S4 and S5 // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*. Bd. 5. S. 250-264.
- [Dzik W. 1982] On the content of lattices of logics. Part II // *Report on Mathematical Logic*. N 14. P. 29-47.
- [Dziobiak W. 1983] There are $2^{\aleph_0}$ logics with the relevance principle between R and RM // *Studia Logica*. Vol. XLII, N 1.
- [Eilenberg S. & Mac Lane S. 1945] General theory of natural equivalences // *Transactions of the American Mathematical Society*. Vol. 58. P. 231-294. (Переиздано: *Eilenberg-Mac Lane: Collected Works*. Academic Press, 1986).
- [Epstein G. 1993] *Multiple-valued logic design: an introduction*. Bristol.
- [Epstein R.L 1990]. *The semantic foundations of logic*. Vol. 1: Propositional logic. Dordrecht: Kluwer. (2nd ed., 1995).
- [Epstein R.L 1994]. *The semantic foundations of logic*. Vol. 2: First-order logic. Dordrecht: Kluwer.
- [Feferman S. 1974] Application of manysorted interpolation theorems // *Proceedings of the Tarski Symposium*. Providence. P. 205-224.
- [Font J.M. & Jansana R. 1996] *A General Algebraic Semantics for Sentential Logics*. Berlin: Springer-Verlag.
- [Frege G. 1879] *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formalsprache des reinen Denkens*. Hale (Hebert). (Англ. пер.: *Begriffsschrift, a formula language, modelled upon that of arithmetic, for pure thought* // [Van Heijenoort J (ed.) 1967]. P. 1-82).
- [Gabbay D.M. 1981] *Semantical investigations in Heyting's intuitionistic logic*. Dordrecht: Reidel.
- [Gabbay D.M. 1985] Theoretical foundations for non-monotonic reasoning in expert systems // Apt K.R. (ed.) *Logics and models of concurrent systems*. Berlin: Springer. P. 439-457.
- [Gabbay D.M. (ed.) 1994] *What is a logical system?* Oxford: Clarendon Press (and New York 1995).
- [Gabbay D.M. 1996] *Labelled deductive systems*. Vol. 1. Oxford: Clarendon Press.
- [Gabbay D.M., Hogger C.J., Robinson J.A. (eds.) 1998] *Handbook of Logics in Artificial Intelligence and Logic Programming*. Vol. V. Logic programming. Oxford Science Publications.
- [Gaifman H. 1976] Operations on relational structures functors and classes. I // *Proceedings of the Tarski Symposium*. Amer. Math. Society. Vol. 25. P. 21-39.

- [Girard J.Y. 1987] Linear logic // *Theoretical Computer Science*. Vol. 50. P. 1-102.
- [Glivenko M. 1929] Sur quelques points de la logique de M.Brouwer. *Académie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences*, ser. 5. Vol. 15. P. 183-188. (Русский перевод: Гливенко В. О некоторых аспектах логики Брауэра // *Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН*. М., 1999. С. 19-23).
- [Goldfarb W.D. 1979] Logic in the twenties: the nature of the quantifier // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 44, N 3. P. 351-368.
- [Gödel K. 1932] Zum intuitionistischen Aussgenkalkul // *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften Wien, mathematisch, natur-wissenschaftliche Klasse*. Bd. 69. S. 65-66. (Английский перевод: On the intuitionistic propositional calculus // [Gödel 1986]. P. 222-225).
- [Gödel K. 1933a] Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie // *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*. Vol. 4 (1931-32). P. 34-38. (Англ. пер.: On intuitionistic arithmetic and number theory // [Gödel 1986]. P. 287-295).
- [Gödel K. 1933b] Eine Interpretation des intuitionistischen Aussgenkalküls // *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*. Bd. 4. S. 39-40. (Англ. пер.: On the intuitionistic propositional calculus // [Gödel 1986].
- [Gödel K. 1986] *Collected works* / Ed. in chief S.Feferman. N.Y.: Oxford Univ. Press. Vol. 1.
- [Grzegorzczak A. 1967] Some relational systems and the associated topological spaces // *Fundamenta Mathematicae*. Vol. 60. P. 223-231.
- [Haack S. 1974] *Deviant logic: Some philosophical issues*. L.: Cambridge Univ. Press.
- [Haack S. 1996] *Deviant logic, fuzzy logic: Beyond the formalism*. University of Chicago Press, 1996.
- [Hacking I. 1979] What is logic? // *The Journal of Philosophy*. Vol. 76. N 6. (Переиздано // [Gabbay D.M. (ed.) 1994]. P. 1-33).
- [Halmos P. 1962] *Algebraic Logic*. New York: Chelsea Publishing Co.
- [Halmos P. & Givant S. 1998] *Logic as Algebra*. Washington.
- [Hartonas C. 1997] An algebraic theory of structured objects // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 38, N 1. P. 65-80.
- [Henkin L., Monk J.D., Tarski A. 1971] *Cylindric Algebras*. Parts I. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. (Reprinted in 1985).
- [Henkin L., Monk J.D., Tarski A. 1985] *Cylindric Algebras*. P. I, P. II. Pergamon Press.
- [Heyting A. 1930] Die Formalen Regeln der intuitionistischen Logik // *Sitzungsberichte der Preussischen (Berlin) Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. Phys.-Math. Klasse. P. 42-56.
- [Hintikka J. 1994] What is true elementary logic? // Gavroglu K., Stachel J., Wartofsky M. (eds.), *Physics, philosophy and the scientific community*. Dordrecht: Kluwer. P. 301-326.
- [Hintikka 1996] *The principles of mathematics revisited*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [Hintikka J. & Sandu G. 1996] A revolution in logic? // *Nordic Journal of Philosophical Logic*. Vol. 1. N 2. P. 169-183.
- [Hosoi T. 1967] On intermediate logics // *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo*. Vol. 14. P. 293-312.

- [Hosoi T. 1969] On intermediate logics II // *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo*. Vol. 16. P. 1-12.
- [Howard W. A. 1980] The formulae-as-types notion of construction // J.R.Hindley & J.P.Seden (eds.) *To H.B.Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*. London: Academy Press. P. 479-490.
- [Inoué T. 1996] Corrections and additions to my paper «A note on unprovability-preserving sound translations», More general constructions // *Logique et Analyse*. N 155-156. P. 335-367.
- [Jánosy A., Kurucz Á., Eiben Á.E. 1996] Combining algebraizable logics // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 37. N 2. P. 366-380.
- [Karpenko A.S. 1989] Characterization of prime numbers in Łukasiewicz's logical matrix // *Studia Logica*. Vol. 48. N 4. P. 465-478.
- [Karpenko A.S. 2000] Classification of propositional calculi // *Studia Logica* (to appear).
- [Karpenko A.S. & Popov V.M. 1997] BCKX is the axiomatization of implicational fragment of Łukasiewicz's infinite-valued logic L_∞ // *Bulletin of the Section of Logic*. Vol. 26, N 3. P. 112-117.
- [Kiriya E. & Ono H. 1991] The contraction rule and decision problems for logics without structural rules // *Studia Logica*. Vol. 50, N 2. P. 299-319.
- [Komori Y. 1981] Super-Łukasiewicz propositional logics // *Nagoya Mathematical Journal*. Vol. 84. P. 119-133.
- [Lambek J. 1958] The mathematics of sentence structure // *American Mathematical Monthly*. Vol. 65. P. 154-170. (Рус. Пер.: Ламбек Дж. Математическое исследование структуры предложений // *Математическая лингвистика*. М., 1964. С. 47-68).
- [Lambek J. 1968] Deductive systems and categories I // *Math. Systems Theory*. Vol. 2, N 4. P. 278-318.
- [Lambek J. 1974] Functional completeness of cartesian categories // *Annals of Mathematical Logic*. Vol. 6. P. 259-292.
- [Lambek J. 1988] On the unity of algebra and logic // F.Borceux (ed.) *Categorical Algebra and its Applications*. Berlin: Springer-Verlag.
- [Lambek J. 1994] What is a deductive system? // [Gabbay D.M. (ed.) 1994]. P. 141-159.
- [Lambek J. & Scott P.I. 1986] *Introduction to higher-order categorical logic*. Cambridge Univ. Press.
- [Lawvere F.W. 1966] The category of categories as a foundation for Mathematics // S.Eilenberg & D.K.Harrison et al. (eds.) // *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra in La Jolla*. 1965. Springer Verlag. P. 1-21.
- [Lawvere F.W. & Schanuel S.H. 1997] *Conceptual Mathematics. A first introduction to categories*. Cambridge Univ. Press.
- [Lewin R.A., Mikenberg I.F., Schwarze M.G. 1991] C_1 is not algebraizable // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 32. N 4. P. 609-611.
- [Lewis C.I. 1912] Implication and the algebra of logic // *Mind*. Vol. 21. P. 522-531.
- [Lewis C.I. & Langford C.H. 1932] *Symbolic logic*. N. Y.: The Century Company (2nd ed. with corrections, Dover, 1959).
- [Lindström P. 1969] On extensions of elementary logic // *Theoria*. Vol. 35. P. 1-11.

- [Łoś J. & Suszko R. 1958] Remarks on sentential logics // *Indagationes mathematicae*. Vol. 20. P. 177-183.
- [Łukasiewicz J. 1920] O logice trójwartościowej // *Ruch Filozoficzny*. T. 5. S. 170-171. (Англ. пер.: On three-valued logic // [Łukasiewicz J. 1970]. P. 87-88).
- [Łukasiewicz 1922/1923] Interpretacja liczbowa teorii zdań // *Ruch Filozoficzny*. T. 7. S. 92-93. (Англ. пер.: A numerical interpretation of theory propositions // [Łukasiewicz J. 1970]. P. 129-130).
- [Łukasiewicz J. 1929] Elementy logiki matematycznej. Warszawa. (Англ. пер.: Elements of mathematical logic. N.Y., 1963).
- [Łukasiewicz J. 1970] *Selected works*. Warszawa: PWN.
- [Łukasiewicz J. 1971] On the principle of contradiction in Aristotle // *Review of Metaphysics*. Vol. 24. P. 15-38.
- [MacCaull W. 1998] Relational semantics and a relational prove system for full Lambek calculus // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 63. N 2. P. 623-637.
- [Mac Lane S. 1971] *Categories for the Working Mathematician*. Springer Verlag.
- [Malinowski G. 1993] *Many-valued logics*. Oxford: Clarendon Press.
- [Manzano M. 1996] *Extensions of first order logic*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [Martinez N.G. 1990] The Priestly duality for Wajsberg algebras // *Studia Logica*. Vol. 49. N 1. P. 31-46.
- [McKinsey J.C.C. & Tarski A. 1948] Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 13. P. 1-15.
- [McLarty C. 1990] The uses and the abuses of the history of topos theory // *British Journal for Philosophy of Science*. Vol. 41. P. 351-375.
- [McLarty C. 1992] *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Oxford: Clarendon Press.
- [Meyer R.K. 1974] New axiomatics for relevant logics - I // *Journal of Philosophical Logic*. Vol. 3. P. 53-58.
- [Miller D. 1997] Logic programming and metalogic // H. Sckwichtenberg (ed.) *Logic of Computation*. Berlin. P. 265-308.
- [Monk J.D. (ed.) 1989] *Handbook of Boolean Algebras*. Vols. I-III. Amsterdam: North-Holland Co.
- [Mostowski A. 1957] On a generalization of quantifiers // *Fundamenta Mathematicae*. Vol. 44. P. 12-36.
- [Mundici D. 1986] Interpretation of AF C*-algebras in Łukasiewicz sentential calculus // *Journal of Functional Analysis*. Vol. 65. P. 15-63.
- [Mundici D. & Cignoli R. 1997] An invitation to Chang's MV-algebras // M. Droste & R. Göbel (eds.) *Advances in Algebra and Model Theory*. Reading, UK: Gordon and Breach Publishing Group.
- [Mycielski J. 1977] A lattice of interpretability types of theories // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 42. P. 297-305.
- [Mycielski J., Pudlák P., Stern A.S. 1990] A lattice of chapters of mathematics (interpretations between theorems) // *Memoirs of the American Mathematical Society*. Vol. 84. N. 426.
- [Németi I. & Andréka H. 1994] General algebraic logic: a perspective on 'what is logic' // [Gabbay D.M. (ed.) 1994]. P. 393-443.
- [Nerode A & Shore R.A. 1993] *Logics for applications*. Berlin: Springer.

- [Ono H. 1990] Structural rules and a logical hierarchy // *Mathematical logic*. New York: Plenum Press. P. 95-104.
- [Ono H. & Komori Y. 1985] Logics without the contraction rule // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 50. P. 169-201.
- [Post E.L. 1921] Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics*. Vol. 43, N 3. P. 163-185. (Переведено: [Van Heijenoort J (ed.) 1967]. P. 264-283).
- [Prawitz D. & Malmnäs P.E. 1968] A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic // Schmidt H. et al. (eds). *Contributions to mathematical logic*. Amsterdam: North-Holland. P. 215-229.
- [Priest G. & Routley R. & Norman J. (eds.) 1989] *Paraconsistent logic: Essays on the inconsistent*. München: Philosophia Verlag.
- [Quine W.V. 1970] *Philosophy of logic*. N.Y.: Englewood Cliffs.
- [Rasiowa H. 1974] *An Algebraic Approach to Non-classical Logics*. Warszawa: PWN.
- [Rautenberg W. 1979] *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik*. Braunschweig: Vieweg & Sohn.
- [Rose A. 1953] The degree of completeness of the $\aleph_0$ -valued Łukasiewicz propositional calculus // *J. of London Math. Soc.* Vol. 28. P. 176-184.
- [Ruitenburg W. 1995] Model theory of basic logic // *Proceeding of 10th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Sciences*. Volume of abstracts. Florence. P. 201.
- [Ruitenburg W. 1998] Basic predicate logic // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 39. N 1. P. 18-46.
- [Schönfinkel M. 1924] Über die Bausteine der Mathematischen Logik. *Mathematischen Annalen*. Bd. 92. p.305-316 (Англ. пер.: On the building blocks of mathematical logic/[Van Heijenoort J. (ed.) 1967]. P. 355-366).
- [Scott D. 1971] On engendering an illusion of understanding // *The Journal of Philosophy*. Vol. 68. P. 787-807.
- [Scroggs S.J. 1951] Extensions of the Lewis system S5 // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 16. P. 112-120.
- [Shannon C. 1938] A symbolic analysis of relay and switching circuits // *Trans. Amer. Inst. Elect. Eng.* Vol. 57. P. 713-723. (Рус. пер.: Симболический анализ релейных и переключательных схем // Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М., 1963. С. 9-45).
- [Sher G.Y. 1991] *The Bounds of Logic. A Generalized Viewpoint*. Cambridge: The MIT Press.
- [Sher G.Y. 1996] Review of [Gabbay D.M. (ed.) 1994] // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 61. N 4. P. 1396-1400.
- [Stanley B. & Sankappanavar H.P. 1981] *A Course in Universal Algebra*. New York Inc.: Springer-Verlag.
- [Surma S.J. 1982] On the origin and subsequent applications of the concept of Lindenbaum algebra // L.J. Cohen et al. (eds.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science VI*. Warsaw: PWN. P. 719-734.
- [Tarski A. 1930] Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik // *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*. Classe III. Vol. 23, p. 22-29. (Англ. пер.: On some fundamental concepts of metamathematics // [Tarski 1956]. P. 30-37).
- [Tarski A 1930a] Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I // *Monatshefte für Mathematik und Physik*. Bd. 37.

- P. 361-404. (Английский перевод: Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences // [Tarski 1956]. P. 60-109).
- [Tarski A. 1956] *Logic, semantics, metamathematics*. Papers from 1923 to 1938. Oxford. (2nd ed. Indianapolis, 1983).
- [Thomason R.H. (ed.) 1989]. *Philosophical Logic and Artificial Intelligence*. Dordrecht: Kluwer.
- [Torrens A. 1988] On the role of the polynomial $(x \rightarrow y) \rightarrow y$ in some implicative algebras // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*. Bd. 34. S. 117-122.
- [Troelstra A.S. 1992] *Lectures on linear logic*. - Stanford: CSLI.
- [Turquette A. R. 1963] Independent axioms for infinite-valued logic // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 28, N 3. P. 217-221.
- [Umezawa T. 1959] On intermediate propositional logics // *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 24. P. 20-36.
- [Van Benthem J. 1991] *Language in Action: Categories, Lambdas and Dynamic Logic*. Amsterdam: North-Holland.
- [Van Benthem J. & Doets K. 1983] Higher-order logic // Gabbay D. & Guenther F. (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. I: Elements of classical logic. Dordrecht: Reidel. P. 275-329.
- [Van Heijenoort J. (ed.) 1967] *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambr. (Mass.): Harvard Univ. Press.
- [Wajsberg M. 1937] Metalogische Beiträge // *Wiadomosci Matematyczne*. Vol. 43. P. 131-168. (Англ. пер.: Contribution to metalogic // Wajsberg M. *Logical Works*. Wrocław, 1977. P. 172-200).
- [Wang Hao 1994] What is logic? // *The Monist*. Vol. 77. N 3. P. 261-277.
- [Wansing H. 1998] *Displaying modal logic*. Dordrecht: Kluwer.
- [Whitehead A. & Russell B. 1910-1913] *Principia Mathematica*. Cambridge (England): Univ. Press. (Переиздано: Cambridge, 1962).
- [Wójcicki R. 1984] *Lectures on Propositional Calculi*. Wrocław: Ossolineum.
- [Wójcicki R. 1988] *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Dordrecht: Kluwer.

Н.М.Нагорный

РЕАЛИЗУЕМОСТНАЯ СЕМАНТИКА РАННЕГО ПЕРИОДА МАРКОВСКОГО КОНСТРУКТИВИЗМА (ИСТОРИЯ И ПРОБЛЕМЫ)¹

Abstract. *The article contains the analysis of Markov's never published investigations connected to Kleene's realizability, and is based on fragmentary data, any comprehensive written account being lacking. The following two Markov's problems are formulated: 1) Is there a possible link between so called Markov's principle and the completeness of the intuitionistic propositional calculus relative to Kleene's realizability? 2) Does the notion of Kleene's realizability enjoy the so called «disjunction property»?*

1. В настоящее время с особой отчетливостью осознается тот факт, что последняя четверть XIX столетия ознаменовалась в математике резким переломом в процессе ее исторического развития. На смену этапу с *чисто экстенсивной* тенденцией этого процесса пришел этап, уже в самом начале которого стала всё заметнее обнаруживаться новая тенденция – тенденция к осмыслению и систематизации накопленного в этой науке фактического материала.

Анализируя события этого периода и проводя параллель с проделанным Н.А.Бердяевым [1] анализом условий, делающих возможным построение *философии истории*, нельзя не заметить, что приводимые им соображения приложимы не только к кругу вопросов, рассмотренных им самим, но и к заметно более широкому и что в рассматриваемый нами период в математике как раз и произошла та историческая катастрофа, то расщепление в математическом бытии и в математическом сознании, которое, следуя духу его рассуждений, должно было создать предпосылки для противоположения в математическом познании субъекта и объекта, для наступления рефлексии математического познания, а затем и для возникновения подлинной *философии математики*.

Характерным следствием событий этого периода стало провозглашение в математике ряда крупных, становившихся всё более осознанными *математико-философских платформ*, представлявших собой своего рода «*архитектурные программы для мате-*

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 97-06-80211.

матики». В каждой из новых программ трактовался вопрос о том, как, на каком фундаменте и с использованием какого «строительного материала» должно возводиться общее здание этой науки с тем, чтобы всё разнообразие внутреннего устройства ее теорий сводилось к возможному минимуму. Естественно, со временем, в процессе окончательного оформления этих программ стали обсуждаться и вопросы обеспечения «прочности» сооружений, возводимых по разработанным в них проектам.

Каждая из этих программ открывала определенное *направление* в дальнейшем развитии математики, и плодотворность этих направлений, а также их исторический успех обеспечили их творцам, ощущавшим, как это однажды отметил А.Н.Колмогоров (см., напр., [9, с. 428-429]), свою личную ответственность за общее состояние дел в математике, прочное место в ее истории. Одной из таких программ стало и «*конструктивное направление в математике*», созданное А.А.Марковым-младшим (1903–1979), одним из крупнейших математиков и логиков XX в., и ныне всё чаще называемое «*марковским конструктивизмом*».

2. Первой программой в ряду программ в 70-х годах XIX в. была провозглашена «*теоретико-множественная программа*» Г.Кантора (деятельное участие в ее разработке принял также Р.Дедекин²). Она базировалась на созданном незадолго до этого учении²) Кантора о «множествах» (*Mengenlehre*) с достигшей в нем своего высшего развития идеей *актуальной бесконечности*. В качестве аппарата логической дедукции в этой программе естественным образом использовалась обычная «классическая» аристотелевская логика. Мысль о возможности какого-либо *иного* варианта этого аппарата по тем временам возникнуть еще не могла.

В рамках этой программы *все без исключения* математические объекты должны были определяться как *множества*, удовлетворяющие определенным условиям, и *все без исключения* рассуждения об этих объектах должны были проводиться по правилам только что упомянутой аристотелевской логики с ее «законом исключенного третьего», а значит, и с методом рассуждения «от противного», а значит, и с доказываемыми на его основе принципиально

² Сам Кантор предпочитал пользоваться именно этим термином. Систематически о *теории* множеств стали говорить несколько позже. Заметим, что различие в терминах здесь отнюдь не случайно, хотя сейчас оно – в силу сложившейся традиции – и не с первого взгляда бросается в глаза: учение представляет собой систему воззрений его создателя, творца и требует определенной *веры* в его взгляды; теория же, как правило, более *научна* и более объективна по своему характеру.

неконструктивными так называемыми «чистыми» теоремами существования, отвергающими саму идею требования *построения* объектов, существование которых в них утверждается.

Несмотря на всю внешнюю привлекательность этой программы, уже одни только что перечисленные ее особенности предопределяли ряд серьезных изъянов возводимой на ее основе «теоретико-множественной математики». И разумеется, в первую очередь – ее *неконструктивность*.

В программе имелись и другие, не менее существенные недостатки. Например, в ней отсутствовало сколько-нибудь точное, «работающее» определение основного понятия канторовского учения – понятия «множества». Кроме того, вскоре после ее провозглашения в ней были обнаружены прямые противоречивые *противоречия* (обычно почему-то называемые «парадоксами»). Однако этой стороны данного вопроса мы в нашем обзоре касаться не будем.

3. В самом начале XX в. с острой, принципиальной критикой программы Кантора выступил Л.Э.Я.Брауэр. Поставив себе целью полностью освободить математику от трудностей, связанных с канторовским учением, он в собственной программе, названной им «*интуиционистской*», предложил строить математику на базе интуитивно ясных потенциально осуществимых «*умственных математических построений*», совершенно не прибегая при этом к представлению о «множестве». В ходе реализации этой программы Брауэр сделал выдающееся открытие, совершившее переворот в такой, казалось бы, устоявшейся науке, как логика. Он обнаружил, что при интуиционистском понимании суждений о рассматриваемых им построениях так называемый закон исключенного третьего, а вместе с ним и метод «от противного» утрачивают традиционно приписывавшийся им статус *общелогических норм*. Тем самым программа Брауэра делала серьезный шаг по пути к конструктивизации математики, а рядом с «классической» логикой, перестававшей теперь быть *единственной* наукой о способах умозаключений, возникала новая, *интуиционистская* логика.

Создавшаяся ситуация выглядела совершенно необычной и нуждалась в общедоступных разъяснениях. Вероятно, одной из самых ранних «просветительских» попыток такого рода и стала известная работа А.Н. Колмогорова [2], в которой делалась попытка объяснить читателю, не знакомому с интуиционизмом, способы интуиционистской аргументации. Правда, по не зависевшей от автора причине попытка эта оказалась не вполне успешной, так как представление об общем методе (алгорифме),

играющее в этой работе существенную роль, к тому времени еще не было окончательно прояснено.

Следует, однако, отметить, что к концу 20-х гг. интуиционистская логика устоялась уже настолько, что А. Гейтинг в работе [3] смог кодифицировать определенный круг умозаключений, интуиционистски приемлемых уже в силу самой их *формы* (откуда, безусловно, и происходит название этой работы). Практически эта кодификация была оформлена в виде дедуктивной (в современных терминах – формальной) системы. Однако обстоятельство это не следует переоценивать. Вот что Гейтинг писал впоследствии (см. [4, с. 13]) по этому поводу: «Конечно, верно, что и в интуиционистской математике законченную часть теории можно формализовать. Нужно, однако, разобраться, в чем *смысл* такой формализации. Мы можем рассматривать формальную систему как *лингвистическое выражение математической мысли* в некотором специальном подходящем языке» (курсив мой. – Н.Н.). Идея формализации, несомненно, конфронтирует с самим духом интуиционизма (как и близкого ему в этом отношении марковского конструктивизма). Именно по этой причине мы в данном обзоре не касаемся еще одной программы – «теории доказательств», или «метаматематики» Д. Гильберта.

4. Относительно малоизвестно, что создатель «марковского конструктивизма», один, как уже отмечалось, из крупнейших математиков и логиков XX в. А.А. Марков по своему образованию не был ни математиком, ни логиком³, и тем не менее сумел добиться значительных успехов в теоретической физике, в прикладной геофизике, в небесной механике и даже в химии⁴. На этом пути он приобрел серьезный научный опыт, определивший не только «естественноиспытательский» строй его мышления, но и самый его способ подходить к рассматриваемой проблематике.

Разумеется, в свой «доматематический» период Марков имел дело и с математикой, но в основном как с рабочим инструментом. Перейдя к чисто математической проблематике, он примерно до середины 40-х гг. вместе с подавляющим большинством современных ему математиков придерживался программы Кантора. И все же впоследствии он отмечал, что практически с самого начала своей профессиональной деятельности в области математики стал ощущать острый дискомфорт от безраздельного господства в ней

³ Он в 1924 г. окончил физическое отделение физико-математического факультета Ленинградского университета.

⁴ В одной из автобиографий Марков пишет, что как математик он сложился к 1935 г.

теоретико-множественного способа мышления и что уже тогда пытался искать выход из создавшейся ситуации.

Исследуя роль, которую *идея бесконечности* играет в математике, а также связанные с этой идеей *абстракции*, он утвердился в мысли положить в основу этой науки *потенциальную*, а не *актуальную*, как это было сделано Кантором, бесконечность. Так в программе Маркова появились ставшие теперь уже всем привычными потенциально осуществимые «*конструктивные объекты*».

Чуткий ко всему новому в науке, Марков с первых же шагов становления *уточненного* понятия алгорифма⁵ увидел в нем тот надежный инструмент, с помощью которого он в дальнейшем станет в рамках своей программы строить математические объекты в терминах конструктивных объектов, не обращаясь к теоретико-множественным представлениям. По завершении очерченной здесь подготовительной стадии Марков, начиная со второй половины 40-х годов, будучи в ту пору уже крупным ученым с прочно устоявшейся репутацией, самым радикальным образом изменил тематику и направление своих исследований.

Особого решения в марковской программе требовала проблема *понимания суждений* об объектах вырисовывавшейся «конструктивной математики». И здесь сильное влияние на Маркова оказала работа С.К.Клини [5], в которой на базе уточненного понятия алгорифма, так недостававшего работе Колмогорова⁶, давалась интерпретация интуиционистской арифметики. В этой работе для любой замкнутой логико-арифметической формулы F определялся конструктивный объект r_F , названный Клини *реализацией*⁷ этой формулы, несущий в себе информацию о задаче, которую требуется решить, чтобы дать *интуиционистское*, – а в первом, но достаточно приемлемом приближении, – и *конструктивное обоснование истинности* арифметического высказывания, выраженного формулой F . Формула, обладающая реализацией, была названа Клини *реализуемой*. В этом клиниевском понятии, допускавшем совершенно естественное распространение на *чисто*

⁵ Имеются в виду опубликованные в 1936 г. знаменитые работы А.Чёрча, С.К.Клини, А.М.Тьюринга и Э.Л.Поста.

⁶ По свидетельству самого Клини, он не был знаком с этой работой. Поразительно и то, что сам Колмогоров почему-то не воспользовался для ее прояснения уже упоминавшимися работами 1936 г. по уточнению понятия алгорифма.

⁷ Этот устоявшийся ныне русский термин нельзя, однако, признать удачным. Английское “realization” означает, помимо прочего, также и “понимание”, и надо думать, Клини имел в виду именно это значение данного слова.

логические – и в частности, пропозициональные – формулы⁸, Марков сразу же угадал подходящую основу для разработки конструктивной семантики – в частности, для уточнения понятия *закона конструктивной логики*. Сознвая все связанные с таким решением сложности, он, тем не менее, остановился на теории Клини как на «рабочем варианте». Избранный им подход оказался плодотворным. Впоследствии, в 60–70-х годах Марковым (см., напр., [7]) был разработан другой, более последовательный вариант конструктивной логики – так называемая «ступенчатая семантическая система». Однако рассмотрение этого варианта не входит в задачу данного обзора.

Следует отметить, что отвергая вслед за Брауэром метод «от противного» в роли *общелогического*, Марков, тем не менее, с самого начала работы над своей программой старался выявить ситуации, где применения этого метода были бы совместимы с ней. В итоге им был выдвинут в качестве конструктивно приемлемого так называемый «ленинградский принцип» [8], ныне известный под названием «*принципа Маркова*» (ПМ). Этот принцип объявляет *конструктивно приемлемой* – для любого *алгоритмически разрешимого* предиката P – импликацию

$$\neg\neg\exists xP(x) \supset \exists xP(x),$$

и значит, в частности, разрешает доказывать применимость алгоритма к его исходному данному методом «от противного». Несмотря на ряд выдвигавшихся против ПМ возражений, Марков считал данное им обоснование этого принципа убедительным и на практике неизменно пользовался им.

5. Разработку конструктивной логики Марков начал с простейшей – *пропозициональной* – ее части. Из работы Д. Нельсона [10] было известно, что выводимость любой пропозициональной формулы в интуиционистском пропозициональном исчислении ИРС влечет за собой ее реализуемость. Марков выдвинул гипотезу, что верно и обратное, и на рубеже 40–50-х годов попытался доказать ее. Подтверждение этой гипотезы означало бы, что в ИРС выводимы законы пропозициональной конструктивной логики, и только они.

⁸ См. напр., работу Роуза [6]. При этом реализацией пропозициональной формулы F считается алгоритм (в каком-либо точном смысле этого слова), перерабатывающий любой набор замкнутых логико-арифметических формул, подставляемых в F вместо ее переменных, в реализацию результата их подстановки. Аналогичными понятиями, ввиду их естественности, в школе Маркова пользовались еще до того, как работа Роуза вышла в свет.

В 1953 г. Дж. Роуз [6] опубликовал пример пропозициональной формулы, на первый взгляд, опровергавшей гипотезу Маркова. И тем не менее, в его работе крылась известная тонкость. Роузом было показано, что приведенная им не выводимая в ИРС формула в рамках «классических» рассуждений реализуема. Детальный анализ его работы показал, что доказательство реализуемости его формулы может быть уложено и в *конструктивные* рамки, однако лишь со ссылкой на ПМ, устранить которую не удалось в то время и не удастся до сих пор. Таким образом, для «конструктивиста», отвергающего ПМ, доказательство Роуза оказывается неприемлемым. Поскольку, однако, Марков настаивал на конструктивной приемлемости своего принципа, он был вынужден признать высказанную им гипотезу опровергнутой и в дальнейшем работу над реализуемостью прекратил, не опубликовав никаких «попутных» результатов. Тем не менее, судя по всему, они у него имелись. К этой теме мы еще вернемся.

Формула Дж. Роуза имела относительно несложный вид:

$$((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg D \vee \neg\neg D)) \supset (\neg D \vee \neg\neg D)$$

(здесь $\neg$ – знак отрицания, а D есть $(\neg p \vee \neg q)$, где p и q – две различные пропозициональные переменные). Однако несмотря на всю свою простоту, она производила загадочное впечатление: соображения, приведшие Роуза к этой формуле, из его работы никак не усматривались⁹.

Во второй половине 50-х годов автор данного обзора интенсивно обсуждал реализуемостную тематику с рядом коллег и учеников, начавших в это время активно интересоваться ею. Это привело к организации в Вычислительном центре АН СССР специального семинара, в дальнейшем на протяжении ряда лет успешно работавшего над этой тематикой. Ввиду неугасавшего интереса к формуле Роуза на нем были, в частности, изучены все известные аналоги этой формулы – формулы Кипниса [11], Плиско [12], Цейтина [13], Янкова [14]. Анализ этих формул показал, что как и в случае формулы Роуза, их реализуемость всякий раз доказывалась конструктивно, но со ссылками на ПМ, не поддававшимися устранению. Ситуация эта сохраняется и до сих пор. К сожалению, объем данного обзора не позволяет остановиться на этом интересном вопросе более подробно. Заметим лишь, что В.А. Янко-

⁹ Позже, в 1966 г., Дж. Роуз посетил Москву в качестве участника Международного математического конгресса. Во время состоявшейся с ним беседы его спросили и о происхождении его формулы. К сожалению, сам Роуз тоже не смог внести ясность в этот вопрос.

вым [14] было также установлено, что «костяк» формулы Роуза, (т.е. тот ее случай, когда D является *пропозициональной переменной*), не реализуем.

Известно, что упоминавшаяся выше теорема Нельсона доказывается конструктивно и без ссылок на ПМ, и это, как нам представляется, дает все основания внести в упоминавшуюся выше гипотезу Маркова коррекцию, которую сам он – в силу своей приверженности ПМ – внести, конечно, не мог. С учетом сказанного, я предлагаю сформулировать следующую проблему, которую можно было бы назвать

Модифицированной проблемой Маркова:

Доказать или опровергнуть предположение, что может быть построен алгоритм $\mathfrak{A}$, для которого без ссылок на ПМ можно было бы доказать, что для любой пропозициональной формулы F и для любого алгоритма $\mathfrak{B}$ верна следующая импликация: если $\mathfrak{B}$ реализует F , то $\mathfrak{A}(F, \mathfrak{B})$ является выводом F в ИРС.

(Разумеется, что имеются в виду алгоритмы в каком-либо точном смысле слова.)

6. И еще об одной проблеме, связанной с именем Маркова. Известен замечательный результат Гёделя–Генцена [15, 16] относительно так называемого «дизъюнктивного свойства» выводимости в ИРС, утверждающий, что может быть построен алгоритм, который по любой дизъюнкции пропозициональных формул, выводимой в ИРС, указывает ее член, выводимый в этом исчислении. В 50-х годах Марков в устных беседах высказывал убеждение, что в свое время в ходе работы над рассмотренной выше гипотезой о выводимости реализуемых пропозициональных формул им был доказан реализуемый аналог этого результата, гласящий, что:

Можно построить алгоритм, который по любой реализуемой дизъюнкции пропозициональных формул указывает ее реализуемый член,

но что впоследствии доказательство этого факта было им утрачено. Всем, сколько-нибудь знавшим Маркова, известна тщательность, с которой он подходил к своей работе. В частности, ни в одной из его публикаций никогда не было обнаружено ни одного ошибочного утверждения, и ни одной ошибочной работе не удалось пройти через руководимые им семинары. И тем не менее, в данном случае мы вновь вправе говорить лишь о **гипотезе (или проблеме) Маркова**.

В 60-х годах участники уже упоминавшегося выше семинара по реализуемости предпринимали попытки восстановить это дока-

зательство, но, к сожалению, они не увенчались полным успехом. Наиболее интересные результаты в этом направлении были получены М.М. Кипнисом [17] и Ф.Л. Варпаховским [18], показавшими, что все члены реализуемой дизъюнкции пропозициональных формул не могут оказаться нереализуемыми, т.е. что гипотеза Маркова не может быть опровергнута *на конкретном примере*. Однако построить искомый в данном случае алгоритм, который указывал бы, какой именно из членов дизъюнкции реализуем, им все-таки не удалось. Такое положение дел сохраняется и по сей день.

7. Реализацией пропозициональной формулы F , как уже отмечалось, всегда является *алгоритм*. И если он оказывается «алгоритмом-константой», то сама F называется *равномерно* реализуемой. Все пропозициональные формулы, реализуемость которых известна *на сегодня* (включая и формулы, выводимые в ИРС), реализуемы равномерно. Чрезвычайно важно было бы выяснить, верно ли, что

Всякая реализуемая пропозициональная формула реализуема равномерно.

Положительный ответ на этот вопрос позволил бы, в частности, подтвердить сформулированную выше гипотезу Маркова о «дизъюнктивном свойстве» реализуемости.

8. Решение перечисленных проблем могло бы пролить свет на вопрос о том, что же представляет собой совокупность R реализуемых пропозициональных формул (законов пропозициональной конструктивной логики). В 50–60-х годах П.С.Новиков в устных беседах высказывал уверенность в том, что R алгоритмически распознаваема. Ответ на этот вопрос пока не известен. Ф.Л. Варпаховский [19] привел некоторые доводы в пользу предположения, что она алгоритмически перечислима. В.Е. Плиско [20] показал, что совокупность реализуемых *предикатных* формул чрезвычайно сложна, что она даже не является арифметической. К сожалению, этот эффектный результат для характеристики R не дает ничего.

Известный интерес представлял и анализ самой структуры клиниевского определения. Исследование некоторых его модификаций, начатое автором данного обзора [21–22] еще в начале 60-х годов, привело в [23–25] к новому доказательству непротиворечивости *классической* формальной арифметики. Выходя за рамки структуралистских требований гильбертовской теории доказательств, оно, тем не менее, является достаточно прозрачным и «нейтральным» по отношению ко всем упоминавшимся выше программам. В идейном отношении оно восходит к работе Нельсона

[10], непосредственно из которой вытекает непротиворечивость лишь *интуиционистской* формальной арифметики.

Эскизно обрисованная здесь реализуемость проблематика по-прежнему сохраняет свою актуальность, и в настоящем обзоре автору хотелось напомнить о ряде по-настоящему трудных, оставшихся пока нерешенными проблем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бердяев Н.А. Смысл истории. М.: Мысль, 1990.
2. Kolmogoroff A. Zur Deutung der intuitionistischen Logik // Math. Zeitschr., 1932. 35. H. 1. P. 58-65.
3. Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzb. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 1930. P. 42-56.
4. Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. М.: Мир, 1965. (Пер. с англ. под ред. и с комм. А.А.Маркова).
5. Kleene S.C. On the interpretation of intuitionistic number theory // J. Symb. Logic, 1945. 10. P. 109-121.
6. Rose G.F. Propositional calculus and realizability // Trans. Amer. Math. Soc., 1953. 75. № 1. P. 1-19.
7. Марков А.А. Попытка построения логики конструктивной математики // Исследования по теории алгоритмов и математической логике. Изд-во ВЦ АН СССР, 1976. С. 3-31.
8. Марков А.А. Об одном принципе конструктивной математической логики // Тр. 3-го Всес. матем. съезда. Т. 2. 1956. М.: Изд-во АН СССР. С. 146.
9. Марков А.А., Нагорный Н.М. Теория алгоритмов. 2-е изд. М.: Фазис, 1996.
10. Nelson D. Recursive functions and intuitionistic number theory // Trans. Amer. Math. Soc., 1947. 61. P. 307-368.
11. Кипнис М.М. О реализациях предикатных формул // Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР им. В.А.Стеклова, 1971. 20. 40-48.
12. Плиско В.Е. Об одной формальной системе, связанной с реализуемостью // В сб.: Теория алгоритмов и математическая логика. Изд-во ВЦ АН СССР, 1974. С. 148-158.
13. Цейтич Г.С. О дизъюнктивном ранге формул конструктивной арифметики // Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР им. В.А.Стеклова, 1968. 8. С. 260-271.
14. Янков В.А. О реализуемых формулах логики высказываний // ДАН СССР, 1963. 151. № 5. С. 1035-1037.
15. Gödel K. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül // Anzeiger der Akad. der Wissensch. in Wien, 1932. 69. P. 65-66.
16. Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schliessen. II // Math. Zeitschr., 1935. 39. С. 405-431.
17. Кипнис М.М. Об одном свойстве пропозициональных формул // ДАН СССР, 1967. 174. № 2. С. 277-278.

18. Варпаховский Ф.Л. О нереализуемости дизъюнкции нереализуемых формул логики высказываний // ДАН СССР, 1965. 161. № 6. С. 1257-1258.
19. Варпаховский Ф.Л. К вопросу об аксиоматизации реализуемых позиционных формул // ДАН СССР, 1990. 314. С. 32-36.
20. Плиско В.Е. О реализуемых предикатных формулах // ДАН СССР, 1973. 212. № 3. С. 553-556.
21. Нагорный Н.М. О реализуемых и выполнимых логико-арифметических формулах // ДАН СССР, 1964. 157. № 3. С. 529-531.
22. Нагорный Н.М. Об одном варианте определения реализации логико-арифметической формулы // Исследования по теории алгоритмов и математической логике. Изд-во ВЦ АН СССР, 1976. С. 32-45.
23. Нагорный Н.М. Одна конструктивная модель классической формальной арифметики // ДАН, 1993. 332. № 1. С. 26-28.
24. Нагорный Н.М. К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики // Сообщения по прикладной математике Вычисл. центра РАН, М.: ВЦ РАН. 1995. С. 25.
25. Нагорный Н.М. К вопросу о непротиворечивости арифметики // Междунар. конф. «Смирновские чтения». М., 1997. С. 20-22.

О ПРИКЛАДНЫХ ТЕОРИЯХ С СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИМИ ЛОГИКАМИ¹

Abstract. *There is a continuum of so called «superintuitionistic logic». Usual they are studied from a purely logical point of view. But many logically different calculi coincide when used in applied theories. Some results about «applied classification of logical calculi» are presented here. Arithmetic are considered here as semi-formal system with ω -rule. Arithmetic with finite-valued superintuitionistic logics are classical. Arithmetic with a logic of linear chains in classical. Minimal arithmetic-based theories are definitionally equivalent to intuitionistic.*

$\neg\neg\exists x A(x) \Rightarrow \exists x \neg\neg A(x)$ implies classical logic in any theory with two different elements.

$\forall x (\neg A(x) \Rightarrow \exists y B(x, y)) \Rightarrow \forall x \exists y (\neg A(x) \Rightarrow B(x, y))$ implies $(\neg A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B) \vee (\neg A \Rightarrow C)$ in any theory with two different elements.

Постановка задачи

В современной математической и философской логике логическим исчислением или просто логикой называют исчисление, замкнутое относительно правила подстановки:

$$\frac{A(P(t_1, \dots, t_n))}{A(B(t_1, \dots, t_n))} \quad (1)$$

где P — n -местный предикат, $B(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула с явно выделенными свободными переменными $x_1, \dots, x_n$. Естественно, при подстановке стандартными способами избегают коллизий переменных.

Таких «логик», находящихся в промежутке между интуиционистской и классической, континуум. Они называются *суперинтуиционистскими*. Но очень малое число из них соответствует содержательному понятию логики как весьма общей системы, обладающей естественной и широкой совокупностью интерпретаций, выражающей некоторую концептуально целостную и желательно концептуально замкнутую систему предположений о мире и/или о допустимых способах рассуждений. С точки зрения платонизма логика должна быть одним из высокоуровневых уточнений некоей Идеи, с точки зрения системного подхода — она должна описывать широкий естественный класс систем.

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 98-03-04368, и РФФИ, грант № 98-06-80205.

Частично анализ систем логик можно провести, основываясь на работах Л.Л.Максимовой. Напомним полученные ею результаты.

Интерполяционное свойство Крейга выполнено и для классической, и для интуиционистской логики. Оно имеет весьма естественную формулировку:

Если в логике L доказуема формула $A \Rightarrow B$, то имеется формула C , содержащая лишь термины, общие для A и B , и такая, что $A \Rightarrow C, C \Rightarrow B$.

Свойство Крейга существенно используется при доказательстве теоремы Бета об определмости для интуиционистской и классической логики:

Если предикат P сохраняет одни и те же значения для всех моделей, в которых все понятия из подписатуры σ имеют одни и те же значения, то P определим через σ .

Но математический анализ неформализуемых понятий, каким, конечно же, является и понятие логики, чреват тем, что самая привлекательная из возможных моделей чаще всего оказывается и наиболее вводящей в заблуждение. Прежде всего, заметим, что теорема Крейга имеет место лишь для чистой логики предикатов. Уже для арифметики существует простой опровергающий пример.

Пример 1. Формулы

$$\exists y(y+y=x) \text{ и } \exists y(y * S S 0 = x)$$

(что означает просто $y * 2 = x$) эквивалентны, поскольку они означают четность x . Если бы для арифметики выполнялась теорема Крейга, можно было бы построить формулу, выражающую четность числа при помощи лишь понятий $=$ и S . Но этого сделать нельзя.

Таким образом, хотя свойство Крейга чрезвычайно приятно, но на основании его одного нельзя делать вывод о том, что исчисление с правилом подстановки является логикой.

Попытаемся использовать для отделения исчислений, заведомо не претендующих на звание логики, их поведение на каких-либо естественных прикладных теориях, в первую очередь на арифметике. При этом попытаемся заодно исследовать те свойства арифметик, которые влияют на соответствующее поведение логик. Первые результаты исследований в данном направлении представлены в настоящей работе.

Отделимость

Сначала рассмотрим следующий случай. Известно, что суперинтуиционистская предикатная логика, все схемы аксиом которой после удаления кванторов превращаются в интуиционистские про-

позициональные теоремы, консервативна относительно интуиционистской пропозициональной логики, и, соответственно, не может влечь никакой новой пропозициональной теоремы. Но не менее известно, в частности, что принцип Медведева

$$(\neg A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B) \vee (\neg A \Rightarrow C) \quad (2)$$

и схема IP

$$\forall x (\neg A(x) \Rightarrow \exists y B(x, y)) \Rightarrow \forall x \exists y (\neg A(x) \Rightarrow B(x, y)) \quad (3)$$

выражают, с точки зрения реализуемости, одно и то же: всюду определенность всех рассматриваемых вычислимых функций. В арифметике, анализе и теории множеств со схемой IP принцип Медведева выводим. Но (3) после опускания кванторов превращается в тавтологию $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$. Таким образом, схема IP не может логически влечь (2).

Проанализируем вывод (2) из (3) в анализе, постаравшись выделить минимально необходимые для такой выводимости свойства теории. В арифметике и в анализе имеет место следующая эквивалентность:

$$A \vee B \Leftrightarrow \exists x (x \in \{0, 1\} \ \& \ (x=0 \Rightarrow A) \ \& \ (x=1 \Rightarrow B))$$

Одно место в данной формуле может быть неоднозначно истолковано в интуиционистской логике. Что означает $x \in \{0, 1\}$? Чтобы полностью избавиться от дизъюнкции, примем, что это означает $\neg(x \neq 0 \ \& \ x \neq 1)$.

Отметим, что еще Л. Брауэр установил, что в интуиционистской математике возникают два отношения неравенства: только что использованное нами слабое неравенство, означающее просто отрицание равенства, и различие, или отделимость двух элементов, имеющее позитивный смысл: $x \# y$. Например, число 0 и число, определяемое последовательностью вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 / 2^i \cdot \alpha(i)),$$

где α — бинарная беззаконная последовательность, не равны, но если бы мы могли установить их различие заранее, то последовательность уже не могла бы называться беззаконной.

Различие в прикладных теориях определялось по-разному, но всегда выполнялось одно свойство: если мы в принципе знаем, что некий объект должен совпадать с одним из двух различных объектов, то мы можем эффективно определить и то, с каким именно из них он будет совпадать. Например, если область изменения действительного числа x состоит из величин 0 и 1, то достаточно вычислить его с точностью до 0.4, чтобы определить, чему же оно равно. Поэтому приходим к следующему определению.

Определение 1. Два объекта a, b называются *отделимыми*, если они не равны и $\forall x (\neg\neg(x=a \vee x=b) \Rightarrow (x=a \vee x=b))$.

Формула $A(x_1, \dots, x_n)$ называется *нормальной*, если

$$\forall x_1, \dots, x_n (\neg\neg A(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow A(x_1, \dots, x_n)).$$

Предложение 1. Если a и b – отделимые объекты, то $\forall x (\neg\neg x=a \Rightarrow x=a)$ и $\forall x (\neg\neg x=b \Rightarrow x=b)$.

Доказательство. Пусть $\neg\neg x=a$. Тогда $\neg\neg(x=a \vee x=b)$.

Значит, по определению отделимости, $(x=a \vee x=b)$. Но поскольку $\neg a=b$, $\neg x=b$, то $x=a$. Таким образом, равенство для отделимых объектов нормально. $\square$

Предложение 2. Если a и b – отделимые объекты, то

$$A \vee B \Leftrightarrow \exists x (\neg(x \neq a \ \& \ x \neq b) \ \& \ (x=a \Rightarrow A) \ \& \ (x=b \Rightarrow B)).$$

Таким образом, в теории с отделимыми объектами дизъюнкцию можно исключить.

Теорема 1. Если в теории есть два отделимых объекта и все предикаты нормальны, то

$$\neg\neg\exists x A(x) \Rightarrow \exists x \neg\neg A(x) \text{ влечет закон исключенного третьего.}$$

Доказательство. В самом деле, если есть два отделимых объекта, то мы можем устранить дизъюнкции из формул. Далее, индукцией по построению формулы легко показывается, что все формулы нормальны. А закон двойного отрицания влечет закон исключенного третьего. $\square$

Такого слабого понятия отделимости не всегда достаточно для установления содержательной зависимости логических принципов.

Определение 2. Два объекта a, b назовем *разрешимыми*, если выполнено $\forall x (x=a \vee x \neq a) \ \& \ \forall x (x=b \vee x \neq b) \ \& \ a \neq b$.

Итак, равенство разрешимым объектам разрешимо, и они не равны друг другу. Очевидно, что разрешимые объекты являются отделимыми.

Теорема 2. Если в теории есть два разрешимых объекта, то принцип IP влечет принцип Медведева (2).

Доказательство. Рассмотрим два отделимых объекта a, b . Пусть выполнен принцип IP. Тогда посылку принципа Медведева можно переписать в форме

$$\neg A \Rightarrow \exists x ((x=a \vee x=b) \ \& \ (x=a \Rightarrow B) \ \& \ (x=b \Rightarrow C)).$$

По принципу IP отсюда следует

$$\exists x (\neg A \Rightarrow (x=a \vee x=b) \ \& \ (x=a \Rightarrow B) \ \& \ (x=b \Rightarrow C)),$$

что эквивалентно

$\exists x(((\neg A \Rightarrow (x=a \vee x=b)) \& (\neg A \Rightarrow (x=a \Rightarrow B)) \& (\neg A \Rightarrow (x=b \Rightarrow C))))$.
Преобразуя две последние импликации, получаем

$$\exists x(((\neg A \Rightarrow (x=a \vee x=b)) \& (x=a \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)) \& (x=b \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C))))$$

По разрешимости элементов a и b получаем:

$$\exists x(((\neg \neg A \vee x=a \vee x=b)) \& (x=a \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)) \& (x=b \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C))))$$

Отсюда выводится по дистрибутивности и закону, *ex falso quodlibet* что

$$\neg \neg A \vee \exists x((x=a \vee x=b) \& (x=a \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)) \& (x=b \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C))))$$

Но второй член данной дизъюнкции следует из первого. Таким образом, вводя обратно $\vee$, получаем заключение принципа Медведева $(\neg A \Rightarrow B) \vee (\neg A \Rightarrow C)$.

Арифметика

Рассмотрим несколько логических эффектов в арифметике.

Прежде всего рассмотрим позитивную арифметику, в которой единственная из аксиом Пеано, содержащая отрицание явно, переписывается в форме:

$$\forall x(Sx=0 \Rightarrow S0=0).$$

Но даже без этого принципа имеет место следующий результат.

Предложение 3. В позитивной арифметике любая формула выводится из формулы $0=1$.

Доказательство. При помощи математической индукции выводится $\forall x(x=Sx)$, отсюда еще одной индукцией $\forall x(0 \neq x)$, отсюда непосредственно следует по аксиомам равенства $\forall x, y (x=y)$. А далее индукцией по построению формулы доказывается любая позитивная формула. $\square$

Теперь рассмотрим интуиционистскую арифметику. Сама по себе формальная система интуиционистской арифметики, как показали результаты Сморолинского [1], полна относительно интуиционистской пропозициональной логики в том смысле, что мы можем в ней построить невыводимую формулу, являющуюся подстановочным примером любой пропозициональной формулы, не выводимой в интуиционистской логике. Но пройдем еще на один шаг ближе к содержательному смыслу арифметических формул, рассмотрим интуиционистскую арифметику с конструктивным ω -правилом (правилом Карнапа)

$$\frac{A(0), \dots, A(n), \dots}{\forall x A(x)}$$

В конструктивном правиле Карнапа вывод является алгоритмически разрешимым деревом с конечными путями. В классиче-

ском правиле Карнапа снимается требование разрешимости. Вначале упомянем один общеизвестный результат.

Предложение 4. *Интуиционистская арифметика с классическим правилом Карнапа совпадает с классической.*

Доказательство. Всякая доказуемая формула истинна в стандартной модели. Наоборот, индукцией по определению истинности тривиально строится вывод любой истинной формулы.

Критические шаги здесь следующие. Если $A \vee B$ классически истинно, то одно из них интуиционистски выводимо, по предположению индукции. Но тогда мы можем построить вывод и самого $A \vee B$. Таким способом мы можем построить вывод $A \vee \neg A$. А вывод $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ строится по правилу Карнапа, поскольку каждая из формул $A(n) \vee \neg A(n)$ доказуема, а знать конкретные доказательства не обязательно. $\square$

Гораздо более тонкий результат принадлежит Феферману.

Теорема 3 (Феферман [2])

В классической арифметике с конструктивным ω -правилом выводима любая истинная формула.

Данный результат легко обобщается на класс интуиционистских формул, являющихся переводами по Колмогорову-Гливенко классических (их будем называть просто классическими формулами), поскольку для таких формул классический вывод алгоритмически перестраивается в интуиционистский. Таким образом, все арифметические системы с конструктивным ω -правилом и интуиционистской логикой полны на множестве классических формул и совпадают на нем.

Теперь отметим простейший факт из теории моделей Крипке. Если в модели все пути конечны, то все классические формулы истинны тогда и только тогда, когда они истинны в листьях данной модели.

В самом деле, классическая формула A истинна тогда и только тогда, когда $\neg\neg A$, а последняя формула истинна для моделей с конечными путями тогда и только тогда, когда она истинна в последней точке каждого пути, т. е. в листьях.

Предложение 5. *В модели Крипке суперинтуиционистской арифметики с ω -правилом все миры элементарно эквивалентны стандартной арифметике.*

Доказательство. Согласно теореме Сморинского [1], каждый мир в модели интуиционистской арифметики является моделью классической арифметики. Но все истинные классические формулы выводимы в рассматриваемой теории. Значит, все они истинны в любой модели. Далее, согласно результатам той же

работы, к любой модели интуиционистской арифметики можно добавить без нарушения истинности формул стандартный натуральный ряд в качестве корня дерева модели. Классические формулы истинны в этой нижней точке и во всех конечных, значит, они истинны и во всех промежуточных.

Теперь рассмотрим логики, обладающие следующим свойством. Класс моделей, в которых все пути конечны, является полным. Все суперинтуиционистские логики, обладающие свойством Крейга, за исключением логики линейных цепей, обладают данным свойством.

Расширенной формулой будем называть формулу, в которую могут быть подставлены в качестве констант элементы универса данного мира.

В конечных вершинах истинны все классически истинные формулы. Докажем баг-индукцией и индукцией по построению формул, что тогда они будут истинны и во всех остальных точках модели.

Пусть для всех миров, находящихся непосредственно выше данного, доказано, что в них истинность совпадает с классической. Пусть это доказано и для подформул данной формулы. Рассмотрим различные случаи построения формулы. Нетривиальны из них дизъюнкция, импликация, всеобщность и существование.

Дизъюнкция. Поскольку она классически истинна, классически истинен один из ее членов. Значит, по предположению индукции, он будет истинен и в данной точке.

Импликация. Если она классически истинна, то либо ее посылка ложна, либо ее заключение истинно, и сводим случай к предыдущему.

Существование. Если для каждой из последующих моделей существует n , то оно может быть выбрано стандартным, а тогда $A(n)$ истинно в данной точке.

Всеобщность. Универс данной точки является подуниверсом следующих за ней, и применяем предположение индукции для всех $A(n)$ со стандартными и нестандартными n .

Таким образом, мы доказали основной результат:

Теорема 4. *Если логика обладает свойством обрыва цепей, то арифметика, основанная на ней, становится классической после добавления конструктивного правила Карнапа.*

Остается рассмотреть случай логики линейных цепей. Она задается схемой аксиом $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$. Частным случаем данной схемы является $(\neg A \Rightarrow A) \vee (A \Rightarrow \neg A)$. Но это эквивалентно $\neg \neg A \vee \neg A$. А логика слабого закона исключенного третьего уже обладает свойством конечных моделей: ее достаточно рассматривать на моделях с двумя последовательными мирами.

Таким образом, все пропозициональные суперинтуиционистские логики, обладающие свойством Крейга, превращают арифметику в классическую.

Автор благодарен Г.Е.Минцу и Л.Л.Максимовой за ценные обсуждения. В частности, замечания Л.Л.Максимовой помогли резко упростить доказательство для случая логики линейных цепей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smorinsky C.A.* Applications of Kripke Models // *Mathematical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis* / Ed. A.S.Troelstra. Springer. 1973. P. 324-391.
2. *Фефферман С.* Трансфинитные рекурсивные последовательности теорий // *Математика*. 1971. № 3. С.102-223.

ПОГРУЖЕНИЕ ИМПЛИКАТИВНОГО ФРАГМЕНТА КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ИМПЛИКАТИВНЫЙ ФРАГМЕНТ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ¹

Abstract. A translation from the calculus $Cl\supset$ which is a formalization of the implicative fragment of classical logic to the calculus $Int\supset$ which is a formalization of the implicative fragment of intuitionistic logic is constructed. This translation is such that for all formulas A the following condition is satisfied: a formula A is deducible in $Cl\supset$ iff the translation of A is deducible in $Int\supset$.

Исчисление $Cl\supset$ (одна из формализаций импликативного фрагмента классической логики) погружается в исчисление $Int\supset$ (одну из формализаций импликативного фрагмента интуиционистской логики) посредством конструируемой ниже операции. Исчисления $Cl\supset$ и $Int\supset$ являются пропозициональными исчислениями гильбертовского типа. Алфавиту языка L этих исчислений принадлежат только следующие символы: 1) пропозициональные переменные $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$; 2) бинарная логическая связка $\supset$ (импликация); 3) скобки $), ($. Формулы в L (далее просто формулы) определяются обычно, внешние скобки опускаются. Буквы A, B и C (с индексами или без них) используются как переменные для формул. Аксиомы исчисления $Int\supset$ есть в точности те формулы, каждая из которых имеет вид $A \supset (B \supset A)$ или $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$. Аксиомы исчисления $Cl\supset$ есть в точности те формулы, каждая из которых есть аксиома исчисления $Int\supset$ или имеет вид $((A \supset B) \supset A) \supset A$. Единственным правилом вывода этих исчислений является *modus ponens* $A \supset B, A / B$. Доказательства в этих исчислениях строятся стандартно. На множестве всех формул следующим образом определяются две унарные операции C_d и T :

$$C_d(p_i) = p_{i+1}, C_d(A \supset B) = C_d(A) \supset C_d(B);$$

$$T(p_i) = (p_i \supset p_1) \supset p_1, T(A \supset B) = T(A) \supset T(B).$$

Композиция $C_d * T$ есть погружающая операция исчисления $Cl\supset$ в исчисление $Int\supset$, т.е. имеет место следующая теорема: *фор-*

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 98-03-04220.

мула A доказуема в исчислении $Cl \supset$ т.т.т. формула $T(Cд(A))$ доказуема в $Int \supset$. Для доказательства этой теоремы достаточно доказать следующие утверждения $У1$ и $У2$.

У1: если формула A доказуема в $Cl \supset$, то формула $T(Cд(A))$ доказуема в $Int \supset$.

У2: если формула $T(Cд(A))$ доказуема в $Int \supset$, то формула A доказуема в $Cl \supset$.

Для доказательства $У1$ достаточно доказать: (1) в $Int \supset$ доказуем $Сд*Т$ -образ любой аксиомы исчисления $Cl \supset$, (2) для любых формул A и B верно следующее: если $T(Cд(A))$ и $T(Cд(A \supset B))$ доказуемы в $Int \supset$, то формула $T(Cд(B))$ доказуема в $Int \supset$. Доказательство пункта (2) легко получить, заметив, что для любых формул A и B $T(Cд(A \supset B))$ есть $T(Cд(A)) \supset T(Cд(B))$.

Доказательство пункта (1). Для любых формул A и B формула $T(Cд(A)) \supset (T(Cд(B)) \supset T(Cд(A)))$ доказуема в $Int \supset$, т.к. является аксиомой этого исчисления. В силу определений операций $Сд$ и $Т$ эта формула есть формула $T(Cд(A \supset (B \supset A)))$. Поэтому для любых формул A и B формула $T(Cд(A \supset (B \supset A)))$ доказуема в $Int \supset$. Аналогично доказывается, что для любых формул A , B и C в $Int \supset$ доказуема формула $T(Cд((A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))))$. Доказательству того, что $Сд*Т$ -образ всякой формулы, имеющей вид $((A \supset B) \supset A) \supset A$, доказуем в $Int \supset$, предпосылаются следующие лемма 1 и лемма 2.

Лемма 1. Для всякой формулы A существует такое целое положительное число i и существует такое целое неотрицательное число n , что $T(Cд(A))$ есть $A_1 \supset (... \supset (A_n \supset ((p_i \supset p_1) \supset p_1)))...$.

Лемма 2. Для всяких целых положительных чисел i и j и всяких целых неотрицательных чисел n и m в исчислении $Int \supset$ доказуема любая формула $((A_1 \supset (... \supset (A_n \supset ((p_i \supset p_1) \supset p_1))) \supset (B_1 \supset (... \supset (B_m \supset ((p_j \supset p_1) \supset p_1))))) \supset (A_1 \supset (... \supset (A_n \supset ((p_i \supset p_1) \supset p_1)))) \supset (A_1 \supset (... \supset (A_n \supset ((p_i \supset p_1) \supset p_1))))$.

Здесь и далее при $n = 0$ формула $A_1 \supset (... \supset (A_n \supset ((p_i \supset p_1) \supset p_1)))...$ есть просто формула $(p_i \supset p_1) \supset p_1$, аналогично для формулы $B_1 \supset (... \supset (B_m \supset ((p_j \supset p_1) \supset p_1)))...$.

Доказательство леммы 1 проводится индукцией по числу вхождений импликации в формулу A .

Поскольку для $Int \supset$ известны разрешающие процедуры (например, разрешающая процедура Генцена, опирающаяся на построение соответствующего секвенциального исчисления), доказательство леммы 2 сводится к упражнению в применении такой процедуры.

Покажем теперь, что для всяких формул A и B в $\text{Int} \supset$ доказуема формула $T(\text{Сд}(((A \supset B) \supset A) \supset A))$.

В силу определений операций Сд и T для всяких формул A и B формула $T(\text{Сд}(((A \supset B) \supset A) \supset A))$ есть формула $((T(\text{Сд}(A)) \supset T(\text{Сд}(B))) \supset T(\text{Сд}(A))) \supset T(\text{Сд}(A))$. По лемме 1 $T(\text{Сд}(A))$ есть $A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset ((p_1 \supset p_1) \supset p_1)) \dots)$ и $T(\text{Сд}(B))$ есть $B_1 \supset (\dots \supset (B_m \supset ((p_j \supset p_j) \supset p_j)) \dots)$ для некоторых целых положительных чисел i и j и некоторых целых неотрицательных чисел n и m . Но тогда формула $T(\text{Сд}(((A \supset B) \supset A) \supset A))$ есть формула $((A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset ((p_i \supset p_i) \supset p_i)) \dots)) \supset (B_1 \supset (\dots \supset (B_m \supset ((p_j \supset p_j) \supset p_j)) \dots))) \supset (A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset ((p_i \supset p_i) \supset p_i)) \dots))) \supset (A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset ((p_i \supset p_i) \supset p_i)) \dots))$ для некоторых целых положительных чисел i и j и некоторых целых неотрицательных чисел n и m . По лемме 2 последняя формула доказуема в $\text{Int} \supset$. Следовательно, в $\text{Int} \supset$ доказуема формула $T(\text{Сд}(((A \supset B) \supset A) \supset A))$.

Утверждение У1 доказано.

Доказательству утверждения У2 предпосылается следующая лемма 3.

Лемма 3. Если p_1 не входит в формулу A и формула $T(A)$ доказуема в $\text{Int} \supset$, то A доказуема в $\text{Cl} \supset$.

Доказательство.

- 1) Переменная p_1 не входит в формулу A (условие).
- 2) Формула $T(A)$ доказуема в $\text{Int} \supset$ (условие).
- 3) Формула $T(A)$ доказуема в $\text{Cl} \supset$ (из пункта 2 и того, что множество всех формул, доказуемых в $\text{Int} \supset$, включается во множество всех формул, доказуемых в $\text{Cl} \supset$).
- 4) Формула $T(A)$ есть классическая тавтология в языке L (из пункта 3 и того известного факта, что для всякой формулы A имеет место следующее: A доказуема в $\text{Cl} \supset$ т.т.т. A есть классическая тавтология).
- 5) Значение формулы $T(A)$ есть И при всякой оценке языка L в матрице $M \supset = \langle \{И, Л\}, \{И\}, \supset \rangle$, где операция $\supset$ определяется таблицей для классической импликации (из пункта 4).
- 6) Значение формулы $T(A)$ есть И при всякой такой оценке языка L в $M \supset$, при которой значение переменной p_1 есть Л (из пункта 5).
- 7) Для всякой формулы B : если p_1 не входит в формулу B , то значение формул $T(B) \supset B$ и $B \supset T(B)$ есть И при всякой такой оценке языка L в $M \supset$, при которой значение переменной p_1 есть Л (доказывается индукцией по числу вхождений импликации в B).

- 8) Значение формулы $T(A) \supset A$ есть И при всякой такой оценке языка L в $M \supset$, при которой значение переменной p_1 есть Л (из пунктов 1 и 7).
- 9) Если при всякой оценке языка L в $M \supset$, при которой значение переменной p_1 есть Л, значение формулы $T(A)$ есть И, то при всякой такой оценке языка L в $M \supset$ значение формулы A есть И (из пункта 8 и табличного определения импликации).
- 10) При всякой оценке языка L в $M \supset$, при которой значение переменной p_1 есть Л, значение формулы A есть И (из пунктов 6 и 9).
- 11) При всякой оценке языка L в $M \supset$ значение формулы A есть И (из пунктов 10 и 1).
- 12) Формула A есть классическая тавтология (из пункта 11).
- 13) Формула A доказуема в $Cl \supset$ (из пункта 11 и известного факта, упоминавшегося в пункте 4).

Лемма 3 доказана.

Доказательство утверждения У2.

- 1) Формула $T(Cd(A))$ доказуема в $Int \supset$ (условие).
 - 2) Переменная p_1 не входит в $Cd(A)$ (из определения операции Cd).
 - 3) Формула $Cd(A)$ доказуема в $Cl \supset$ (из пунктов 1, 2 и леммы 3).
 - 4) Для всякой формулы B справедливо: формула B доказуема в $Cl \supset$ т.т.т. формула $Cd(B)$ доказуема в $Cl \supset$ (из того известного факта, что множество всех формул, доказуемых в $Cl \supset$, замкнуто относительно подстановки).
 - 5) Формула A доказуема в $Cl \supset$ (из пунктов 3 и 4).
- Утверждение У2 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.А. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О СТРОГО ИМПЛИКАТИВНЫХ ФОРМУЛАХ В МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ S3¹

Abstract. *Some questions about strict implication in modal system S3 are discussed. The first theorem shows that strict implication formulas have the property of equivalent replacement; as well known the logic S3 has not the full theorem of equivalent replacement. The second theorem of the paper is connected with an open question [4] on description of one variable strict implication fragment of S3: this fragment contains at least 29 non-equivalent formulas; in the author's paper [2] the number was 24.*

Данная работа является непосредственным продолжением статьи автора [2], и здесь практически все нужные для понимания детали будут по ходу изложения восстановлены.

В [2] изучался вопрос о характеристизации строго импликативных формул от одной переменной в модальной логике S3 и было показано, что таких попарно не эквивалентных формул не менее двадцати четырех, а именно, попарно не эквивалентными в S3 являются следующие формулы:

$$\begin{array}{ll}
 \varphi_1 = p; & \varphi_{13} = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_9; \\
 \varphi_2 = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1; & \varphi_{14} = \varphi_3 \Rightarrow \varphi_4; \\
 \varphi_3 = \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1; & \varphi_{15} = \varphi_5 \Rightarrow \varphi_4; \\
 \varphi_4 = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_3; & \varphi_{16} = \varphi_5 \Rightarrow \varphi_6; \\
 \varphi_5 = \varphi_4 \Rightarrow \varphi_1; & \varphi_{17} = \varphi_5 \Rightarrow \varphi_9; \\
 \varphi_6 = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_5; & \varphi_{18} = \varphi_6 \Rightarrow \varphi_1; \\
 \varphi_7 = \varphi_5 \Rightarrow \varphi_1; & \varphi_{19} = \varphi_6 \Rightarrow \varphi_4; \\
 \varphi_8 = \varphi_7 \Rightarrow \varphi_4; & \varphi_{20} = \varphi_8 \Rightarrow \varphi_1; \\
 \varphi_9 = \varphi_8 \Rightarrow \varphi_6; & \varphi_{21} = \varphi_8 \Rightarrow \varphi_4; \\
 \varphi_{10} = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2; & \varphi_{22} = \varphi_9 \Rightarrow \varphi_1; \\
 \varphi_{11} = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_7; & \varphi_{23} = \varphi_9 \Rightarrow \varphi_4; \\
 \varphi_{12} = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_8; & \varphi_{24} = \varphi_9 \Rightarrow \varphi_7.
 \end{array}$$

Оказывается, этот список можно пополнить еще пятью формулами:

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 98-03-04220.

$$\varphi_{25} = (((p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow (p \Rightarrow p)),$$

$$\varphi_{26} = (p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)),$$

$$\varphi_{27} = (p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow ((p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow p)),$$

$$\varphi_{28} = (p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (((p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow p)),$$

$$\varphi_{29} = (p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (((((p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow ((p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow p))),$$

или, если продолжить выписанную выше последовательность взаимосвязей формул,

$$\varphi_{25} = \varphi_7 \Rightarrow \varphi_{10}; \quad \varphi_{26} = \varphi_{10} \Rightarrow \varphi_4; \quad \varphi_{27} = \varphi_{10} \Rightarrow \varphi_6;$$

$$\varphi_{28} = \varphi_{10} \Rightarrow \varphi_8; \quad \varphi_{29} = \varphi_{10} \Rightarrow \varphi_9.$$

Поскольку и такой, теперь уже пополненный новыми формулами, список формул φ_i ($1 \leq i \leq 29$) не является окончательным решением задачи, стоит пояснить ход возникновения (и, тем самым, некоторые свойства) этого списка.

Напомним, что первые девять формул – φ_i ($1 \leq i \leq 9$) – взяты из работы [4], где доказано, что в **S4** они составляют полную и независимую совокупность строго импликативных формул от одной переменной: между собой они попарно не эквивалентны в **S4**, а всякая другая строго импликативная формула от одной переменной в **S4** эквивалентна одной из них. При этом под эквивалентностью разумно понимать такую эквивалентность, относительно которой справедлива теорема о замене эквивалентных. Для **S4** этому условию удовлетворяют оба следующих определения эквивалентности формул φ и ψ : эти формулы считаются эквивалентными а) если **S4** принадлежит формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ и б) если **S4** принадлежит формула $\varphi \Rightarrow \psi$. На самом деле оба определения эквивалентности просто-напросто равносильны для **S4**.

Иная ситуация в **S3**. Здесь с точки зрения теоремы о замене эквивалентных годится только следующее определение: формулы φ и ψ считаются эквивалентными в **S3**, если **S3** принадлежит формула $\varphi \Leftrightarrow \psi$. То есть по существу речь идет о строгой эквивалентности. Именно это имелось в виду перед формулировкой теоремы 1 в [2] (в пункте б) этой теоремы говорится, конечно, о логике **S3**).

Отмеченный факт хорошо известен в общем случае. Например, логике **S3** принадлежит формула $T \leftrightarrow \Box T$ и формула $\Box T$, однако попытка замены в последней формуле T на $\Box T$ приводит нас к недоказуемой в **S3** формуле $\Box \Box T$, и более того: присоединение к **S3** формулы $\Box \Box T$ дает в результате логику **S4**. Но ведь нас интересуют строго импликативные формулы, а для этого случая справедлива

Теорема 1. Пусть φ и ψ такие строго импликативные формулы, что логике **S3** принадлежит $\varphi \leftrightarrow \psi$. Тогда из того, что **S3** принадлежит χ , а формула χ' получена из χ заменой некоторых вхождений φ на ψ , следует, что **S3** принадлежит и формула χ' .

Доказательство несложно. Мы воспользуемся полнотой **S3** относительно моделей Крипке вида $M = \langle F, V \rangle$, где $F = \langle W, N, D, R \rangle$ – **S3**-шкала, т.е. W – множество миров, N ($N \subseteq W$) – множество нормальных миров, D ($D \subseteq N$) – множество действительных миров (можно всегда полагать, что множество D одноэлементно), R – транзитивное и рефлексивное бинарное отношение (отношение достижимости) на W , V – оценка на F . Детали определений и формулировок можно найти в [1], напомним только получающееся из определений [1] определение истинности формул, имеющих вид строгой импликации: $\varphi \Rightarrow \psi$ истинна в мире модели тогда и только тогда, когда этот мир нормален, и во всяком достижимом из него мире либо опровергается формула φ , либо истинна формула ψ . Истинность эквивалентностей (материальной и строгой), естественно, понимается как истинность двух импликаций: *слева направо* и *справа налево*. Истинность формулы в модели означает ее истинность в действительных мирах этой модели.

Итак, пусть φ и ψ такие строго импликативные формулы, что логике **S3** принадлежит $\varphi \leftrightarrow \psi$.

Прежде всего заметим, что если одна из формул φ или ψ является простейшей строго импликативной формулой, т.е. переменной, то вторая с ней совпадает, а потому в этом случае применение замены эквивалентных тривиально. В самом деле, допустим, что $\varphi = p$. Рассмотрим различные варианты для формулы ψ . Если это переменная, то она должна совпасть с p , поскольку в **S3** недоказуема формула $p \rightarrow q$. Пусть теперь ψ – строго импликативная формула, отличная от переменной. Если она принадлежит **S3**, то очевидным образом формула $\varphi \rightarrow p$ не принадлежит **S3** – достаточно взять одноэлементную **S3**-модель, в которой p ложна. Если же формула ψ не принадлежит логике **S3**, то и формула $p \rightarrow \psi$ не принадлежит **S3**. Для обоснования этого предположим, что ψ опровергается в действительном мире d некоторой **S3**-модели. Преобразуем эту модель, добавив новый действительный мир d' , полагая его рефлексивным и считая, кроме того, что из d' достижимы все те миры, которые достижимы из d ; оценку в старых мирах сохраняем, а в d' считаем переменную p истинной. Ясно, что теперь в d' опровергается ψ (здесь используется транзитивность отношения достижимости, более точно – тот факт, что из d'

достижимо все, что достижимо из d), а потому и формула $p \rightarrow \psi$ опровергается в мире d' .

В результате нам нужно рассмотреть лишь случай, когда $\varphi = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ (здесь обозначения φ_1 и φ_2 локальны и никак не связаны с формулами φ_i , введёнными выше) и $\psi = \psi_1 \Rightarrow \psi_2$, т.е. когда обе формулы являются строгими импликациями.

Предположим, что формула $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \leftrightarrow (\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$ принадлежит **S3**, и покажем, что формула $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \leftrightarrow (\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$ тоже принадлежит **S3** от противного. Непринадлежность этой формулы **S3** по теореме о полноте означает, что в некоторой **S3**-модели в некотором мире a , достижимом из действительного, истинна одна из формул $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ и $(\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$, но ложна другая. Поскольку истинная формула начинается с необходимости, этот мир нормален. Значит, мы можем образовать из имеющейся **S3**-модели новую **S3**-модель, объявив a действительным миром. Поскольку в a формулы $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ и $(\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$ имеют разные значения, то в нем опровергается эквивалентность $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \leftrightarrow (\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$, что противоречит ее выбору.

Теорема 1 доказана.

Вернемся к основной теме – описанию совокупности строго импликативных формул от одной переменной в **S3**. Понятно, что начинать следует с выяснения взаимоотношений формул φ_i при $1 \leq i \leq 9$, коль скоро они точно описывают соответствующий фрагмент **S4**. На этом пути и были обнаружены указанные выше попарно неэквивалентные в **S3** формулы. Далее, конечно, следует рассматривать взаимоотношения формул из уже расширенного списка. Вовсе не факт, что процедура пополнения списка и внесения в него строгих импликаций формул из него, которые не эквивалентны ни одной из формул из него же, когда-нибудь завершится; т.е. вполне возможно, что рассматриваемый фрагмент бесконечен. В любом случае, громоздкость проводимых рассмотрений с каждым новым пополнением списка существенно возрастает и он (список) становится все менее регулярным.

Теперь уместно сформулировать точно высказанное выше утверждение.

Теорема 2. *Строго импликативные формулы φ_i при $1 \leq i \leq 29$ попарно не эквивалентны в **S3**.*

Доказательство проводится построением соответствующих **S3**-моделей, опровергающих проверяемые эквивалентности. Само по себе построение этих моделей не очень интересно, но отметим тот факт, что для всех эквивалентностей оказалось достаточным рассматривать модели, содержащие не более трех миров. Это тем

более любопытно, что при прямом использовании финитной аппроксимируемости **S3** количество миров в контрмоделях оценивается экспонентой от длины формулы (эта оценка не понижается, здесь легко применимы методы работы [5]); другими словами, рассмотренные формулы, несмотря на их громоздкость, имеют достаточно простой семантический «смысл». С другой стороны, это вызывает некоторую надежду решить задачу описания попарно не эквивалентных в **S3** строго импликативных формул от одной переменной компьютерными методами, главным препятствием для которых был бы именно экспоненциальный рост перебираемых контрмоделей в зависимости от длины опровергаемой формулы. Конечно, в том случае, когда контрмодели для проверяемой формулы нет, алгоритм перебора следует дополнить эвристиками. И вот поиск подходящих эвристик составляет здесь самую трудную и интересную проблему. Надежду на то, что они должны быть, выражает следующая

Гипотеза 1. *Существует лишь конечное число строго импликативных формул от одной переменной, попарно не эквивалентных в **S3**.*

Другим аспектом вопроса о мощности контрмоделей строго импликативных формул является надежда, что с ограничением числа используемых переменных экспоненциальная оценка, получаемая в общем случае, может быть снижена до полиномиальной. Во всяком случае все линейно растущие последовательности формул, требующих для своего опровержения (и действительно опровержимых!) экспоненциального роста контрмоделей, автору удалось строить лишь без какого-либо ограничения числа используемых переменных. С этим связана

Гипотеза 2. *Фрагменты **S3** и **S4**, состоящие из строго импликативных формул, в которых используется не более некоторого заранее фиксированного числа n переменных, линейно финитно аппроксимируемы, то есть всякая строго импликативная формула φ от n переменных, не принадлежащая рассматриваемому фрагменту, опровергается на подходящей модели не более чем с $cl(\varphi) + d$ мирами, где c, d – константы, а $l(\varphi)$ – длина формулы φ .*

К слову, попарно неэквивалентных в **S4** строго импликативных формул от двух переменных бесконечно много, см. [2]. Однако это в принципе не мешает подтверждению гипотезы 2. Даже в классической логике высказываний количество попарно не эквивалентных чисто импликативных формул от n переменных не меньше 2^{n-1} , примером являются формулы вида

$$p^*_1 \rightarrow (p^*_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (p^*_{n-1} \rightarrow p^*_n) \dots)),$$

где p^*_i есть либо p_i , либо $p^*_i \rightarrow p^*_n$. Мы здесь не задаемся целью точно описать количество импликативных булевых функций. Только что отмеченная экспоненциальная оценка достаточна для наших иллюстративных целей. Однако «справедливости ради» и «полноты для» напомним известный факт: число попарно неэквивалентных в классической логике импликативных формул от n переменных по порядку равно двойной экспоненте от n (т.е. это «почти все» булевы функции). Обратим внимание, что с 60-х годов активно интересовались соответствующим числом в случае интуиционистской логики и ее фрагментов. Упомянем лишь совсем немногие результаты из большого их количества, собранного и полученного в [6]: интуиционистских попарно не эквивалентных чисто импликативных формул от двух переменных две, от двух – 14 (попарно не эквивалентных в классической логике чисто импликативных формул шесть), от трех – 25165802 (всех булевых функций от трех переменных «всего» $2^8 = 256$), от четырех – $2^{623\ 662\ 965\ 552\ 393} = 50\ 331\ 618$ (это число не поддается никаким естественным сравнениям, его невозможно даже назвать астрономическим²). Говоря об интуиционистских формулах, уместно напомнить, что аналог высказанной выше гипотезы 2 для интуиционистских формул (не чисто импликативных, а в полной сигнатуре) тоже до сих пор остается не доказанным утверждением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейс Р. Модальная логика. М., Наука, 1974.
2. Чагров А.В. Строго импликативные формулы в модальных логиках, близких к интуиционистской // Логические исследования. Выпуск 6. М.: РОССПЭН, 1999. С. 69-75.
3. Чагров А.В. О сложности пропозициональных логик // Сложностные проблемы математической логики. Калинин: КГУ, 1985. С. 80-90
4. Byrd M. Single variable formulas in S4 // J.Phil.Log., 1976, 5, No. 4, 439-456.
5. Urquhart A. Implicational formulas in intuitionistic logic // Journal of Symbolic Logic, 1974. Vol. 39. P. 661-664.
6. Hendrix A. Computations in Propositional Logic. PhD. thesis, Amsterdam, 1996.

² Можно вспомнить известную притчу о создателе шахматной игры, запросившем в оплату за свою игру одно зернышко с первой клетки, два со второй, четыре с третьей и т.д., всего $2^{64} - 1$ зерен, это зерно довольно толстым слоем покрыло бы весь земной шар.

ИМПЛИКАТИВНЫЕ ЛОГИКИ, ЛАМБЕКОВСКИЕ СИСТЕМЫ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ МУЛЬТИКАТЕГОРИИ¹

Abstract. *In the paper Lambek's type implicative deductive systems and exponential categories for them are considered and some metamathematical theorems are proved (deduction theorem, functional completeness). Then we formulate both sequential implicative deductive systems and exponential multicategories for which the cut elimination theorem is proved. Finally sequential deductive implicative metasytems and dual deductive systems and categories are discussed.*

Описывая возникновение понятия дедуктивной системы К.Дошен [Došen 1996] замечает, что в целом процедура построения гильбертовских формулировок систем обычно сводится к выбору теорем из всех формул данного языка системы, в то время как генценовские формулировки систем, чьей разновидностью являются системы натурального вывода, основываются на формулировании отношения следования между формулами. В простейшей секвенциальной системе секвенции имеют вид $A \vdash B$, где посылка A и заключение B являются формулами. О подобных секвенциях говорится, что они являются единичными по обоим сторонам.

В более общем случае допускается множественность формул, по крайней мере в посылках, по левую сторону от знака $\vdash$, что соответствует тому факту, что дедуктивный вывод может исходить более чем из одной посылки. Посылки обычно образуют множество, или секвенции, или мультимножества, либо что-нибудь другое.

Секвенция $A \vdash B$ может пониматься как утверждение о том, что существует натурально-дедуктивное доказательство B , исходящее из гипотез, собранных в совокупность A , в то время как в гильбертовской формулировке системы мы доказываем секвенции вида $I \vdash B$, где пропозициональная константа I замещает пустую совокупность посылок.

На практике в случае секвенциальных формулировок логических систем мы заинтересованы лишь в существовании доказа-

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 98-03-04220.

тельств секвенции и не вводим специальной нотации для различения различных доказательств одной и той же секвенции. Это выглядит так, как будто все доказательства одной и той же секвенции эквивалентны. Тем не менее, если исходить из процедуры нормализации или устранения сечения, то хотелось бы иметь возможность приравнять одни доказательства и различить другие. В этом случае было бы удобно записывать рядом с секвенцией некоторый код, указывающий на историю получения ее доказательства. Подобное кодирование стало общепринятым в натуральной дедукции, где типовые лямбда-термы выполняют роль кодов (а кодирование называется «изоморфизмом Карри-Ховарда» или «интерпретацией формул типами»). Если правила секвенциальной системы ссылаются на правила натуральной дедукции, то мы могли бы работать с типовым лямбда кодированием, но ниже мы увидим, что существуют иные (даже для натуральной дедукции) виды кодирования, опирающиеся на теорию категорий.

Коды будут термами, такими, что аксиоматические секвенции кодируются атомными термами, а правила вывода секвенциальной системы отвечают операциям на термах. Это незначительно отличается от общепринятой практики, где правила вывода являются отношениями, не обязательно функционального типа. Однако мы можем заменить подобные нефункциональные правила на совокупность функциональных правил, осуществляющих по отдельности многие задания, приписываемые первоначальному правилу. Как бы там ни было, большинство правил, с которыми мы имеем дело на практике, являются функциональными. В общем случае, операции на термах, отвечающие правилам вывода, являются частичными операциями, поскольку правила могут быть применены к секвенциям одного типа, но не другого.

Когда доказательство секвенции может быть преобразовано в другое доказательство той же самой секвенции посредством определенной процедуры, подобно тому, как мы действуем в случае нормализации натуральной дедукции или устранения сечения, то мы приравниваем коды двух доказательств. Чтобы избежать тривиальности, не обязательно требовать, чтобы коды, отвечающие той же самой секвенции, были всегда одинаковы.

Ниже будет сформулировано, следуя Дж. Ламбеку, понятие систем секвенций с кодами, называемых дедуктивными системами. Хотя эти системы являются удобным инструментом логических исследований, но на практике нам требуется несколько иная конструкция, называемая мультикатегорией, которая получается путем наложения некоторых требований на доказательства (коды), что позволяет значительно более эффективно работать с ними.

1. Дедуктивные импликативные системы и экспоненциальные категории

Введем понятие дедуктивной импликативной системы и экспоненциальной теории, как они были изложены в [Vasyukov 1997].

Напомним, что граф состоит из класса стрелок (в теории графов называемых «ориентированными ребрами») и класса объектов (обычно называемых «вершинами», но в различных разделах математики может использоваться и иная терминология) и двух отображений:

$$\text{Начало: } \{\text{стрелки}\} \rightarrow \{\text{объекты}\}$$

$$\text{Конец: } \{\text{стрелки}\} \rightarrow \{\text{объекты}\}$$

Вместо того чтобы писать $\text{начало}(f) = A$, $\text{конец}(f) = B$, часто пишут $f: A \rightarrow B$ или $f: A \vdash B$. Для логики интерес представляют графы с дополнительной структурой.

Согласно [Lambek, Scott 1986, p.47], дедуктивная система представляет собой граф со специальной стрелкой

$$1_A: A \vdash A$$

и бинарной операцией на стрелках (композиции)

$$\frac{f: A \vdash B \quad g: B \vdash C}{gf: A \vdash C}$$

Под объектами дедуктивной системы, как обычно, понимаются формулы, под стрелками – доказательства, и под операциями на стрелках – правила вывода. Мы получаем импликативное исчисление, если допускаем, что существует формула T (= истина) и бинарная операция $\supset$ (= «если,...,то») для образования импликации $A \supset B$ из двух данных формул A и B . Кроме этого, мы вводим следующие два правила вывода:

$$\frac{f: A \vdash B}{\neg f: T \vdash A \supset B}$$

$$\frac{g: T \vdash A \supset B}{g^s: A \vdash B}$$

Нетрудно видеть, что наше импликативное исчисление соответствует системе I [Карпенко 1993, с.225], ибо:

а) мы имеем аксиому I в виде:

$$1_A: T \vdash A \supset A$$

б) правило модус поненс в виде:

$$\frac{f: T \vdash A \quad g: T \vdash A \supset B}{g^s f: T \vdash B}$$

Категория, согласно [Lambek, Scott 1986, p.52], есть дедуктивная система, в которой имеют место следующие уравнения между доказательствами:

$$f 1_A = f, \quad 1_B f = f,$$

$$(hg) f = h (gf), \text{ для всех } f: A \vdash B, g: B \vdash C, h: C \vdash D$$

Мы определяем *экспоненциальную категорию*, наделяя категорию A введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$$\overline{f}^s = f, \quad \overline{g^s} = g, \\ \text{для всех } f: A \vdash B \text{ и } g: T \vdash C \supset D$$

Таким образом, для данного графа X мы можем сконструировать импликативные исчисления $D(X)$ и свободную экспоненциальную категорию $F(X)$, порожденную X .

Пусть $GRPH$ будет категорией графов, чьими объектами являются графы, и каждый морфизм $F: X \rightarrow Y$ есть пара отображений $F: Objects(X) \rightarrow Objects(Y)$ и $F: Arrows(X) \rightarrow Arrows(Y)$, такая, что $f: X \rightarrow X'$ влечет $F(f): F(X) \rightarrow F(X')$.

Пусть EXP будет категория экспоненциальных категорий, чьими объектами являются экспоненциальные категории, а стрелками - функторы $F: A \rightarrow B$, сохраняющие экспоненциальную структуру, т.е.

$$F(T) = T, F(A \supset B) = F(A) \supset F(B), \\ F(\overline{f}) = \overline{F(f)}, F(f^s) = F(f)^s.$$

Пусть U будет обычным стирающим функтором $EXP \rightarrow GRPH$. С каждым графом X мы можем ассоциировать морфизм графов $H_X: X \rightarrow UF(X)$ следующим образом: $H_X(X) = X$ и, если $f: X \rightarrow Y$ есть стрелка в X , то $H_X(f) = f$ (классы эквивалентности f рассматриваются как доказательства в $D(X)$). Мы имеем следующее универсальное свойство:

Предложение 1. Для любой экспоненциальной категории A и любого морфизма $F: X \rightarrow U(A)$ графов существует единственная стрелка $F': F(X) \rightarrow A$ в EXP такая, что $U(F')H_X = F$.

Доказательство. Конструкция F' требует от нас выполнения следующих условий:

$$F'(X) = : F(X), : F'(T) = : F(T), F'(A \supset B) = F'(A) \supset F'(B), \\ F'(\overline{f}) = \overline{F'(f)}, F'(f^s) = F'(f)^s.$$

Требуется проверить, что F' определен правильно, т. е. что для всех $f, g: A \vdash B$ в $F'(X)$ $f = g$ влечет $F'(f) = : F'(g)$. Последнее очевидно, поскольку никаких других, кроме нужных нам, тождеств в $F'(X)$ не выполняется. ■

(Здесь и в дальнейшем ■ означает конец доказательства.)

Подобное универсальное свойство означает, что F есть функтор $GRPH \rightarrow EXP$, левосопряженный к U с сопряжением $H_X: Id \rightarrow UF$. Для экспоненциальных категорий можно определить также понятие подстановки доказательств, что определяется следующим предложением:

Предложение 2. Для данной экспоненциальной категории $\mathbf{A}$, индетерминанта $x: A_0 \vdash A$ над $\mathbf{A}$ и стрелки $a: A_0 \vdash A$ существует единственный функтор $S_x^a: \mathbf{A}[x] \rightarrow \mathbf{A}$, такой, что $S_x^a(x) = a$ и $S_x^a H_x = 1_A$.

Доказательство основывается на доказательстве более общего случая декартово замкнутых категорий в [Lambek, Scott 1989, p.58]. Вначале докажем, что:

для данной категории $\mathbf{A}$ и индетерминанта $x: A_0 \vdash A$ над $\mathbf{A}$, функтора $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ и любой стрелки $b: F(A_0) \vdash F(A)$ в $\mathbf{B}$ имеется единственный функтор $F': \mathbf{A}[x] \rightarrow \mathbf{B}$ такой, что $F(x) = b$ и $F' H_x = F$.

Каждое доказательство $\varphi(x)$ при допущении x может иметь следующую форму:

$$k, x, \chi(x)\psi(x),$$

где k есть стрелка в $\mathbf{A}$, т. е. постоянный полином. Решающим шагом является определение $F'(\varphi(x))$. Определим индуктивно:

$$F'(k) = F(k), F'(x) = b, F'(\chi(x)\psi(x)) = F'(\chi(x)) F'(\psi(x)),$$

$$F'(\neg \psi(x)) = \neg F'(\psi(x)), F'(\psi(x)^s) = (F'(\psi(x)))^s.$$

Остается лишь показать, что F' определен на полиномах, а не на доказательствах, то есть, что $\varphi(x) =_x \varphi'(x)$ влечет $F'(\varphi(x)) = F'(\varphi'(x))$. Если в последнем случае писать $\varphi(x) \equiv \varphi'(x)$, то достаточно проверить, что $\equiv$ имеет все свойства подстановки и отвечает всем тождествам экспоненциальной категории. Например, чтобы проверить, что $\neg \neg \varphi(x)^s \equiv \varphi(x)$, мы вычисляем $F'(\neg \neg \varphi(x)^s) = (F'(\neg \neg \varphi(x)))^s = (F'(\varphi(x)))^s$ и т. д.

Теперь, чтобы получить доказательство нашего предложения, достаточно положить $F = 1_A$. ■

Наделяя экспоненциальные категории дополнительной структурой, мы одновременно получаем различные категорные импликативные исчисления, соответствующие логическим исчислениям. Так, если мы добавим к нашей системе аксиом новую аксиому, выглядящую следующим образом:

$$\beta_{BC}^A: B \supset C \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C),$$

то получаем импликативное исчисление, соответствующее системе минимальной импликативной логики IB [Карпенко 1993, с.230]. Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f: B \vdash C}{1_A \supset f: A \supset B \vdash A \supset C}$$

Для этого достаточно положить

$$1_A \supset f = (\beta_{BC}^A \neg f)^s$$

Аксиому B мы теперь получаем в следующем виде:

$$\neg \beta_{BC}^A \neg : T \vdash (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

Для IB -импликативного исчисления, как нетрудно показать, имеет место следующая теорема дедукции:

Теорема 1 (теорема дедукции). В IB -импликативном исчислении с каждым доказательством $\phi(x_1, \dots, x_m): B \vdash C$ из допущений $x_1: T \vdash A_1, \dots, x_m: T \vdash A_m$ может быть ассоциирована стрелка $1_{A_1} \supset (\dots \supset (1_{A_m} \supset \phi(x_1, \dots, x_m)))$, не зависящая от $x_1, \dots, x_m$.

Доказательство. Будем писать $1_{A_1} \supset \psi(x) = k_{x \in A} \phi(x)$, где индекс $x \in A$ указывает, что x имеет тип A . Заметим, что для каждого доказательства $\phi(x): B \vdash C$ допущение $x: T \vdash A$ должно иметь одну из следующих форм:

- (i) $k: B \vdash C$, доказательство IB -исчисления;
- (ii) $x: T \vdash A$ с $B = T$ и $C = A$;
- (iii) $\chi(x)\psi(x)$, где $\chi(x) = B \vdash D$, $\psi(x) = D \vdash C$.
- (iv) $1_{A_1} \supset \psi(x)$, где $\psi(x): B \vdash C$.

Во всех случаях $\chi(x)$ и $\psi(x)$ являются более краткими доказательствами, чем $\phi(x)$, и мы определяем индуктивно:

- (i) $k_{x \in A} k = 1_A \supset k$;
- (ii) $k_{x \in A} x = 1_A \supset x$;
- (iii) $k_{x \in A} (\chi(x)\psi(x)) = 1_A \supset \chi(x)\psi(x)$;
- (iv) $k_{x \in A} 1_{A_1} \supset \psi(x) = 1_A \supset (1_{A_1} \supset \psi(x))$.

Поскольку речь идет об индукции по длине доказательства $\phi(x)$, то формально можно было бы определить эту длину как 0 в случаях (i) и (ii), как сумму длин $\chi(x)$ и $\psi(x)$ плюс один в случае (iii), и как длину $\psi(x)$ плюс один в случае (iv). ■

Действуя подобным же образом, мы можем добавить к IB -импликативному исчислению аксиомы, являющиеся категорными аналогами аксиом C, W, K :

$$\begin{aligned} \gamma_{BC}^A: A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C) \\ w_{AB}: A \supset (A \supset B) \vdash A \supset B \\ \kappa_A^B: A \vdash B \supset A \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\frac{f: A \vdash B \supset C}{f^\gamma: B \vdash A \supset C}$$

(достаточно положить $f^\gamma = (\gamma_{BC}^A \neg f \neg)^\delta$)

$$\frac{f: A \vdash A \supset B}{f^w: A \vdash B}$$

(достаточно положить $f^w = (w_{AB} \overline{f} \overline{})^s$)

$$\frac{\begin{array}{c} O_A: A \vdash T \\ f: T \vdash A \end{array}}{f^k: B \vdash A}$$

(где $O_A = (\kappa^A_T)^s$, $f^k = O_B f$).

IBSWK-экспоненциальную категорию мы получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$$\begin{aligned} ((1_B \supset f \overline{1_B} \overline{})^s &= f, & f^{\gamma\gamma} &= f, \\ (\overline{f} \overline{})^w &= f, \text{ где } f: T \vdash C. \\ f &= O_A, \text{ для всех } f: A \vdash T. \end{aligned}$$

Последнее уравнение утверждает, что T является терминальным объектом.

Аналогично комбинаторной полноте для множества комбинаторов $\{B, C, W, K\}$ мы получаем следующую теорему для *IBSWK*-экспоненциальных категорий:

Теорема (функциональная полнота). Для любого полинома $\varphi(x_1, \dots, x_m): B \vdash C$ по индетерминантам $x_1: T \vdash A_1, \dots, x_m: T \vdash A_m$ над *IBSWK*-экспоненциальной категорией по любой дедуктивно ассоциированной стрелке $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m} \varphi(x_1, \dots, x_m)$, не зависящей от $x_1, \dots, x_m$, мы можем получить единственную стрелку f^φ такую, что $f^\varphi_X = \varphi(x_1, \dots, x_m)$, где $X = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Доказательство. Достаточно применить для нашего случая алгоритм, позволяющий решить для любого комбинаторного терма, стратифицирован он или нет (см. [Curry 1969], [Hindley 1969]). Однако этот алгоритм несколько сложен, чтобы его можно было описать формально. ■

Подобный результат позволяет теперь построить изоморфизм между типовым лямбда-исчислением и экспоненциальными категориями, т.е. говорить об эквивалентности категорий $\lambda\text{-}CALC$ и EXP_{IBSWK} , где $\lambda\text{-}CALC$ есть категория, чьими объектами являются типовые λ -исчисления, а стрелками – переводы, и EXP_{IBSWK} есть категория, чьими объектами являются *IBSWK*-экспоненциальные категории, а стрелками – экспоненциальные функторы.

2. Секвенциальные дедуктивные системы и экспоненциальные мультикатегории

Сформулируем понятие секвенциальной дедуктивной системы, следуя [Lambek 1988]. Секвенциальная дедуктивная система представляет собой мультиграф, состоящий из класса стрелок (называемых также «секвенциями») и класса объектов (иногда называемых «типами») и двух отображений

Начало: {стрелки} $\rightarrow$ {объекты}*

Конец: {стрелки} $\rightarrow$ {объекты},

где {объекты}* представляет собой свободный моноид, порожденный классом объектов, его элементами являются последовательности $\Gamma = A_1 \dots A_n$ объектов. Заметим, что n может быть равно нулю и в этом случае Γ представляет собой пустую последовательность. Стрелка $f: \vdash B$ также называется элементом B .

Чтобы получить минимальное секвенциальное дедуктивное исчисление в генценовском стиле (но без структурных правил), введем специальную стрелку

$$1_A: A \vdash A$$

и бинарную операцию на стрелках:

$$\frac{f: \Theta \vdash A \quad g: \Gamma \Delta \vdash B}{g \langle f \rangle: \Gamma \Theta \Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Мультикатегория есть дедуктивная система, в которой следующие уравнения между доказательствами имеют место:

$$1_A \langle f \rangle = f, \quad g \langle 1_A \rangle = g,$$

$$h \langle g \langle f \rangle \rangle = h \langle g \rangle \langle f \rangle, \quad g' \langle f \rangle \langle f' \rangle = g' \langle f' \rangle \langle f \rangle$$

$$\text{для всех } f: \Lambda \vdash A, g: \Gamma \Delta \vdash B, g \langle f \rangle: \Gamma \Lambda \Delta \vdash B, h: \Gamma' B \Delta' \vdash C, \\ f': \Lambda' \vdash A', g': \Gamma \Delta \Delta' \vdash C.$$

Импликативное секвенциальное дедуктивное исчисление GI мы получаем при введении специальных стрелок

$$\varepsilon_{AB}: A (A \supset B) \vdash B \\ i: \vdash T$$

и правил

$$\frac{f: \Delta \vdash B}{f^\varepsilon: \Delta \vdash A \supset B} \qquad \frac{f: \Gamma \Delta \vdash C}{f^i: \Gamma T \Delta \vdash C}$$

Как и в случае импликативного дедуктивного исчисления, легко видеть, что наше импликативное секвенциальное дедуктивное исчисление GI соответствует системе I . Действительно, мы получаем:

а) аксиому I в виде:

$$((1_A)^i)^\varepsilon: T \vdash A \supset A$$

б) правило *модус поненс* в виде:

$$\frac{f: T \vdash Ag: T \vdash A \supset B}{f < \varepsilon < g > > < i >: T \vdash B}$$

Мы определяем *экспоненциальную мультикатегорию*, наделяя мультикатегорию **A** введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$$\varepsilon < f^{\varepsilon} > = f, \quad \text{для всех } f: A\Gamma \vdash B,$$

$$f^i < i > = f, \quad \text{для всех } f: \Gamma\Delta \vdash C.$$

В частности, $(\varepsilon_{AB})^{\varepsilon} = 1_{A \supset B}$, $(i)^i = 1_T$.

С помощью введенных правил нетрудно получить следующее правило:

$$\frac{f: \Lambda \vdash A \quad g: \Gamma B\Delta \vdash C}{g\{f\}: \Gamma (A \supset B) \Lambda \Delta \vdash C} \quad \{-\}$$

Для этого достаточно положить:

$$g\{f\} = g < \varepsilon < f > >.$$

Если мы теперь введем в нашей системе новую специальную стрелку, выглядящую следующим образом:

$$\beta^A_{BC}: B \supset C \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C),$$

то получим секвенциальное импликативное исчисление **GIB**, соответствующее системе минимальной импликативной логики **IB** [Карпенко 1993, с.230]. Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f: B\Delta \vdash C}{f^{\beta}: A (A \supset B) \Delta \vdash C} \quad (\text{слабая транзитивность}).$$

Для этого достаточно положить

$$f^{\beta} = \varepsilon < \varepsilon < \beta < f^{\varepsilon} > > >.$$

Аксиому **B** получаем теперь в виде следующей стрелки:

$$(\beta^A_{BC})^{\varepsilon i}: T \vdash (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)).$$

Действуя подобным же образом, мы можем добавить к секвенциальному импликативному исчислению **GIB** аксиомы, являющиеся категорными аналогами аксиом **C**, **W**, **K**:

$$\gamma^A_{BC}: A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$$

$$w_{AB}: A \supset (A \supset B) \vdash A \supset B$$

$$k^B_A: A \vdash B \supset A$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\frac{f: BA\Delta \vdash C}{f^{\gamma}: AB\Delta \vdash C} \quad (\text{перестановка})$$

(достаточно положить $f^{\gamma} = \varepsilon < \varepsilon < \gamma < f^{\varepsilon \varepsilon} > > >$)

$$\frac{f: A\Delta\Delta \vdash B}{f^w: A\Delta \vdash B} \text{ (сокращение)}$$

(достаточно положить $f^w = \varepsilon < w < f^{\varepsilon\varepsilon} >>$)

$$\frac{f: \Delta \vdash A}{f^k: B\Delta \vdash A} \text{ (ослабление)}$$

(где $f^k = \varepsilon < k < f >>$).

GIBSWK-экспоненциальную мультикатегорию получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$$\begin{aligned} g < f^\beta > &= (g < f >)^\beta, \text{ для всех } f: A\Delta \vdash B; g: B \vdash \Delta; \\ g^\beta < f > &= (g < f >)^\beta, \text{ для всех } f: A\Delta \vdash B; g: CB \vdash \Delta; \\ f^\gamma &= f, \text{ для всех } f: AB\Delta \vdash C; \\ g < f^\gamma > &= (g < f >)^\gamma, \text{ для всех } f: AB\Delta \vdash C; g: C\Gamma \vdash D; \\ g^\gamma < f > &= (g < f >)^\gamma, \text{ для всех } f: A\Delta \vdash B; g: CDB\Gamma \vdash E; \\ (f^{i1})^w < i > &= f, \text{ для всех } f: \Delta \vdash C; \\ g < f^w > &= (g < f >)^w, \text{ для всех } f: A\Delta\Delta \vdash B; g: B\Gamma \vdash C; \\ g^w < f > &= (g < f >)^w, \text{ для всех } f: \Delta \vdash B; g: CCB\Gamma \vdash D; \\ f &= O_A, \text{ где } O_A = i^k \text{ и } f: A \vdash T \text{ (т.е. } T \text{ является терминальным объектом);} \\ g < f^k > &= (g < f >)^k, \text{ для всех } f: A\Delta \vdash B; g: B\Gamma \vdash C; \\ g^k < f > &= (g < f >)^k, \text{ для всех } f: \Delta \vdash B; g: B\Gamma \vdash C. \end{aligned}$$

3. Свободные экспоненциальные мультикатегории

Для данного мультиграфа **G** мы можем сконструировать импликативные исчисления **D(G)** и свободную экспоненциальную мультикатегорию **F(G)**, порожденную **G**. Объекты этой мультикатегории получаются индуктивно из объектов **G** с помощью операции $\triangleright$. Ее секвенции получаются из секвенций **G** путем присоединения базисных секвенций $1_A, \varepsilon_{AB}, i_A$ и т. д. и формирования новых операций из старых с помощью правил $(-)^{\varepsilon}, (-)^i$ и т. д. Наконец, тождества между сравнимыми секвенциями в **F(G)** будут те и только те, которые следуют из тождеств в **G**, и мультикатегорные тождества.

$$h < g < f > > = h < g > < f >, g' < f > < f' > = g' < f'' > < f >.$$

Помимо этого добавляются еще тождества

$$\varepsilon < f^{\varepsilon} > = f, (\varepsilon < g >)^{\varepsilon} = g, (g < i >)^i = g, f^i < i > = f,$$

и т. п., рассмотренные ранее.

Введем теперь понятие мультифунктора, используя следующие определения:

Определение 1. Мультифунктор **F** из мультикатегории **M** в мультикатегорию **M'** представляет собой отображение класса объектов

M в класс объектов M' вместе с отображением из класса стрелок M в класс стрелок M' такое, что если $f: A_1 \dots A_n \vdash B$ есть стрелка в M , то $F(f): F(A_1) \dots F(A_n) \vdash F(B)$ есть стрелка в M' и $F(1_A) = 1_{F(A)}$, $F(g < f >) = F(g) < F(f) >$.

Определение 2. Экспоненциальный мультифунктор F из экспоненциальной мультикатегории M в экспоненциальную мультикатегорию M' представляет собой мультифунктор, сохраняющий экспоненциальную структуру, т. е.

$$F(T) = T, F(A \supset B) = F(A) \supset F(B), F(\varepsilon_{AB}) = \varepsilon_{F(A)F(B)}, F(i_A) = i_{F(A)}.$$

Пусть U будет стирающим мультифунктором, тогда мультифунктор $G \rightarrow UF(G)$ будет, как известно, полным и точным [Lambek 1993] (полнота свидетельствует о том, что мультифунктор не порождает никаких новых секвенций по сравнению со старыми, а точность свидетельствует об отсутствии новых тождеств между секвенциями).

Пусть G будет *GIBCWK*-мультикатегорией. Для экспоненциального *GIBCWK*-мультифунктора F (т. е. сохраняющего *BCWK*-структуру G) имеет место следующая теорема:

Теорема 2. (устранение сечения). *Если стрелки $\varepsilon, i, \beta, \gamma, w, k$ заменить на правила $\{-\}, (-)^i, (-)^\beta, (-)^\gamma, (-)^*, (-)^k$, то любая секвенция в $UF(G)$, сконструированная с помощью правил сечения, будет эквивалентна секвенции, сконструированной без применения правила сечения.*

Доказательство. Для доказательства, прежде всего, без потери общности допускаем, что стрелки $f: \Lambda \vdash A$ и $g: \Gamma \Delta \vdash B$ уже были получены без применения правила сечения. Позднее покажем, что $g < f >$ эквивалентна секвенции, в конструирование которой были вовлечены сечения меньшей «степени», причем *степень сечения* $g < f >$ определяется как $d(\Lambda) + d(\Gamma) + d(\Delta) + d(A) + d(B)$, где $d(A)$ есть число вхождений всех импликаций в A и $d(\Gamma) = d(A_1) + \dots + d(A_m)$.

Случаи для импликации рассмотрены в [Lambek 1993, с.193] (Ламбек использует «\» вместо « $\supset$ »). Нам остается рассмотреть случаи для дополнительных правил (слабой транзитивности, перестановки, сокращения и ослабления). Здесь возможно следующее:

1. На последнем шаге конструирования f используется дополнительное правило.
2. На последнем шаге конструирования g используется дополнительное правило.
3. На последнем шаге конструирования и f и g используется дополнительное правило.

В случае *слабой транзитивности* получаем:

(1) Пусть $\Lambda = (A' \supset B')\Delta'$ и $f = f'^\beta$. Если мы имеем дело с $g: \Gamma A \Delta \vdash B$, то вначале с помощью i -стрелок приводим g к виду $g: A \Delta \vdash B$. Затем получаем:

$$\frac{\frac{f': B' \Delta' \vdash A}{f'^\beta: A' (A' \supset B') \Delta' \vdash A} \quad g: A \Delta \vdash B}{g < f'^\beta >: A' (A' \supset B') \Delta' \Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\frac{\frac{f': B' \Delta' \vdash A \quad g: A \Delta \vdash B}{g < f' >: B' \Delta' \Delta \vdash B} \text{ (сечение)}}{(g < f' >)^\beta: A' (A' \supset B') \Delta' \Delta \vdash B},$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того, легко видеть, что $g < f'^\beta > = (g < f' >)^\beta$.

(2) Пусть $\Gamma A \Delta = A' (A' \supset B') \Delta'$, $g = g'^\beta$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{f: \Lambda \vdash A \quad \frac{g': B' \Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^\beta: A' (A' \supset B') \Delta_1 A \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}}{g'^\beta < f >: A' (A' \supset B') \Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}$$

Заменим это выражение на:

$$\frac{\frac{f: \Lambda \vdash A \quad g': B' \Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' < f >: B' \Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}}{(g' < f >)^\beta: A' (A' \supset B') \Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}$$

Более того, легко видеть, что $g'^\beta < f > = (g' < f >)^\beta$ в силу тождеств *GIBSWK*-экспоненциальной мультикатегории.

(3) Пусть $\Lambda = (A' \supset B')\Delta'$, $f = f'^\beta$, $\Gamma A \Delta = D' (D' \supset C') \Delta'$, $g = g'^\beta$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{f': B' \Delta' \vdash A}{f'^\beta: A' (A' \supset B') \Delta' \vdash A} \quad \frac{g': C' \Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^\beta: D' (D' \supset C') \Delta_1 A \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}}{g'^\beta < f'^\beta >: D' (D' \supset C') \Delta_1 A' (A' \supset B') \Delta' \Delta_2 \vdash B}$$

Заменим все это на:

$$\frac{\frac{\frac{f': B' \Delta' \vdash A}{f'^\beta: A' (A' \supset B') \Delta' \vdash A} \quad g': C' \Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' < f'^\beta >: C' \Delta_1 A' (A' \supset B') \Delta' \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}}{(g' < f'^\beta >)^\beta: D' (D' \supset C') \Delta_1 A' (A' \supset B') \Delta' \Delta_2 \vdash B}$$

При этом $g'^\beta < f'^\beta > = (g' < f'^\beta >)^\beta$ (следует в силу тождеств *GIBSWK*-экспоненциальной мультикатегории).

Для перестановки возможны следующие случаи:

(1) Пусть $\Lambda = A'B'\Delta'$ и $f = f'^\gamma$. Если мы имеем дело с $g: \Gamma A\Delta \vdash B$, то вначале с помощью i -стрелок приводим g к виду $g: A\Delta \vdash B$. Затем получаем:

$$\frac{\frac{f': B'A'\Delta' \vdash A}{f'^\gamma: A'B'\Delta' \vdash A} \quad g: A\Delta \vdash B}{g < f'^\gamma >: A'B'\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменяем это выражение на:

$$\frac{\frac{f': B'A'\Delta' \vdash A \quad g: A\Delta \vdash B}{g < f' >: B'A'\Delta'\Delta \vdash B}}{(g < f' >)^\gamma: A'B'\Delta'\Delta \vdash B}$$

В силу тождеств *GIBCWK*-экспоненциальной мультикатегории получаем $g < f'^\gamma > = (g < f' >)^\gamma$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'B'\Delta'$, $g = g'^\gamma$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{g': A'B'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{f: \Lambda \vdash A \quad g'^\gamma: B'A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{g'^\gamma < f >: B'A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменяем это выражение на:

$$\frac{\frac{f: \Lambda \vdash A \quad g': A'B'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' < f >: A'B'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}}{(g' < f >)^\gamma: B'A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}$$

В силу тождеств *GIBCWK*-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^\gamma < f > = (g' < f >)^\gamma$.

(3) Пусть $\Lambda = A'B'\Delta'$, $f = f'^\gamma$, $A\Delta = C'D'\Delta'$, $g = g'^\gamma$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{f': B'A'\Delta' \vdash A}{f'^\gamma: A'B'\Delta' \vdash A} \quad \frac{g': D'C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^\gamma: C'D'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{g'^\gamma < f'^\gamma >: C'D'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменяем все это на:

$$\frac{\frac{\frac{f': B'A'\Delta' \vdash A}{f'^\gamma: A'B'\Delta' \vdash A} \quad g': D'C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' < f'^\gamma >: D'C'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B}}{(g' < f'^\gamma >)^\gamma: C'D'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B}$$

В силу тождеств *GIBCWK*-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^\gamma < f'^\gamma > = (g' < f'^\gamma >)^\gamma$.

Для сокращения получаем:

(1) Пусть $\Lambda = A'A'\Delta'$ и $f = f'^w$. Если мы имеем дело с $g: \Gamma A\Delta \vdash B$, то вначале с помощью i -стрелок приводим g к виду $g: A\Delta \vdash B$. Затем получаем:

$$\frac{\frac{f': A'A'\Delta' \vdash A}{f'^w: A'\Delta' \vdash A} \quad g: A\Delta \vdash B}{g < f'^w >: A'\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменяем это выражение на:

$$\frac{\frac{f': A'A'\Delta' \vdash A \quad g: A\Delta \vdash B}{g < f' >: AA'\Delta'\Delta \vdash B}}{(g < f' >)^w: A'B'\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств *GIBCWK*-экспоненциальной мультикатегории получаем $g < f'^w > = (g < f' >)^w$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'A'\Delta'$, $g = g'^w$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{f: \Lambda \vdash A \quad g': A'A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^w: A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{g'^w < f >: A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменяем это выражение на:

$$\frac{\frac{f: \Lambda \vdash A \quad g': A'A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' < f >: A'A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}}{(g' < f >)^w: A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств *GIBCWK*-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^w < f > = (g' < f >)^w$.

(3) Пусть $\Lambda = A'A'\Delta'$, $f = f'^w$, $\Gamma A\Delta = C'D'\Delta'$, $g = g'^w$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{f': A'A'\Delta' \vdash A}{f'^w: A'\Delta' \vdash A} \quad \frac{g': D'C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^w: C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{g'^w < f'^w >: C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменяем все это на:

$$\frac{\frac{f': A'A'\Delta' \vdash A \quad g': D'C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' < f'^w >: D'C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2 \vdash B}}{(g' < f'^w >)^w: C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств *GIBCWK*-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^w < f'^w > = (g' < f'^w >)^w$.

Для ослабления получаем:

(1) Пусть $\Lambda = A'\Delta'$ и $f = f'^{\kappa}$. Если мы имеем дело с $g: \Gamma A\Delta \vdash B$, то вначале с помощью i -стрелок приводим g к виду $g: A\Delta \vdash B$. Затем получаем:

$$\frac{\frac{f': A'\Delta' \vdash A}{f'^{\kappa}: B'A'\Delta' \vdash A} \quad g: A\Delta \vdash B}{g \langle f'^{\kappa} \rangle: B'A'\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменяем это выражение на:

$$\frac{\frac{f': A'\Delta' \vdash A \quad g: A\Delta \vdash B}{g \langle f' \rangle: A'\Delta'\Delta \vdash B}}{(g \langle f' \rangle)^{\kappa}: B'A'\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории получаем $g \langle f'^{\kappa} \rangle = (g \langle f' \rangle)^{\kappa}$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'\Delta'$, $g = g'^{\kappa}$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{g': A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{f: \Lambda \vdash A \quad g'^{\kappa}: B'A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{g'^{\kappa} \langle f \rangle: B'A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменяем это выражение на:

$$\frac{\frac{f: \Lambda \vdash A \quad g': A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' \langle f \rangle: A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}}{(g' \langle f \rangle)^{\kappa}: B'A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\kappa} \langle f \rangle = (g' \langle f \rangle)^{\kappa}$.

(3) Пусть $\Lambda = A'\Delta'$, $f = f'^{\kappa}$, $\Gamma A\Delta = C'\Delta'$, $g = g'^{\kappa}$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{f': A'\Delta' \vdash A}{f'^{\kappa}: B'A'\Delta' \vdash A} \quad \frac{g': C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^{\kappa}: D'C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{g'^{\kappa} \langle f'^{\kappa} \rangle: D'C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменяем все это на:

$$\frac{\frac{\frac{f': A'\Delta' \vdash A}{f'^{\kappa}: B'A'\Delta' \vdash A} \quad g': C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' \langle f'^{\kappa} \rangle: C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2 \vdash B}}{(g' \langle f'^{\kappa} \rangle)^{\kappa}: D'C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\kappa} \langle f'^{\kappa} \rangle = (g' \langle f'^{\kappa} \rangle)^{\kappa}$, что и заканчивает доказательство. ■

4. Секвенциальные дедуктивные метасистемы

Существует естественный способ описания категорных тождеств, связанный с формулированием так называемого *внутреннего (типового) языка* мультикатегорий (см., например, [Lambek 1989, p. 224]). С этой целью вводится счетное множество переменных каждого типа и секвенции интерпретируются как (мультилинейные) операции.

Определим индуктивно *термы* всех типов:

- 1) каждая переменная есть терм своего типа,
- 2) если $f: A_1 \dots A_m \vdash A_{m+1}$ представляет собой секвенцию и a_i есть терм типа A_i , для $i = 1, \dots, m$, то $f a_1 \dots a_m$ есть терм типа A_{m+1} .

Заметим, что вводятся переменные всех типов, но не переменные для типов.

Тождество (или скорее *доказуемое тождество*) термов одного и того же типа есть отношение конгруэнтности, удовлетворяющее обычной подстановке термов вместо свободных переменных. Таким образом, из $\varphi(x) = \varphi'(x)$ можно вывести $\varphi(a) = \varphi'(a)$, где a есть любой терм того же самого типа, что и переменная x . В принципе, однако, можно декларировать переменные и записывать $\varphi(x) =_x \varphi'(x)$. Помимо обычных правил для равенства допускаются также следующие правила для тождественной секвенции и сечения:

$$1_A x = x,$$

$$g\langle f \rangle u w v = g u f w v.$$

Здесь x есть переменная типа A , $u = x_1 \dots x_m$ является последовательностью переменных типа $\Gamma = A_1 \dots A_m$, v есть последовательность переменных типа Δ и w есть последовательность переменных типа Λ .

Описание внутреннего языка на этом практически заканчивается. Тождества между секвенциями теперь вполне определимы: про две секвенции $f, g: A_1 \dots A_m \vdash A_{m+1}$ говорят, что они *тождественны*, если $f x_1 \dots x_m = g x_1 \dots x_m$ доказуемо во внутреннем языке. Существенно, что x_{mi} все различны, даже если две A_i могут совпадать. Отсюда можно легко вывести описанные ранее тождества в мультикатегориях. Например, для $f: \Delta \vdash A$, $g: \Gamma A \Delta \vdash B$ и $h: \Gamma' B \Delta' \vdash C$ вычисляем:

$$h\langle g\langle f \rangle \rangle u' u w v v' = h u' g\langle f \rangle u w v v' = h u' g u f w v v' = h\langle g \rangle u' u f w v v' = \\ = h\langle g \rangle \langle f \rangle u' u w v v'.$$

Во внутреннем языке единственность секвенций может быть выражена также в виде правил вывода, отсюда тождества имплицитивной мультикатегории могут быть переписаны следующим образом:

$$\varepsilon y f^e u = f y u,$$

$$f^i u i v = f i v,$$

где s_0 есть переменная типа T ;

$$f^{\beta} u i i = f u i,$$

где s_0 есть переменная типа T ;

$$f^{\gamma\gamma} u v w = f u v w,$$

$$(f^{ii})^w = f i v,$$

где s_0 есть переменная типа T .

$$\varepsilon y g_1 u = \varepsilon y g_2 u$$

$$g_1 u = g_2 u$$

$$\underline{g_1 u i v = g_2 u i v}$$

$$g_1 u s_0 v = g_2 u s_0 v,$$

$$\underline{g_1 u i i = g_2 u i i}$$

$$g_1 u s_0 s_0 = g_2 u s_0 s_0,$$

$$\underline{g_1 u v w = g_2 u v w}$$

$$g_1 = g_2$$

$$\underline{g_1 u i i v = g_2 u i i v}$$

$$g_1 u s_0 s_0 v = g_2 u s_0 s_0 v,$$

Существует еще одна возможность описания отношений между стрелками, связанная с конструкцией так называемой *метамультикатегории*. В этом случае, отправляясь от стрелок дедуктивной системы P , строится новый секвенциальный язык, в котором формализуется дедуктивная металогика P^2 системы P , а тем самым и описываются отношения между стрелками, т. е. отношения между выводами (см. [Došen 1992]).

Объектами секвенциальной дедуктивной метасистемы P^2 будут последовательности стрелок системы P , т. е. последовательности типа $X = f_1 \dots f_m$. Поскольку m может быть равно нулю, то в этом случае X будет представлять собой пустую последовательность $\emptyset$. Стрелки (секвенции) будут представлять собой выражения вида $X \rightarrow f$, где X есть объект P^2 , а f есть стрелка P . Доказуемость секвенции $X \rightarrow f$ в соответствующей дедуктивной метасистеме будет означать утверждение о том, что исходя из стрелки X , мы можем сконструировать стрелку f , используя примитивные стрелки и примитивные операции. Иными словами, существует производная операция, отображающая X в f . Таким образом, система подобных секвенций будет представлять собой формализацию металогики производных правил исходной дедуктивной системы. Теорема такой метасистемы соответствует производной операции без посылок, т. е. секвенции $X \rightarrow f$, где X целиком и полностью сконструирована из $\emptyset$. Стрелка $\emptyset \rightarrow f$ будет называться элементом f .

Чтобы получить минимальное дедуктивное метаисчисление, вводим специальные стрелки

$$1_f: f \rightarrow f;$$

$$(\circ): f g \rightarrow g \circ f;$$

$$i_f: \emptyset \rightarrow f;$$

где $f \circ g$ есть композиция f и g , и бинарную операцию на стрелках

$$\underline{\varphi: X \rightarrow f \quad \psi: Y f Z \rightarrow g} \quad (\text{сечение}).$$

$$\psi \langle \varphi \rangle: Y X Z \rightarrow g$$

Пусть теперь S есть импликативная дедуктивная система и S^2 ее импликативная дедуктивная метасистема.

Предложение 3. Секвенция $\emptyset \rightarrow f$ доказуема в метасистеме S^2 тогда и только тогда, когда f есть стрелка S .

Доказательство. Слева направо показываем по длине доказательства, что если $X \rightarrow f$ доказуема в S^2 , то все стрелки из X будут стрелками S лишь тогда, когда f содержится в S . В противоположную сторону индукция проходит также без затруднений. ■

Рассмотрим теперь, как отражается S в металогике S^2 , т. е. когда мы можем записывать в S производные операции S^2 . Мы увидим, что S способно на это, если S^2 замкнута относительно следующего правила:

$$\frac{(T \vdash A) X \rightarrow (B \vdash C)}{X \rightarrow (A \supset B \vdash A \supset C)} \quad (\text{дедукция}),$$

т. е. когда правило дедукции допустимо для S^2 .

Рассмотрим следующий перевод, т. е. биекцию t из P в P^2 :

$$t(A \vdash B) = A \supset B,$$

$$t(\emptyset) = T,$$

$$t(X) = t(f_1 \dots f_m) = t(f_m \circ f_{m-1} \circ \dots \circ f_1),$$

$$t(X \rightarrow f) = t(X) \vdash t(f).$$

Пусть S есть импликативная дедуктивная IB -система. Докажем следующее предложение:

Предложение 4. $X \rightarrow f$ доказуема в S^2 тогда и только тогда, когда $t(X \rightarrow f)$ есть стрелка в S .

Доказательство. Слева направо доказываем индукцией по длине доказательства $X \rightarrow f$ в S^2 . Если $X = \emptyset$, то получаем $\emptyset \rightarrow f$. Но тогда $t(\emptyset \rightarrow f) = t(\emptyset) \vdash t(f) = T \vdash t(f)$. Поскольку $t(A \vdash B) = A \supset B$, то $T \vdash A \supset B$ приводит к $A \vdash B$, т. е. к стрелке в S . Если $X = fg$, то получаем доказуемую стрелку $fg \rightarrow g \circ f$. Но $t(fg \rightarrow g \circ f) = t(fg) \vdash t(g \circ f) = t(g \circ f) \vdash t(g \circ f)$, т. е. все сводится к единичной стрелке типа $1_{A \supset B}$. Справа налево по предложению 1 получаем $\emptyset \rightarrow (t(X) \vdash t(f))$ как доказуемую стрелку в S^2 , а затем применяем стрелку $(\circ)$ в виде $(T \vdash t(X))(t(X) \vdash t(f)) \rightarrow (T \vdash t(f))$ и сечение, получая $(T \vdash t(X)) \rightarrow (T \vdash t(f))$. Действуя аналогично, мы доходим до стрелок в последовательности X и для каждой такой стрелки $A \vdash B$ получаем $(A \vdash B) \rightarrow (T \vdash A \supset B)$. Используя обратную секвенцию для f , получаем $X \rightarrow f$. ■

Предложение 5. S^2 замкнуто относительно правила дедукции.

Доказательство. Мы имеем:

(1) $(T \vdash A) X \rightarrow (B \vdash C)$ в S^2 тогда и только тогда, когда $t(X \circ (T \vdash A)) \vdash t(B \vdash C)$ в S^2 ;

(2) тогда и только тогда, когда $t(X^\circ(T \vdash A)) \vdash B \supset C$.

Но из $B \supset C$ с помощью стрелки β в $\mathbf{S}$ и сечения получаем $t(X^\circ(T \vdash A)) \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$, что можно записать как $t(X^\circ(T \vdash A)) \vdash t(A \supset B \vdash A \supset C)$. Отсюда по предложению 4 получаем $(T \vdash A) X \rightarrow (A \supset B \vdash A \supset C)$. Поскольку $T \vdash A$ есть стрелка $\mathbf{S}$, то по предложению 3 $\emptyset \rightarrow (T \vdash A)$ и, применяя сечение, получаем $X \rightarrow (A \supset B \vdash A \supset C)$, что и требовалось доказать. ■

Заметим, что аналогично, применяя стрелку γ , можно получить правило

$$\frac{(T \vdash A) X \rightarrow (A \vdash B \supset C)}{X \rightarrow (B \vdash A \supset C)} ;$$

применяя стрелку ω , получаем правило

$$\frac{(T \vdash A) X \rightarrow (A \vdash A \supset B)}{X \rightarrow (A \vdash B)}$$

применяя стрелку κ , получаем правило

$$\frac{(T \vdash A) X \rightarrow (T \vdash A)}{X \rightarrow (B \vdash A)}$$

Если добавить к $\mathbf{S}^2$ дополнительную метасвязку импликации $\Rightarrow$, то получаем импликативное секвенциальное дедуктивное метачисление $\mathbf{GP}^2$ при введении специальных стрелок:

$$\begin{aligned} &(\Rightarrow): fg \rightarrow f \Rightarrow g, \\ \text{где } f: A \vdash B, g: B \vdash C; f \Rightarrow g: B \supset A \vdash B \supset C, \\ &\varepsilon_{fg}: f(f \Rightarrow g) \rightarrow g \end{aligned}$$

и правил

$$\frac{\varphi: fX \rightarrow g}{\varphi^\varepsilon: X \rightarrow f \Rightarrow g} \qquad \frac{\varphi: XY \rightarrow f}{\varphi^\dagger: X \emptyset Y \rightarrow f}$$

где $\emptyset$ означает пустую стрелку, т. е. стрелку $\vdash$.

Точно так же можно ввести, помимо этого, следующие стрелки:

$$\begin{aligned} \beta_{gh}^f: g \Rightarrow h \rightarrow (f \Rightarrow g) \Rightarrow (f \Rightarrow h) \\ \gamma_{gh}^f: f \Rightarrow (g \Rightarrow h) \rightarrow g \Rightarrow (f \Rightarrow h) \\ \omega_{fg}: f \Rightarrow (f \Rightarrow g) \rightarrow f \Rightarrow g \\ \kappa_{fg}^2: f \rightarrow g \Rightarrow f \end{aligned}$$

Соответственно можно заменить эти стрелки на правила:

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi: gX \rightarrow h}{\varphi^\beta: f(f \Rightarrow g)X \rightarrow h} \quad (\text{слабая транзитивность}) \\ &(\text{достаточно положить } \varphi^\beta = \varepsilon \langle \varepsilon \langle \beta \langle \varphi^\varepsilon \rangle \rangle \rangle) \\ &\frac{\varphi: g f X \rightarrow h}{\varphi^\gamma: f g X \rightarrow h} \quad (\text{перестановка}) \end{aligned}$$

(достаточно положить $\varphi^\gamma = \varepsilon < \varepsilon < \gamma < \varphi^{\varepsilon \varepsilon} > > >$)

$$\frac{\varphi: ffX \rightarrow g}{\varphi^\omega: fX \rightarrow g} \quad (\text{сокращение})$$

(достаточно положить $\varphi^\omega = \varepsilon < \omega < \varphi^{\varepsilon \varepsilon} > >$)

$$\frac{\varphi: X \rightarrow f}{\varphi^\kappa: gX \rightarrow f} \quad (\text{ослабление})$$

(где $\varphi^\kappa = \varepsilon < \kappa < \varphi > >$).

В этом случае мы получаем удвоение логики в метасистеме S^2 , что приводит к метасистеме S^{GIBWK} (см. о подобном удвоении [Došen 1988]). Нетрудно также, рассматривая соответствующие тождества на метастрелках, получить метамультিকатегории, отвечающие полученным метасистемам.

5. Дуальные дедуктивные системы и экспоненциальные категории

Среди различных стилей представления логических систем, основывающихся на различии в форме вывода, можно выделить так называемые представления в стиле Шютте. В этом случае выводы имеют форму $f: \vdash A_1 \dots A_m$, что означает, что f есть доказательство альтернатив $A_1 \dots A_m$ без каких-либо гипотез. Дж. Ламбек [Lambek 1994, p.153] предпочитает дуальное представление, основывающееся на использовании выводов $f: \Gamma \vdash$, поскольку в этом случае мы можем рассматривать f как мультилинейный оператор $\Gamma \vdash O$ (можно рассматривать O как тип истинностных значений и выводы $A_1 \dots A_m \vdash O$ как m -сортные отношения).

Формулировки в стиле Шютте наводят на мысль о логических системах, дуальных к интуиционистским системам в смысле дуального ограничения: если в первом случае требуется, чтобы сукцедент секвенции состоял не более чем из одной формулы, то дуальное ограничение сводится к тому, что антецедент секвенции может состоять не более чем из одной формулы (см. [Czermak 1971]). Подобную систему с правилами введения и удаления, дуальную интуиционистской логике, строит, например, Н. Гудмен [Goodman 1981]. Ее переформулировка в виде исчисления секвенций, осуществленная В. А. Смирновым [Смирнов 1987, с.223], выглядит следующим образом:

основные секвенции: $A \rightarrow A$ и $A \rightarrow T$;

структурные правила: сечение, перестановка справа,
добавление справа;

$$\begin{array}{c}
\frac{A \rightarrow \Delta}{A \wedge B \rightarrow \Delta} \quad \frac{B \rightarrow \Delta}{A \wedge B \rightarrow \Delta} \quad \frac{C \rightarrow \Delta \quad A \quad C \rightarrow \theta B}{C \rightarrow \Delta \theta A \wedge B} \\
\frac{A \rightarrow \Delta \quad B \rightarrow \theta}{A \vee B \rightarrow \Delta \theta} \quad \frac{C \rightarrow \Delta A}{C \rightarrow \Delta A \vee B} \quad \frac{C \rightarrow \Delta B}{C \rightarrow \Delta A \vee B} \\
\frac{A \rightarrow \Delta B}{A \Leftarrow B \rightarrow \Delta} \quad \frac{C \rightarrow \Delta A \quad B \rightarrow \theta}{C \rightarrow \Delta A \Leftarrow B \theta}
\end{array}$$

где $A \Leftarrow B$ означает коимпликацию (импликацию Брауэра), которой в алгебре соответствует псевдоразность.

Если вместо выводов в стиле Шютте $f: \vdash A_1 \dots A_m$, рассматривать однопосылочные выводы $f: B \vdash A_1 \dots A_m$ (что можно тогда понимать как доказательство альтернатив $A_1 \dots A_m$ исходя из гипотезы B), то можно сформулировать соответствующие косеквенциальные дедуктивные системы, в которых принимается дуальная концепция секвенции. Более того, можно сформулировать и дуальные импликативные дедуктивные системы и соответствующие им категории, рассматривая язык с дуальной связкой импликации.

Мы получаем коимпликативное исчисление, если мы допускаем, что существует формула $\perp$ (= ложь) и бинарная операция $\Leftarrow$ для образования коимпликации $A \Leftarrow B$ из двух данных формул A и B . Кроме этого, мы вводим следующие два правила вывода:

$$\frac{f: A \vdash B}{\lfloor f \rfloor: B \Leftarrow A \vdash \perp} \quad \frac{g: B \Leftarrow A \vdash \perp}{g_s: A \vdash B}$$

Нетрудно видеть, что наше коимпликативное исчисление будет соответствовать некоторой простейшей коимпликативной системе $\mathbf{I}^0$, ибо:

а) мы имеем аксиому $\mathbf{I}^0$ в виде:

$$\lfloor 1_A \rfloor: A \Leftarrow A \vdash \perp$$

б) правило *модус поненс* в виде:

$$\frac{g: A \Leftarrow B \vdash \perp \quad f: A \vdash \perp}{fg_s: B \vdash \perp}$$

Категория, соответствующая рассматриваемой дедуктивной системе, есть дедуктивная система, в которой имеют место следующие уравнения между доказательствами:

$$f \circ 1_A = f, \quad 1_B \circ f = f, \quad (hg) \circ f = h \circ (gf), \\
\text{для всех } f: A \vdash B, g: B \vdash C, h: C \vdash D.$$

Мы определяем *коэкспоненциальную категорию*, наделяя категорию $\mathbf{A}$, подобную вышеприведенной, введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$$\lfloor f \rfloor_s = f, \quad \lfloor g_s \rfloor = g$$

для всех $f: A \vdash B$ и $g: D \Leftarrow C \vdash \perp$

Таким образом, для данного графа X мы можем сконструировать коимпликативные исчисления $D^\circ(X)$ и свободную коэкспоненциальную категорию $F(X)^\circ$, порожденную X .

Пусть $GRPH$ будет категорией графов, чьими объектами являются графы, и каждый морфизм $F: X \rightarrow Y$ есть пара отображений $F: Objects(X) \rightarrow Objects(Y)$ и $F: Arrows(X) \rightarrow Arrows(Y)$ такая, что $f: X \rightarrow X'$ влечет $F(f): F(X) \rightarrow F(X')$.

Пусть EXP° будет категория коэкспоненциальных категорий, чьими объектами являются коэкспоненциальные категории, а стрелками функторы $F: A \rightarrow B$, сохраняющие коэкспоненциальную структуру, т.е.

$$F(\perp) = \perp, F(A \Leftarrow B) = F(A) \Leftarrow F(B), F(\lfloor f \rfloor) = \lfloor F(f) \rfloor,$$

$$F(f_s) = F(f)_s.$$

Пусть U будет обычным стирающим функтором $EXP^\circ \rightarrow GRPH$. С каждым графом X мы можем ассоциировать морфизм графов $H_X: X \rightarrow UF(X)$ следующим образом: $H_X(X) = X$ и, если $f: X \rightarrow Y$ есть стрелка в X , то $H_X(f) = f$ (классы эквивалентности f рассматриваются как доказательства в $D^\circ(X)$). Мы имеем следующее универсальное свойство:

Предложение 6. Для любой коэкспоненциальной категории A и любого морфизма $F: X \rightarrow U(A)$ графов существует единственная стрелка $F': F(X)^\circ \rightarrow A$ в EXP° такая, что $U(F')H_X = F$.

Доказательство. Конструкция F' требует от нас выполнения следующих условий:

$$F'(X) = : F(X), : F'(\perp) = : F(\perp), F'(A \Leftarrow B) = F'(A) \Leftarrow F'(B), \\ F'(\lfloor f \rfloor) = \lfloor F'(f) \rfloor, F'(f_s) = F'(f)_s.$$

Требуется проверить, что F' определен правильно, т. е. что для всех $f, g: A \vdash B$ в $F'(X)$, $f = g$ влечет $F'(f) = : F'(g)$. Последнее очевидно, поскольку никаких других, кроме требуемых нам, тождеств в $F'(X)$ не выполняется. ■

Подобное универсальное свойство означает, что F есть функтор $GRPH \rightarrow EXP^\circ$, левосопряженный к U с сопряжением $H_X: Id \rightarrow UF$. Для коэкспоненциальных категорий можно определить также понятие подстановки доказательств, что определяется следующим предложением:

Предложение 7. Для данной коэкспоненциальной категории A , индетерминанта $x: A_0 \vdash A$ над A и стрелки $a: A_0 \vdash A$ существует единственный функтор $S_x^a: A[x] \rightarrow A$ такой, что $S_x^a(x) = a$ и $S_x^a H_X = 1_A$.

Доказательство Вначале докажем, что для данной категории $\mathbf{A}$ и индетерминанта $x: A_0 \vdash A$ над $\mathbf{A}$, функтора $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ и любой стрелки $b: F(A_0) \vdash F(A)$ в $\mathbf{B}$ имеется единственный функтор $F': A[x] \rightarrow \mathbf{B}$ такой, что $F(x) = b$ и $F' H_x = F$.

Каждое доказательство $\varphi(x)$ при допущении x может иметь следующую форму:

$$k, x, \chi(x) \psi(x),$$

где k есть стрелка в $\mathbf{A}$, т. е. постоянный полином. Решающим шагом является определение $F'(\varphi(x))$. Определим индуктивно:

$$F'(k) = F(k),$$

$$F'(x) = b,$$

$$F'(\chi(x) \psi(x)) = F'(\chi(x)) F'(\psi(x)).$$

$$F'(\lfloor \psi(x) \rfloor) = \lfloor F'(\psi(x)) \rfloor,$$

$$F'(\psi(x)_s) = (F'(\psi(x)))_s.$$

Остается лишь показать, что F' определен на полиномах, а не на доказательствах, т. е. что $\varphi(x) =_x \varphi'(x)$ влечет $F'(\varphi(x)) = F'(\varphi'(x))$. Если в последнем случае писать $\varphi(x) \equiv \varphi'(x)$, то достаточно проверить, что $\equiv$ имеет все свойства подстановки и отвечает всем тождествам экспоненциальной категории. Например, чтобы проверить, что $\lfloor \varphi(x) \rfloor_s \equiv \varphi(x)$, мы вычисляем $F'(\lfloor \varphi(x) \rfloor_s) = (F'(\lfloor \varphi(x) \rfloor))_s = (\lfloor F'(\varphi(x)) \rfloor)_s$ и т. д.

Теперь, чтобы получить доказательство нашего предложения, достаточно положить $F = 1_A$. ■

Наделяя коэкспоненциальные категории дополнительной структурой, мы одновременно получаем различные категорные коимпликативные исчисления, соответствующие логическим исчислениям. Так, если мы добавим к нашей системе аксиом новую аксиому, выглядящую следующим образом:

$$\beta^{\circ A}_{BC}: (C \Leftarrow A) \Leftarrow (B \Leftarrow A) \vdash C \Leftarrow B,$$

то получим импликативное исчисление, соответствующее системе минимальной импликативной логики IB° . Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f: B \vdash C}{f \Leftarrow 1_A: C \Leftarrow A \vdash B \Leftarrow A}.$$

Для этого достаточно положить

$$f \Leftarrow 1_A = (\beta^{\circ A}_{BC} \lfloor f \rfloor)_s.$$

Аксиому B° соответствующей логической системы мы теперь получаем в следующем виде:

$$\lfloor \beta^{\circ 4}_{BC} \rfloor : ((C \Leftarrow A) \Leftarrow (B \Leftarrow A)) \Leftarrow (C \Leftarrow B) \vdash \perp$$

Для IB° -импликативного дедуктивного исчисления, как нетрудно показать, имеет место следующая теорема дедукции:

Теорема 3 (теорема дедукции). В IB° -импликативном исчислении с каждым доказательством $\phi(x_1, \dots, x_m): B \vdash C$ из допущений $x_1: A_1 \vdash \perp, \dots, x_m: A_m T \vdash \perp$ может быть ассоциирована стрелка $\phi(x_1, \dots, x_m) \Leftarrow 1_{A_1} (\Leftarrow \dots) \Leftarrow 1_{A_m}$, не зависящая от $x_1, \dots, x_m$.

Доказательство. Будем писать $\psi(x) \Leftarrow 1_{A_1} = k_{x \in A} \phi(x)$, где индекс $x \in A$ указывает, что x имеет тип A . Заметим, что для каждого доказательства $\phi(x): B \vdash C$ допущение $x: T \vdash A$ должно иметь одну из следующих форм:

- (i) $k: B \vdash C$, доказательство IB -исчисления;
- (ii) $x: T \vdash A$ с $B = T$ и $C = A$;
- (iii) $\chi(x)\psi(x)$, где $\chi(x) = B \vdash D$, $\psi(x) = D \vdash C$.
- (iv) $\psi(x) \Leftarrow 1_{A_1}$, где $\psi(x): B \vdash C$.

Во всех случаях $\chi(x)$ и $\psi(x)$ являются более краткими доказательствами, чем $\phi(x)$, и мы определяем индуктивно:

- (v) $k_{x \in A} k = k \Leftarrow 1_A$;
- (vi) $k_{x \in A} x = x \Leftarrow 1_A$;
- (vii) $k_{x \in A} (\chi(x)\psi(x)) = \chi(x)\psi(x) \Leftarrow 1_A$;
- (viii) $k_{x \in A} \psi(x) \Leftarrow 1_{A_1} = (\psi(x) \Leftarrow 1_{A_1}) \Leftarrow 1_A$.

Поскольку речь идет об индукции по длине доказательства $\phi(x)$, то формально можно было бы определить эту длину как 0 в случаях (i) и (ii), как сумму длин $\chi(x)$ и $\psi(x)$ плюс один в случае (iii), и как длину $\psi(x)$ плюс один в случае (iv). ■

Действуя подобным же образом, мы можем добавить к IB° -импликативному исчислению аксиомы, являющиеся категорными аналогами дуальных аксиом $C^\circ, W^\circ, K^\circ$:

$$\begin{aligned} \gamma^{\circ 4}_{BC}: A \Leftarrow (B \Leftarrow C) \vdash B \Leftarrow (A \Leftarrow C) \\ w^{\circ}_{AB}: A \Leftarrow B \vdash A \Leftarrow (A \Leftarrow B) \\ k^{\circ B}_A: B \Leftarrow A \vdash A \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\frac{f: A \Leftarrow C \vdash B}{f_\gamma: B \Leftarrow C \vdash A}$$

(достаточно положить $f_\gamma = (\gamma^{\circ 4}_{BC} \lfloor f \rfloor)_s$)

$$\frac{f: A \Leftarrow B \vdash A}{f_w: A \vdash B}$$

(достаточно положить $f_w = (w^{\circ}_{AB} \lfloor f \rfloor)_s$)

$$\frac{\Box_A: \perp \vdash A \quad f: A \vdash \perp}{f_K: A \vdash B}$$

(где $\Box_A = (\kappa \circ A)_s$, $f_K = \Box_B f$).

$IBSWK^\circ$ -коэкспоненциальную категорию мы получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$$((f \Leftarrow 1_B \sqcup 1_B)_s) = f,$$

$$f_{\gamma\gamma} = f,$$

$$(\sqcup f)_\sqcup = f, \text{ где } f: C \vdash \perp.$$

$$f = \Box_A, \text{ для всех } f: \perp \vdash A.$$

Последнее уравнение утверждает, что $\perp$ является инициальным объектом.

Аналогично комбинаторной полноте для множества комбинаторов $\{B, C, W, K\}$ мы получаем следующую теорему для $IBSWK^\circ$ -коэкспоненциальных категорий:

Теорема (функциональная полнота). Для любого полинома $\varphi(x_1, \dots, x_m): B \vdash C$ по индетерминантам $x_1: A_1 \vdash \perp, \dots, x_m: A_m \vdash \perp$ над $IBSWK^\circ$ -коэкспоненциальной категорией по любой дедуктивно ассоциированной стрелке $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m} \varphi(x_1, \dots, x_m)$, не зависящей от $x_1, \dots, x_m$, мы можем получить единственную стрелку f^φ такую, что $f^\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$, где $X = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Дуальная секвенциальная дедуктивная система представляет собой мультиграф, состоящий из класса стрелок (называемых также «секвенциями») и класса объектов (иногда называемых «типами») и двух отображений

$$\text{Начало: } \{\text{стрелки}\} \rightarrow \{\text{объекты}\}$$

$$\text{Конец: } \{\text{стрелки}\} \rightarrow \{\text{объекты}\}^*,$$

где $\{\text{объекты}\}^*$ представляет собой свободный моноид, порожденный классом объектов, его элементами являются последовательности $\Gamma = A_1 \dots A_n$ объектов. Заметим, что n может быть равно нулю и в этом случае Γ представляет собой пустую последовательность. Стрелка $f: B \vdash$ также называется элементом B .

Чтобы получить минимальное дуальное секвенциальное дедуктивное исчисление в генценовском стиле (но без структурных правил), введем специальную стрелку

$$1_A: A \vdash A$$

и бинарную операцию на стрелках:

$$\frac{g: B \vdash \Gamma A \Delta \quad f: A \vdash \Theta}{g[f]: B \vdash \Gamma \Theta \Delta} \text{ (сечение)}$$

Комультикатегория есть дедуктивная система, в которой имеют место следующие уравнения между доказательствами:

$$\begin{aligned} f[1_A] &= f, \quad 1_A[g] = g, \\ h[g[f]] &= h[g][f], \quad g'[f][f'] = g'[f'] [f], \\ \text{для всех } f: A \vdash C \Delta, g: B \vdash \Gamma A \Delta, g[f]: B \vdash \Gamma C \Delta \Delta, h: C \vdash \Gamma' B \Delta', \\ f': A' \vdash \Lambda', g': B \vdash \Gamma A \Delta A'. \end{aligned}$$

Коимпликативное косеквенциальное дедуктивное исчисление GI° мы получаем при введении специальных стрелок

$$\begin{aligned} \varepsilon^\circ_{BA}: A \vdash (B \Leftarrow A)B \\ i^\circ: T \vdash \end{aligned}$$

и правил

$$\begin{aligned} \frac{f: A \vdash \Delta B}{f_\varepsilon: B \Leftarrow A \vdash \Delta} \\ \frac{f: C \vdash \Gamma \Delta}{f_i: C \vdash \Gamma \perp \Delta} \end{aligned}$$

Как и в случае импликативного дедуктивного исчисления, легко видеть, что наше коимпликативное косеквенциальное дедуктивное исчисление GI° соответствует некоторой системе I° . Действительно, мы получаем:

а) аксиому I° в виде:

$$(1_A)_{i\varepsilon}: A \Leftarrow A \vdash \perp$$

б) правило модус поненс в виде:

$$\frac{g: A \Leftarrow B \vdash \perp \quad f: A \vdash \perp}{\varepsilon^\circ[g][f[i]]: B \vdash \perp}$$

Мы определяем *коэкспоненциальную комультикатегорию*, наделяя мультикатегорию **A** введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$$\varepsilon^\circ[f_\varepsilon] = f, \quad \text{для всех } f: B \vdash \Gamma A,$$

$$f_i[i^\circ] = f, \quad \text{для всех } f: C \vdash \Gamma \Delta.$$

В частности, $(\varepsilon^\circ_{BA})_\varepsilon = 1_{A \Leftarrow B}$, $(i^\circ_\perp)_i = 1_\perp$.

С помощью введенных правил нетрудно получить следующее правило:

$$\frac{f: A \vdash \Lambda \quad g: C \vdash \Gamma B \Delta}{f\{g\}: C \vdash \Gamma (A \Leftarrow B) \Delta} \{-\}$$

Для этого достаточно положить:

$$f\{g\} = g[\varepsilon^\circ[f]].$$

Если мы теперь введем в нашей системе новую специальную стрелку, выглядящую следующим образом:

$$\beta^{\circ A}_{BC}: (C \Leftarrow A) \Leftarrow (B \Leftarrow A) \vdash C \Leftarrow B,$$

то получим косеквенциальное коимпликативное исчисление GIB° , соответствующее системе минимальной коимпликативной логики IB° . Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f: B \vdash \Delta C}{f_{\beta}: A \vdash \Delta(C \Leftarrow A)B} \quad (\text{слабая транзитивность})$$

Для этого достаточно положить $f_{\beta} = \varepsilon^{\circ} [\varepsilon^{\circ} [\beta^{\circ} [f_{\varepsilon}]]]$.

Аксиому B° получаем теперь в виде следующей стрелки:

$$(\beta^{\circ A}_{BC})_{\varepsilon i}: ((C \Leftarrow A) \Leftarrow (B \Leftarrow A)) \Leftarrow (C \Leftarrow B) \vdash \perp$$

Действуя подобным же образом, мы можем добавить к косеквенциальному коимпликативному исчислению GIB° аксиомы, являющиеся категорными аналогами дуальных аксиом C° , W° , K° :

$$\begin{aligned} \gamma^{\circ A}_{BC}: A \Leftarrow (B \Leftarrow C) \vdash B \Leftarrow (A \Leftarrow C) \\ w^{\circ}_{AB}: A \Leftarrow B \vdash A \Leftarrow (A \Leftarrow B) \\ \kappa^{\circ B}_A: B \Leftarrow A \vdash A \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\begin{aligned} & \frac{f: C \vdash \Delta BA}{f_{\gamma}: C \vdash \Delta AB} \quad (\text{перестановка}) \\ & (\text{достаточно положить } f_{\gamma} = \varepsilon^{\circ} [\varepsilon^{\circ} [\gamma^{\circ} [f_{\varepsilon\varepsilon}]]]) \\ & \frac{f: B \vdash \Delta AA}{f_w: B \vdash \Delta A} \quad (\text{сокращение}) \end{aligned}$$

(достаточно положить $f_w = \varepsilon^{\circ} [w^{\circ} [f_{\varepsilon\varepsilon}]]$)

$$\frac{f: A \vdash \Delta}{f_{\kappa}: B \vdash \Delta A} \quad (\text{ослабление})$$

(где $f_{\kappa} = \varepsilon^{\circ} [\kappa[f]]$).

$GIBSCWK^{\circ}$ -коэкспоненциальную комультикатегорию получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$$f_{\beta}[i^{\circ}][i^{\circ}] = f[i^{\circ}], \quad \text{для всех } f: A \vdash \Delta B;$$

$$f_{\gamma\gamma} = f, \quad \text{для всех } f: C \vdash \Delta AB;$$

$$f_{i\pi w}[i^{\circ}_{\perp}] = f, \quad \text{для всех } f: C \vdash \Delta A;$$

$$f = \square_A, \quad \text{где } \square_A = (i^{\circ}_{\perp})_{\kappa} \text{ и } f: \perp \vdash A.$$

Последнее уравнение утверждает, что $\perp$ является инициальным объектом.

Для данного мультиграфа G мы можем сконструировать коимпликативные исчисления $D^\circ(G)$ и свободную коэкспоненциальную комультিকатегорию $F^\circ(G)$, порожденную G . Объекты этой комультикатегории получаются индуктивно из объектов G с помощью операции $\Leftarrow$. Ее косеквенции получаются из косеквенций G путем присоединения базисных косеквенций $1_A, \varepsilon^\circ_{AB}, i^\circ_A$ т. д., и формирования новых операций из старых с помощью правил $(-)_\varepsilon, (-)_i$ и т. д. Наконец, тождества между сравнимыми косеквенциями в $F(G)$ будут те и только те, которые следуют из тождеств в G , и комультикатегорные тождества

$$h[g[f]] = h[g][f], g'[f][f'] = g'[f'] [f].$$

Помимо этого добавляются еще тождества

$$\varepsilon^\circ[f_\varepsilon] = f, f_i[i^\circ] = f,$$

и т. п., рассмотренные ранее.

Введем теперь понятие комультифунктора, используя следующие определения:

Определение 1. Комультифунктор F из комультикатегории M в комультикатегорию M' представляет собой отображение класса объектов M в класс объектов M' вместе с отображением из класса стрелок M в класс стрелок M' такое, что если $f: B \vdash A_1 \dots A_n$ есть стрелка в M , то $F(f): F(B) \vdash F(A_1) \dots F(A_n)$ есть стрелка в M' и $F(1_A) = 1_{F(A)}, F(g[f]) = F(g)[F(f)]$.

Определение 2. Коэкспоненциальный комультифунктор F из коэкспоненциальной комультикатегории M в коэкспоненциальную комультикатегорию M' представляет собой комультифунктор, сохраняющий коэкспоненциальную структуру, т. е.

$$F(\perp) = \perp, F(A \Leftarrow B) = F(A) \Leftarrow F(B), \\ F(\varepsilon^\circ_{AB}) = \varepsilon^\circ_{F(A)F(B)}, F(i^\circ_A) = i^\circ_{F(A)}.$$

Пусть U будет стирающим комультифунктором, тогда можно доказать, что комультифунктор $G \rightarrow UF(G)$ будет полным и точным (полнота свидетельствует о том, что комультифунктор не порождает никаких новых косеквенций по сравнению со старыми, а точность свидетельствует об отсутствии новых тождеств между косеквенциями).

Пусть G будет $GIBCWK^\circ$ -мультикатегорией. Для коэкспоненциального $GIBCWK^\circ$ -мультифунктора F (т.е. сохраняющего $BCWK^\circ$ -структуру G) имеет место следующая теорема:

Теорема 2. (устранение сечения). Если стрелки $\varepsilon, i, \beta, \gamma, w, k$ заменить на правила $\{-\}, (-)_i, (-)_\beta, (-)_\gamma, (-)_w, (-)_k$, то любая косеквенция в $UF(G)$, сконструированная с помощью правил сечения, будет

эквивалентна косеквенции, сконструированной без применения правила сечения.

Доказательство проводится дуально соответствующему доказательству для случая мультикатегорий.

ЛИТЕРАТУРА

- [Карпенко 1993] *Карпенко А. С.* Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования, вып. 2, М., Наука, 1993. - С.224-258.
- [Смирнов 1987] *Смирнов В. А.* Логические методы анализа научного знания. М., 1987.
- [Czermak 1971] *Czermak I.* A remark on Gentzen's calculus of sequents // Notre Dam J. Form. Log., 1971, vol. 18.
- [Curry 1969] *Curry H. B.* Modified basic functionality in combinatory logic // Dialectica, No 23, 1969, pp. 83-92.
- [Došen 1988] *K. Došen.* Sequent systems and grupoid models, I and II // Studia Logica, v. 47, Mo 4, 1988, pp.353-385; Studia Logica, v. 48, No 1, 1989, pp. 41-65; Studia Logica v. 49, No 4, 1990, p. 614.
- [Došen 1992] *K. Došen.* Modal Logic as Metalogic // Journal of Logic, Language and Information, No 1, 1992, pp. 175-201.
- [Došen 1996] *K. Došen.* Deductive Systems // The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 2, No 5, 1996, pp. 243-283.
- [Goodman 1981] *Goodman N. D.* The logic of contradiction // Ztschr. Math. Logik. Grundle. Math., 1981, Bd. 27, N 2.
- [Hindley 1969] *Hindley J. R.* The principal type-scheme of an object in combinatory logic // Transactions of American Mathematical Society, No 146, 1969, p. 29-60.
- [Lambek 1988] *Lambek J.* On the Unity of Algebra and Logic // Categorical Algebra and its Applications / F. Borceux (ed.), Springer, Lecture Notes in Mathematics 1348 (1988).
- [Lambek 1989] *Lambek J.* Multicategories Revisited // Contemporary Mathematics, vol 92, 1989, pp. 217-239.
- [Lambek 1993] *Lambek J.* Logic Without Structure Rules (Another Look at Cut Elimination) // Substructural Logics / K. Došen and Schroeder-Heister (eds.), Oxford University Press, 1993, pp. 179-206.
- [Lambek 1994] *Lambek J.* What is a deductive system? // What is a Logical System? / D. Gabbay and H. Guenther (eds.), Oxford University Press, 1994, pp. 141-189.
- [Lambek, Scott 1986] *Lambek J., Scott P. J.* Introduction to higher order categorical logic, Cambridge University Press, London, 1986.
- [Vasyukov 1997] *Vasyukov V. L.* Implicative logics in categories // Bull. Sect. Log., v.26, No 4, 1997, pp. 188-192.

О НЕГАТИВНО ЭКВИВАЛЕНТНЫХ РАСШИРЕНИЯХ МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ¹

Abstract. *We define the relation of negative equivalence on the class of non-trivial extensions of minimal logic as follows. Logics are negatively equivalent if they define the same negative consequence relation or, equivalently, if they have the same class of inconsistent sets of formulas. We point out the least logic in any class of logics with fixed intuitionistic and negative counterparts and prove that each of such logics is closed under the rule $(\varphi \vee \perp) / \varphi$. We prove also that negative counterparts of extensions of negative logics can be treated as theirs logics of contradictions.*

Введение

Данная статья продолжает изучение класса расширений минимальной логики L_j , которое было начато в работах автора [1-3]. Класс нетривиальных расширений L_j является дизъюнктивным объединением трех подклассов: класса **Int** промежуточных логик, в которых выполняется закон *ex contradictio quodlibet*; класса **Neg** негативных логик, имеющих вырожденное отрицание в том смысле, что в этих логиках доказуемы все формулы, начинающиеся с отрицаний; наконец, класса **Par** паранепротиворечивых расширений L_j , включающего логики, не вошедшие в первые два класса. Каждой паранепротиворечивой логике $L \in \text{Par}$ естественным образом сопоставляются ее интуиционистский напарник $L_{\text{int}} = L + \{\perp \supset p\} \in \text{Int}$ и негативный напарник $L_{\text{neg}} = L + \{\perp\} \in \text{Neg}$ (см. [3]). Оказывается, что L_{int} – наименьшая промежуточная логика, содержащая L , соответственно, L_{neg} – наименьшая негативная логика, содержащая L . Более того, существуют естественные трансляции L_{int} и L_{neg} в L (см. разд.1 ниже), т.е. напарники могут быть конструктивно определены через логику L . Однако паранепротиворечивая логика не определяется полностью своими напарниками. Класс паранепротиворечивых логик, имеющих фиксированные интуиционистский напарник $L1 \in \text{Int}$ и негативный напарник $L2 \in \text{Neg}$, образует интервал $[L1 * L2, L1 \cap L2]$ в решетке расширений L_j , наибольшая точка которого является просто пересечением логик $L1$ и $L2$, а наименьшая – так называемой свобод-

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 99-03-00204.

ной комбинацией логик $L1$ и $L2$, определение которой несколько сложнее и будет приведено ниже.

Цель данной статьи – сравнить выводимость и опровержимость в паранепротиворечивых расширениях L_j и их интуиционистских напарниках. Прежде всего заметим, что упомянутая выше трансляция интуиционистского напарника L_{int} в логику $L \in Par$ всегда является сильной, т.е. сохраняющей отношение выводимости. Тем самым, отказываясь от *ex contradictio quodlibet*, мы сохраняем возможность моделировать дедуктивный аппарат промежуточных логик. Более того, оказывается, что в ряде случаев паранепротиворечивая логика L имеет то же самое негативное отношение выводимости (отношение $X \vdash_L \neg\varphi$), или, что эквивалентно в классе расширений минимальной логики, тот же самый класс противоречивых множеств формул, что и её интуиционистский напарник L_{int} . Мы будем говорить, что в этом случае логики L и L_{int} *негативно эквивалентны*. Представляется естественным считать, что конструктивный смысл понятия противоречия в той или иной дедуктивной системе вполне определяется классом множеств формул, противоречивость которых может быть доказана в данной дедуктивной системе. Соответственно конструктивный смысл отрицания определяется тем, какие формулы опровергаются (выводятся их отрицания) исходя из того или иного множества посылок. В конце концов, отрицание для того и вводится, чтобы иметь возможность опровергать формулы. Таким образом, если две логики негативно эквивалентны, они имеют идентичные, с конструктивной точки зрения, концепции противоречия и отрицания. Мы укажем для любой промежуточной логики $L \in Int$ наименьшую паранепротиворечивую логику $L1 \in Par$, которая негативно эквивалентна L . Обсудим также возможность сохранения конструктивных свойств промежуточной логики при переходе к негативно эквивалентной паранепротиворечивой логике, в частности, покажем, что упомянутая выше логика $L1$ всегда будет удовлетворять слабому аналогу дизъюнктивного свойства.

Перечисленные выше результаты можно рассматривать как ещё один довод в пользу излюбленного тезиса сторонников паранепротиворечивой логики: «Отказываясь от *ex contradictio quodlibet*, мы, по существу, ничего не теряем, но приобретаем новые возможности». К числу последних можно отнести также возможность рассматривать негативный напарник L_{neg} паранепротиворечивой логики L как логику противоречий логики L . Это следует из того, что, как будет показано ниже, оператор противоречия $C(\varphi) = \varphi \wedge \neg\varphi$ определяет строгую трансляцию L_{neg} в L , т.е. формулы

логики L_{neg} ведут себя в точности так же, как образованные с их помощью противоречия в логике L .

1. Предварительные замечания

Пусть Jhn обозначает класс всех нетривиальных расширений Lj . Как было упомянуто во введении, класс Jhn представим в виде дизъюнктного объединения трех классов: $Jhn = Int \cup Neg \cup Par$. Каждый из этих классов является интервалом в решетке логики Jhn : $Int = [Li, Lk]$, $Neg = [Ln, Lmn]$, $Par = [Lj, Le]$, где Li – интуиционистская логика, Lk – классическая логика, Ln – негативная логика, $Lmn = Ln + \{((p \supset q) \supset p) \supset p\}$, наконец, Le – логика классической опровержимости, $Le = Lj + \{((p \supset q) \supset p) \supset p\}$.

Упомянутые во введении трансляции интуиционистского и негативного напарников в паранепротиворечивую логику определяются следующим образом.

Предложение 1.1. [3] Пусть $L \in Par$. Имеют место равенства

$$L_{neg} = \{\varphi \mid \perp \supset \varphi \in L\} \text{ и } L_{int} = \{\varphi \mid I(\varphi) \in L\},$$

где $I(\varphi(p_1, \dots, p_n)) = \varphi(p_1 \vee \perp, \dots, p_n \vee \perp)$.

Оказывается, трансляция I всегда является строгой.

Предложение 1.2. Для любых $L \in Par$ множества формул X и формулы φ , из X в логике L_{int} выводима формула φ в том и только в том случае, если $I(X) \vdash_L I(\varphi)$, где $I(X) = \{\varphi \mid I(\varphi) \in X\}$.

Данное предложение легко следует из того, что любая формула вида $I(\perp \supset \varphi)$ ($= \perp \supset I(\varphi)$) доказуема в Lj .

Для $L1 \in Int$, $L2 \in Neg$ обозначим

$$Spec(L1, L2) = \{L \in Par \mid L_{int} = L1, L_{neg} = L2\},$$

т.е. $Spec(L1, L2)$ – это класс паранепротиворечивых логики с заданными интуиционистским и негативным напарниками. Оказывается, $Spec(L1, L2)$ является интервалом в решетке Jhn .

Предложение 1.3. [3] Пусть $L1 \in Int$, $L2 \in Neg$. Тогда $Spec(L1, L2) = [L1 * L2, L1 \cap L2]$, где $L1 * L2 = Lj = \{I(\varphi), \perp \supset \psi \mid \varphi \in L1, \psi \in L2\}$

Логику $Lg = Lj + \{\neg\neg(\perp \supset p)\}$ будем называть логикой Гливленко. Это наименьшая логика среди логики L , удовлетворяющих известной теореме Гливленко: для любой формулы φ , $Lk \vdash \varphi$ в том и только в том случае, если $L \vdash \neg\neg\varphi$.

Пусть $L1 \in Int$, $L2 \in Neg$. Релятивизованную логику Гливленко $G(L1, L2)$ определим следующим образом: $G(L1, L2) = L1 * L2 + \{\neg\neg(\perp \supset p)\}$.

Предложение 1.4. Для $L1 \in \text{Int}$, $L2 \in \text{Neg}$ эквивалентны следующие условия: 1) $L1 = Lk$; 2) $G(L1, L2) = L1 \cap L2$.

Класс j -алгебр (см. [1,2]) задает алгебраическую семантику для минимальной логики. С каждой j -алгеброй A связаны гейтингова алгебра $A^\perp$ с носителем $\{a \in A \mid a \geq \perp\}$, которая является подалгеброй A , и негативная алгебра $A_\perp$ с носителем $\{a \in A \mid a \leq \perp\}$ и операцией импликации $x \supset_\perp y = (x \supset y) \wedge \perp$. Заметим, что $\perp$ является единичным элементом в $A_\perp$.

Пусть даны гейтингова алгебра A , негативная алгебра B и $f: B \rightarrow A$, полурешеточный гомоморфизм, сохраняющий наибольший элемент и операцию взятия точной нижней грани, т.е. $f(\perp) = 1$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, $x, y \in B$. Определим j -алгебру $A \times_f B$ следующим образом:

$$|A \times_f B| = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \leq f(y)\},$$

решеточные операции вычисляются покомпонентно, операция импликации задается формулой

$$(x_1, y_1) \supset (x_2, y_2) = ((x_1 \supset x_2) \wedge f(y_1 \supset y_2), y_1 \supset y_2),$$

единичный элемент $1 = (1_A, \perp_B)$, противоречие $\perp = (\perp_A, \perp_B)$. Оказывается, что любая j -алгебра представима в таком виде.

Предложение 1.5. [1] Пусть A – произвольная j -алгебра. Тогда отображение $f: A_\perp \rightarrow A^\perp$, заданное формулой $f(y) = \perp \vee (\perp \supset y)$, является полурешеточным гомоморфизмом, сохраняющим наибольший элемент и операцию взятия точной нижней грани, а отображение $\lambda(x) = (x \vee \perp, x \wedge \perp)$ задает изоморфизм j -алгебр A и $A^\perp \times_f A_\perp$.

Полученное представление j -алгебр позволяет охарактеризовать семантику различных логик из класса **Par**.

Предложение 1.6. [1] Пусть $L1 \in \text{Int}$, $L2 \in \text{Neg}$, A – гейтингова алгебра, B – негативная алгебра и $f: B \rightarrow A$ – полурешеточный гомоморфизм, сохраняющий наибольший элемент и операцию взятия точной нижней грани. Тогда справедливы следующие эквивалентности:

- 1) $A \times_f B \models L1 \cap L2$, если и только если $A \models L1$, $B \models L2$ и $\rho f = \{1\}$, т.е. $A \times_f B$ совпадает с прямым произведением $A \times B$;
- 2) $A \times_f B \models L1 * L2$, если и только если $A \models L1$ и $B \models L2$;
- 3) $A \times_f B \models L1 \cap L2$, если и только если $A \models L1$, $B \models L2$ и $\rho f \subseteq \nabla(A)$, где $\nabla(A)$ обозначает фильтр плотных элементов гейтинговой алгебры A .

2. Негативно эквивалентные логики

Пусть $L1$ и $L2$ – логики, расширяющие L_j . Говорим, что $L1$ и $L2$ *негативно эквивалентны*, пишем $L1 \equiv_{neg} L2$, если для любых множества формул X и формулы φ выполнена следующая эквивалентность: $X \vdash_{L1} \neg\varphi$, если и только если $X \vdash_{L2} \neg\varphi$. Иными словами, логики негативно эквивалентны, если они задают одно и то же негативное отношение выводимости, т.е. отношение выводимости, в котором заключение является негативной формулой.

Как будет видно из следующего предложения, вместо сохранения негативного отношения выводимости можно было бы потребовать сохранения класса противоречивых множеств формул. Однако доказываемая ниже эквивалентность характерна именно для класса логик Jhn , так как в минимальной логике и ее расширениях отрицание определяется через противоречие, а константа $\perp$ может быть определена как отрицание тавтологии. Напомним, что множество формул X *противоречиво* в логике $L \in Jhn$, если $X \vdash_L \perp$.

Предложение 2.1. *Для любых $L1, L2 \in Jhn$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) $L1 \equiv_{neg} L2$;
- 2) *для любого множества формул X X противоречиво в $L1$ в том и только в том случае, если X противоречиво в $L2$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Если $X \vdash_{L1} \perp$, то $X \vdash_{L1} \neg\varphi$ для любой φ . Тогда по условию, $X \vdash_{L2} \neg\varphi$ для любой φ . Возьмем $L2$ -тавтологию ψ , тогда $X \vdash_{L2} \psi, \neg\psi$. Откуда $X \vdash_{L2} \perp$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $X \vdash_{L1} \neg\varphi$, тогда $X \cup \{\varphi\} \vdash_{L1} \perp$.

По условию, $X \cup \{\varphi\} \vdash_{L2} \perp$, следовательно, по теореме дедукции, $X \vdash_{L1} \varphi \supset \perp$, т.е. $X \vdash_{L2} \neg\varphi$.

Предложение доказано.

Условие негативной эквивалентности логик может быть переформулировано следующим образом.

Предложение 2.2. *Логики $L1, L2 \in Jhn$ негативно эквивалентны тогда и только тогда, когда для любой формулы φ выполнено следующее условие:*

$$(L1 \vdash \varphi \Rightarrow L2 \vdash \neg\neg\varphi) \text{ и } (L2 \vdash \varphi \Rightarrow L1 \vdash \neg\neg\varphi).$$

Доказательство. Пусть $L1 \equiv_{neg} L2$. Если $L1 \vdash \varphi$, то $\{\neg\varphi\} \vdash_{L1} \perp$. Следовательно, $\{\neg\varphi\} \vdash_{L2} \perp$, т.е. $L2 \vdash \neg\neg\varphi$.

Теперь предположим, что выполнено второе условие доказываемой эквивалентности. Пусть $X \vdash_{L1} \perp$, т.е. $L1 \vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \supset \perp$ для некоторых $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X$. По условию, $L2 \vdash \neg\neg\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$,

значит, ввиду $L_j \vdash \neg\neg\neg p \equiv \neg p$, получаем $L_2 \vdash \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$. Откуда немедленно следует $X \vdash_{L_2} \perp$.

Предложение доказано.

Предложение 2.3. Пусть $L_1, L_2 \in Jhn$ и справедливо равенство $L_2 = L_1 + \{\varphi_1, \dots, \varphi\}$. Тогда $L_1 \equiv_{neg} L_2$ в том и только в том случае, если $\neg\neg\varphi_1, \dots, \neg\neg\varphi_n \in L_1$.

Доказательство. Рассмотрим только нетривиальную импликацию. Пусть $\neg\neg\varphi_1, \dots, \neg\neg\varphi_n \in L_1$. Возьмём множество формул X такое, что $X \vdash_{L_2} \perp$, тогда $X \cup \{\psi_1, \dots, \psi_k\} \vdash_{L_1} \perp$, т.е. $X \vdash_{L_1} \neg(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k)$, где $\psi_1, \dots, \psi_k$ — подстановочные частные случаи формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. По условию, $L_1 \vdash \neg\neg\psi_1, \dots, \neg\neg\psi_k$. Возьмём произвольную модель $A \models L_1$ и A -оценку v , тогда элементы $v(\psi_1), \dots, v(\psi_k)$ плотны в A^+ . Следовательно, элемент $v(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k)$ также плотен, поэтому $v(\neg(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k)) = \perp_A$.

Пусть формулы $\theta_1, \dots, \theta_m \in X$ таковы, что $L_1 \vdash (\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_m) \supset \neg(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k)$. По доказанному ранее, для любой модели $A \models L_1$ и любой A -оценки v , $v(\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_m) \leq \perp_A$. Следовательно, $L_1 \vdash (\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_m) \supset \perp$, т.е. $X \vdash_{L_1} \perp$.

Предложение доказано.

Замечание. Любые две негативные логики негативно эквивалентны. Это следует из того, что в любой негативной логике любое множество формул является противоречивым, так как противоречие $\perp$ относится к числу логических тавтологий. Любые две промежуточные логики также негативно эквивалентны, что легко следует из предложения 2.2 и теоремы Гливенко. Если формула φ доказуема в логике $L \in Int$, то $L_k \vdash \varphi$. Значит в L_i , а следовательно, и в любой промежуточной логике выводимо двойное отрицание этой формулы $\neg\neg\varphi$. Следовательно, в частности, $L_k \equiv_{neg} L_i$. Хорошо известно, что отрицание в интуиционистской логике не является конструктивным, из выводимости $L_i \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$ не следует, что в L_i выводима одна из формул $\neg\varphi$ или $\neg\psi$. Сделанное выше наблюдение также подчеркивает неконструктивный характер интуиционистского отрицания.

Теперь обсудим такой вопрос. Пусть зафиксированы логики $L_1 \in Int$, $L_2 \in Neg$. Какие логики $L \in Par$, имеющие L_1 и L_2 своими интуиционистским и негативным напарниками, будут негативно эквивалентны L_1 ? Иными словами, до какой степени можно ослабить закон *ex contradictio quodlibet*, сохранив негативную эквивалентность?

Предложение 2.4. Пусть $L_1 \in Int$, $L_2 \in Neg$ и $L \in [L_1 * L_2, L_1 \cap L_2]$. Эквивалентность $L \equiv_{neg} L_1$ справедлива в том и только в том случае, если $G(L_1, L_2) \subseteq L$.

Доказательство. Напомним, что $L1 = L + \{\perp \supset p\}$. По предложению 2.3, $L \equiv_{\text{neg}} L1$ в том и только в том случае, если $L \vdash \neg\neg(\perp \supset p)$. По определению, $G(L1, L2) = L1 * L2 + \{\neg\neg(\perp \supset p)\}$. Тем самым, предложение доказано.

Как видно из предложения 1.4, если $L1 = Lk$, то в интервале $[Lk * L2, Lk \wedge L2]$ существует единственная паранепротиворечивая логика негативно эквивалентная Lk , именно $Lk \wedge L2$. Заметим, что эта логика аксиоматизируется по модулю наименьшей логики рассматриваемого интервала $Lk * L2$ аксиомой $\perp \vee (\perp \supset p)$, имеющей существенно неконструктивный характер. Если же $L1 \neq Lk$, то имеется целый интервал логик, $[G(L1, L2), L1 \wedge L2]$, негативно эквивалентных промежуточным логикам. Если $L1 = Li$ и $L2 = Ln$, то $G(L1, L2) = Lg$. Из семантической характеристики в стиле Крипке логики Гливенко (см. [1]) и хорошо известного семантического критерия для дизъюнктивного свойства (см., например, [4]) легко следует, что логика Гливенко обладает дизъюнктивным свойством.

Предложение 2.5. Для любых формул φ и ψ , если $Lg \vdash \varphi \vee \psi$, то $Lg \vdash \varphi$ или $Lg \vdash \psi$.

Это предложение показывает, что можно отказаться от *ex contradictio quodlibet* с сохранением не только класса противоречивых множеств формул, но и конструктивных свойств интуиционистской логики. Однако дизъюнктивное свойство выполняется не для всех релятивизованных логик Гливенко $G(L1, L2)$. В частности, если $L1 = Lk$, то $G(Lk, L2) \not\vdash \perp \vee (\perp \supset p)$. Если $L1$ не удовлетворяет дизъюнктивному свойству и $\varphi \vee \psi$ — соответствующий контрпример, т.е. $L1 \vdash \varphi \vee \psi$, но φ и ψ не выводимы в $L1$, то формула $I(\varphi \vee \psi)$ ($= I(\varphi) \vee I(\psi)$) будет опровергать дизъюнктивное свойство для логики $G(L1, L2)$: $G(L1, L2) \vdash I(\varphi \vee \psi)$, но формулы $I(\varphi)$ и $I(\psi)$ не выводимы в $G(L1, L2)$. Тем не менее, можно указать достаточно любопытный слабый аналог дизъюнктивного свойства, который выполняется для всех релятивизованных логик Гливенко $G(L1, L2)$ при $L1 \neq Lk$. При поиске этого свойства мы исходили из того, что оно должно выполняться для всех релятивизованных логик Гливенко, без учета конструктивных свойств их интуиционистских напарников. Это должно быть свойство, которое выполняется во всех промежуточных логиках, но становится нетривиальным в паранепротиворечивых логиках. Таким свойством является замкнутость логики относительно правила вывода $(\varphi \vee \perp) / \varphi$, которое, очевидно, может рассматриваться как слабый аналог дизъюнктивного свойства. Любопытно также, что для любой логики $L \in J_{hn}$ замкнутость множества её тавтологий относительно

правила $(\varphi \vee \perp) / \varphi$ эквивалентна замкнутости относительно правила дизъюнктивного силлогизма $\neg\varphi, \varphi \vee \psi / \psi$.

Предложение 2.6. Пусть $L_k \neq L_1 \in \text{Int}$, $L_2 \in \text{Neg}$ и φ — формула. Если $G(L_1, L_2) \vdash \varphi \vee \perp$, то $G(L_1, L_2) \vdash \varphi$.

Доказательство. Пусть $\varphi = \varphi(p_1, \dots, p_n)$, т.е. все пропозициональные переменные формулы φ входят в список $p_1, \dots, p_n$. Предположим, что $G(L_1, L_2) \vdash \varphi \vee \perp$, но неверно, что $G(L_1, L_2) \vdash \varphi$. Откуда следует, в частности, что в L_2 также не выводима формула φ . Значит существует негативная алгебра $\mathbf{B}$ и элементы $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{B}$ такие, что $\mathbf{B} \models L_2$ и $\varphi(b_1, \dots, b_n) \neq \perp$.

По условию $L_k \neq L_1$, следовательно, существует гейтингова алгебра $\mathbf{A}$ такая, что $\mathbf{A} \models L_1$ и $\nabla(\mathbf{A}) \neq \{1\}$. Возьмём элемент $a \in \nabla(\mathbf{A})$, $a \neq 1$, и рассмотрим j -алгебру $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$, где полурешеточный гомоморфизм $f: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ определён следующим образом: $f(\perp) = 1$, $f(x) = a$ при $x \neq \perp$. Тогда для любой пары $(x, y) \in \mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$ имеем $x \leq a$ при $y \neq \perp$. Кроме того, j -алгебра $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$ будет моделью логики $G(L_1, L_2)$, так как $\rho f = \{a, 1\} \subseteq \nabla(\mathbf{A})$. Вычислим значение формулы φ на элементах $(0, b_1), \dots, (0, b_n) \in \mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$. Принимая во внимание, что отображение $(x, y) \rightarrow y$ задает эпиморфизм j -алгебр $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$, имеем равенство $\varphi((0, b_1), \dots, (0, b_n)) = (x, \varphi(b_1, \dots, b_n))$, причем $x \leq a$, так как $\varphi(b_1, \dots, b_n) \neq \perp$. Получаем

$$\varphi((0, b_1), \dots, (0, b_n)) \vee (\perp, \perp) = (x, \perp) \neq (1, \perp),$$

что противоречит предположению $G(L_1, L_2) \vdash \varphi \vee \perp$.

Предложение доказано.

3. Логика противоречий

Определим оператор противоречия $C(\varphi) = \varphi \wedge \neg\varphi$. Распространим его на множества формул следующим образом: $C(\emptyset) = \{\perp\}$; $C(X) = \{C(\varphi) \mid \varphi \in X\}$ для $X \neq \emptyset$. Оператор противоречия тривиален в промежуточных логиках, в присутствии *ex contradictio quodlibet* для любой формулы φ имеем $C(\varphi) \equiv \perp$. Отказываясь от *ex contradictio quodlibet*, мы получаем возможность различать противоречия, образованные с помощью различных формул. В частности, если $L \in \text{Par}$, то $L \vdash C(\varphi) \equiv \perp$ в том и только в том случае, если $\varphi \in L_{\text{neg}}$. Более того, оказывается, что с точки зрения дедуктивных свойств формулы в логике L_{neg} ведут себя в точности так же, как образованные с их помощью противоречия в исходной логике L . Точнее, имеет место факт, доказательство которого представляет собой несложное упражнение на выводимость в минимальной логике.

Предложение 3.1. Пусть $L \in \mathbf{Par}$. Для множества формул X и формулы φ справедлива эквивалентность: в негативном напарнике L_{neg} из X выводима формула φ , если и только если $C(X) \vdash_L C(\varphi)$.

Тем самым, мы доказали, что оператор противоречия определяет сильную трансляцию негативного напарника L_{neg} в паранепротиворечивую логику $L \in \mathbf{Par}$. Это позволяет рассматривать негативный напарник L_{neg} как логику противоречий, ассоциированную с данной паранепротиворечивой логикой L .

ЛИТЕРАТУРА

1. Одинцов С.П. Алгебраическая семантика и семантика Крипке для расширений минимальной логики // Логические исследования (электронный журнал). 1999. No.1.
2. Odintsov S.P. Maximal paraconsistent extension of Johansson logic // *Logique et Analyse. To appear.*
3. Odintsov S.P. Class of extensions of minimal logic // *Submitted to Proceedings of S.Jaskowski Memorial Symposium. Torun, 1998.*
4. Chagrov A., Zakharyashev M. The undecidability of disjunction property of propositional logics and other related problems // *J. of Symb. Logic.* 1999. V.58, No.3. P.967-1003.

СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ АКСИОМАТИЗАЦИЯ КВАЗИМИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ¹

Abstract. *A sequential axiomatization for the set of all formulas which are deducible in Smirnov's quasi-minimal calculus is presented.*

Предлагается секвенциальная аксиоматизация множества всех формул, доказуемых в квазимиинимальном исчислении В.А.Смирнова [1].

Назовем НQ-языком любой первопорядковый язык со стандартным синтаксисом, удовлетворяющий следующим условиям: 1) множество всех индивидных переменных этого языка есть объединение двух счетно-бесконечных непересекающихся множеств – множества всех связанных индивидных переменных этого языка и множества всех свободных индивидных переменных этого языка, 2) множеству всех логических символов этого языка принадлежат в точности следующие символы: $\forall$ и $\exists$ (кванторы), $\&$, $\vee$, $\supset$ (двуместные логические связи), $\neg$ (одноместная логическая связь), f (нульместная логическая связь).

В дальнейшем пусть L – фиксированный НQ-язык. Буквы A , B и C условимся использовать как переменные для формул языка L , буквы Γ , Δ , Σ и Θ – как переменные для конечных (включая пустую) последовательностей формул языка L , букву x – как переменную для связанных индивидных переменных языка L , букву w – как переменную для свободных переменных языка L , букву t – как переменную для термов языка L , а запись F_t^w – как обозначение операции правильной подстановки в формулу языка L терма t вместо свободной индивидной переменной w (в частности, F_x^w обозначает операцию правильной подстановки в формулу языка L связанной индивидной переменной x вместо свободной индивидной переменной w), условимся также называть формулы языка L просто формулами и примем обычные соглашения об опускании скобок в формулах.

Исчисление HQ^2 над L , являющееся исчислением гильбертовского типа, определим, следуя [1]. Аксиомные схемы исчисления HQ есть в точности следующие схемы формул:

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 99-03-19706.

² Поскольку язык L , в котором строятся формулы этого исчисления, зафиксирован, указание на L в аббревиатуре этого исчисления отсутствует.

1. $A \supset A$,
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$,
3. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$,
4. $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$,
5. $A \& B \supset A$,
6. $A \& B \supset B$,
7. $((C \supset A) \& (C \supset B)) \supset (C \supset (A \& B))$,
8. $A \supset A \vee B$,
9. $B \supset A \vee B$,
10. $(A \supset C) \& (B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)$,
11. $\neg A \supset (A \supset f)$,
12. $(A \supset f) \supset \neg A$,
13. $\forall x F_x^w A \supset F_t^w A$,
14. $\forall x F_x^w (C \supset A) \supset (C \supset \forall x F_x^w A)$ (в этой схеме формула C не содержит вхождений w),
15. $F_t^w A \supset \exists x F_x^w A$,
16. $\forall x F_x^w (A \supset C) \supset (\exists x F_x^w A \supset C)$ (в этой схеме формула C не содержит вхождений w),
17. $(A \supset B) \supset (C \supset (A \supset B))$,
18. $((A \supset B) \supset A) \supset A$.

Правила вывода исчисления HQ есть в точности следующие три правила:

$$\frac{A, A \supset B}{B}, \quad \frac{A}{\forall x F_x^w A}, \quad \frac{A, B}{A \& B}$$

Доказательства в HQ строятся стандартно. Заметим, что исчисление HQ является исчислением с зависимой системой аксиомных схем: можно доказать, используя результаты работы [2], что для любой доказуемой в HQ формулы существует ее доказательство в исчислении, получающееся из HQ «отбрасыванием» двух аксиомных схем 4 и 17.

Определим теперь секвенциальное исчисление GQ^3 над L . Основными секвенциями этого исчисления являются все те и только те секвенции, каждая из которых имеет следующий вид: $A \rightarrow A$. Правила вывода (фигуры заключения) исчисления GQ есть в точности следующие правила:

³ См. сноску 2.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \rightarrow \Theta}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Delta, B, A, \Theta}, \quad \frac{A, A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta},$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A},$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, A}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad B, \Sigma \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta},$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B},$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Theta}, \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{B \& A, \Gamma \rightarrow \Theta}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \& B},$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, B \vee A}, \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta \quad B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta},$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta, f}, \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, f}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg A},$$

$$\frac{F_t^w A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\forall x F_x^w A, \Gamma \rightarrow \Theta}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, F_t^w A}{\Gamma \rightarrow \Theta, \exists x F_x^w A},$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, \forall x F_x^w A}, \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\exists x F_x^w A, \Gamma \rightarrow \Theta}$$

(в формулировках двух последних правил w не входит в нижнюю секвенцию).

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad A, \Sigma \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta} \text{ (правило сечения).}$$

Доказательства в GQ строятся обычным для секвенциальных исчислений образом.

Доказаны следующие теоремы 1 и 2.

Теорема 1 (об устранимости сечения для исчисления GQ). *Для всякой доказуемой в GQ секвенции существует такое её доказа-*

тельство в этом исчислении, которое не содержит применений правила сечения.

Теорема 2 (об аксиоматизации квазимиимальной логики посредством исчисления GQ). *Формула A доказуема в HQ т.т.т. секвенция $\rightarrow A$ доказуема в GQ.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.А. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
2. Попов В.М. Два замечания и один вопрос относительно аксиоматизации импликативных логик // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993.

CLASSICAL MULTIPLICATIVE LINEAR LOGIC $\simeq$ INTUITIONISTIC MLL

Abstract. *It is known how to present every deduction in the $\{!, I\}$ -free Classical Multiplicative Linear Logic as (the result of an obvious translation of) a deduction in the intuitionistic MLL. We extend the result to the language with I and give short proofs which do not use proof nets.*

1. Introduction

One of the most important computational interpretations of logical proofs uses intuitionistic logic and Curry-Howard isomorphism between natural deduction and lambda terms. One of the goals of linear logic [2] was to provide an improved proof-theoretic model of computation which ensures uniqueness of the normal form of a derivation by means of a new formalism of *proof nets*, which works even for classical linear logic and provides a lot of symmetry. More traditional computational interpretation uses intuitionistic linear logic (cf. [3]) which admits a form of Curry-Howard isomorphism [7]. The results in the literature [10, 1] show how to present every deduction in the $\{!, I\}$ -free Classical Multiplicative Linear Logic as (the result of an obvious translation of) a deduction in the intuitionistic MLL. We extend the result to the language with I and give short proofs which do not use proof nets.

Let us remind that the most important applications of linear logic in algebra depend on the language of MLL with the constant I , cf. [5, 6, 8].

Formulas of the $!$ -free Classical Multiplicative Linear Logic CMLL are constructed from literals (propositional variables $p, q, p', \dots$, constant I and their negations $\bar{p}, \bar{I}$) by the tensor product $\otimes$ and *par* connective $\wp$. Derivable objects of CMLL are *sequents*, i.e. multisets of formulas. CMLL is axiomatized as follows.

Axioms $\bar{p}, p \quad \bar{I}, \dots, \bar{I}, \bar{p}, p, \quad I$

Inference rules

$$\otimes \quad \frac{\Gamma, A \quad \Delta, B}{\Gamma, \Delta, A \otimes B} \qquad \wp \quad \frac{\Gamma, A, B}{\Gamma, A \wp B}$$

Formulas of the Intuitionistic Multiplicative Linear Logic IMLL are constructed from propositional variables and constant I by linear implication $\multimap$ and tensor product $\otimes$. Derivable objects of IMLL are

sequents $\Gamma \Rightarrow A$, where Γ is a multiset of formulas and A is a formula. IMLL is axiomatized as follows.

Axioms $p \Rightarrow p$ $I, \dots, I, p \Rightarrow p, \quad \Rightarrow I$

Inference rules

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B \Rightarrow C}{A \multimap B, \Gamma, \Delta \Rightarrow C} \\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B} \qquad \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow C} \end{array}$$

We prove (Theorem 2 below) that every deduction in the classical MLL is (the result of an obvious translation of) a deduction in the intuitionistic MLL up to natural isomorphisms

$$p \otimes I \simeq p \qquad I \simeq \bar{I} \wp I \qquad (1)$$

and *involution*, i.e. interchanging p and $\bar{p}$ for some variables p . This suggests using ordinary lambda-terms to describe CMLL since Curry-Howard isomorphism holds for usual typed lambda-terms and IMLL [7]. Our translation from CMLL into IMLL has an inverse $*$ described in the section 3. Both of them completely preserve the structure of the derivation tree. This shows that every derivation in CMLL is essentially a derivation in IMLL. Moreover, one can fix the goal formula in an arbitrary way. This constitutes one of the differences with the negative translation of the traditional classical propositional logic into intuitionistic logic. The negative translation adds new negations with the corresponding antecedent and succedent rules and levels down important distinctions in the original formula.

This paper incorporates some suggestions of the referee of a previous version.

2. Reduction of CMLL to the balanced I-free fragment

A formula or sequent is *balanced* if each propositional variable occurs there exactly twice, once positively, once negatively. An *instance* of a formula or derivation is a result of substituting some propositional variables by formulas. *I-instance* is obtained when all these formulas are just I . The following well-known proposition (cf. [5]) provides a reduction to balanced sequents.

Lemma 1 *Every derivation d in CMLL is an instance of a derivation of a balanced sequent.*

Proof. Every occurrence of a propositional variable in the last sequent of d is traceable to a unique occurrence in a unique axiom of d . Replace

occurrences traceable to different occurrences of axioms by distinct variables. $\square$

Note. $p \rightarrow p \& p$ is a counterexample for additive linear logic and the classical propositional calculus.

The next reduction eliminates multiplicative constants.

Lemma 2 *Every derivation in CMLL is an I-instance of an I-free derivation of a balanced sequent up to transformations.*

Proof. Consider given derivation $d: \Gamma$ of a balanced sequent Γ in CMLL. Every occurrence of I in Γ is traceable to a unique occurrence of I in an axiom. If it comes from one of the first occurrences of $\bar{I}$ in an axiom $\bar{I}, \dots, \bar{I}, \bar{p}, p$, replace these occurrences of $\bar{I}$ by $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$ and the last p by $p \otimes q_1 \dots \otimes q_n$ for distinct fresh variables $q_1, \dots, q_n$ (and make the same replacement for all occurrences traceable to these). If it is one of the last two occurrences in $\bar{I}, \dots, \bar{I}, \bar{I}, I$ or in $\bar{I}, I$, replace both occurrences by a fresh variable q . If it is an occurrence in an axiom I , replace it by $q \wp p$ for a fresh q . $\square$

3. Derivations of IMLL-sequents

Consider the standard translation of IMLL into CMLL:

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta)^* := \bar{\Gamma}, \bar{\Delta}$$

where

$$A \otimes B := A \wp B; A \multimap B := A \otimes B; A := A; A \wp B := A \otimes B$$

and induced translation of derivations. Double negation over Δ is inserted to replace the linear implication $A \multimap B$ by $\bar{A} \wp B$. As a warm-up consider the case when involution is not needed. Note that Δ below is allowed to contain arbitrary many formulas.

Theorem 1 *If Γ, Δ are multisets of formulas of IMLL and $d: (\Gamma \Rightarrow \Delta)^*$ is a derivation in CMLL, then Δ consists of one formula and $d \equiv^* e$ for some $e: \Gamma \Rightarrow \Delta$ in IMLL.*

Proof. Induction on d . If d is an axiom $\bar{p}, p$ or $\bar{I}, \bar{p}, p$ then $\Delta \equiv p$ and e is $p \Rightarrow p$ or $I, p \Rightarrow p$. If $last rule(d) = \otimes$ then

$$\frac{\bar{\Gamma}_1, \Delta_1', A \quad \bar{\Gamma}_2, \Delta_2', B}{d: \bar{\Gamma}, \Delta', A \otimes B} \quad \text{or} \quad \frac{\bar{\Gamma}_1, \Delta_1, A \quad \bar{B}, \bar{\Gamma}_2, \Delta_2}{d: A \otimes \bar{B}, \bar{\Gamma}, \Delta}$$

In the first case $\Delta_1' \equiv \Delta_2' \equiv \emptyset$ by the induction hypothesis (IH), and one has $e: \Gamma \Rightarrow A \otimes B$. In the second case $\Delta_1 \equiv \emptyset$ and $\Delta_1 \equiv \Delta$ consists of one formula, so that $e: A \multimap B, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow B}{e: \Gamma \Rightarrow A \otimes B} \quad \text{or} \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2, B \Rightarrow \Delta}{e: A \multimap B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Finally, if the *lastrule*(d) = $\wp$, one has:

$$\frac{\bar{\Gamma}, \Delta, \bar{A}, B}{d: \bar{\Gamma}, \Delta, \bar{A} \wp B} \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{e: \Gamma \Rightarrow A \multimap B}$$

since $\Delta_1 \equiv \emptyset$, or

$$\frac{\bar{A}, \bar{B}, \bar{\Gamma}, \Delta}{d: \bar{A} \wp \bar{B}, \bar{\Gamma}, \Delta} \quad \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{e: A \otimes B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

□

4. General case

Theorem 2 *For every balanced I-free sequent of CMLL and its derivation $d: \Sigma, C$ in CMLL there are formulas (intuitionistic translations) Σ_1, C_1 in IMLL, an involution ι and a deduction $e: \Sigma_1 \Rightarrow C_1$ in IMLL (all depending of the choice of C) such that $d \equiv e^{\iota}$.*

Proof. Induction on d . The case $d \equiv p, \bar{p}$ is obvious. Consider subcases depending of the *lastrule*(d) and a position of C . Let *lastrule*(d) = $\otimes$ and C is the principal formula:

$$\frac{f: \Gamma, A \quad g: \Delta, B}{d: \Gamma, \Delta, A \otimes B}$$

Then by IH there are $f_1: \Gamma_1 \Rightarrow A_1$, $g_1: \Delta_1 \Rightarrow B_1$ and involutions ι', ι'' such that $f \equiv f_1^{\iota'}$, $g \equiv g_1^{\iota''}$. Note that propositional variables in the premises are distinct, and define: $\iota := \iota' \cup \iota''$,

$$\frac{f_1: \Gamma_1 \Rightarrow A_1 \quad g_1: \Delta_1 \Rightarrow B_1}{e: \Gamma_1, \Delta_1 \Rightarrow A_1 \otimes B_1}$$

Remaining cases are similar.

$$\frac{\Gamma, A, C \quad \Delta, B}{d: \Gamma, \Delta, A \otimes B, C} \quad \frac{\Gamma_1, \bar{A}_1 \Rightarrow C_1 \quad \Delta_1 \Rightarrow B_1}{e: \Gamma_1, \Delta_1, B_1 \multimap \bar{A}_1 \Rightarrow C_1}$$

$$\frac{\Gamma, A, B}{d: \Gamma, A \wp B} \quad \frac{\Gamma_1, \bar{A}_1 \Rightarrow B_1}{e: \Gamma_1 \Rightarrow \bar{A}_1 \multimap B_1} \quad \text{or} \quad \frac{\Gamma_1, \bar{B}_1 \Rightarrow A_1}{e: \Gamma_1 \Rightarrow \bar{B}_1 \multimap A_1}$$

In this case one can choose arbitrarily between two possible "witchings" of $A \wp B$.

$$\frac{\Gamma, A, B, C}{d: \Gamma, A \wp B, C} \qquad \frac{\Gamma_1, \bar{A}_1, \bar{B}_1 \Rightarrow C_1}{e: \Gamma, \bar{A}_1 \otimes \bar{B}_1 \Rightarrow C_1}$$

□

Conclusion

Let us sum up.

For every derivation $d: C$ in CMLL one has a derivation $Int(d): \Rightarrow C_1$ in IMLL and an involution ι such that $d \simeq (Int(d))^* \iota \theta$ and $C \simeq C_1^* \iota \theta$ for some substitution θ .

Moreover, for I-free balanced formula C the derivation $Int(d)$ depends only of C .

REFERENCES

1. Bellin G., Scott P.J. On the π -calculus and linear logic // Theoretical Computer Science. 1994. 135. 11-65.
2. Girard J.-Y. Linear Logic // Theoretical Computer Science. 1987. 50. 1-102.
3. Girard J.-Y., Lafont J. Linear Logic and Lazy Computation // Proc. TAPSOFT'87. Springer Lecture Notes in Computer Science 250. 1987. P. 52-66.
4. Kelly G., MacLane S. Coherence in closed categories // J. of Pure and Appl. Algebra. 1971. Vol.1. N 1. P.97-140.
5. MacLane S. Topology and logic as a source of algebra // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. 82. N 1. P.1-40.
6. MacLane S. Why commutative diagrams coincide with equivalent proofs // Contemporary Mathematics. 1982. Vol. 13. P. 387-401. American Mathematical Society, Providence.
7. Mints G. Linear Lambda-terms and natural deduction // Studia Logica. 1998. 60. P. 209-231.
8. Mints G. Closed Categories and the Theory of Proofs // Selected Papers in Proof Theory. 1992. P. 183-212. Bibliopolis and North-Holland [Russian Original published in 1977]
9. Prawitz D. Ideas and Results in Proof Theory // Proc. 2-nd Scand. Logic Symp. North-Holland, 1972. P. 235-308.
10. Schellinx H. Some syntactical observations on linear logic // J. Logic and Computation. 1. 1991. P. 537-559.

СИНОПСИС ТЕОРИИ ФРОНТОНОВ

Abstract. *We describe an augmentation of Intuitionistic propositional Logic by a modal operator admitting provability interpretation (Box-as-Proof modality). We do not intend to give a systematic survey, but were a short selection of attractive (algebraic, relational, topological and categorical) features of the modalized Heyting Calculus. We discuss also an enrichment of the Heyting Calculus by temporal modalities Always and Before, extending the expressive power of the Calculus.*

К сожалению, автору не удалось избежать эскизности изложения, в силу чего нижеследующий текст воспринимается как синопсис. Кроме того, заранее следует признаться, что представленный материал может быть, не без основания, признан не более чем «дифирамбом» двум специальным системам интуиционистской модальной логики.

Нам представляется, что настоящим интуиционистским «компаньоном» классической модальной системы $K4$ является исчисление Гейтинга HC , обогащенное модальным оператором $\Box$, удовлетворяющим следующим аксиомам:

- (a) $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$;
- (b) $p \rightarrow \Box p$;
- (c) $\Box p \rightarrow (q \vee (q \rightarrow p))$.

Полученное исчисление мы будем называть *модализованным исчислением Гейтинга mHC* и склонны считать базисной интуиционистской модальной логикой, по крайней мере, для исследований доказуемостной направленности. Постулирование формулы

- (d) $(\Box p \rightarrow p) \rightarrow p$ («принцип Леба»)

в качестве дополнительной аксиомы приводит к известной *доказуемостно-интуиционистской* логике Кузнецова-Муравицкого (KM) (см. [1],[2]), в которой модальность $\Box$, являясь «посланцем» классики, выражает предикат доказуемости классической (не интуиционистской!) арифметики Пеано. Заметим, что почти во всех известных автору «стандартных» интуиционистских модальных системах постулат (c) не встречается; постулат (b) – не типичен, а постулат (d) еще более оттеняет «нестандартность» выбранной базисной системы mHC и ее расширения KM , что позволяет провести условную «демаркационную линию» между mHC и стандартными интуиционистскими модальными логиками. Здесь

же уместно вспомнить, что аксиомы классической модальной системы $K4$ (и тем самым ее интуиционистского компаньона mHC) «выражают» при доказуемой интерпретации модальности $\Box$ известные условия Гильберта–Бернайса для предиката доказуемости, а дополнительное постулирование принципа Леба

$$\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$$

дает нам классическую систему доказуемой логики Геделя–Леба GL , имеющую (как, впрочем, и KM) адекватную арифметическую интерпретацию [3].

Отметим также замечательный изоморфизм между решетками расширений логики KM и расширений системы GL , установленный Кузнецовым и Муравицким. Это важное соответствие между KM и GL «проходит» через модальную систему Гжегорчика Grz , которую можно считать модернизацией соответствующих «классических» систем $S4$ и $K4$, полученной применением современной версии аристотелевского Принципа Абсолюта (здесь же отметим, что подробная информация об этих модальных системах, включающая как синтаксические, так и семантические аспекты, в частности упоминаемое ниже понятие дескриптивного фрейма, содержится в обширном руководстве [4]). Как известно, при семантическом рассмотрении систем Grz и GL (причислим к ним и KM) решающую роль в моделях Крипке играют максимальные (привилегированные «абсолютные») точки. Здесь мы с удовольствием процитируем замечательного голландского ученого Эверета Бета [5]. На странице 9, под рубрикой «Аристотелевский Принцип Абсолюта», Бет пишет:

«A considerable number of arguments in speculative philosophy are based on a certain principle, which is, in most cases, tacitly assumed. This principle has been applied with remarkable virtuosity by Aristotle, and will be called the Principle of the Absolute. It can be stated as follows: Suppose we have entities u and v , and let u have to v the relation F ; then there is an entity f , which has the following property: for any entity x which is distinct from f , we have (I) x has the relation F to f , and (II) f has not the relation F to x . The entity f will be called the absolute entity corresponding to the relation F ».

Несколькими строками ниже приведены типичные применения этого принципа:

«(1) Let $F(x, y)$ be the phrase: x takes its origin from y ; then f will be the principle ($\alpha\rho\chi\eta'$) in the sense of pre-Socratic philosophy. (2) Let $F(x, y)$ be the phrase: x is moved by y ; then f will be the Prime Mover in the sense of Aristotle. (3) Let $F(x, y)$ be the

phrase: *x is desired for the sake of y*; then *f* will be the *summum bonum* in the sense of Aristotle».

Несколько ниже (стр.12) Бет замечает:

«It is interesting to note that Plato's Theory of Ideas can be derived from the Principle of the Absolute»

и, наконец (стр.14):

«Modern logic has no difficulty in showing that Plato's Principle of the Idea, if handled adequately, does not, intrinsically, give rise to any logical difficulties. As a matter of fact, the (weak) ε – axiom which was introduced by Hilbert can be interpreted as a new version of this principle».

Вспомним, что если $A(x)$ формула со свободной переменной x , то $\varepsilon_x A$ «изображает привилегированный объект, обладающий этим свойством; в противном случае $\varepsilon_x A$ изображает предмет, о котором ничего нельзя сказать» [6, стр. 36].

Если мы хотим «сохранить» соответствие (см. выше) между доказуемостными системами KM , Grz , GL и на предикатном уровне, то нам придется ввести некоторую поправку к обычному исчислению предикатов Гейтинга QHC , а именно *модифицированное* интуиционистское исчисление Q^+HC [7] получается из обычного QHC постулированием следующей усиленной версии правила обобщения:

$$(+) \vdash (p(a) \rightarrow \forall x p(x)) \rightarrow p(a) / \vdash \forall x p(x),$$

Для оправдания этой поправки воспользуемся, следуя Бету, современной версией Принципа Абсолюта. Заметим, что стандартное правило обобщения

$$\vdash p(a) / \vdash \forall x p(x)$$

позволяет нам получить универсальное утверждение $\forall x p(x)$, коль скоро установлено $p(a)$ для произвольного (но привилегированного?) объекта (=Arbitrary Object, см. [8]). Мы «слегка» ослабляем посылку правила $p(a)$, заменяя ее на (классически равносильную ей) формулу

$$(p(a) \rightarrow \forall x p(x)) \rightarrow p(a)$$

наделяя тем самым объект a некоторыми чертами «абсолюта» или, в нашем случае, «пандемичности»: коль скоро объект a обретет свойство p , наступает «пандемия» и все объекты обретают то же свойство. Заметим, что при переходе к стандартному кванторному расширению QKM доказуемостно-интуиционистской логики KM нам приходится считаться с поправкой (+), поскольку, как нетрудно убедиться, она становится производным правилом в QKM (как, впрочем, и в ее «безмодальном», чисто интуиционистском фрагменте). «Спустимся», однако, на пропози-

циональный уровень к нашим «нестандартным» системам интуиционистской модальной логики.

Нам представляется, что модализированное исчисление Гейтинга mHC (и в не меньшей степени KM) интересно не только с точки зрения доказуемости интерпретации, но и своими связями с

-) «интуиционистской» прототетикой Лесневского;
-) топологией: разреженные пространства Кантора, понятия предельной и изолированной точек;
-) категорной логикой: топосы, классификатор (= объект истинностных значений) которых (внутренне образуя алгебру Гейтинга), как выясняется, всегда снабжен модальностью $\Box$ mHC – типа;
-) интуиционистской темпоральной логикой «Always & Before», обладающей богатыми выразительными средствами;
-) некоторыми аспектами гёделева погружения интуиционистской логики в классическую модальную логику и ее «обращения», так называемой FF (= Flagg-Friedman) – трансляцией;
-) понятием «новизны» связок в интуиционистской логике в смысле Новикова.

Хочется надеется, что комментарии к этим пунктам (хотя и эскизные) позволят ощутить привлекательность и полезность такого «нестандартного» варианта интуиционистской модальной логики.

Вспомним, что *расширенное* пропозициональное исчисление Рассела (см. [9, § 28]) допускает помимо средств обычного классического пропозиционального исчисления квантификацию по пропозициональным переменным. Интуиционистская версия этого исчисления, именуемая пропозициональным исчислением Гейтинга II порядка H^2C (впрочем, как и интуиционистская версия Прототетики Лесневского), была предметом пристального рассмотрения, начиная с 50-х годов (Schütte-50, Löb-76, Prawitz-70, Gabbay-74, Sobolev-77, Kreisel-81, Troelstra-81, etc) вплоть до наших дней (Pitts-92, Kramer-97, Skvortsov-97, Polacik-98). Ввиду определимости модального оператора $\Box$ системы mHC средствами H^2C (и, тем более, интуиционистской Прототетики) можно отождествить наше исчисление Гейтинга mHC с определенным *фрагментом* исчисления Гейтинга II порядка и, следовательно, воспринимать модальность $\Box$ как оператор, «внутренне» присущий интуиционистскому исчислению.

Алгебраические и топологические модели

Определение 1. Алгебру Гейтинга H , снабженную мультипликативным оператором $\Box$, подчиненным условиям:

- (1) $p \leq \Box p$;
- (2) $\Box p \leq q \vee (q \rightarrow p) \quad (p, q \in H)$,

назовем *топологической алгеброй Гейтинга* (или, ради краткости, *префронтон*ом); класс префронтон $ов$ tHA образует алгебраическую семантику исчисления mHC . Подмногообразие фронтон $ов$ FR , выделяемое «тождеством Лёба»:

$$\Box p \rightarrow p \leq p,$$

соответствует доказуемостно-интуиционистскому исчислению KM . Здесь же отметим, что исчисление KM финитно-аппроксимируемо [10] и допускает секвенциальную формулировку без правила сечения [11]. Из предложенной в работе [12] формулировки систем mHC и KM в виде исчислений таблиц Бета (= Tableau Calculus) следует их разрешимость и свойство древовидности моделей.

Вспомним, что топологическое пространство X является $T_{1/2}$ -пространством, если любая его точка x (точнее, синглетон $\{x\}$) является пересечением подходящих открытого и замкнутого множеств.

Пусть X $T_{1/2}$ -пространство, тогда алгебра Гейтинга всех его открытых множеств $H(X)$ с оператором $\Box$, дуальным к операции, сопоставляющей множеству A множество $\lim A$ всех его предельных точек, образует топологическую алгебру Гейтинга; заметим, что этот пример типичен: каждая топологическая алгебра Гейтинга вложима в такую алгебру Гейтинга $H(X)$ для подходящего $T_{1/2}$ -пространства X .

Пространство X называется *разреженным* (Кантор), если оно не имеет непустых плотных подмножеств; известно, что каждый ординал является разреженным пространством в своей внутренней, интервальной топологии. Топологическая алгебра Гейтинга над пространством X является фронтон $ом$, если и только если пространство X *разрежено*; особо отметим, что фронтон $H(\alpha)$ над любым ординалом α ($\omega^\omega \leq \alpha$) является адекватной алгебраической моделью исчисления KM .

В произвольном топосе (т.е. в категорном универсуме интуиционистской математики) классификатор (= объект истинностных значений) Ω , внутренне образуя алгебру Гейтинга, является предфронтон $ом$, что позволяет интерпретировать в топосе, кроме обычных интуиционистских связок и кванторов, также и *модальный оператор* $\Box$. Топосы, классификатор которых является фронтон $ом$

тоном, так называемые *разреженные топосы* [13], являются категорными моделями кванторного расширения *QKM* доказуемо-отно-интуиционистской логики *KM*.

Вернемся к многообразию префронтонів *tHA*. Скажем, что переменная p , входящая в полином f , *боксирована*, если все вхождения переменной p в f находятся в сфере действия оператора $\Box$. Пусть $(H, \vee, \wedge, \rightarrow, \perp, \Box)$ – префронтон и $f(p)$ – полином, содержащий переменную p ; скажем, как обычно, что полином обладает *неподвижной точкой*, если найдется элемент $a \in H$ такой, что $f(a) = a$. Важную характеристику фронтонів выражает **Утверждение 1**. Префронтон $(H, \Box)$ является фронтонем, если и только если каждый *боксированный* полином обладает неподвижной точкой в H .

Нетрудно убедиться, что любая алгебра Гейтинга H может быть «превращена» в префронтон: снабдим алгебру H тривиальным оператором $\Box$, положив $\Box a = 1$ для любого $a \in H$. Однако иначе обстоит дело с фронтонями!

Скажем, что алгебра Гейтинга H является *фронтальной*, если существует оператор $\Box: H \rightarrow H$ такой, что $(H, \Box)$ – фронтон.

Для любого элемента a алгебры Гейтинга H рассмотрим семейство $F_a = \{b \in H : b \rightarrow a \leq b\}$; несложно убедиться, что F_a образует фильтр алгебры H . Внутреннюю характеристику фронтонів выражает

Утверждение 2. Алгебра Гейтинга H является фронтонем, если и только если каждый фильтр F_a ($a \in H$) – главный.

Все конечные алгебры Гейтинга, все алгебры Гейтинга над фундированными фреймами Крипке, все топологические алгебры Гейтинга, полученные из разреженных пространств (и, следовательно, из ординалов!) являются фронтальными. Однако существуют и *не фронтальные* алгебры! Заметим, что хотя лестница Ригера-Нишимуры (= свободная циклическая алгебра Гейтинга) является фронтальной (каждый фильтр F_a – главный), существуют свободные, конечно-порожденные *не-фронтальные* алгебры Гейтинга. Тем не менее *каждая* промежуточная (= суперинтуиционистская) логика характеризуется своими фронтальными алгебрами. Точнее, алгебраическая переформулировка замечательного результата Кузнецова [1] лежит в основе

Утверждения 3. Каждое многообразие алгебр Гейтинга порождается своими фронтальными алгебрами.

Пользуюсь случаем выразить благодарность моему коллеге и другу, профессору Алексею Муравицкому за «электронные» дискусии на эту тему.

Реляционная семантика - транзиты

Фрейм Крипке $(W, <)$ назовем *транзитом*, если отношение $<$ является

(а) транзитивным и

(b) его рефлексивное замыкание $\leq$ (т.е. $x \leq y \Leftrightarrow x = y$ или $x < y$) является частичным порядком.

Таким образом, любой транзит «автоматически» порождает обычный интуиционистский фрейм Крипке $(W, \leq)$, причем отношение достижимости $<$ отличается от $\leq$ лишь отсутствием рефлексивных «петель» в некоторых точках множества W . В определении форсинга $\models$ отметим два характерных случая:

$$\begin{aligned} x \models p \rightarrow q & \text{ iff } (\forall y)(x \leq y \ \& \ y \vdash p \Rightarrow y \models q); \\ x \models \Box p & \text{ iff } (\forall y)(x < y \Rightarrow y \models p). \end{aligned}$$

Модифицированное исчисление Гейтинга *mHC* характеризуется классом транзитов (и даже классом *иррефлексивных* транзитов, т.е. таких, в которых отношение $<$ – иррефлексивно). Доказуемостно-интуиционистская логика *KM* дополнительно требует *фундированности* транзитов (т.е. обрыва возрастающих цепей).

Пусть $(W, <)$ – транзит, A – произвольный конус (т.е. $x \in A$ и $x \leq y$ влекут $y \in A$); действие модального оператора $\Box$ на A может быть описано следующим образом:

$$\Box A = A \cup \max(W - A),$$

где знак « $-$ » обозначает теоретико-множественную операцию разности двух множеств, а $\max B$ обозначает множество всех *максимальных точек* множества B , т.е. $x \in \max B$, если не существует точки $y \in B$ такой, что $x < y$.

Таким образом, каждому конусу A оператор $\Box$ «пристраивает» в качестве «архитектурного» фронтона множество максимальных точек его дополнения. Такое «поведение» модального оператора инспирировало нашу «фронтальную» терминологию.

Заметим, что в фундированных транзитах для любого собственного конуса A множество $\max(W - A)$ не пусто и $\Box A$ является «законченным» (не частичным) фронтоном конуса A .

Несколько слов о канонических (= дескриптивных) фреймах. Пусть $(H, \Box)$ – произвольный префронтон, а $(W, \subseteq)$ – дескриптивный фрейм алгебры Гейтинга H , т.е. W – множество всех простых фильтров алгебры H , упорядоченное отношением включения $\subseteq$. Опираясь на аксиомы *mHC*, несложно убедиться, что дополнительное отношение $<$, индуцированное на W модальным оператором $\Box$, а именно отношение

$$x < y \Leftrightarrow (\forall p \in H)(\Box p \in x \Rightarrow p \in y)$$

удовлетворяет следующим условиям:

- (1) Если $x < y$, то $x \subseteq y$ и
- (2) Если $x \subset y$ (т.е. $x \subseteq y$ и $x \neq y$), то $x < y$,
- (3) Рефлексивное замыкание отношения $<$ совпадает с отношением включения $\subseteq$.

Таким образом, в канонических фреймах «модальное» отношение достижимости $<$ получается из отношения включения $\subseteq$ удалением петель с некоторых точек из W .

Темпоральная интуиционистская логика

Будем считать, как обычно, что оператор $\Diamond$ на решетке Гейтинга H сопряжен с оператором $\Box$, если для любых элементов $a, b \in H$:

$$\Diamond a \leq b \Leftrightarrow a \leq \Box b$$

и заметим, что существование сопряженного влечет его единственность. Примем следующее

Определение 2. Алгебру Гейтинга $(H, \Box, \Diamond)$, снабженную операторами $\Box, \Diamond$, назовем *завершенным* префронтом, если $(H, \Box)$ – префронтон и оператор $\Diamond$ сопряжен с $\Box$.

В соответствующих обогащенных исчислениях (позначим их звездочками: mHC^* и KM^*) сопряженные операторы $\Box$ («Always») и $\Diamond$ («Before») имеют явный «привкус» темпоральных (временных) связей. Скажем, при «темпоральном прочтении» семантики Крипке $(W, <, \models)$ определение форсинга $\models$ выглядит следующим образом:

(1) $x \models \Box p$ iff $(\forall y)(x < y \Rightarrow y \models p)$, т.е. в дальнейшем всегда будет p (*Always(p)*); для сопряженного оператора имеем:

(2) $x \models \Diamond p$ iff $(\exists y)(y < x \ \& \ y \models p)$, т.е. уже имеется прецедент p (*Before(p)*).

Темпоральное обогащение mHC^* системы mHC , являющееся некоторой разновидностью интуиционистской временной логики, характеризуется древовидными моделями Крипке и, тем самым, исчисление mHC^* (впрочем, как и KM^*) обладает *свойством древовидности* (=«the tree model property»); воспользуемся цитатой:

«Q: But why do you say that the tree model property is more important than the finite model property?

A: The tree model gives us powerful tools for proving decidability results and for constructing efficient decision procedure» [14, p. 96].

В связи с компьютерными применениями классических темпоральных логик с операторами, отсылающими к «прошлому»,

отметим работу [15], в которой подчеркнута богатство выразительных средств таких логических систем. Мы же ограничимся несколькими замечаниями. В исчислениях mHC^* и KM^* выразимы некоторые полезные свойства как самих точек (стадий) семантики Крипке, так и глобальные свойства, связанные, например, с «пропозициональной» выразительностью в этих исчислениях принципа *возвратной индукции* в варианте «метода бесконечного спуска» [16, стр. 175]:

$$\vdash p \rightarrow \Diamond p / \vdash \neg p.$$

Точка $x \in W$ дескриптивной модели Крипке $(W, <, \models)$ называется *p-критической*, если на стадии x формула p не форсируется, однако $(\forall y)(x < y \Rightarrow y \models p)$; скажем, что точка x (= простой фильтр или, если угодно, простая интуиционистская теория) является *критической*, если она *p-критическая* для некоторой пропозициональной формулы p .

«Сопряженным» свойством является свойство *креативности* [17]. Скажем, что точка $x \in W$ *p-креативна*, если $x \models p$, однако ни на какой более ранней стадии y (т.е. $y < x$) формула p не форсировалась. Таким образом, точка x -креативна, если на стадии x был установлен по крайней мере один новый факт. В терминах сопряженной модальности $\Diamond$ это выражается следующим образом: точка x -креативна, если на стадии x не только установлена некоторая формула p (т.е. $x \models p$), но и обнаружена ее *беспрецедентность* (т.е. неверно, что $x \models \Diamond p$).

В общем случае, не все точки модели являются критическими или креативными. Так, например, креативность линейно упорядоченной модели влечет ее вполне упорядоченность. Тем не менее, всегда имеется «достаточное количество» критических и креативных точек в дескриптивных моделях W исчисления KM^* : множество W_0 - всех критических точек модели W - топологически *всюду плотно* в W и они расположены «порядково предствительно», т.е. множество критических точек любого открыто-замкнутого (= формульного) множества *конфинально* лежит в нем.

Как известно, гёделево погружение интуиционистской пропозициональной логики в классическую модальную логику было расширено на логику предикатов (Rasiowa-Sikorski – 53) и в дальнейшем была показана погружаемость интуиционистской арифметики (Goodman, 84), интуиционистских теории типов и теории множеств (Scedrov, 85) в соответствующие классические модальные теории. Далее, был обнаружен *единый* метод доказательства погружаемости (Flagg, Friedman, 86), основанный на теореме Фунаяма. В трансляции FF используется «релятивизация» негативной интерпретации, допускающая преобразование фор-

мулы p не только в $((p \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$ ($= \neg\neg p$, «сдвоенная кочерга»), но и в формулу $(p \rightarrow s) \rightarrow s$ с произвольным параметром s вместо $\perp$. Таким образом, трансляция FF основана на главных нуклонах $w_s(p) = (p \rightarrow s) \rightarrow s$ (Fourmann, Scott – 79). Любопытно, что в случае доказуемости-интуиционистской логики KM в FF преобразовании нуклон $w_s(p)$ можно заменить на «условную» импликацию $\Box s \rightarrow p$, понимая преобразование FF как замену «безусловного» высказывания p на «условное» $\Box s \rightarrow p$: « p следует из установленного факта s ».

В заключение, отослав за подробностями к интересному исследованию проблемы Новикова [18], заметим, что примером *полной по Новикову* логики с «новой интуиционистской связкой» является расширение доказуемости-интуиционистской логики KM , полученное постулированием формулы

$$\Box\Box p \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$$

в качестве дополнительной аксиомы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А. О доказуемости-интуиционистском пропозициональном исчислении // ДАН СССР, 1985. 283. N1. С. 27-29.
2. Муравитский А. Соответствие расширений доказуемости-интуиционистской логики расширениям логики доказуемости // Там же. 1985. 281. N4. С. 789-793.
3. Solovay R. Provability interpretation of modal logic // Israel Journal of Mathematics, 1976. 25. P. 287-304.
4. Chagrov A., Zakharyashev M. Modal Logic. Oxford University Press, 1998.
5. Beth E. The Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1959.
6. Бурбаки Н. Теория Множеств. М., 1965.
7. Esakia L. Quantification in intuitionistic logic with provability smax // BSL, 1998. 27. N½. P. 26-28.
8. Fine K. Reasoning with Arbitrary Objects. Basil Blackwell – Oxford, 1985.
9. Черч А. Введение в математическую логику. М., 1960.
10. Муравитский А. О финитной аппроксимируемости исчисления I^Δ и немоделируемости некоторых его расширений // Математические Заметки, 1981. 29. N6. С. Р. 907-916.
11. Дарджания Г. Секвенциальный вариант модальной системы I^Δ // VII Всесоюзная Конференция по Математической Логике (Тезисы Докладов). Новосибирск, 1984. С. 54.
12. Gabelaia D. Tableau Systems for modalized Heyting calculus // The Prepublication Series in Logic and Foundations of Mathematics. Tbilisi, 99-05. 1999.
13. Esakia L., Jibladze M., Patariaia D. Scattered toposes // Annals of Pure and Applied Logic, 1999.

14. *Gradel E.* Why are modal logics so robustly decidable? // Bulletin of EATCS, 1999. N68. P. 90-103.
15. *Laroussinie F., Sohnoebelen Ph.* A hierarchy of temporal logics with past» // Theoretical Computer Science, 1995. 148. N2. P. 303-324.
16. *Клини С.* Введение в метаматематику. М., 1957.
17. *Эсакиа Л.* «Креативные и критические точки в интуиционистских моделях Крипке и сопряженные модальности». // Смирновские Чтения. 2 Международная Конференция. Москва, ИФ РАН. 1999. С. 78-82.
18. *Yashin A.* New solution to Novikov's problem for intuitionistic connectives. // Journal of Logic. Comput., 1998. 8. N5. P. 637-664.

М.Н.Бежанишвили

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЙ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ ХАО ВАНА

Abstract. *The paper deals with the Hao Wang calculi of partial predicates PP and EP. It is shown that an analogue of the Craig interpolation theorem holds in PP and EP.*

Введение

Свою знаменитую интерполяционную теорему У.Крэйг доказал для классического исчисления предикатов [1]. Она гласит, что (а) для всякой классически доказуемой импликативной формулы $A \supset C$, если A и C имеют общие предикатные буквы, то существует такая формула B , содержащая лишь те предикатные буквы, которые входят одновременно и в A и в C , что классически доказуемы также формулы $A \supset B$ и $B \supset C$. Кроме того, (b) если A и C не имеют общих предикатных букв и $A \supset C$ доказуема, тогда доказуемы $\neg A$ или C . К.Шютте показал, что интерполяционная теорема справедлива также для интуиционистского исчисления предикатов [2]. Е.Расева установила аналоги этой теоремы для m -значных исчислений предикатов Э.Поста [3], а Л.Максимова дала полную характеристику как всех суперинтуиционистских пропозициональных логик, так и нормальных модальных пропозициональных логик, расширяющих $S4$, для которых справедлива теорема Крэйга [4,5]. Ссылки на работы, исследующие версии интерполяционной теоремы для других систем, можно найти в указанных выше статьях.

В настоящей работе рассматриваются исчисления частичных предикатов Хао Вана и для них устанавливается справедливость аналогов интерполяционной теоремы Крэйга.

Исчисление частичных предикатов Хао Вана

В классическом исчислении предикатов CP и обычной теории множеств мы имеем дело только с полностью определенными предикатами и множествами. Естественным обобщением такого подхода Хао Ван считает привлечение к рассмотрению также частично определенных предикатов и множеств. Одной из возможных реализаций подобного обобщенного подхода является его исчис-

ление частичных предикатов **PP** (см.[6]), которое Хао Ван считал хорошей основой для альтернативного способа устранения антиномий логики без введения типовых ограничений.

Алфавит PP содержит логические связки для отрицания, дизъюнкции и импликации Хао Вана: $\neg, \vee$ и $\rightarrow$, квантор существования $\exists$, неограниченные множества **Ind**: индивидуальных переменных, **Fun**: n -арных функциональных букв ($n \geq 0$), **Prd**: n -арных предикатных букв ($n \geq 0$). Знаки конъюнкции и квантора всеобщности $\wedge$ и $\forall$ вводятся с помощью обычных определений (алфавит **PP** может также содержать конкретные функциональные и предикатные знаки).

Термы (**Trm**) и атомарные формулы (**Atm**) определяются обычно.

Формулы (**Frm**) образуют такое наименьшее множество, что $\text{Atm} \subseteq \text{Frm}$ и если $x \in \text{Ind}$, а A и B - не содержащие знака $\rightarrow$ формулы, то $\neg A$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\exists x A \in \text{Frm}$. Заметим, что, согласно этому определению, ни одна формула не содержит итерации знака $\rightarrow$.

Интерпретация PP. $\neg$ и $\vee$ удовлетворяют трехзначным таблицам Лукасевича. $\Psi(\exists x A(x)) = t$ тогда и только тогда, когда $\Psi(A(x)) = t$ хотя бы для одного значения x ; $\Psi(\exists x A(x)) = u$ тогда и только тогда, когда $\Psi(A(x)) \neq t$ ни для какого значения x и $\Psi(A(x)) = u$ хотя бы для одного значения x ; $\Psi(\exists x A(x)) = f$ тогда и только тогда, когда $\Psi(A(x)) = f$ для всех значений x . Наконец, $\Psi(A \rightarrow B) = t$ тогда и только тогда, когда для всякого означивания Ψ всякий раз, когда $\Psi(A) = t$, имеем также $\Psi(B) = t$.

Отметим, что ни одна не содержащая знака $\rightarrow$ формула не является общезначимой.

Формулу будем называть **контрадикцией**, если она ни при каком означивании не принимает значения t .

Аксиомы PP имеют вид $A \rightarrow B$, где A и B - такие бескванторные формулы, что для всякого означивания Ψ , если $\Psi(A) = t$, то $\Psi(B) = t$.

Правила вывода PP

для введения кванторов:

$$\frac{A \rightarrow B(y)}{A \rightarrow \forall x B(x)}, \quad \frac{A \rightarrow B(s)}{A \rightarrow \exists x B(x)}, \quad \frac{B(y) \rightarrow A}{\exists x B(x) \rightarrow A}, \quad \frac{B(s) \rightarrow A}{\forall x B(x) \rightarrow A},$$

где $A, B \in \text{Frm}$, $x, y \in \text{Ind}$, $s \in \text{Trm}$ и y не входит свободно в A ;

для сокращения сторон $\rightarrow$:

$$\frac{A \wedge A \wedge B \rightarrow C}{A \wedge B \rightarrow C}, \quad \frac{A \rightarrow B \vee B \vee C}{A \rightarrow B \vee C},$$

где $A, B, C \in \mathbf{Frm}$;

для протаскивания кванторов:

пусть $A, B, C, D \in \mathbf{Frm}$, $x \in \mathbf{Ind}$ и x не входит свободно в B , а $C \equiv D$ означает, что замена подформулы C на D или D на C в любую теорему **РР** вновь дает нам теорему **РР**; тогда имеем:

$$\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x), \quad \neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x),$$

$$\exists x (A(x) \vee B) \equiv \exists x A(x) \vee B,$$

$$\exists x (A(x) \wedge B) \equiv \exists x A(x) \wedge B, \quad \forall x (A(x) \vee B) \equiv \forall x A(x) \vee B,$$

$$\forall x (A(x) \wedge B) \equiv \forall x A(x) \wedge B.$$

Хао Ван показал что **РР** является корректным и полным (т.е. для всякого Ψ из $\Psi(A) = t$ следует $\Psi(B) = t$ тогда и только тогда, когда $A \rightarrow B$ является теоремой **РР**). Он также установил, что сечение является допустимым правилом **РР** и исследовал соотношение **РР** с **СР**. Кроме того, Хао Ван построил альтернативное по отношению к **РР** исчисление **ЕР**, которое отличается от **РР** лишь толкованием импликации: $\Psi(A \rightarrow B) = t$ в **ЕР** тогда и только тогда, когда для всякого означивания Ψ из $\Psi(A) = t$ следует $\Psi(B) = t$ и из $\Psi(A) = u$ следует $\Psi(B) \neq f$ (язык, интерпретация, с только что указанным единственным отличием, и правила вывода для **ЕР** те же самые, что и для **РР**, а ограничительное условие аксиом **ЕР** соответствует интерпретации знака $\rightarrow$ в **ЕР**).

А.Роуз сформулировал независимую и полную систему аксиом для пропозиционального фрагмента **РР** и установил необходимое и достаточное условие доказуемости бескванторных формул в **РР** (ср. [7]).

Критерий Роуза для РР. Будем говорить, что бескванторная формула $A \rightarrow B$ удовлетворяет критерию Роуза, если для каждого такого дизъюнктивного члена C дизъюнктивной нормальной формы формулы A , который в качестве конъюнктивных членов не содержит ни одну атомарную формулу вместе с ее отрицанием, существует такой дизъюнктивный член D дизъюнктивной нормальной формы формулы B , что множество конъюнктивных членов D является подмножеством множества конъюнктивных членов C .

Аналоги теоремы Крейга для **РР** и **ЕР**

Пусть A - не содержащая знака $\rightarrow$ формула в предваренной нормальной форме, а Q - такой квантор всеобщности (существования) префикса A , которому предшествуют n вхождений кванторов существования (всеобщности) $Qx_1, \dots, Qx_n$ ($n \geq 0$).

Тогда $[A^\exists]_{f_p^n}$ ($[A^\forall]_{f_p^n}$) обозначает формулу, получаемую из A вычеркиванием Qy и заменой всех связанных этим квантором всеобщности (существования) вхождений y в A термом $f_p^n(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, где f_p^n - первый в алфавитном порядке n -арный функциональный знак, не входящий в A (при $n=0$, все связанные квантором Qy вхождения переменной y меняются первой в алфавитном порядке константой f_p^0 , не входящей в A).

Если префикс предваренной формулы A не содержит квантора всеобщности (существования) Qy , тогда $[A^\exists]_{f_p^n}$ ($[A^\forall]_{f_p^n}$) просто совпадает с A .

Далее полагаем, что

$$[A^\exists]_{f_{p_1}^{n_1} \dots f_{p_{k+1}}^{n_{k+1}}} = [[A^\exists]_{f_{p_1}^{n_1} \dots f_{p_k}^{n_k}}]_{f_{p_{k+1}}^{n_{k+1}}}.$$

$[A^\forall]_{f_{p_1}^{m_1} \dots f_{p_k}^{m_k}} \rightarrow [B^\exists]_{g_{q_1}^{n_1} \dots g_{q_l}^{n_l}}$ будем называть результатом

ПΣ-преобразования формулы $A \rightarrow B$, если ее левая сторона не содержит вхождений квантора существования, а правая сторона - вхождений квантора всеобщности. Если, к тому же, A и B - предваренные нормальные формулы, то результат ПΣ-преобразования $A \rightarrow B$ будем обозначать формулой $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$, где A' и B' - бескванторные части A и B , соответственно.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующими легко устанавливаемыми свойствами **PP (EP)**:

(1) Ни одна не содержащая знака $\rightarrow$ формула не является доказуемой в **PP (EP)**.

(2) Для любых A и B , $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$ доказуема в **PP**.

(3) Если A и B - пропозициональные буквы и A отлична от B , то $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$ не доказуема в **EP**.

(4) Если $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$ доказуемы в **PP (EP)**, то $A \rightarrow C$ также доказуема в **PP (EP)**.

(5) Для любых $A \in \text{Frm}$, $x \in \text{Ind}$ $s \in \text{Trm}$, формулы $\forall x A(x) \rightarrow A(s)$ и $A(s) \rightarrow \exists x A(x)$ доказуемы в **PP (EP)**.

(6) Навешивание кванторов всеобщности или существования над обеими сторонами доказуемой в **PP (EP)** формулы $A \rightarrow B$ вновь дает доказуемую в **PP (EP)** формулу (только порядок кванторов в обеих сторонах $\rightarrow$ должен быть одним и тем же).

(7) Если A и B - бескванторные формулы, а $A^\#$ и $B^\#$ - их дизъюнктивные нормальные формы, соответственно, то $A \rightarrow B$

доказуема в **PP (EP)** тогда и только тогда, когда $A^\# \rightarrow B^\#$ доказуема в **PP (EP)**.

(8) Если A° и B° - предваренные нормальные формы формул A и B , соответственно, то $A \rightarrow B$ доказуема в **PP (EP)** тогда и только тогда, когда $A^\circ \rightarrow B^\circ$ доказуема в **PP (EP)**.

Исходя из (8), (5), (4) и (6), мы легко установим (ср., например, [9]) еще одно свойство

(9) Формула $A \rightarrow B$ доказуема в **PP (EP)** тогда и только тогда, когда $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$ доказуема в **PP (EP)**.

Для всякого $n > 0$ мы каждому результату $\Pi\Sigma$ -преобразования $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$ формулы $A \rightarrow B$ соотнесем множество термов E_n , которое будем называть универсумом Эрбрана n -ой степени: E_1 содержит все свободные индивидные переменные, входящие в формулу $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$, а в случае, когда последняя формула не содержит свободных индивидных переменных, $E_1 = \{x\}$, где x - первая в алфавитном порядке индивидная переменная, не входящая в формулу

$$\Pi A' \rightarrow \Sigma B'; E_{n+1} = E_n \cup \{h^m(s_1, \dots, s_m) : h^m \in \text{Fun},$$

входящая в $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$, $m \geq 0$, $s_1, \dots, s_m \in E_n\}$, другими словами, E_{n+1} содержит все термы, принадлежащие E_n , все константы формулы $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$, а также все образованные с помощью входящих в $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$ функциональных знаков термы, всевозможными аргументами которых являются элементы E_n .

Заметим, что для всякой формулы A и всякого $n > 0$ число термов, принадлежащих E_n , конечно, так как любая формула является конечной последовательностью знаков и, следовательно, может содержать лишь конечное число термов (а конечные комбинации конечных множеств всегда дают конечные множества).

Теперь следующим образом определим раскрытие $\mathcal{R}[A]$ n -ой степени формулы A ($n > 0$):

$$\mathcal{R}[A] = A, \quad A \in \text{Atm},$$

$$\mathcal{R}[\neg A] = \neg \mathcal{R}[A],$$

$$\mathcal{R}[A \vee B] = \mathcal{R}[A] \vee \mathcal{R}[B],$$

$$\mathcal{R}[A \rightarrow B] = \mathcal{R}[A] \rightarrow \mathcal{R}[B],$$

$$\mathcal{R}[\exists x A(x)] = \mathcal{R}[A(s_1)] \vee \dots \vee \mathcal{R}[A(s_q)], \quad \text{где } s_1, \dots, s_q \text{ все термы, принадлежащие универсуму Эрбрана } n\text{-ой степени } E_n.$$

Из определений $\wedge$ и $\forall$ прямо следует, что

$$\mathcal{R}[A \wedge B] = \mathcal{R}[A] \wedge \mathcal{R}[B]$$

и

$$\mathcal{R}[\forall x A(x)] = \mathcal{R}[A(s_1)] \wedge \dots \wedge \mathcal{R}[A(s_q)], \quad \text{где } s_1, \dots, s_q \text{ - все термы, принадлежащие } E_n \text{ (ср. [8] и [9]).}$$

соваться лишь раскрытиями n -ой степени формул вида: $\Pi A \rightarrow \Sigma B$. Из определения следует, что $\mathfrak{R}[\Pi A \rightarrow \Sigma B]$ является бескванторной формулой.

Следующие ниже утверждения мы будем явно формулировать только для исчисления $\mathbf{PP}$.

Критерий Эрбрана-Роуза для $\mathbf{PP}$. Будем говорить, что формула $A \rightarrow B$, где A и B - предваренные формулы, удовлетворяет критерию n -ой степени Эрбрана-Роуза, если критерию Роуза для $\mathbf{PP}$ удовлетворяет раскрытие n -ой степени формулы $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$, которая получается из $A \rightarrow B$ в результате ее $\Pi\Sigma$ -преобразования, а A' и B' - бескванторные части A и B , соответственно.

Лемма 1. Бескванторная формула вида $A \rightarrow B$ является доказуемой в $\mathbf{PP}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет критерию Роуза (ср. [7]).

Доказательство. Если бескванторная формула $A \rightarrow B$ удовлетворяет критерию Роуза, нетрудно убедиться, что для всякого означивания Ψ всякий раз, когда $\Psi(A) = t$, то и $\Psi(B) = t$, т.е. $A \rightarrow B$ является аксиомой и, следовательно, она доказуема в $\mathbf{PP}$.

А если $A \rightarrow B$ не удовлетворяет критерию Роуза, мы сможем так выбрать значения термов и предикатных букв, чтобы все атомарные формулы, входящие без знака отрицания в дизъюнктивные члены дизъюнктивной нормальной формы $A^\#$ формулы A в качестве конъюнктивных членов, получили значение t , а все атомарные формулы, входящие в дизъюнктивные члены $A^\#$ со знаком отрицания, получили значение f . Но так как каждый дизъюнктивный член дизъюнктивной нормальной формы $B^\#$ формулы B в таком случае в качестве конъюнктивных членов содержит атомарные формулы или отрицания атомарных формул, которые не входят в $A^\#$, им можно будет придать значение u и тогда формула $A \rightarrow B$ окажется ложной. ■

Лемма 2. Если раскрытие $\mathfrak{R}[\Pi A' \rightarrow \Sigma B']$ n -ой степени формулы $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$ удовлетворяет критерию Роуза для $\mathbf{PP}$, то формула $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$ доказуема в $\mathbf{PP}$.

Доказательство. Если условие леммы выполняется, то согласно лемме 1, $\mathfrak{R}[\Pi A' \rightarrow \Sigma B']$ является аксиомой и поэтому доказуема в $\mathbf{PP}$. Но тогда мы сможем навесить надлежащие кванторы на стороны бескванторной формулы $\mathfrak{R}[\Pi A' \rightarrow \Sigma B']$, которая имеет вид

$$\mathfrak{R}[\forall x_2 \dots \forall x_w A(s_1, x_2, \dots)]_{f_{p_1}^{m_1} \dots f_{p_k}^{m_k}} \wedge \dots \wedge \mathfrak{R}[\forall x_2 \dots \forall x_w A(s_r, x_2, \dots, x_w)]_{f_{p_1}^{m_1} \dots f_{p_k}^{m_k}} \rightarrow$$

$$\mathfrak{R}[\exists y_2 \dots \exists y_v B(s_1, y_2, \dots, y_v)]_{g_{q_1}^{n_1} \dots g_{q_l}^{n_l}} \vee \dots \vee \mathfrak{R}[\exists y_2 \dots \exists y_v B(s_r, y_2, \dots, y_v)]_{g_{q_1}^{n_1} \dots g_{q_l}^{n_l}},$$

где $s_1, \dots, s_r \in E_n$, и соответствующим образом протаскать их во внутрь с помощью правил для введения и протаскивания кванторов, а затем, пользуясь правилами для сокращения сторон $\rightarrow$, постепенно устранить все возникшие ненужные повторяемые конъюнктивные и дизъюнктивные члены. Таким образом на определенном шаге мы выведем формулу

$$[\forall x_2 \dots \forall x_w A(s_1, x_2, \dots, x_w)]_{f_{p_1}^{m_1} \dots f_{p_k}^{m_k}} \wedge \dots \wedge [\forall x_2 \dots \forall x_w A(s_r, x_2, \dots, x_w)]_{f_{p_1}^{m_1} \dots f_{p_k}^{m_k}} \rightarrow$$

$$[\exists y_2 \dots \exists y_v B(s_1, y_2, \dots, y_v)]_{g_{q_1}^{n_1} \dots g_{q_l}^{n_l}} \vee \dots \vee [\exists y_2 \dots \exists y_v B(s_r, y_2, \dots, y_v)]_{g_{q_1}^{n_1} \dots g_{q_l}^{n_l}}$$

и, проделав то же самое с ней, сперва получим

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_w A(x_1, x_2, \dots, y_v) \wedge \dots \wedge \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_w A(x_1, x_2, \dots, x_w) \rightarrow$$

$$\exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_v B(y_1, y_2, \dots, y_v) \vee \dots \vee \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_v B(y_1, y_2, \dots, y_v),$$

а затем, устранив все повторения, выведем желаемую формулу

$$\forall x_1 \dots \forall x_w A(x_1, \dots, x_w) \rightarrow \exists y_1 \dots \exists y_v B(y_1, \dots, y_v),$$

т.е. $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$. ■

Теорема 1. Формула $A \rightarrow B$ доказуема в $\mathbf{PP}$ тогда и только тогда, когда существует такое число $n \geq 1$, что $A \rightarrow B$ удовлетворяет критерию n -ой степени Эрбрана-Роуза (теорема Эрбрана для $\mathbf{PP}$).

Доказательство. Справедливость импликации справа налево прямо следует из предыдущей леммы. Для получения обратной импликации, заметим, что аксиомы $\mathbf{PP}$ общезначимы, а правила вывода, как легко можно убедиться, сохраняют общезначимость. Следовательно, если $A \rightarrow B$ доказуема в $\mathbf{PP}$, то она общезначима. Поэтому достаточно показать, что если формула $A \rightarrow B$ не удовлетворяет критерию Эрбрана-Роуза ни для какого $n \geq 1$, то она не общезначима. Согласно свойству (9), мы без ограничения общности можем предположить, что $A \rightarrow B$ имеет вид $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$.

Итак, пусть формула $A \rightarrow B$ имеет вид $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$ и она не удовлетворяет критерию Эрбрана-Роуза ни для какого $n \geq 1$. Но тогда ее раскрытие $\mathfrak{R}[\Pi A' \rightarrow \Sigma B']$ n -ой степени ни для какого $n \geq 1$ не будет удовлетворять критерию Роуза.

Рассмотрим универсумы Эрбрана n -ой степени ($n \geq 1$) для нашей формулы $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ и попытаемся опровергнуть $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$ в их объединении $E = \bigcup_{i \in \omega} E_i$. Очевидно, что E счетно

(т.к. оно является бесконечным объединением конечных множеств) или конечно.

Условимся также, что для всякого $n \geq 1$ $(\mathcal{R}[\Pi A' \rightarrow \Sigma B'])^\#$ обозначает дизъюнктивную нормальную форму раскрытия n -ой степени формулы $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$.

Теперь, каждой свободной индивидуальной переменной x соотнесем значение $x \in E$, каждому функциональному знаку f^m функцию f^m , отображающую m -ки термов $s_{i_1}, \dots, s_{i_m}$ из E , в термы вида $f^m(s_{i_1}, \dots, s_{i_m}) \in E$, и каждой предикатной букве P^m - предикат P^m , принимающий значение t для m -ки термов $s_{i_1}, \dots, s_{i_m}$ из E , если для некоторого $n \geq 1$ $P^m(s_{i_1}, \dots, s_{i_m})$ входит в раскрытие $(\mathcal{R}[\Pi A'])^\#$ n -ой степени без знака отрицания, принимает значение f , если $P^m(s_{i_1}, \dots, s_{i_m})$ входит в раскрытие $(\mathcal{R}[\Pi A'])^\#$ n -ой степени со знаком отрицания, и, наконец, принимает значение u , если для некоторого n $P^m(s_{i_1}, \dots, s_{i_m})$ входит в раскрытие $(\mathcal{R}[\Sigma B'])^\#$ n -ой степени со знаком отрицания или без него, но ни для какого n $P^m(s_{i_1}, \dots, s_{i_m})$ не является конъюнктивным членом дизъюнктивного члена раскрытия $(\mathcal{R}[\Pi A'])^\#$ n -ой степени.

Индукцируя такое означивание на все формулы, мы сможем построить контрмодель для формулы $\Pi A' \rightarrow \Sigma B'$ и доказать, что она опровержима в ней. ■

Следствие. Для любой доказуемой в **РР** предваренной формулы вида $\Pi A \rightarrow \Sigma B$ существует такая доказуемая в **РР** бескванторная формула (являющаяся на самом деле ее аксиомой), из которой можно вывести $\Pi A \rightarrow \Sigma B$, пользуясь только лишь свойствами (4), (5), (6) исчисления **РР**, а также правилами для протаскивания кванторов и сокращения сторон $\rightarrow$.

Доказательство. Если $\Pi A \rightarrow \Sigma B$ доказуема в **РР**, тогда, согласно теореме 1, существует такое число $n \geq 1$, что раскрытие $\mathcal{R}[\Pi A \rightarrow \Sigma B]$ n -ой степени формулы $\Pi A \rightarrow \Sigma B$ является аксиомой **РР**. А из нее способом доказательства леммы 2 мы легко сможем вывести $\Pi A \rightarrow \Sigma B$, пользуясь лишь свойствами (4), (5), (6) **РР** и правилами для протаскивания кванторов и сокращения сторон импликации Хао Вана. ■

Теорема 2. Для всякой доказуемой в **РР** формулы $A \rightarrow C$ (а) если A и C имеют по крайней мере одну общую предикатную букву, то существует формула B , содержащая лишь те предикатные буквы, которые входят одновременно в A и C , такая, что в **РР** доказуемы формулы $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$; (б) если же A и C не содержат общих предикатных букв и в **РР** доказуема $A \rightarrow C$, то A является противоречием (интерполяционная теорема для **РР**).

Доказательство. (а) Сначала рассмотрим случай когда A и C – бескванторные формулы. В силу свойства (7) мы без ограничения общности можем предположить, что они являются дизъюнктивными нормальными формулами. Пусть A имеет вид $\bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$, а C – вид $\bigcup_{i=1}^k \bigcap_{j=1}^{l_i} R_{ij}$, где все P_{ij} и R_{ij} являются атомарными формулами или отрицаниями атомарных формул. По условию теоремы формула $A \rightarrow C$, т.е. $\bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij} \rightarrow \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{j=1}^{l_i} R_{ij}$, доказуема в **РР**, но тогда, согласно лемме 1, формула $\bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij} \rightarrow \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{j=1}^{l_i} R_{ij}$ удовлетворяет критерию Роуза и поэтому для

каждого дизъюнктивного члена $\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ ($1 \leq i \leq m$) формулы A ,

который в качестве конъюнктивных членов не содержит ни одной атомарной формулы вместе с ее отрицанием, существует дизъюнктивный член $\bigcap_{j=1}^{l_i} R_{ij}$ ($1 \leq i \leq k$) формулы C , такой, что множество его конъюнктивных членов является подмножеством множества конъюнктивных членов дизъюнктивного члена $\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$

($1 \leq i \leq m$) формулы A . Теперь в качестве B мы можем выбрать формулу, получаемую из A , если из каждого дизъюнктивного члена $\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ формулы A вычеркнем все такие его конъюнктивные члены P_{ij} , которые содержат не входящую в C предикатную букву, за исключением случая, когда $\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ в качестве конъюнктивных членов не содержит атомарной формулы и ее отрицания с не входящей в C предикатной буквой. Если же $\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ содержит

атомарную формулу и ее отрицание с не входящей в C предикатной буквой, то последнюю мы можем заменить в них на любую предикатную букву, входящую в C . Нетрудно проверить, что формулы $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$ будут удовлетворять критерию Роуза. Поэтому, согласно лемме 1, они доказуемы в **РР**.

Для рассмотрения общего случая, в силу свойства (9), мы без ограничения общности можем предположить, что формула $A \rightarrow C$ имеет вид $\Pi A' \rightarrow \Sigma C'$, где A' и C' – бескванторные части A и C , соответственно. По условию теоремы формула $A \rightarrow C$, т.е. $\Pi A' \rightarrow \Sigma C'$, доказуема в **РР**. Но тогда, согласно следствию теоремы Эрбрана, существует вывод формулы $\Pi A' \rightarrow \Sigma C'$ из некоторой бескванторной доказуемой формулы $D \rightarrow F$, в котором используются только лишь вышеуказанные свойства (4), (5), (6) и правила для протаскивания кванторов и сокращения сторон $\rightarrow$. При этом D есть некоторое раскрытие $\mathfrak{R}[\Pi A']$ формулы $\Pi A'$, а F – раскрытие $\mathfrak{R}[\Sigma C']$ формулы $\Sigma C'$. Согласно утверждению нашей теоремы, которую мы уже доказали для бескванторных формул, существует формула E , содержащая лишь те предикатные буквы, которые входят одновременно в D и F , такая, что в **РР** доказуемы формулы $D \rightarrow E$ и $E \rightarrow F$. Но тогда, с помощью свойства (9), а также правил для протаскивания кванторов и сокращения сторон $\rightarrow$, мы сможем вывести формулу $\Pi A' \rightarrow \Pi E$, а с помощью свойств (4), (5), (6) и правил для протаскивания кванторов и сокращения сторон $\rightarrow$, – формулу $\Pi E \rightarrow \Sigma C'$. Ясно, что ΠE будет содержать лишь те предикатные буквы, которые входят одновременно в $\Pi A'$ и $\Sigma C'$. Поэтому она и сможет выполнять роль интерполянты B .

(b) Если бескванторные формулы A и C не имеют общих предикатных букв, то очевидно, что формула $A \rightarrow C$ может удовлетворять критерию Роуза для **РР** (и, следовательно, быть доказуемой в **РР**) в том и только в том случае, когда A является противоречием. Для случая же, когда A является кванторной формулой, справедливость нашего утверждения при любом C устанавливается с помощью правил для введения кванторов. ■

Учитывая особенности **ЕР** и надлежащим образом трансформируя критерий Роуза для **ЕР**, аналогичным способом можно показать, что утверждение (a) интерполяционной теоремы имеет силу и для **ЕР**, а утверждение (b) будет справедливо для **ЕР** лишь в том случае, если A является противоречием, а C – классической тавтологией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Craig W.* Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorems // *Journal of Symbolic Logic*, 1957. **22**. P. 250-268.
2. *Schutte K.* Der Interpolationssatz der intuitionistischen *Prädikatenlogik* // *Mathematische Annalen*, 1962. **148**. P. 192-200.
3. *Rasiowa H.* The Craig interpolation theorem for m-valued predicate calculi // *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences*, 1972. **20**. P. 341-346.
4. *Максимова Л.Л.* Теорема Крэйга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия алгебр // *Алгебра и логика*, 1977. **16**. №6. 643-681.
5. *Максимова Л.Л.* Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // *Алгебра и логика*, 1979. **18**. №5. P. 556-586.
6. *Wang H.* The calculus of partial predicates and its extension to set theory I // *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1961. **7**. P. 283-288.
7. *Rose A.* A formalization of the propositional calculus corresponding to Wang's calculus of partial predicates // *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1963. **9**. P. 177-198.
8. *Herbrand J.* Recherches sur la theorie de la demonstration // *Travaux de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III sciences mathematiques et physique*, 1930. **33**. (английский перевод: *Investigations in proof theory*, с комментариями и исправлением одной леммы см. в: *Herbrand, Logical Writings*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1971. P. 44-202).
9. *Hilbert D., Bernays P.* *Grundlagen der Mathematik II* // *Zweite Auflage*, Springer-Verlag, Berlin, 1970. (рус. пер.: *Основания математики II*. М.: Наука, 1982).

К.Ю.Горбунов, В.А.Любецкий

АЛГОРИТМ ВЫЯВЛЕНИЯ РЕГУЛЯТОРНОГО СИГНАЛА В НАБОРЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Abstract. *An algorithm of quadratic (or near) complexity that searches for a common signal in a given set of sequences (in particular DNA sequences), i.e. a system of similar words of a fixed length and satisfying some certain conditions, has been developed.*

Идея этой работы обсуждалась с профессором В.А.Смирновым – светлой памяти Владимира Александровича авторы посвящают ее. Здесь рассматривается задача, имеющая большую область весьма современных приложений (в частности, в компьютерной генетике). В скобках указаны значения параметров этой задачи, характерные для приложения в генетике, которое обсуждается ниже в пункте 2.

1. Дан алфавит (например, из четырех букв A и T , C и G , буквы из этих пар называются соответственно комплементарными друг другу). Дан набор из k последовательностей (примерно) одинаковой длины n каждая. Системой назовем набор слов фиксированной длины l , по одному слову (или по фиксированному числу слов – сейчас для краткости рассмотрим случай одного слова) из одной последовательности; в систему должны включаться слова, по крайней мере, из $2/3$ всех исходных последовательностей; система должна состоять из как можно более попарно похожих друг на друга слов (например, в смысле суммы попарных расстояний Хэмминга между словами системы или в смысле какой-то другой фиксированной метрики между словами, или в смысле максимизации какого-то фиксированного «качества системы»). Например, для приложения из пункта 2 естественно говорить о максимизации качества системы как суммы попарных «расстояний» между словами системы, вычисляемых с помощью функции $F(x,y)$, которая для двух слов x и y длины l отражает прежде всего степень их похожести между собой, а затем и степень их палиндромности (т.е. похожести x на $pal(x)$, см. ниже) и некоторые другие их свойства (например, похожесть слов x и y на обучающую выборку слов длины l , когда таковая дана). В качестве примера укажем на функцию $F(x,y) = S(x,y) + 0.5 (\max(S(x,pal(x)), S(x',pal(x')))) + \max(S(y,pal(y)), S(y',pal(y'))))$, где $S(x,y)$ – количество совпадающих

букв в словах x и y , а $pal(x)$ – слово, полученное из x обращением с заменой каждой буквы на комплементарную, x' – слово x без последней буквы.

Интуитивно такая система понимается как «сигнал», а последовательность – как «регуляторная область»; проблема в том, что некоторые регуляторные области не содержат сигнала (они ошибочно выписаны); сигнал во всех «истинных» регуляторных областях (т.е. таких, которые его содержат) служит для одновременного запуска процесса, соответствующего набору всех «истинных» регуляторных областей. Более содержательная интерпретация дается в пункте 2.

Описание алгоритма. Сначала образуем вспомогательный граф G , который остается фиксированным в алгоритме. Граф G состоит из k вершин и всех ребер, которые возникают в процессе выполнения следующей процедуры. На первом шаге все вершины графа G разбиваются на две равные (с точностью до единицы, если k нечетное) части и между этими частями проводятся два ребра (A, B) и (C, D) , не выходящие из одной вершины (пусть, скажем, A и C находятся в одной части, а B и D в другой). Любое из этих ребер (скажем, (A, B)) назовем *основным относительно этого разбиения*, а другое – *вспомогательным*. Также проводятся два «диагональных» ребра: (A, D) и (C, B) . Каждую из двух полученных частей снова разбиваем на две (в том же смысле) равные части так, что A и C , как и B и D , находятся в разных частях этих разбиений. Основные ребра относительно уже этих разбиений определены однозначно: это (A, C) и (B, D) , а вспомогательные ребра (по возможности, не выходящие из той же вершины, что и основные) выбираются произвольно. И так далее, каждую появившуюся в этой процедуре неодовершинную часть P разбиваем на две равные части так, чтобы основные ребра двух текущих разбиений соединяли концы основного и вспомогательного ребер предыдущего разбиения. Процедура разбиений прекращается, когда все части P станут одовершинными; на самом деле, можно остановиться, когда эти части станут мелкими (из 1-3 вершин).

Внешний цикл алгоритма состоит во взаимно однозначном приписывании каждой вершине графа G одной из исходных последовательностей (одну из таких текущих расстановок последовательностей по вершинам графа G обозначим r). Вопрос о том, как лучше выбирать такое приписывание (такую расстановку), является центральным. Суть дела в том, что качество системы s (иными словами, качество «сечения» s над G) определяется как сумма значений функции $F(x, y)$ по всем парам вершин графа G (т.е. как сумма «по всем ребрам» графа G , как если бы он был пол-

ным графом; это качество обозначим $H(s)$; здесь рассматривается случай, когда в систему входит по слову из каждой последовательности). И мы хотим приблизить это качество, беря вместо $H(s)$ величину $H(s,r)$, определяемую как сумма значений функции $F(x,y)$ по всем тем парам вершин графа G , которые в нем действительно соединены ребром. (В сумме $H(s,r)$ гораздо меньше слагаемых, чем в сумме $H(s)$, и ее вычисление происходит гораздо быстрее.)

Конкретно, для данного r выполняется цикл (называемый «сборкой»), который мы опишем индукцией по глубине разбиений. Индуктивный шаг: пусть для двух частей $P1$ и $P2$ с основными ребрами соответственно (A,C) и (B,D) , полученными разбиением подграфа P с основным ребром (A,B) , уже определены два набора из t лучших сечений как продолжений с их основных ребер (точнее, для любых двух слов из последовательностей над A и C с качеством большим некоторого фиксированного порога определены t лучших продолжений соответственно на все множество $P1$; и аналогично для $P2$). Тогда для любых слов (скажем, x и y) из последовательностей над A и B с качеством большим того же порога определим t лучших продолжений на все множество P (т.е. на объединение множеств $P1$ и $P2$) следующим образом. В цикле рассмотрим все слова (скажем, $x1$ и $y1$) из последовательностей над C и D , для которых качество слов x и $x1$ и y и $y1$ выше этого порога; и для $x,x1$ и $y,y1$ выберем соответствующие продолжения, объединяя их подходящим образом, получим t лучших сечений над всем P . Если условие пороговости не может быть обеспечено, то соответствующее значение сечения над P считается по определению равным нулю; иными словами, в этом случае возникают частично определенные сечения над G . Кроме того, чтобы среди t лучших сечений, получаемых на различных шагах сборки, было меньше таких, которые не дают новых сигналов (по сравнению с уже «утвержденными» сечениями), проводится проверка каждого нового сечения s на существенность относительно списка S уже «утвержденных» сечений (с той же областью определения). Для этого, если на достаточно большой доле последовательностей сечение s не имеет новых по сравнению с S слов, предполагаем, что среди этих «не новых» слов из s значительную часть составляет сигнал, и смотрим, насколько близко к этой «сигнальной» совокупности каждое оставшееся слово из s . Если среди них не обнаружено близких к этой совокупности слов, то отвергаем s и переходим к следующему кандидату в список.

Цикл, состоящий в расстановке последовательностей по вершинам графа G , работает, по крайней мере, до тех пор, пока любая пара последовательностей хотя бы раз не соединится ребром в

графе G . Процедура расстановки устроена так, чтобы на каждой итерации по G «покрыть» ребрами графа G больше пар последовательностей, не покрытых на предыдущих итерациях (по G). Это обеспечивает разумное количество итераций этого цикла при достаточном разнообразии распределений последовательностей по вершинам графа G . Последнее важно для получения достаточно представительной статистики в следующем, последнем цикле работы алгоритма.

А именно, каждой позиции в каждой последовательности (содержащей, скажем, букву i) ставится в соответствие число, которое отражает меру того, что буква i входит в искомый сигнал. Это число равно сумме качеств по всем полученным сечениям, которые включают слово, содержащее эту букву. Здесь под качеством понимается качество не всего сечения, а именно данного слова в нем, т.е. сумма значений $F(u, x)$, где u – данное слово (содержащее i), а x пробегает все остальные слова этого сечения. Таким образом, позиции букв, входящих в сигнал, будут помечены в исходных последовательностях числами, которые заметно больше чисел, стоящих в других позициях этих же последовательностей.

Счет, проведенный на многих примерах из приложения, описанного в следующем пункте 2, показал, что в случаях, когда сигнал был известен, алгоритм находил его, а в других случаях алгоритм находил вполне содержательный (с точки зрения этого приложения) ответ. Компьютерная реализация и счет были проведены Л.В. Даниловой. Математическое исследование такого рода алгоритмов весьма сложно (в сущности, здесь речь идет о дискретном динамическом процессе); авторы предполагают опубликовать некоторый анализ этого алгоритма.

2. Карта (иными словами, граф) метаболических путей бактерии (например, кишечной палочки) описывает, в принципе, все протекающие в этом организме химические реакции (ребро – химическая реакция, вершина – соответствующее химическое вещество). У родственных бактерий такие карты близки (иногда, с заменой некоторых веществ на гомологичные). Эти химические реакции объединены в более или менее сложные одновременно протекающие каскады реакций (небольшие подграфы в карте метаболических путей, удовлетворяющие определенным условиям) с целью производства веществ, необходимых для жизнедеятельности бактерии (например, пурина или тирозина). Такие каскады иногда пересекаются. Протекание одного каскада начинается сразу после того, как клетка (одновременно) продуцировала набор ферментов, обеспечивающих этот каскад (можно считать, что каждому ребру приписан соответствующий фермент).

Производство одного фермента соответствует активности, обычно, одного гена бактерии. Поэтому клетка содержит механизмы одновременного запуска многих разных групп генов, соответствующих многим разным каскадам химических реакций. Одним из таких механизмов является механизм совместного запуска (обычно говорят – совместной регуляции), который основан на одновременном связывании многих копий белковой молекулы (в случае эукариотов – нескольких белковых молекул) с определенными участками перед генами из данной их группы. В этом случае группа генов называется регулоном, а эти участки – оператором регулона (они находятся в области генома бактерии перед геном регулона, эта область называется регуляторной); соответствующая молекула называется фактором транскрипции. Итак, перед каждым геном (или группой генов – тогда их называют опероном) из данного регулона в соответствующей ему регуляторной области находится оператор – участок связывания с фактором транскрипции (что и приводит к активации или репрессии регулона).

Оператор состоит из нескольких похожих слов с фиксированным расстоянием между ними. Эти слова могут быть произвольными или описываться как в той или иной мере слабые палиндромы, в достаточной мере отличные от случайного слова. Заметим, что фактор транскрипции продуцируется согласно той же карте метаболических путей; отсюда возникает важная задача нахождения формально-логического языка для описания всей этой сложной ситуации.

Итак, возникает следующая задача, решаемая на основе алгоритма из пункта 1. Дан набор (предполагаемых) регуляторных областей одного регулона (одной или нескольких бактерий – во втором случае для каждой бактерии анализируем результаты отдельно и затем сравниваем; такое сравнение полезно организовать и в случае одной бактерии, деля исходный материал, скажем, на две части). Часто это набор не всех регуляторных областей данного регулона. В каждой из регуляторных областей оператор может состоять из нескольких слов. Ищем систему похожих друг на друга слов в этих регуляторных областях (с отбраковкой областей, не содержащих сигналов). При этом иногда дана еще обучающая выборка для искомого оператора. Найдя оператор, пополняем регулон в этой бактерии и находим его в других бактериях; затем тестируем найденные регулоны на метаболическую осмысленность и одинаковость (у разных бактерий) по набору генов.

Авторы сердечно благодарят профессора М.С. Гельфанда за многократные объяснения, касающиеся этой задачи, и обсуждение результатов счета.

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ¹

Abstract. *In this article the axioms are found for the earlier-built three-value semantics of uncertainty. The resulting axiomatic system is non-contradictory and complete with this semantics. In the basis of the axiomatic system there is the algorithm of converting the formulae of the initial language into the auxiliary one that eliminates the uncertainty symbol.*

Пусть L – язык исчисления предикатов первого порядка произвольной сигнатуры, не содержащий функциональных констант². Будем обозначать символом L_n язык, отличающийся от L лишь наличием формул вида nA , где « n » – новый одноместный логический оператор, интуитивный смысл которого состоит в утверждении неопределенности A . В работе [С.н.]³ была предложена теоретико-модельная интерпретация утверждений с неопределенностью, основанная на семантике возможных миров без отношения достижимости на мирах.

Структурой для языка L_n назовем пару $M_n = (U, \{F_i\} \ i \in J)$, где J – множество индексов, такую, что:

- а) $|J| > 1$;
- б) $F_i \neq F_j$, если $i \neq j$;
- в) каждое $M_i = (U, F_i)$ является структурой⁴ для языка L ;
- г) если c – индивидуальная константа, то $F_i(c) = F_j(c)$ для всех $i, j \in J$.

Областью определения всех функций интерпретации F_i ($i \in J$) является множество дескриптивных символов языка L_n , а области значений различаются для каждой функции. Неформально говоря, структура для языка L_n – это не менее, чем двухэлементное множество стандартных структур для языка L , имеющих один и тот же универсум и отличающихся друг от друга интерпретацией хотя бы одного предикатного (но не индивидуального) символа языка L . Если

¹ Статья подготовлена при поддержке РГНФ, проект № 99-03-19702.

² Это не приводит к потере общности, поскольку каждую n -местную функциональную константу можно представить в виде $n+1$ -местного предикатного символа.

³ Через [С.н.] будем обозначать работу: Анисов А.М. Семантика неопределенности // Логические исследования. Вып.4. М., 1997.

⁴ См.: Шенфилд Д. Математическая логика. М., 1975.

язык не фиксирован (так что не ясно, о какого вида структурах идет речь), условимся структуры первого рода называть *н-структурами*, а для стандартных структур оставим термин *структура*.

Оценка f определяется обычным образом: это отображение множества индивидуальных переменных языка L в универсум U . Если A – формула языка L , то определение выполнимости A в структуре (U, F_i) при оценке f стандартное. Расширим его на случай формул вида nA : формула nA *выполнена* в структуре (U, F_i) при оценке f , если существуют $j, k \in J$ такие, что A выполнена в (U, F_j) при f и A не выполнена в (U, F_k) при f .

Формула A в структуре $M_i = (U, F_i)$ *принимает значение 1 (0)*, если A (не) выполнена в M_i при любых f .

Каждую структуру $M_i = (U, F_i)$ из n -структуры $M_n = (U, \{F_i\} \mid i \in J)$ будем называть также *возможным миром* из M_n , поскольку эти структуры попарно отличаются интерпретацией хотя бы одной предикатной (но не индивидуальной) константы.

Формула A в n -структуре $M_n = (U, \{F_i\} \mid i \in J)$ *принимает значение 1 (0)*, если A принимает значение 1 (0) в каждом из возможных миров; если же A принимает значение 1 в одних возможных мирах и значение 0 во всех остальных возможных мирах, то A *принимает значение 1/0* в M_n . Значение 1 отождествляется с истинностью, значение 0 – с ложностью, а значение 1/0 – с неопределенностью.

Иначе говоря, в n -структуре $M_n = (U, \{F_i\} \mid i \in J)$ формула A *истинна* (принимает значение 1), если для всех $i \in J$ A истинна (принимает значение 1) в (U, F_i) ; A *ложна* (принимает значение 0), если для всех $i \in J$ A ложна (принимает значение 0) в (U, F_i) ; наконец, A *неопределенна* (принимает значение 1/0), если существуют $j, k \in J$ такие, что A истинна (принимает значение 1) в (U, F_j) и A ложна (принимает значение 0) в (U, F_k) , и при этом для каждого $i \in J$ либо A истинна (принимает значение 1) в (U, F_i) , либо A ложна (принимает значение 0) в (U, F_i) .

Разумеется, не всякая формула обязательно получит истинностное значение в n -структуре. Например, формула $P(x)$ в какой-либо структуре из некоторой n -структуры может выполняться при одних оценках и не выполняться при других (таким образом, она не будет ни истинной, ни ложной в структуре), что воспрепятствует ее означиванию в n -структуре.

Назовем формулу A языка L_n *н-общезначимой*, если каков бы ни был язык L' такой, что $L_n \subset L'$, A принимает значение 1 во всех структурах M_n языка L'_n ⁵.

⁵ Мотивировку этого определения см. в [С.н.].

Мы не слишком погрешим против истины, если скажем, что n -общезначащие формулы истинны во всех возможных (в нашем смысле) мирах и потому истинны во всех n -структурах.

Построенная n -семантика обладает рядом интересных свойств. В частности, оказалось, что отношение логического следования в n -семантике нельзя формализовать (см. [С.н.]). Однако отсюда нельзя было извлечь никаких выводов в отношении вопроса о возможности формализации свойства n -общезначимости. Можно ли синтаксическими средствами распознавать n -общезначимость? В [С.н.] мы показали, что проблема установления n -общезначимости формулы A языка L_n сводится к проблеме поиска доказательства некоторой формулы A^* в языке классической логики предикатов первого порядка L° и поэтому поддается формализации. Основываясь на этом результате, дадим явную формулировку аксиоматического исчисления неопределенности, сводящего семантическую проблему общезначимости к синтаксическому вопросу построения соответствующих формальных доказательств.

Язык L° получается из языка L_n следующим образом. Во-первых, уберем из языка L_n связку неопределенности n . Во-вторых, каждому предикатному символу P языка L_n сопоставим предикатный символ P° той же местности. Таким образом, L° содержит все предикатные символы языка L_n , плюс эти же символы, помеченные знаком $^\circ$. Отсюда $L_n \cup L^\circ = L^\circ \cup \{n\}$.

Введем операцию $*$, переводящую формулы языка $L_n \cup L^\circ$ в формулы языка L° . Условимся, что в исходных формулах расставлены все скобки без сокращений, но они не содержат лишних пар скобок. Операция $*$, примененная к формуле A языка $L_n \cup L^\circ$, ничего не меняет, если A не содержит символа n . Итак, если в A отсутствует связка n , то $A^* = A$. Далее, обозначая через K квантор общности или существования и через $\square$ произвольную бинарную булеву связку, для любых формул B и C (возможно, содержащих связку n) положим $(Kx B)^* = Kx(B^*)$, $(\neg B)^* = \neg(B^*)$, $(B \square C)^* = (B^* \square C^*)$ и $(nB)^* = (n(B^*))^*$.

Например, пусть A есть $n(P(x) \& Q(x))$. Тогда

$$(A)^* = (n(P(x) \& Q(x)))^* = (n((P(x) \& Q(x))^*))^*.$$

Поскольку $(P(x) \& Q(x))^* = (P(x) \& Q(x))$, имеем $(n((P(x) \& Q(x))^*))^* = (n((P(x) \& Q(x))))^*$. Появившаяся лишняя пара скобок может служить индикатором того, что первое (в порядке, указанном скобками) преобразование $*$ было реально проведено, и тем самым способствовать предотвращению заикливания в компьютерных реализациях предлагаемого алгоритма (что-нибудь

вроде $(\neg P(x))^* = (\neg P(x)^*)^* = (\neg P(x))^* = \dots$ и т.д., до бесконечности). После этого при проведении второго (внешнего) преобразования $*$ лишние скобки можно опустить. Ход дальнейших преобразований описан ниже.

Лишь в том случае, если A содержит $\neg$, происходят изменения, устраняющие вхождения связки $\neg$. Но прежде чем их описать, введем следующее определение. Назовем предикатные символы *отмеченными*, если они находятся в формуле, являющейся результатом операции $*$, примененной к формуле вида $\neg A$. Иными словами, в формуле $B = (\neg A)^*$ все предикатные символы из A считаются отмеченными. Чтобы удобнее было фиксировать отмеченные предикаты, будем иногда использовать подчеркивание, как показано ниже (на практике подчеркивания облегчают преобразования формул в случае вложенных друг в друга вхождений связки $\neg$).

Допустим, получена формула A^* , то есть A^* является формулой языка классической логики предикатов L° и потому не содержит связки $\neg$. Предположим, что некоторые (а может быть, и все) вхождения предикатных символов в A^* не являются отмеченными. Тогда $(\neg(A^*))^*$ преобразуется в $(A^* \& \neg A^{*\setminus}) \vee (\neg A^* \& A^{*\setminus})$, где $A^{*\setminus}$ получается из A^* заменой каждого *неотмеченного* предикатного символа языка L_n соответствующим символом со знаком $^\circ$ языка L° . При этом все предикатные символы становятся отмеченными:

$$(\neg A)^* = (\neg(A^*))^* = (A^* \& \neg A^{*\setminus}) \vee (\neg A^* \& A^{*\setminus}).$$

Предположим теперь, что в формуле A^* все вхождения предикатных символов являются отмеченными. Это означает, что в A^* каждый предикатный символ находился в области действия связки $\neg$ и все вхождения этой связки уже устранены посредством операции $*$. Тогда $(\neg(A^*))^*$ преобразуется в $A^* \& \neg A^*$ и все предикатные символы в формуле $A^* \& \neg A^*$ считаются отмеченными:

$$(\neg A)^* = (\neg(A^*))^* = A^* \& \neg A^*.$$

Заметим, что формула вида $\neg(A^*)$ может не быть формулой языка L_n (если A^* содержит предикатные символы со знаком $^\circ$) и заведомо не является формулой языка L° (так как содержит связку $\neg$). Тем не менее, это правильно построенная формула языка $L_n \cup L^\circ$.

Менее формально, определим A^* как конечный результат последовательной замены каждой входящей в A подформулы вида $\neg B$, такой, что B не содержит $\neg$, подформулой $(\neg B)^*$. Иначе говоря, в ходе преобразования $*$ нужно выполнить следующую последовательность шагов. Вначале все подформулы вида $\neg B$, в которых B не содержит связки $\neg$, заменяются на $(\neg B)^*$. Если в результате

вновь возникли подформулы вида nB , в которых B не содержит связки n , вновь заменяем их на $(nB)^*$. Действуем так до тех пор, пока вхождения связки n не будут полностью элиминированы. Получившаяся формула и будет A^* .

Завершим преобразование $(n((P(x) \& Q(x))))^*$ (опуская более не нужные лишние скобки). Поскольку предикаты P и Q не являются отмеченными, имеем

$$(n((P(x) \& Q(x))))^* = ((P(x) \& Q(x)) \& \neg(P^\circ(x) \& Q^\circ(x))) \vee (\neg(P(x) \& Q(x)) \& (P^\circ(x) \& Q^\circ(x))).$$

Пусть теперь дана формула $\forall x nP(x)$. Выполним операцию $*$:

$$(\forall x nP(x))^* = \forall x (P(x) \& \neg P^\circ(x)) \vee (\neg P(x) \& P^\circ(x)).$$

Еще один пример. Вычислим $(nnnP(x))^*$. На первом шаге получаем формулу $nn(P(x) \& \neg P^\circ(x)) \vee (\neg P(x) \& P^\circ(x))$. Подформулу $(P(x) \& \neg P^\circ(x)) \vee (\neg P(x) \& P^\circ(x))$, в которой все предикатные символы отмечены и которая поэтому далее не меняется, обозначим через $\underline{P}$. На втором шаге имеем $n(\underline{P} \& \neg \underline{P})$. Так как все предикатные символы по-прежнему отмечены, на последнем, третьем, шаге получаем:

$$(nnnP(x))^* = (\underline{P} \& \neg \underline{P}) \& \neg(\underline{P} \& \neg \underline{P}).$$

Рассмотрим последний пример. Формула вида $\neg nn(P(t) \rightarrow n\neg Q(t))$ (где t – индивидуальная константа или переменная) будет преобразована следующим образом: $(\neg nn(P(t) \rightarrow n\neg Q(t)))^*$ трансформируется в $\neg nn\{P(t) \rightarrow [(\neg Q(t) \& \neg\neg Q^\circ(t)) \vee (\neg\neg Q(t) \& \neg Q^\circ(t))]\}$. Формула $[(\neg Q(t) \& \neg\neg Q^\circ(t)) \vee (\neg\neg Q(t) \& \neg Q^\circ(t))]$, в которой все предикатные символы отмечены, дальнейшим преобразованиям не подлежит. Поэтому обозначим ее через $\underline{Q}$. Получаем $\neg nn(P(t) \rightarrow \underline{Q})$. Далее устраним подформулу $n(P(t) \rightarrow \underline{Q})$: $\neg n\{[(P(t) \rightarrow \underline{Q}) \& \neg(P^\circ(t) \rightarrow \underline{Q})] \vee [\neg(P(t) \rightarrow \underline{Q}) \& (P^\circ(t) \rightarrow \underline{Q})] \}$. Так как не отмеченных предикатных символов не осталось, последняя связка n устраняется введением противоречия: $(\neg nn(P(t) \rightarrow n\neg Q(t)))^* = \neg\{ \{[(P(t) \rightarrow \underline{Q}) \& \neg(P^\circ(t) \rightarrow \underline{Q})] \vee [\neg(P(t) \rightarrow \underline{Q}) \& (P^\circ(t) \rightarrow \underline{Q})]\} \& \neg\{[(P(t) \rightarrow \underline{Q}) \& \neg(P^\circ(t) \rightarrow \underline{Q})] \vee [\neg(P(t) \rightarrow \underline{Q}) \& (P^\circ(t) \rightarrow \underline{Q})]\} \}$. Получившаяся формула записана на языке L° , что и требовалось.

Обозначим через $АИН^\circ$ систему в языке $L_n \cup L^\circ$, содержащую следующие схемы аксиом и правила вывода.

Тавтологии классической логики;

$$\forall x A(x) \rightarrow A(t), \quad A(t) \rightarrow \exists x A(x);$$

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B}$$

$$\frac{A \rightarrow B(x)}{A \rightarrow \forall x B(x)}$$

$$\frac{B(x) \rightarrow A}{\exists x B(x) \rightarrow A}$$

(в двух последних правилах индивидуальная переменная x не свободна в A);

Правило (*):

$$\frac{A^*}{A}$$

(где A – формула языка L_n).

Ограничение на правило вывода (*) объясняется тем, что операция * применяется лишь к формулам языка L_n .

Коротко говоря, $АИН^\circ$ получается из классического гильбертовского аксиоматического исчисления предикатов первого порядка добавлением четвертого правила вывода (*), позволяющего при условии построения доказательства формулы A^* считать доказанной также саму формулу A при условии, что A сформулирована в языке L_n . При этом понятия доказательства и вывода из посылок остаются стандартными. Обозначения $\vdash_{АИН^\circ} A$ и $\vdash_{КИП^\circ} A$ указывают на доказуемость формулы A в $АИН^\circ$ и в $КИП^\circ$ (классическом исчислении предикатов первого порядка в языке L°) соответственно. Назовем использование правила вывода (*) в доказательстве (выводе) формулы A *существенным*, если A не доказуема (не выводима) без применения (*).

Замечание 1. Отметим, что в $АИН^\circ$ будут доказуемы и формулы, не являющиеся формулами языка L_n .

Например, $\vdash_{АИН^\circ} \forall x (P^\circ(x) \rightarrow P^\circ(x))$, $\vdash_{АИН^\circ} \exists x (nP^\circ(x) \vee \neg nP^\circ(x))$, $\vdash_{АИН^\circ} \forall x ((P^\circ(x) \rightarrow P^\circ(x)) \rightarrow (nP(x) \rightarrow nP(x)))$ и т.д. Однако для нас с содержательной стороны интересны лишь формулы языка L_n , тогда как формулы, построенные с использованием символов из $L^\circ - L_n$, имеют сугубо техническое значение, призванное обеспечить построение доказательств формул языка L_n .

С учетом сделанного замечания сформулируем несколько результатов, касающихся свойств построенного исчисления.

Предложение 0.

(а). Множество n -общеэзначимых формул является консервативным расширением множества общеэзначимых формул.

(б). Формула A языка L_n n -общеэзначима тогда и только тогда, когда формула A^* доказуема в классическом исчислении предикатов первого порядка.

Доказательство пунктов (а) и (б) содержится в работе [С.н.].

Предложение 1. Если $\vdash_{АИН^\circ} A$, то A n -общеэзначима.

Проверка n -общеэзначимости тавтологий, аксиом $\forall x A(x) \rightarrow A(t)$ и $A(t) \rightarrow \exists x A(x)$ и того, что стандартные правила вывода

сохраняют н-общезначимость, осуществляется так же, как в классическом случае проверка общезначимости, и потому тривиальна.

Осталось рассмотреть 4-ое правило (*). Осуществим индукцию по длине доказательства и по числу применений в нем правила (*). В качестве базиса индукции возьмем такие доказательства, в которых правило (*) существенно использовалось только на последнем шаге. Это означает, что доказательство посылки A^* правила (*) проводилось в классическом исчислении предикатов первого порядка, обеспечивающем переходы от общезначимых формул к общезначимым. Тем самым $\vdash_{\text{КИП}} A^*$ и формула A^* общезначима. Но всякая общезначимая формула по пункту (а) предложения 0 будет н-общезначимой. Поэтому в базисном случае осуществлялись переходы от н-общезначимых формул к н-общезначимым формулам. На последнем шаге имеем $\vdash_{\text{АИН}} A$. По пункту (b) предложения 0 формула A также будет н-общезначимой.

Допустим теперь, что доказательство длины m содержит n применений правила (*). По индукционному предположению все входящие в доказательство формулы н-общезначимы. Если шаг $m+1$ состоит в применении аксиомы или правила вывода классического исчисления предикатов, то формула номер $m+1$ также будет н-общезначимой. Если же шаг $m+1$ состоит в $n+1$ применении правила (*), то на шаге m мы доказали в АИН° формулу A^* , которая, по индукционному предположению, н-общезначима. Поскольку A^* – формула первогопорядкового языка классической логики предикатов L° , в силу пункта (а) предложения 0 A^* является общезначимой формулой. Отсюда A^* доказуема в классическом исчислении предикатов первого порядка (т.е. $\vdash_{\text{КИП}} A^*$). По пункту (b) предложения 0 формула A будет н-общезначимой, что и требовалось.

Следствие 1. Исчисление АИН° непротиворечиво.

Последнее утверждение можно усилить:

Следствие 2. Множество теорем исчисления АИН° является консервативным расширением множества теорем классического первогопорядкового исчисления КИП° .

В противном случае нашлась бы теорема $\vdash_{\text{АИН}^\circ} A$, сформулированная в первомпорядковом языке L° , для которой неверно, что $\vdash_{\text{КИП}^\circ} A$. Но тогда формула A не является общезначимой и, следовательно, не является н-общезначимой, что противоречит предложению 1.

Предложение 2. Если формула A языка L_n н-общезначима, то $\vdash_{\text{ИН}^\circ} A$.

Если n -общезначимая формула A является формулой первого порядкового языка L , то A общезначима (пункт (а) предложения 0). Следовательно, $\vdash_{\text{АИН}^\circ} A$, поскольку АИН° содержит КИП $^\circ$, а КИП $^\circ$ содержит КИП (классическое исчисление предикатов в языке L).

Если n -общезначимая формула A языка L_n содержит вхождения оператора « n », то A^* будет доказуема в КИП $^\circ$ (пункт (b) предложения 0). Следовательно, $\vdash_{\text{АИН}^\circ} A$, поскольку АИН° содержит КИП $^\circ$.

Предложения 1 и 2 устанавливают непротиворечивость и полноту исчисления АИН° относительно языка L_n и семантики неопределенности.

Замечание 2. Предположим, что $\vdash_{\text{АИН}^\circ} A$, причем при доказательстве A существенно использовалось правило (*). Тогда формула A будет n -общезначимой в силу предложения 1. Однако в АИН° невозможно (из-за ограничения на применение правила (*)) доказать n -общезначимую формулу A° , полученную из A заменой каждого атомарного предикатного символа P языка L на атомарный предикатный символ P° языка L° . Поэтому, хотя всякая теорема исчисления АИН° n -общезначима, обратное неверно, если n -общезначимость рассматривать на всем множестве формул данного исчисления, которое строится в языке $L_n \cup L^\circ$. Но, как уже указывалось в замечании 1, мы интересуемся только фрагментом L_n .

Предложение 3. Если A – формула языка L_n , то $\vdash_{\text{АИН}^\circ} (\neg n n A)$.

Покажем, что $\vdash_{\text{АИН}^\circ} (\neg n n A)$. В предположении, что в A^* не все предикатные символы отмечены, имеем $(\neg n n A)^* = \neg (n n A)^* = \neg [n((A^* \& \neg A^* \setminus *) \vee (\neg A^* \& A^* \setminus *))]^*$. Так как в полученной формуле все предикатные символы отмечены, обозначим подчеркнутую часть через $\underline{A}$. Тогда $\neg [n \underline{A}]^* = \neg [\underline{A} \& \neg \underline{A}]$. Но формула вида $\neg [A \& \neg A]$ доказуема. Если же в A^* все предикатные символы отмечены, имеем $(\neg n n A)^* = \neg (n n A)^* = \neg [n(A^* \& \neg A^*)] = \neg [(A^* \& \neg A^*) \& \neg (A^* \& \neg A^*)]$, что вновь доказуемо.

Предложение 4. Если A и B – формулы языка L_n , то $\vdash_{\text{АИН}^\circ} (n(A \sqcap B) \rightarrow (nA \vee nB))$.

Если в A^* и в B^* все предикатные символы отмечены, то $(n(A^* \sqcap B^*))^*$ преобразуется в противоречивую формулу $(A^* \sqcap B^*) \& \neg (A^* \sqcap B^*)$, а из противоречия вытекает все, что угодно. Предположим, что в A^* содержатся неотмеченные предикатные символы, а в B^* все они отмечены. Тогда $(n(A \sqcap B) \rightarrow (nA \vee nB))^* = (n(A \sqcap B))^* \rightarrow (nA \vee nB)^* = [((A^* \sqcap B^*) \& \neg (A^* \setminus * \sqcap B^*)) \vee (\neg (A^* \sqcap B^*) \& (A^* \setminus * \sqcap B^*))] \rightarrow [((A^* \& \neg A^* \setminus *) \vee (\neg A^* \& A^* \setminus *)) \vee (B^* \& \neg B^*)]$. Отбрасывая противоречивый дизъюнктивный член, полу-

чаем $[(A^* \sqcap B^*) \& \neg(A^* \setminus^* \sqcap B^*)] \vee [\neg(A^* \sqcap B^*) \& (A^* \setminus^* \sqcap B^*)] \rightarrow [(A^* \& \neg A^* \setminus^*) \vee (\neg A^* \& A^* \setminus^*)]$. Эта формула является тавтологией независимо от того, какой конкретно бинарной булевой связкой является $\sqcap$. Предположим теперь, что в A^* все предикатные символы отмечены, а в B^* не все. Тогда (снова отбрасывая противоречивый дизъюнкт в консеквенте) $(\neg(A \sqcap B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B))^* = [[(A^* \sqcap B^*) \& \neg(A^* \sqcap B^* \setminus^*)] \vee [\neg(A^* \sqcap B^*) \& (A^* \sqcap B^* \setminus^*)]] \rightarrow [(B^* \& \neg B^* \setminus^*) \vee (\neg B^* \& B^* \setminus^*)]$, опять получаем тавтологию независимо от $\sqcap$. Наконец, если и в A^* , и в B^* есть неотмеченные предикатные символы, имеем $(\neg(A \sqcap B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B))^* = [[(A^* \sqcap B^*) \& \neg(A^* \setminus^* \sqcap B^* \setminus^*)] \vee [\neg(A^* \sqcap B^*) \& (A^* \setminus^* \sqcap B^* \setminus^*)]] \rightarrow [[(A^* \& \neg A^* \setminus^*) \vee (\neg A^* \& A^* \setminus^*)] \vee [(B^* \& \neg B^* \setminus^*) \vee (\neg B^* \& B^* \setminus^*)]]$. Последняя импликация вновь является тавтологией.

Предложение 5. $\vdash_{\text{АИН}^\circ} (\neg \exists x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x))$.

Рассмотрим $\neg \exists x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$. Имеем $(\neg \exists x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x))^* = (\neg \exists x P(x))^* \rightarrow \exists x (\neg P(x))^* = [(\exists x P(x) \& \neg \exists x P^\circ(x)) \vee (\neg \exists x P(x) \& \exists x P^\circ(x))] \rightarrow \exists x [(P(x) \& \neg P^\circ(x)) \vee (\neg P(x) \& P^\circ(x))]$. Последняя формула доказуема в логике предикатов, откуда

$$\vdash_{\text{АИН}^\circ} \neg \exists x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x).$$

Предложение 6. Формулы $\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x)$, $\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$, $\neg \forall x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$ не являются доказуемыми в АИН° .

Рассмотрим формулу $\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x)$ и n -структуру, в которой имеются два возможных мира, на которых интерпретируется предикатный символ P . Пусть в первом мире $F_1(P) = S$ и $S \neq \emptyset$, а во втором мире $F_2(P) = S'$, причем $S \subset S'$ и $S \neq S'$. Тогда теоретико-множественная разность $S' - S$ непуста. Элемент из $S' - S$ это тот самый x , который не обладает свойством P в первом мире, но обладает этим свойством во втором, обеспечивая истинность антецедента $\exists x \neg P(x)$. Однако консеквент $\neg \exists x P(x)$ в данной n -структуре ложен, поскольку утверждение $\exists x P(x)$ истинно в каждом из миров. Таким образом, $\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x)$ не является n -общезначимой. По предложению 1, формула $\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x)$ не является теоремой АИН° .

Преобразуем формулу $\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$. Получим $(\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x))^* = \forall x (\neg P(x))^* \rightarrow (\neg \forall x P(x))^* = \forall x [(P(x) \& \neg P^\circ(x)) \vee (\neg P(x) \& P^\circ(x))] \rightarrow [(\forall x P(x) \& \neg \forall x P^\circ(x)) \vee (\neg \forall x P(x) \& \forall x P^\circ(x))]$. Последняя импликация не доказуема в исчислении предикатов, так что $\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$ не будет n -общезначимой. По предложению 1, $\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$ не является теоремой АИН° .

Наконец, рассмотрим формулу $\neg \forall x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$. Снова возьмем n -структуру с двумя мирами. Положим теперь $S = U$, $S' \subset S$ и $S \neq S'$. Утверждение о том, что все объекты обладают свойст-

вом P , становится неопределенным: оно истинно в первом мире и ложно во втором. Таким образом, антецедент $\neg\forall xP(x)$ принимает значение «истинно». Но консеквент $\forall x\neg P(x)$ оказывается ложным в этой $\neg$ -структуре, поскольку элементы из $S \cap S'$ обладают свойством P в каждом из миров и потому определенно обладают свойством P . Значит, не всем x неопределенно присуще P , вопреки консеквенту. Поэтому формула $\neg\forall xP(x) \rightarrow \forall x\neg P(x)$ также не будет $\neg$ -общезначимой и, следовательно, $\neg\forall xP(x) \rightarrow \forall x\neg P(x)$ не доказуема в АИН° согласно предложению 1.

Предложение 7. *Не существует формулы A такой, что $\vdash_{\text{АИН}^\circ} \neg A$.*

В [С.н.] было показано, что не существует формулы A в языке L_n такой, что $\neg A$ $\neg$ -общезначима. Следовательно, по предложению 1, ни одна формула вида $\neg A$ не является доказуемой в АИН° .

УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В РАМКАХ ЯЗЫКОВ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛОГИК¹

Abstract. *Classical logic can not be applied in some philosophical reasonings, especially in those which contain contradictory, antinomical, paradoxical (true and false), senseless (neither true nor false), nonproved statements. So the problem of applicability of the classical logic and other logics to various statements may be important.*

Let L_1 and L_2 be two defined in usual way propositional logics such that the language for L_1 is a sublanguage for L_2 .

*Logic L_1 with its connectives $\{C_1, \dots, C_n\}$ is called **applicable** to wff A in L_2 , (symbolically: $Ap(L_1\{C_1, \dots, C_n\}, A, L_2)$) iff for any theorem T in L_1 each formula T_1 obtained by substitution of A for all occurrences same variables in T is deducible in L_2 .*

The conditions of applicability of propositional classical logic will be defined in the languages of the intuitionistic logic, Łukasiewicz's logic L_3 , Kleene's logic, enriched by full equivalence.

The conditions of applicability of propositional classical logic, Łukasiewicz's logic, Kleene's logic will be defined in the language of the logic FL4 with falsehood operator.

В философских рассуждениях, использующих как двужначные высказывания, так и противоречивые (антиномичные или парадоксальные, одновременно истинные и ложные), бессмысленные (ни истинные, ни ложные) или недоказуемые предложения, не всегда применима классическая логика. Поэтому важно исследовать условия применимости классической логики, а также других логик к различным философским (и не только философским) рассуждениям.

Для того чтобы иметь возможность сформулировать эти условия в рамках заданного логического языка, определим понятие применимости некоторой логики к некоторой правильно построенной формуле A этого языка.

Пусть L_1 и L_2 есть две стандартно определяемые пропозициональные логики такие, что язык логики L_1 есть подязык логики L_2 .

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 99-03-00120.

D1. Будем говорить, что логика L_1 со связками $\{C_1, \dots, C_n\}$ применима к ппф A языка логики L_2 (символически $Ap(L_1\{C_1, \dots, C_n\}, A, L_2)$), если и только если для любой теоремы T логики L_1 всякая формула T_i , являющаяся результатом подстановки A вместо всех вхождений одной или нескольких пропозициональных переменных в T , доказуема в L_2 .

Таким образом, условия применимости некоторой логики L_1 к некоторой ппф A формулируются относительно логики L_2 , в рамках языка которой можно выразить и обосновать эти условия. Необходимо отметить, что сопоставление языков L_1 и L_2 проводится на синтаксическом уровне, в то время как содержательная интерпретация связок и формул этих языков может существенно отличаться.

Одной из предпосылок построения неклассических логик являлась критика классического закона исключенного третьего. Существует несколько формулировок этого закона, эквивалентных в рамках классической логики и различающихся по силе для неклассических логик.

Так, Аристотель формулирует закон исключенного третьего следующим образом: "Оба утверждения A и не- A не могут быть одновременно ложными".

Условимся предложения вида " A ложно", " A истинно" символически записывать как FA , TA соответственно.

Тогда аристотелевская формулировка символически будет выглядеть как $\sim (FA \wedge F\sim A)$.

В другой формулировке, называемой *tertium non datur*, закон исключенного третьего выражается так: "Одно из утверждений A или не- A должно быть истинным". Символически $(TA \vee T\sim A)$

Лукасевиц различает принцип исключенного третьего и "принцип, что *каждое высказывание либо истинно, либо ложно*, ... Этот принцип я называю *принципом двужначности*" [5].

Закон (принцип) бивалентности, или двужначности, запишем символически как $(TA \sqcup FA)$, где $\sqcup$ символ исключающей дизъюнкции. Часто его записывают как $(TA \vee FA)$ [3]. Эти формулы эквивалентны друг другу при наличии соответствующего закона непротиворечия.

В языке классической пропозициональной логики закон исключенного третьего формулируется как $(A \vee \sim A)$.

Для закона непротиворечия также имеются различные формулировки. Так, Н.Васильев различает две формулировки закона непротиворечия. Первая формулировка закона непротиворечия, относящегося к металогике, гласит: "Нельзя объявлять одно и то же суждение истинным и ложным" [1]. Символически $\sim (TA \wedge FA)$.

Вторая формулировка закона непротиворечия гласит: “Закон противоречия высказывает несовместимость утверждения и отрицания” [1]. Символически $\sim (A \wedge \sim A)$. Последняя формула соответствует формулировке этого закона в классической пропозициональной логике.

Установим условия применимости пропозициональной классической логики PCL к некоторым ппф языков ряда неклассических логик, причем PCL будет играть роль логики L_1 , а неклассические логики будут играть роль логики L_2 . В качестве последних будут выступать интуиционистская логика IL, трехзначная логика Лукасевича, логика Клини, логика FL4 с оператором ложности.

1. Условия применимости PCL к некоторым ппф языков неклассических логик

в рамках языка интуиционистской логики

Пусть символами связок интуиционистской логики IL будут следующие: $\neg, \wedge, \vee, \supset$.

Одним из условий применимости PCL к некоторой ппф A языка IL является доказательство формулы $(A \vee \neg A)$ в IL. Примером такой ппф A могут служить ппф вида $\neg\neg B$. Сформулируем теорему для более слабого условия, чем $(A \vee \neg A)$.

T1.1 Если ппф $(\neg\neg A \supset A)$ доказуема в IL,

то $\text{Ap}(\text{PCL}\{\neg, \supset\}, A, \text{IL})$.

Также формулой, фигурирующей в условии применимости PCL, может служить закон Пирса.

T1.2 Если ппф $((A \supset B) \supset A) \supset A$ доказуема в IL,

то $\text{Ap}(\text{PCL}\{\neg, \supset\}, A, \text{IL})$.

Интересно было бы взять в качестве условия применимости PCL доказательство более слабой формулы, чем закон снятия двойного отрицания или закон Пирса.

в рамках языка логики Лукасевича

Пусть символами связок трехзначной логики Лукасевича L_3 будут следующие: $\sim, \rightarrow^L$. Для удобства сопоставления символов языка L_3 символам других логических языков и установления сходства их содержательной интерпретации заменим символы операторов необходимости N и возможности M соответственно на символы операторов истинности T и неложности $\sim F$. Возможность такой немодальной интерпретации L_3 была обоснована в [7].

Естественно, что доказуемость формулы $(TA \sqcup FA)$, выражающей принцип бивалентности (который был отброшен Лукасевичем при построении своей трехзначной логики), может служить условием применимости PCL.

Сформулируем теорему для более слабой формулы, чем $(TA \sqcup FA)$.

T2. Если ппф $(TA \vee FA)$ доказуема в L_3 , то $Ap(PCL\{\sim, \rightarrow^L\}, A, L_3)$.

Примерами такой ппф A , входящей в формулу, фигурирующую в условии применимости PCL, могут служить все ппф вида $(\sim B \rightarrow^L B)$.

Также условием применимости PCL может служить доказуемость формул $(A \rightarrow^L TA)$ и $(TA \equiv A)$. Последнюю можно рассматривать как упрощенное выражение T -схемы Тарского.

Еще одним условием применимости PCL может служить доказуемость формулы $\sim(A \wedge \sim A)$, выражающей закон непротиворечия, который не имеет места в логике Лукасевича. Отметим, что в то же время в логике Лукасевича имеет место закон непротиворечия в другой формулировке: $\sim(TA \wedge FA)$.

в рамках языка логики Клини, обогащенной связкой полной эквивалентности

Будем рассматривать логику Клини со связками в сильном смысле [4], обогащенную связкой полной эквивалентности, $K_3^s(\cong)$.

Пусть символами связок этой логики будут следующие: $\neg, \vee, \&, \rightarrow, \equiv, \cong$.

Так как логика Клини с сильными связками, обогащенная связкой полной эквивалентности, $K_3^s(\cong)$ функционально эквивалентна логике Лукасевича L_3 (см. [8]), то для нее имеют место теоремы с аналогичными условиями применимости PCL.

T3. Если ппф $(A \rightarrow TA)$ доказуема в $K_3^s(\cong)$, то $Ap(PCL\{\neg, \rightarrow\}, A, K_3^s(\cong))$.

Примерами такой ппф A могут служить все ппф вида $(B \& TB)$.

в рамках языка логики FL4 с операторами истинности и ложности

Общей чертой неклассических логик является то, что в них не соблюдаются некоторые законы классической логики. В то же время для ряда формул определенного вида, как, например, для ппф вида $\neg\neg p$ интуиционистской логики, для ппф вида Np, Mp логики Лукасевича, имеет место классическая логика, что позво-

ляет выделить в этих логиках и рассматривать два уровня, подобно тому, как предлагал Н.Васильев [1].

Будем использовать разную логику для высказываний A и для высказываний об их истинности TA или ложности FA .

Также перейдем от рассмотрения логических связок как двузначных пропозициональных функций к заданию условий истинности для связок в языке логики.

В случае классической логики эти способы задания связок эквивалентны.

Так, Д.Гильберт и П.Бернайс в [2] рассматривают «конъюнкцию как функцию двух аргументов A и B , каждый из которых может принимать два значения "истина" и "ложь"». Вот еще несколько их высказываний на эту тему: «Таким образом, условие истинности заключается: для конъюнкции $A \& B$ в том, что A истинно и B истинно, для дизъюнкции $A \vee B$ в том, что A истинно или B истинно», «импликация $A \rightarrow B$ двух высказываний является ложной лишь тогда, когда A истинно, а B ложно; в остальных случаях она является истинной».

В неклассическом случае из классической формулировки условий истинности для связок не следуют их классические свойства. Так, из условий истинности для дизъюнкции

$$T(A \vee B) \equiv TA \vee TB,$$

$$F(A \vee B) \equiv FA \wedge FB$$

не следует (без дополнительных аксиом) закон бивалентности

$$(TA \sqcup FA).$$

Последовательной реализацией такого двухуровневого подхода является логика FL4 с операторами истинности T и ложности F .

Основными содержательными положениями логики FL4 [7,8] являются:

формула « FA » содержательно означает «Предложение " A " ложно». Высказывание FA о ложности предложения A двузначно и подчиняется законам классической логики PCL, в то время как не всякое предложение A должно быть либо истинным, либо ложным.

Условия истинности для импликации задаются традиционно (см. выше) и формулируются так:

$$T(A \rightarrow B) \equiv FA \vee TB,$$

$$F(A \rightarrow B) \equiv TA \wedge FB.$$

Несмотря на классическую формулировку условий истинности для импликации для последней в логике FL4 не будут иметь места классические законы логики, включая закон тождества

$(A \rightarrow A)$.

Сформулируем условия применимости классической логики PCL в языке логики FL4 (см. также [6, 8]).

Язык логики FL4 содержит две исходные логические константы: F , $\rightarrow$ (соответственно оператор ложности² и импликацию).

Имеем следующие теоремы применимости.

Т 4.1. Если ппф $(TA \sqcup FA)$ доказуема в FL4,
то $\text{Ap}(\text{PCL}\{F, \rightarrow\}, A, \text{FL4})$.

Т 4.2. Если ппф $(TA \leftrightarrow A)$ доказуема в FL4,
то $\text{Ap}(\text{PCL}\{F, \rightarrow\}, A, \text{FL4})$.

Содержательно эти теоремы означают, что условиями применимости классической логики к формуле A (в рамках логики $\text{FL4}\{F, \rightarrow\}$ с исходными связками: оператором ложности и импликацией) являются доказательства закона бивалентности или схемы Тарского, имеющие место для этой формулы A .

Также формулой, фигурирующей в условии применимости PCL, может служить закон тождества $(A \rightarrow A)$.

Т 4.3. Если ппф $(A \rightarrow A)$ доказуема в FL4,
то $\text{Ap}(\text{PCL}\{F, \rightarrow\}, A, \text{FL4})$.

Примером такой ппф A , для которой соблюдаются условия применимости, могут служить как префиксированные ппф вида FB , так и смешанные $((FB \wedge FTB) \rightarrow B)$.

В языке логики FL4 можно сформулировать не только классическую логику PCL, но и логики Лукасевича L_3 и Клини K_3^s (см. [7, 8]). Поэтому найдем в свою очередь в этом языке условия применимости логики Лукасевича и логики Клини, обогащенной связкой полной эквивалентности, $K_3^s (\cong)$.

2. Условия применимости логик L_3 и $K_3^s (\cong)$ к некоторым ппф языка логики FL4

Связки логики Лукасевича выразимы в языке логики FL3N, которая является подлогикой, имеющей трехзначную интерпретацию с истинностными значениями T, F, N, логики FL4 (см. [7]).

Условия применимости логики Лукасевича L_3 :

Т 5. Если ппф $\sim (TA \wedge FA)$ доказуема в FL4,
то $\text{Ap}(L_3\{\sim, \rightarrow^L\}, A, \text{FL4})$.

² Для удобства сопоставления различных языков логик, символ оператора ложности $-$, употребляемый в [7, 8], здесь заменен на F . Отметим также, что в FL4 различаются отрицание и оператор ложности, которые в классической логике отождествляются.

То есть условием применимости L_3 может служить доказуемость формулы $\sim (TA \wedge FA)$, выражающей закон непротиворечия.

Примерами такой ппф A могут служить все ппф вида $(B \ \& \ FFB)$.

Связки логики Клини выразимы в языке логики FL3N (см. [8]).

Условия применимости логики Клини со связками в строгом смысле, обогащенной связкой полной эквивалентности, $K^s_3 (\cong)$:

Т 6. Если ппф $(TA \rightarrow A)$ доказуема в FL4,

то $Ap(K^s_3 (\cong) \{ \neg, \rightarrow, \cong \}, A, FL4)$.

Примерами такой ппф A могут служить все ппф вида $(A \rightarrow TA)$.

В заключение приведем ряд формул, фигурирующих в условиях применимости классической логики PCL:

$(\neg\neg A \supset A)$ в рамках языка интуиционистской логики;

$(TA \vee FA)$ в рамках языка логики Лукасевича L_3 ;

$(A \rightarrow TA)$ в рамках языка логики Клини, обогащенной связкой полной эквивалентности, $K^s_3 (\cong)$;

$(TA \sqcup FA)$ в рамках языка логики FL4 с оператором ложности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Н.А. Воображаемая логика (конспект лекции) // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М. 1989.
2. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики М., 1979.
3. Карпенко А.С. Фатализм и случайность будущего: логический анализ М., 1990.
4. Клини С.К. Введение в метаматематику М., 1957.
5. Лукасевич Я. О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190-205.
6. Павлов С.А. Некоторые условия двузначности в исчислении предикатов истинности и ложности // Системные методы анализа научного знания. М., 1986.
7. Павлов С.А. Логика ложности как обобщение трехзначной логики Лукасевича // Логические исследования. М., 1998. Выпуск 5. С. 206-220.
8. Павлов С.А. Метапредикат истинности и логика ложности // Логические исследования. М., 1999. Выпуск 6. С. 170-185.

П.И. Быстров

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ПОЗИТИВНЫХ ЛОГИК, СВОБОДНЫХ ОТ «ПАРАДОКСОВ» МАТЕРИАЛЬНОЙ ИМПЛИКАЦИИ¹

Abstract. *Method of analytic tableaux for implicative and positive relevant logics is developed. It is based on certain modification of the method of analytic tableaux elaborated by Beth, Hintikka, Smullyan and Fitting. This modification includes a simple signing of negative occurrences of subformulae in a formula and corresponding definition of closed analytic tableau. The method proposed is used to construct decidable propositional relevant calculi without negation, namely the systems $RA_{\supset}$ and RA_{pos} .*

Аналитические таблицы, ведущие свое начало от известного табличного метода Бета, являются эффективным методом представления логических систем и доказательства важнейших метатеорем об этих системах. Помимо простоты и интуитивной ясности этого метода его несомненным достоинством является то, что в нем выражена тесная взаимосвязь синтаксического и семантического аспектов анализа логических исчислений, чисто конструктивного и теоретико-модельного способов доказательства метатеорем. Однако при применении аналитических таблиц в области неклассических логик возникают существенные трудности. В данной статье сделана попытка преодолеть некоторые из этих трудностей, касающихся релевантных исчислений.

Предлагаемый далее метод построения аналитических таблиц ориентирован на системы с неклассической импликацией, которой присущи свойства так называемой релевантной импликации. Идея данного метода восходит к работам Генцена и результатам Я.Хинтикки, Р.Смаллиана и М.Фиттинга.

В дальнейшем при построении аналитических таблиц без пояснений используются стандартные язык пропозициональной логики, определения формулы и подформулы, а также исходные понятия, введенные в главах I-II работы [1], за исключением тех случаев, когда требуются специальные определения.

Пусть $\supset$ означает релевантную импликацию (поскольку $\rightarrow$ применяется для записи секвенций), а $\&$ и $\vee$ – знаки конъюнкции

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 00-03-00168.

и дизъюнкции соответственно. Элементарной формулой (подформулой) называется формула (подформула), не содержащая логических знаков, т.е. пропозициональная переменная. Используя обычные понятия положительной и отрицательной подформулы данной формулы, применим следующий способ последовательной индексации отрицательных *вхождений* элементарных подформул в импликативную формулу α . Всем отрицательным вхождениям любой *элементарной* подформулы A в формулу α приписывается нижний индекс в виде целого положительного числа 1, 2, ... Индексация производится слева направо. Первому (слева) вхождению A в α не приписывается никакого индекса, второму вхождению A в α приписывается индекс 1, третьему вхождению A в α приписывается индекс 2 и т.д. Импликативная формула называется *индексированной*, если все отрицательные вхождения ее элементарных подформул индексированы. Далее речь пойдет только об индексированных формулах, которые будут обозначаться буквами $\alpha, \beta, \dots$ (Заметим, что индексация вхождений элементарных подформул в формулы, не содержащие связки $\supset$, вообще не нужна. Индексов может не быть и в импликативных формулах, например, в формуле $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$. Такие формулы для удобства будут называться *чистыми*. В общем случае множество чистых формул считается подмножеством множества индексированных формул. Очевидно, что индексы в явном виде появляются в формуле тогда и только тогда, когда в ней имеется n отрицательных вхождений ($n > 1$) какой-либо элементарной подформулы.)

Кроме того, мы будем оперировать только *означенными* формулами, т.е. индексированными формулами, которым приписан префикс T или F . Семантический смысл этих префиксов в данном случае не уточняется (можно считать, например, что $T\{\alpha\}$ означает « α выполнимо», а $F\{\alpha\}$ - « α невыполнимо»). При записи означенных формул, не содержащих логических связок, фигурные скобки будут опускаться.

Пример означенной формулы (которая считается индексированной и не является чистой): $F\{(A \supset B) \supset (A \supset (A_1 \supset B))\}$.

Принимаются следующие схемы правил построения аналитических таблиц для означенных формул.

$$\begin{array}{cc}
 \text{TI} & \frac{T\{\alpha \supset \beta\}}{F\{\alpha\} \mid T\{\beta\}} \\
 \text{FI} & \frac{F\{\alpha \supset \beta\}}{T\{\alpha\} \\ F\{\beta\}}
 \end{array}$$

FC	$\frac{F\{\alpha \& \beta\}}{F\{\alpha\} \mid F\{\beta\}}$	TC	$\frac{T\{\alpha \& \beta\}}{T\{\alpha\} \mid T\{\beta\}}$
TD	$\frac{T\{\alpha \vee \beta\}}{T\{\alpha\} \mid T\{\beta\}}$	FD	$\frac{F\{\alpha \vee \beta\}}{F\{\alpha\} \mid F\{\beta\}}$

Порядок формул в заключениях конкретных применений перечисленных правил существенен. Например, применение правила TI, посылкой которого является формула $T\{\alpha \supset \beta\}$ имеет в точности указанный выше вид, а не

$$\frac{T\{\alpha \supset \beta\}}{T\{\beta\} \mid F\{\alpha\}}$$

Аналогичным образом, применение правила к формуле $T\{\alpha \& \beta\}$ должно проводиться в точности по схеме ТС, а не по схеме

$$\frac{T\{\alpha \& \beta\}}{T\{\beta\} \mid T\{\alpha\}}$$

По этой схеме данное правило применяется к формуле $T\{\beta \& \alpha\}$.

Для формулировки системы аналитических таблиц, порождающей множество доказуемых формул позитивной пропозициональной релевантной логики, вводятся следующие определения.

Определение 1. Аналитическая таблица для означенной формулы α — это упорядоченное диадическое дерево, точками которого являются формулы (вхождения формул). Построение дерева начинается с формулы α . Далее предполагается, что T — уже построенная для α таблица, а β — ее конечная точка. Тогда можно расширить T , применяя к β одно из правил TI, FI, TC, FC, TD, FD. Точка дерева, идентичная α , называется *начальной точкой*, или *началом*, данного дерева. Точки, которыми завершаются ветви дерева, называются *конечными точками* данного дерева (соответственно и его ветвей).

Это определение таблицы для α можно уточнить следующим образом. Для любых двух деревьев T_1 и T_2 , точками которых являются вхождения формул, T_2 называется *прямым расширением* T_1 ,

если T_2 можно получить из T_1 за счет применения одного из правил TI, FI, TC, FC, TD, FD. Тогда T является таблицей для α , если и только если существует конечная последовательность $T_1, T_2, \dots, T_n = T$, где T_1 - состоящее из одной точки дерево, началом которого является α , и для каждого $i < n$, T_{i+1} является прямым расширением T_i .

Кроме того, построение таблицы выполняется строго систематически, т.е. правило сначала применяется к неэлементарной точке, которая непосредственно следует за начальной точкой, затем к следующей неэлементарной точке и т.д.

Пример (аналитической таблицы для формулы $F\{A \supset (B \supset (A \& B))\}$).

1. $F\{A \supset (B \supset (A \& B))\}$
2. TA (1)
3. $F\{B \supset (A \& B)\}$ (1)
4. TB (3)
5. $F\{A \& B\}$ (3)
6. FA (5) | 7. FB (5)

Цифры, стоящие слева от формул, используются для обозначения отдельных точек таблицы, а цифры в скобках, стоящие справа от формул, указывают, из какой вышерасположенной точки получена данная точка. В реальной таблице все эти цифры не нужны. В данном дереве две ветви. Его началом является точка 1, конечными точками - 6 и 7, а 5 - точка ветвления.

Определение 2. Ветвь θ таблицы T *завершена*, если ни к одной ее точке не применимо ни одно из правил построения таблиц. Ветвь θ таблицы T , начинающейся формулой α , считается *замкнутой по элементарной формуле* A_i (по вхождению элементарной формулы A_i), если и только если в θ входят элементарные формулы TA_i и FA_i (где i - индекс или пустой знак), являющиеся подформулами α .

Поскольку любая формула α имеет конечное число подформул, очевидно, что каждая ветвь таблицы, начинающейся с $F\{\alpha\}$, может быть завершена и при этом может оказаться замкнутой или незамкнутой по какому-то вхождению элементарной подформулы формулы α . Если все ветви таблицы завершены, будем говорить, что данная таблица завершена. Понятно, что конечными точками завершенной таблицы T для формулы α являются вхождения элементарных подформул формулы α .

Определение 3. Вхождение формулы A_i в ветвь θ таблицы T , начинающейся формулой α , называется *существенной точкой* данной таблицы, если A_i получено по правилу FI; в противном случае вхождение A_i в θ считается *несущественной точкой*.

В соответствии с данным определением отрицательная элементарная подформула A_i формулы α считается существенной, если она графически совпадает с существенной точкой таблицы T , начинающейся формулой α , и несущественной, если она графически совпадает с несущественной точкой этой таблицы. Таким образом, все множество отрицательных элементарных подформул формулы α разбивается на два непересекающихся подмножества существенных и несущественных элементов.

Определение 4. Ветвь θ таблицы T , начинающейся формулой α , называется *фиктивно замкнутой* по вхождению элементарной формулы A_i , если и только если в θ (а) между точками TA_i и FA_i , по крайней мере одна из которых несущественна, есть вхождение существенной формулы, подформулой которой является A_i ; или (б) точки TA_i и FA_i существенны, но ни одна из них не является конечной точкой данной ветви.

Предполагается, что из принципа систематического построения таблиц ясно, в каком смысле применяются к точкам ветви понятия «находится между», «предшествует», «непосредственно предшествует» и т.п. Разумеется, всем таким понятиям можно дать строгие определения.

Определение 5. Множество всех элементарных отрицательных подформул S формулы α *исчерпано*, если по каждому существенному элементу S замкнута хотя бы одна из завершенных ветвей таблицы T , начинающейся с α .

Определение 6. Таблица T , начинающаяся формулой α , *замкнута*, если и только если (а) замкнута каждая завершенная ветвь этой таблицы; (б) множество элементарных отрицательных подформул формулы α исчерпано; (с) ни одна ветвь данной таблицы не замкнута фиктивно.

Согласно данному определению, таблица

1. $F\{(A \& B) \supset A\}$
2. $T\{A \& B\}$ (1)
3. FA (1)
4. TA (2)
5. TB (2)

является замкнутой. Таблица из приведенного ранее примера для формулы $F\{A \supset (B \supset (A \& B))\}$ не замкнута, так как не выполняется пункт (с) определения 6, а таблица

1. $F\{(A \supset (B \supset A))\}$

- | | |
|-----------------------|-----|
| 2. TA | (1) |
| 3. $F\{B \supset A\}$ | (1) |
| 4. TB | (3) |
| 5. FA | (3) |

не замкнута, поскольку не выполняется пункт (b) определения 6.

С помощью предлагаемого метода индексации и построения аналитических таблиц легко установить, например, что можно построить замкнутую таблицу для формулы $F\{(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)\}$, но соответствующие таблицы для формул вида $F\{A \supset (A_1 \supset A)\}$, $F\{A \supset (B \supset A)\}$ и $F\{((A \supset B) \supset A_1) \supset A\}$ не замыкаются.

Исчисление $\mathbf{RA}_{\text{pos}}$ задается правилами TI, FI, TC, FC, TD, FD и определением 6 (с учетом описанного ранее способа индексации отрицательных вхождений элементарных подформул в данную формулу и применения префиксов; эти средства играют вспомогательную роль).

Исчисление $\mathbf{RA}_{\supset}$ задается правилами TI, FI и определением 6 без пункта (с).

Формула α называется *выводимой* в $\mathbf{RA}_{\text{pos}}$ ($\mathbf{RA}_{\supset}$) если в данной системе для нее можно построить замкнутую таблицу T , начинающуюся с $F\{\alpha\}$. Если каждая ветвь таблицы T , начинающейся с $F\{\alpha\}$, завершена, но T содержит по крайней мере одну незамкнутую (фиктивно замкнутую в случае $\mathbf{RA}_{\text{pos}}$) ветвь, формула α не выводима в $\mathbf{RA}_{\text{pos}}$ ($\mathbf{RA}_{\supset}$).

Ясно, что эти пропозициональные исчисления разрешимы. Для проверки формулы α на выводимость достаточно построить завершенную таблицу, начинающуюся с $F\{\alpha\}$. Любую построенную в рассматриваемом языке формулу можно эффективно проверить на выводимость в исчислении $\mathbf{RA}_{\text{pos}}$ ($\mathbf{RA}_{\supset}$).

Рассмотрим систему гильбертовского типа $\mathbf{R}_{\text{pos}}$, заданную схемами аксиом

- A1. $A \supset A$
- A2. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$
- A3. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$
- A4. $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$
- A5. $(A \& B) \supset A$
- A6. $(A \& B) \supset B$
- A7. $((C \supset A) \& (C \supset B)) \supset (C \supset (A \& B))$
- A8. $A \supset (A \vee B)$
- A9. $B \supset (A \vee B)$
- A10. $((A \supset C) \& (B \supset C)) \supset ((A \vee B) \supset C)$

правилами вывода

1. Modus ponens (MP)

$$2. \text{CI} \quad \frac{A \quad B}{A \& B}$$

и следующим стандартным определением вывода.

Вывод есть последовательность формул, каждый член которой является либо частным случаем одной из схем аксиом, либо получен из двух предыдущих членов данной последовательности по одному из правил вывода MP, CI.

Формула α *выводима* в R_{pos} , если в R_{pos} можно построить вывод, конечной формулой которого является α .

Система $R_{\supset}$ получается из R_{pos} отбрасыванием схем аксиом A5-A10.

Системы R_{pos} и $R_{\supset}$ являются соответственно позитивным и импликативным фрагментами известной релевантной системы R .

Теперь рассмотрим вопрос о дедуктивной эквивалентности систем RA_{pos} ($RA_{\supset}$) и R_{pos} ($R_{\supset}$). Можно показать, что если формула α выводима в R_{pos} , то α выводима и в исчислении RA_{pos} . Для этого достаточно установить, что любая формула, полученная на любом шаге построения вывода в R_{pos} , выводима и в системе RA_{pos} .

Замечание. При обосновании дедуктивной эквивалентности рассматриваемых систем предполагается, что в исчислениях гильбертовского типа при необходимости можно применить упомянутый ранее способ индексации отрицательных вхождений элементарных подформул в данную формулу (играющий чисто техническую роль). Интересно, что при этом все аксиомы R_{pos} будут чистыми формулами.

В соответствии с определением вывода в R_{pos} достаточно рассмотреть два следующих случая.

1. Рассматриваемая формула вывода в R_{pos} является частным случаем одной из схем аксиом.

2. Рассматриваемая формула вывода в R_{pos} получена из двух предыдущих формул по одному из правил вывода.

В первом случае легко проверить, что для любого конкретного варианта аксиомной схемы α системы R_{pos} можно построить замкнутую таблицу для $F\{\alpha\}$ в RA_{pos} .

Например, таблица для A10 выглядит следующим образом:

1. $F\{((A \supset C) \& (B \supset C)) \supset ((A \vee B) \supset C)\}$
 2. $T\{(A \supset C) \& (B \supset C)\}$
- (1)

3. $F\{(A \vee B) \supset C\}$ (1)
4. $T\{A \supset C\}$ (2)
5. $T\{B \supset C\}$ (2)
6. $T\{A \vee B\}$ (3)
7. FC (3)
8. FA (4) | 9. TC (4)
10. FB (5) | 11. TC (5) | 12. FB (5) | 13. TC (5)
14. TA (6) | 15. TB (6) 16. TA (6) | 17. TB (6)

Во втором случае простым применением индукции и рассуждением от противного доказываем, что если в RA_{pos} можно построить замкнутые таблицы для формул $F\{A \supset B\}$ и $F\{A\}$ (соответственно $\{A\}$ и $\{B\}$), то можно построить и замкнутую таблицу для формулы $F\{B\}$ (соответственно $F\{A \& B\}$).

Тем самым доказано, что конечная формула любого вывода в R_{pos} выводима и в RA_{pos} .

Значит, для доказательства дедуктивной эквивалентности RA_{pos} и R_{pos} достаточно ответить на вопрос, выводима ли в R_{pos} любая формула, выводимая в RA_{pos} . Сначала рассмотрим импликативные фрагменты этих систем. Поскольку очевидно, что $RA_{\supset}$ является подсистемой системы RA_{pos} , (а $R_{\supset}$ является подсистемой R_{pos}), любая формула, доказуемая в $R_{\supset}$, доказуема и в $RA_{\supset}$. Верно ли то, что любая выводимая в $RA_{\supset}$ формула является выводимой и в $R_{\supset}$?

Используя обычные генценовские понятия секвенции и дерева секвенций, рассмотрим систему, состоящую из основной секвенции вида

$$A \rightarrow A,$$

где A – элементарная формула, и следующего множества схем правил заключения.

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad A, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta} \quad \text{cut}$$

Схемы правил заключения для логических связок:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} \rightarrow \supset; \quad \frac{\Gamma \rightarrow A \quad B, \Delta \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta} \supset \rightarrow;$$

$$\begin{array}{lcl}
\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \rightarrow \vee; & \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Theta} \& \rightarrow; \\
\frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \rightarrow \vee; & \frac{B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Theta} \& \rightarrow; \\
\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \& B} \rightarrow \&; & \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta \quad B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta} \vee \rightarrow;
\end{array}$$

Схемы структурных правил заключения

$$\begin{array}{lcl}
\frac{\Gamma \rightarrow A, A}{\Gamma \rightarrow A} \rightarrow C; & \frac{A, A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta} C \rightarrow. \\
\frac{\Gamma \rightarrow B, A}{\Gamma \rightarrow A, B} \rightarrow P; & \frac{\Delta, A, B, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Delta, B, A, \Gamma \rightarrow \Theta} P \rightarrow. \\
\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, A} \rightarrow w; & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta} w \rightarrow;
\end{array}$$

Во всех схемах Θ – формула или пустая последовательность формул.

Пусть исчисление $RS_{\supset}$ задается основной секвенцией, правилами сечения (cut), $(\rightarrow \supset)$, $(\supset \rightarrow)$, $(\rightarrow C)$, $(C \rightarrow)$, $(\rightarrow P)$, $(P \rightarrow)$ и стандартным определением вывода в генценовских секвенциальных исчислениях.

Для такого исчисления верна теорема об устранении сечения. Ее можно доказать, в частности, методом, предложенным в [2]. Предполагается также, что формулу, являющуюся членом любой секвенции, можно проиндексировать упомянутым ранее способом.

Теперь можно показать, что формула α доказуема в $RA_{\supset}$, если и только если секвенция $\rightarrow \alpha$ доказуема в исчислении $RS_{\supset}$. Для этого достаточно использовать предложенные Р. Смаллианом модифицированные аналитические таблицы (см. [1]), позволяющие элементарным образом преобразовывать выводы в генценовских исчислениях в замкнутые табличные конструкции и обратно. В общем случае верно, что любой (свободный от сечения) секвенциальный вывод в $RS_{\supset}$ можно преобразовать в замкнутую моди-

фицированную аналитическую таблицу (учитывая определение вывода в $RS_{\supset}$ и пункт (b) определения б); и обратно, любую замкнутую модифицированную аналитическую таблицу можно преобразовать в секвенциальный вывод в $RS_{\supset}$. Точнее говоря, верно следующее утверждение.

Секвенция $\rightarrow\alpha$ доказуема в исчислении $RS_{\supset}$, если и только если в $RA_{\supset}$ можно построить замкнутую модифицированную аналитическую таблицу, начинающуюся с $F\{\alpha\}$.

Это значит, что системы $RA_{\supset}$ и $RS_{\supset}$ дедуктивно эквивалентны.

Далее, можно доказать дедуктивную эквивалентность исчисления $RS_{\supset}$ и системы $R_{\supset}$ (для этого достаточно показать, что формула α доказуема в $R_{\supset}$, если и только если секвенция $\rightarrow\alpha$ доказуема в $RS_{\supset}$; подробное доказательство выходит за рамки данной статьи). Таким образом доказывается, что системы $RA_{\supset}$ и $R_{\supset}$ дедуктивно эквивалентны, откуда следует, что система $R_{\supset}$ разрешима. Значит решение вопроса о выводимости любой формулы α в $R_{\supset}$ сводится к механическому построению завершенной таблицы для $F\{\alpha\}$ в $RA_{\supset}$.

Теперь пусть исчисление RS_{pos} задается приведенными ранее основной секвенцией, всеми схемами правил заключения и следующим определением вывода.

Выводом секвенции S в RS_{pos} называется такое дерево секвенций, что для каждого отрицательного вхождения элементарной формулы A_i в формулу, являющуюся членом любой секвенции S_i , входящей в любую ветвь данного дерева, в этой же ветви найдется член основной секвенции, который графически совпадает с A_i .

Как и прежде, предполагается, что все формулы, входящие в секвенции вывода в RS_{pos} , можно проиндексировать указанным ранее способом.

Тогда поставленный ранее вопрос о том, является ли любая выводимая в RA_{pos} формула выводимой и в R_{pos} , решается положительно на основе следующих утверждений.

Утверждение 1. *Для исчисления RS_{pos} верна теорема об устранении сечения.*

Это доказуемо незначительно модифицированным генценовским методом с учетом принятого для RS_{pos} определения вывода.

Утверждение 2. *Если формула α выводима в RA_{pos} , то в RS_{pos} можно построить вывод секвенции $\rightarrow\alpha$.*

Данное утверждение обосновывается тем, что любую, построенную в $\mathbf{RA}_{\text{pos}}$ замкнутую модифицированную таблицу для $F\{\alpha\}$ можно преобразовать в вывод секвенции $\rightarrow\alpha$ в исчислении $\mathbf{RS}_{\text{pos}}$.

Утверждение 3. Если секвенция $\rightarrow\alpha$ выводима в $\mathbf{RS}_{\text{pos}}$, то формула α доказуема в $\mathbf{R}_{\text{pos}}$.

Для доказательства этого утверждения достаточно принять формульную интерпретацию секвенции $\Gamma \rightarrow \Theta$ как $\Gamma^{\&} \supset \Theta^{\vee}$ (где $\Gamma^{\&}$ и $\Theta^{\vee}$ суть кратные конъюнкция и дизъюнкция членов Γ и Θ соответственно) и показать, что если формульные интерпретации посылок любого правила исчисления $\mathbf{RS}_{\text{pos}}$ выводимы в $\mathbf{R}_{\text{pos}}$, то формульная интерпретация заключения этого правила тоже выводима в $\mathbf{R}_{\text{pos}}$.

Таким образом, $\mathbf{RS}_{\text{pos}}$ и $\mathbf{R}_{\text{pos}}$ дедуктивно эквивалентны; следовательно, система $\mathbf{R}_{\text{pos}}$ разрешима. Такое обоснование эквивалентности $\mathbf{RA}_{\text{pos}}$ и $\mathbf{R}_{\text{pos}}$ и разрешимости $\mathbf{R}_{\text{pos}}$ является косвенным в том смысле, что в нем используется секвенциальное исчисление $\mathbf{RS}_{\text{pos}}$. Существует прямой (но отнюдь не более простой) путь получения такого же результата: нужно непосредственно доказать, что формула α выводима в $\mathbf{R}_{\text{pos}}$, если и только если в $\mathbf{RA}_{\text{pos}}$ можно построить замкнутую таблицу, начинающуюся с $F\{\alpha\}$. Действительно, несложно доказать, что если формула α выводима в $\mathbf{R}_{\text{pos}}$, то в $\mathbf{RA}_{\text{pos}}$ можно построить замкнутую таблицу, начинающуюся с $F\{\alpha\}$. Однако в силу специфики правил построения и замыкания аналитических таблиц в $\mathbf{RA}_{\text{pos}}$, общий прямой метод их преобразования в выводы в позитивной системе гильбертовского типа связан с серьезными трудностями, поскольку требует применения новых технических средств. Такая ситуация, на мой взгляд, иллюстрирует как раз тот случай, когда «прямое» доказательство эквивалентности логических исчислений не оправдывает себя.

Представленные в данной статье конструкции пропозициональных исчислений ориентированы в конечном счете не на доказательство разрешимости $\mathbf{R}_{\supset}$ и $\mathbf{R}_{\text{pos}}$. Интереснее возможности более широкого применения такого метода для конструктивного (не использующего семантических моделей, построенных *ad hoc*) доказательства важнейших метатеорем относительно неклассических логических исчислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Smullyan R.M. First-Order Logic. Dover Publications Inc., New York, 1995.
2. Смирнов В.А. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1772.

СЕМАНТИКА АНАФОРЫ КАК ОПЕРАТОРА ДООПРЕДЕЛЕНИЯ

Abstract. *This paper deals with logic of anaphoric update operator. It is well known that the diverse variants of dynamic semantics are efficient way to interpretation of anaphora. At the same time an anaphora itself may be considered as update operator with property of eliminating. This operator acts within the limits of the epistemic attitudes of the recipient of phrase and determines the meaning of anaphorically defined names. It is possible to express the static meaning of anaphor's operator by means of epistemic logic by use the methods of van Eijck and de Vries's update logic.*

Первая версия динамической семантики для языка логики предикатов была построена Гренендийком и Штокхофом [1] с целью интерпретации межсентенциальной или внешней анафоры, присутствующей, например, в последовательности высказываний

У фермера есть осел. Он его бьет (1)

и анафоры внутренней, например, во фразе

Если у фермера есть осел, то он его бьет (2)

В (1) и (2) мы подразумеваем кореференциальность или анафорическую связь определенных имен «он», «его» с неопределенными именами «фермер» и «осел».

Подразумеваемые условия истинности для (1) требуют от любого означивания i , верифицирующего конъюнкцию образующих его предложений, верифицировать и равенства «фермер»=«он» и «осел»=«его». При разных семантических подходах это условие выполняется почти одинаково. Например, в семантике ящиков Хейм [2] анафора предполагается как уже заданная интерпретатором на подготовительной стадии анализа. В логике динамического означивания (ЛДО) ван Эйка и де Вриза [3], которая модифицирует подход Гренендийка и Штокхофа, значения переменных зафиксированы операторами динамического означивания, а анафорически определенным именам сопоставлены те же переменные, что и антецедентам анафоры. Такие решения трудно назвать естественными, если речь идет о логической природе самой анафоры, а не о том, как интерпретировать уже отождествленные имена. Мы попытаемся раскрыть логические свойства анафоры, оставаясь в границах динамического анализа значения.

Язык динамической логики с эпистемическими модальностями $L_{дэ}$ содержит два уровня. Первый уровень образован языком ЛДО

ван Эйка и де Вриза, к которому добавлены эпистемические динамические модальности и оператор анафорического доопределения – $L_{ЛДОА}$. Этот язык, в свою очередь, в качестве внутреннего содержит язык логики предикатов первого порядка с равенством, но без индивидуальных и функциональных констант – $L_{ЛП}$.

Метапеременные по формулам $L_{ЛП}$: $A, B, C, \dots$; по формулам $L_{ЛДОА}$: $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$; по формулам $L_{ДЭ}$: φ, ψ, ζ .

Правильно построенные выражения $L_{ЛДОА}$ и $L_{ДЭ}$ называются программами.

Определение программы $L_{ЛДОА}$.

1. Формулы $L_{ЛП}$ являются программами $L_{ЛДОА}$.
2. Если π, π_1, π_2 – программы, $B \in L_{ЛП}$, то $(\pi_1 ; \pi_2)$, $(\pi_1 \Rightarrow \pi_2)$, $\neg \pi$, $\exists x \pi$, $(\eta x: \pi)$, $R_a \pi$, $\pi_1 \uparrow (x \leftarrow y)$ – программы (которые обозначают соответственно последовательное выполнение π_1 и π_2 , динамическую импликацию, динамическое отрицание (совпадает с обычным, если $\pi \in L_{ЛП}$), квантор существования, динамическое означивание переменной x , эпистемический оператор динамической возможности, анафорическое доопределение программы π_1 по переменной x).

Определения: $\forall x \pi =_{\text{def}} \neg \exists x \neg \pi$; $N_a \pi =_{\text{def}} \neg R_a \neg \pi$; $\top$ есть тавтология, а $\perp =_{\text{def}} \neg \top$.

Определение программы $L_{ДЭ}$.

1. Если $\pi \in L_{ЛДОА}$, то $\pi \in L_{ДЭ}$.
2. Если $\pi \in L_{ЛДОА}$, $A \in L_{ЛП}$, то $\langle \pi \rangle A \in L_{ДЭ}$.
3. Если $\varphi \in L_{ДЭ}$, то, $\otimes_a \varphi$, $\diamond_a \varphi \in L_{ДЭ}$.
4. Если $\varphi, \psi \in L_{ДЭ}$, то $\neg \varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi \in L_{ДЭ}$.

Определения: $[\pi]A =_{\text{def}} \neg \langle \neg \pi \rangle A$ и $\Box_a \varphi =_{\text{def}} \neg \diamond_a \neg \varphi$.

Семантика $L_{ДЭ}$ задается на модели $M = \langle W, D, I, S, R_a, R_a^\delta, \text{Val}, * \rangle$, где W – множество миров, D – область индивидов, I – функция интерпретации констант, S – множество носителей эпистемических установок, R_a и R_a^δ – отношения эпистемической и динамической достижимости, которыми располагает носитель пропозициональной установки a , $\text{Val} = \{i : \text{Var} \rightarrow D\}$ – множество означиваний переменных, $*$ – функция, порождающая «мир актуального знания a » для каждого мира и означивания. Значение программ $L_{ЛДОА}$ определяется относительно означиваний на элементах W функцией $\models_\pi : \text{Val} \times W \rightarrow \mathcal{P}(\text{Val} \times W)$. (Индексы модели опускаем.)

1. $(i, w) \models \perp = \emptyset$
2. $(i, w) \models P^n(t_1, \dots, t_n) = \{i, w\}$, если $\langle i(t_1), \dots, i(t_n) \rangle \in I^w(P^n)$

3. $(i, w) \mid t_m = t_k \mid$ $= \emptyset$ в противоположном случае
 $= \{i, w\}$, если $\langle i(t_m), i(t_k) \rangle \in I^w(=)$
4. $(i, w) \mid A \wedge B \mid$ $= \emptyset$ в противоположном случае
 $= \{i, w\}$, если $(i, w) \mid A \mid \cap (i, w) \mid B \mid \neq \emptyset$
5. $(i, w) \mid \pi_1 ; \pi_2 \mid$ $= \cup \{(j, w) \mid \pi_2 \mid : (j, w) \in (i, w) \mid \pi_1 \mid\}$
6. $(i, w) \mid \pi_1 \Rightarrow \pi_2 \mid$ $= \{i, w\}$, если для любого
 $(j, w) \in (i, w) \mid \pi_1 \mid$ верно, что $(j, w) \mid \pi_2 \mid \neq \emptyset$
 $= \emptyset$ в противоположном случае
7. $(i, w) \mid \neg \pi \mid$ $= \{i, w\}$, если $(i, w) \mid \pi \mid = \emptyset$
 $= \emptyset$ в противоположном случае
8. $(i, w) \mid \eta x : \pi \mid$ $= \cup \{(i(x/d), w) \mid \pi \mid\}$, где $d \in D$
9. $(i, w) \mid \exists x \pi \mid$ $= \{i, w\}$, если
 $\{d \in D : (i(x/d), w) \mid \pi \mid \neq \emptyset\} \neq \emptyset$
 $= \emptyset$ в противоположном случае;
10. $(i, w) \mid P_a \pi \mid$ $= \{i, w\}$, если существует j , такое, что
 $i R_a^{\delta_j} j$
 $= \emptyset$ в противоположном случае
11. $(i, w) \mid \pi \uparrow (x \leftarrow y) \mid$ $= (w, i) \mid \pi' \mid$, где π' получена из π
 вставкой перед подпрограммой π_n , в которой
 впервые встречается y , записи $\lfloor (\eta y : x = y) ; \rfloor$.

Отношение динамической достижимости R_a^{δ} , релятивизованное к носителю эпистемической установки a , связывает означивания i и j в том случае, если вычисление значения программы π в i в контексте знания a о положении дел в мире w приводит к означиванию j .

Определение истинности (выполнимости) для $L_{ДЭ}$:

$$\begin{aligned}
 i, w \models \varphi & \Leftrightarrow (i, w) \mid \varphi \mid \neq \emptyset \\
 i, w \models \langle \pi \rangle A & \Leftrightarrow (i, w) \mid \pi ; A \mid \neq \emptyset \\
 i, w \models \otimes_a \varphi & \Leftrightarrow i, w_a^* \mid \neg \varphi. \\
 i, w \models \diamond_a \varphi & \Leftrightarrow \text{существует } v, \text{ такой, что } w R_a v \\
 & \text{и } i, v \models \neg \varphi.
 \end{aligned}$$

Отношение R_a рефлексивно. Прочие его свойства не уточняются.

Понятие истинности обобщается для модели и класса моделей. Будем обозначать как $V(\varphi)$ множество пар $\langle i, w \rangle$ таких, что $i, w \models \varphi$.

$\otimes_a$ – это эпистемический оператор, описывающий «мир актуального знания субъекта a » на паре $\langle w, i \rangle$. Этот мир соответствует содержанию динамических эпистемических модальностей. Действует следующее определение:

$$w, i \models P_a \pi \Leftrightarrow_{\text{def}} i, w_a^* \models \langle \pi \rangle T.$$

Перевод выражений естественного языка на язык $L_{ЛДОА}$ осуществляем в соответствии с правилом: каждому неопределенному

имени сопоставляется новая переменная, для которой вводится оператор динамического означивания с характеристикой этой переменной. Для всякого анафорически определенного имени также вводим новую переменную.

Для стандартного примера анафоры

Если у фермера есть осел, то он его бьет

получаем следующий перевод (π):

$$((\eta x: \Phi x) ; (\eta y: O y) ; \Pi xy) \Rightarrow Bx_1x_2.$$

Теперь, чтобы анафорически связать переменные x_1 и x_2 с x и y , осуществляем анафорическое доопределение, т. е. приписываем к π слева $\uparrow(x_1 \leftarrow x) \uparrow(x_2 \leftarrow y)$ и получаем программу π' :

$$((\eta x: \Phi x) ; (\eta y: O y) ; \Pi xy) \Rightarrow$$

$$((\eta x_1: x=x_1) ; (\eta x_2: y=x_2) ; Bx_1x_2)).$$

Значение π' в (i, w) определяется так (индекс w опускаем):

$$(i)((\eta x: \Phi x) ; (\eta y: O y) ; \Pi xy) \Rightarrow$$

$$((\eta x_1: x=x_1) ; (\eta x_2: y=x_2) ; Bx_1x_2)) = \{i\},$$

если для любого $j \in (i) \mid (\eta x: \Phi x) ; (\eta y: O y) ; \Pi xy \mid$ верно, что

$(j) \mid (\eta x_1: x=x_1) ; (\eta x_2: y=x_2) ; Bx_1x_2 \mid \neq \emptyset$. Последнее неравенство имеет следующий вид:

$$(*) \quad \cup \{j(x_1/d')(x_2/d''),$$

$$\text{где } \langle j(x_1/d')(x_2/d'')(x_1), j(x_1/d')(x_2/d'')(x_2) \rangle \in I(B)\},$$

$$\text{где } j(x_1/d')(x_2/d'') \in \cup \{j(x_1/d')(x_2/d'') :$$

$$\langle j(x_1/d')(x_2/d'')(y), j(x_1/d')(x_2/d'')(x_2) \rangle \in I(=)\},$$

$$\text{где } j(x_1/d') \in \cup \{j(x_1/d') : \langle j(x_1/d')(x), j(x_1/d')(x_1) \rangle \in I(=)\} \neq \emptyset.$$

Если бы наш пример вместо Bx_1x_2 содержал в себе Bxy , то мы получили бы неравенство:

$$(j) \mid Bxy \mid \neq \emptyset, \text{ откуда } (j) \mid Bxy \mid = \{j\} \text{ и } \langle j(x), j(y) \rangle \in I(B). \quad (**)$$

Условия (*) и (**) эквивалентны. В самом деле, поскольку x_1 и x_2 по условию суть новые переменные, множество выполняющих условие означиваний вида $j(x_1/d')(x_2/d'')$ совпадает со множеством означиваний вида j . Таким образом, доопределение, которое мы осуществили, равнозначно установлению анафоры между определенными и неопределенными именами. Помещая π' в рамки эпистемической установки, получим $(P_a \pi')T$, которое истинно тогда и только тогда, когда существует j такое, что $iR_a \pi' j$, т.е. когда π' имеет непротиворечивое завершение.

Оператор $\uparrow$ вводит анафорическую связь переменных как элемент программы, по которой вычисляется значение выражения. В отличие от оператора динамического означивания ЛДО, оператор $\uparrow$ элиминативен. Это обнаруживает существенную черту анафоры: она действует как тест.

Каждое конкретное анафорическое доопределение программы π связано с тем, что реципиент ожидает непустого выполнения программы π' . Введение автором анафорически определенных имен равнозначно замене высказывания

У фермера есть осел. Фермер бьет осла.

на

У фермера есть осел. Он его бьет.

Эти имена выполняют функцию логических операторов (индексов или маркеров), поскольку инициируют процесс поиска источника референции в контексте. Автор высказывания, вводя определенное имя, подразумевает для него анафорическую связь, причем так, что предполагаемый автором процесс поиска этой связи реципиентом однозначно завершается. Этот процесс поиска есть перебор и сортировка возможных доопределений программы, от которых реципиент, исходя из своей эпистемической установки, ожидает положительного результата. В семантическом анализе анафоры, таким образом, присутствуют план автора и план реципиента. Динамические свойства интерпретации проявляются в обоих случаях, но по-разному. Анализ статических значений программ в ЛДО ван Эйка и де Вриза, принадлежащий к плану автора, приводит к формулировке выражаемой им в высказывании пропозиции в виде замкнутой формулы языка логики предикатов. Исходя из такой формулировки, автор задает анафорические отношения имен, где консеквентам анафор могут сопоставляться свободные переменные, в действительности не являющиеся таковыми, в силу динамических свойств связок и присутствия операторов динамического означивания. Определение «извне» статического значения является в этом случае достаточно тривиальной задачей, которую можно решать и не прибегая к механизму редукции ЛДО, а рассматривая ЛДО как динамическую логику и пользуясь только семантическими определениями.

Для реципиента проблема интерпретации состоит в том, чтобы, соотнося логическую форму высказывания в ЛДО с пропозициями, входящими в его эпистемическую установку, восстановить подразумеваемую анафору или хотя бы свести к минимуму возможные варианты такого восстановления. Нас интересуют здесь, конечно же, чисто логические критерии приемлемости анафоры, а не грамматические, прагматические или какие-либо иные.

Попробуем теперь, пользуясь методами ЛДО и логики модификации ван Эйка и де Вриза [4], определить понятие слабейшего эпистемического условия для программы π и формулы B , которое будет рассматриваться как соответствующее статическому значению программы π в эпистемической логике с оператором $\otimes_a$:

слабейшее эпистемическое условие программы π и формулы B есть формула $\varphi \in L_{дэ}$ такая, что $V(\varphi) = V(\langle \pi \rangle B)$.

Определим функцию cy , задающую φ по π и B (коллизии переменных, свободно входящих в B , избегаются):

1. $cy(\perp, B) = \perp$
2. $cy(P^n(t_1 \dots t_n), B) = P^n(t_1 \dots t_n) \wedge B$
3. $cy((t_m = t_n), B) = (t_m = t_n) \wedge B$
4. $cy((C \wedge D), B) = (C \wedge D) \wedge B$
5. $cy((\pi_1 ; \pi_2), B) = cy(\pi_1, cy(\pi_2, B))$
6. $cy((\pi_1 \Rightarrow \pi_2), B) = B \wedge (cy(\neg \pi_1, T) \vee cy(\pi_2, T))$
7. $cy(\neg \pi, B) = B \wedge \neg cy(\pi, T)$
8. $cy(\eta x : \pi, B) = \exists x (cy(\pi, B))$
9. $cy(\exists x \pi, B) = \exists x (cy(\pi, T)) \wedge B$
10. $cy(P_a \pi, B) = \otimes_a cy(\pi, T) \wedge B$
11. $cy(\pi \uparrow (y \leftarrow x), B) = cy(\pi', B)$, где π' получено из π соответствующей вставкой ($\eta y: x=y$).

Функция cy дает неэпистемическое статическое значение программы π как формулу логики предикатов, если π не содержит в себе оператора P_a , а в качестве B взята формула T .

Рассмотрим неэпистемическое cy для доопределения логической формы π примера (2)

$$(((\eta x: \Phi x) ; (\eta y: Oy) ; Pxy) \Rightarrow Bx_1x_2) \uparrow (x_1 \leftarrow x) \uparrow (x_2 \leftarrow y),$$

где π' это

$$((\eta x: \Phi x) ; (\eta y: Oy) ; Pxy) \Rightarrow ((\eta x_1: x=x_1) ; (\eta x_2: x_2=y) ; Bx_1x_2).$$

Тогда $cy(\pi', T) =$

$$\exists x (\Phi x \wedge \exists y (Oy \wedge Pxy) \rightarrow \exists x_1 (x=x_1 \wedge \exists x_2 (y=x_2 \wedge Bx_1x_2))),$$

что эквивалентно формуле $\exists x \exists y ((\Phi x \wedge Oy \wedge Pxy) \rightarrow Bxy)$. При введении внешнего оператора P_a для π' мы получили бы в качестве $cy(\pi', T)$ формулу

$$\otimes_a (\exists x (\Phi x \wedge \exists y (Oy \wedge Pxy) \rightarrow \exists x_1 (x=x_1 \wedge \exists x_2 (y=x_2 \wedge Bx_1x_2)))),$$

являющуюся эпистемическим статическим значением π' .

Верна следующая теорема о cy : $V(cy(\pi, B)) = V(\langle \pi \rangle B)$. Она представляет собой модификацию для $L_{дэ}$ теоремы, доказанной ван Эйком и де Вризом для логики модификации. Рассмотрим только случай $cy(P_a \pi, B)$.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } V(cy(P_a \pi, B)) &= V(\otimes_a cy(\pi, T) \wedge B), \\ &= V(\otimes_a cy(\pi, T)) \cap V(B). \end{aligned}$$

Докажем утверждение слева направо. Допустим противоположное, а именно, что существует пара $\langle i, w \rangle$ такая, что

$i, w \models \otimes_a cy(\pi, T) \wedge B$, но неверно $i, w \models \neg \langle P_a \pi \rangle B$, т. е.

$i, w \models \otimes_a cy(\pi, T)$, $i, w \models \neg B$ и неверно, что $i, w \models \neg P_a \pi \wedge B$. Это значит, что неверно $i, w \models P_a \pi$. Поскольку по предположению индукции

$V(\text{cy}(\pi, T)) = V(\langle \pi \rangle T)$, имеем $i, w \models \otimes_a \langle \pi \rangle T$, откуда по определению $\otimes_a$ получаем $i, w_a^* \models \langle \pi \rangle T$, откуда по определению w_a^* следует $i, w \models P_a \pi$. Противоречие.

В другую сторону. Пусть неверно, что $i, w \models \otimes_a \text{cy}(\pi, T) \wedge B$, но $i, w \models \langle P_a \pi \rangle B$. Тогда существует j такое, что $i R_a^\delta j$, где $\delta = P_a \pi$ и $i, w \models B$. Тогда $i, w \models P_a \pi \wedge B$ и, следовательно, неверно, что $i, w \models \otimes_a \text{cy}(\pi, T)$, откуда по предположению индукции неверно, что $i, w \models \otimes_a \langle \pi \rangle T$, откуда по определению $\otimes_a$ неверно, что $i, w_a^* \models \langle \pi \rangle T$ и по определению w_a^* неверно, что $i, w \models P_a \pi$. Противоречие.

В доказательстве того, что $V(\text{cy}(P_a \pi, B)) = V(\langle P_a \pi \rangle B)$ мы использовали сведение содержания динамической эпистемической установки к миру w_a^* . Отношения модальности $\otimes_a$ с эпистемическими и динамическими модальностями $\Diamond_a$ и $\langle \pi \rangle$ нуждается в дальнейшем уточнении. Введение оператора $\otimes_a$ вызвано тем, что прямое совмещение эпистемического и динамического универсума невозможно. Семантика $\otimes_a$ описана только в общих чертах, но она генерирует новую структуру эпистемических миров, выражающих содержание динамических эпистемических установок.

Трактуя анафору как особый оператор доопределения программы вычисления значения выражения в ЛДО, мы пришли к логике, в которой комбинируются эпистемические и динамические модальности. Она необходима не только для того, чтобы формулировать выражаемые программами пропозиции, но и для осуществления анализа логических отношений этих пропозиций. Рассматривая возможные доопределения и стоящие за ними пропозиции, реципиент осуществляет сложный процесс, в ходе которого анализируются следствия принятия той или иной пропозиции как соответствующей содержанию высказывания. Описание критериев такого процесса, по которым, например, можно было бы выделить наиболее консервативную или наиболее либеральную версию доопределения, возможно в рамках исчисления, адекватного какому-либо уточнению описанной семантики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Groenendijk J., Stokhof M. Dynamic Predicate Logic // Linguistics and Philosophy. 1991. Vol. 14. P. 39-100.
2. Heim I. File Change Semantics and the Familiarity Theory of Definiteness // Meaning, Use and Interpretation of Language / Ed. by R. Bäuerle, C. Schwarze, A. von Stechow. Berlin, 1983. P. 164-189.
3. Eijck J. van, Vries F.-J. de. Dynamic Interpretation and Hoare Deduction // J. of Logic, Language and Information. 1992. Vol. 1. P. 1-44.
4. Eijck J. van, Vries F.-J. de. Reasoning about Update Logic // J. of Philosophical Logic. 1995. Vol. 24. P. 19-45.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИИ

Abstract. *The main aim of the paper is to formulate the deduction theorem which would be valid for any logical theory T closed by MP.*

The using of MP in a consequence $B_1, \dots, B_m$ of inference B from hypotheses Γ in a theory T is said to be normalized iff for each member of the consequence B_i ($i \leq m$), obtained from B_k and B_l ($k, l \leq i$) by MP, the following conditions are satisfied: (a) if B_k is the major premise of MP and has a form $B_l \rightarrow B_i$, then it precedes the minor one B_l ; (b) there is no any member B_k ($l \geq k \geq i$) of the consequence between B_l and B_i except members which are result of MP with the same minor premise B_l ; (c) B_l doesn't depend from any hypotheses preceding the major premise B_k .

Definition. *A normalized inference of B from hypotheses $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ ($n \geq 0$) (symbolically: $A_1, \dots, A_n \vdash B$) in a theory (calculus) T is said to be such a finite consequence of propositions (formulae) $B_1, \dots, B_m$ ($m \geq 1$) which satisfies the following conditions:*

(1) The last member of the consequence B_m is coincided with B , and for any B_i ($1 \leq i \leq m$): (a) B_i is one of the hypotheses Γ ; or (b) B_i is a theorem of T ; (c) B_i is obtained from two of previous members of the consequence by MP under its normalized using; or (d) B_i is a conjunction of two of previous members of the consequence (by rule of adjunction: RA). (2) The formula B_m depends from each member of the consequence $B_1, \dots, B_m$.

A consequence $B_1, \dots, B_m$ is said to be normalized one iff it fulfils the definition. Any inference B from hypotheses Γ may be normalized.

Let $B_1, \dots, B_m$ be a normalized consequence of inference B from hypotheses Γ in a theory T . A hypothesis B_i is said to be blocked for deduction iff there is at least one of the following blocking conditions: (b1) B_i is the first hypothesis of consequence and it be not used as minor premise; (b2) after step B_i the rule RA is used; (b3) after step B_i there is a result of MP, where the minor premise is a T -theorem and the major one depends from hypotheses; (b4) after step B_i there is a result of MP, which itself is used as minor premise of MP where major premise precedes all hypotheses from which the minor one depends.

Let's Γ_b be a list of the all the blocked for deduction hypotheses, and $A_1, \dots, A_n$ be a list of all hypotheses unblocked for deduction standing at the same order in which they occur in the consequence. The expression $\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ is a normalized writing of the normalized inference B from Γ .

Deduction theorem. *If the consequence of formulae $B_1, \dots, B_m$ is a normalized inference B from Γ in a D-theory T and $\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ is the corresponding normalized writing of $\Gamma \vdash B$, then any statement $\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ ($1 \leq i \leq n$) is valid in T .*

Adequacy theorem. A statement $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ is valid in a D-theory T iff there exist a normalized consequence of inference B from hypotheses Γ and A and it is corresponded by $\Gamma, \uparrow A \vdash B$.

1. Стандартные и нормализованные выводы

В [1] мною было предложено определение нормализованного вывода (см. далее $D2$) из гипотез в некоторой абстрактной логической теории (исчислении) T , которое обладало следующими свойствами. Во-первых, оно обеспечивало в любой теории T вывод из любых гипотез Γ тех же самых следствий, что и при обычном стандартном определении вывода (оно приводится ниже как $D1$). И, во-вторых, позволило дать единую формулировку теоремы дедукции для всех названных D -теориями пропозициональных исчислений, в которых имели силу следующие принципы: $A \rightarrow A$; $A \rightarrow B \rightarrow . C \rightarrow A \rightarrow . C \rightarrow B$; $(A \rightarrow B) \rightarrow B$, где A - теорема T .

Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что не меняя определения логического вывода, которое дано в [1] (ниже мы, как и в указанной работе, обозначим его как $D2$ и будем называть *нормализованным*), можно дать формулировку теоремы дедукции, которая будет справедлива для всех логических исчислений, замкнутых относительно правила MP .

Стандартным определением (логического) вывода из гипотез будем называть следующее:

D1. Логическим выводом высказывания (формулы) B из гипотез $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ ($n \geq 0$) (символически: $\Gamma \vdash B$) в теории (исчислении) T называется конечная последовательность высказываний (формул) $B_1, \dots, B_m$ ($m \geq 1$) такая, что последний член последовательности B_m совпадает с B , и для всякого B_i ($1 \leq i \leq m$) выполняется одно из следующих условий:

- (а) B_i есть одна из гипотез Γ ; или
- (б) B_i - теорема¹ теории (исчисления) T ; или
- (в) B_i получается из двух предшествующих членов последовательности по правилу MP (*modus ponens*); или
- (г) B_i представляет собой конъюнкцию двух предшествующих членов последовательности (по правилу адъюнкции: RA).

Примечания: (i) Если в теории T не имеет силы правило адъюнкции, то пункт (г) должен быть опущен, (ii) B_i рассматривается в

¹ Ссылка на теоремы позволяет ограничиться только двумя правилами вывода MP и правилом адъюнкции, не используя, в частности, правила подстановки и вообще никаких правил вывода от A к B , для которых в теории не имеет силы $A \rightarrow B$.

последовательности $B_1, \dots, B_m$ как гипотеза или как теорема соответственно только тогда, когда B_i включено в последовательность именно в этом качестве.

1.1. Мы говорим, что член B_i последовательности вывода $B_1, \dots, B_m$ зависит от члена последовательности B_k исключительно в случаях: (1) B_i совпадает с B_k , т.е., каждый член последовательности зависит от себя самого, или (2) B_k является одним из членов последовательности, из которых B_i получено по одному из правил вывода, или (3) B_i зависит от B_j , и B_j зависит от B_k (отношение зависимости транзитивно).

Установить, от каких членов последовательности $B_1, \dots, B_m$ зависит тот или иной ее член B_i , очевидно можно в результате следующей простой процедуры. Сначала отмечаются те шаги вывода, на основании которых B_i получено непосредственно. Если таковые имеются (а они могут отсутствовать, когда B_i включено в последовательность как теорема или гипотеза и зависит только от себя самого), то отмечаются последовательно, пока процедура не закончится, шаги, на основании которых получены уже отмеченные члены последовательности. B_i зависит только от тех членов последовательности, которые окажутся отмеченными.

1.2. Будем говорить, что использование правила MP в последовательности вывода $B_1, \dots, B_m$ формулы B из гипотез Γ в теории T является нормализованным, если и только если для каждого члена последовательности B_i ($i \leq m$), полученного из двух предшествующих членов последовательности B_k и B_l по правилу MP , выполнены следующие условия:

- (а) если B_k - большая посылка MP , т.е. имеет вид $B_l \rightarrow B_i$, то она предшествует в последовательности вывода меньшей посылке B_l ;
- (б) между членами последовательности вывода B_l и B_i (т.е. между меньшей посылкой и заключением MP) не находится никакой другой член последовательности B_k ($l \geq k \geq i$), если только B_k не получается по MP с той же малой посылкой B_l ;
- (с) меньшая посылка B_l не зависит ни от какой из гипотез, которая предшествует большей посылке $B_l \rightarrow B_i$.

D2. Нормализованным логическим выводом высказывания (формулы) B из гипотез $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ ($n \geq 0$) в теории (исчислении) T называется конечная последовательность высказываний (формул) $B_1, \dots, B_m$, ($m \geq 1$), которая является стандартным выводом $\Gamma \vdash B$ в силу D1 и удовлетворяет следующим двум условиям: (1) Правило MP (*modus ponens*) используется только в нормализован-

ном виде. (2) Формула B_m зависит от каждого члена последовательности $B_1, \dots, B_m$.

1.3. $D2$ несмотря на его отличия от определения $D1$ не изменяет класса следствий, получаемых из тех же гипотез. Условие (2) не может ограничить числа следствий, которые можно получать в соответствии с $D1$, так как запрещает лишь явное включение в последовательность тех формул, без которых при получении следствий можно обойтись.

Обратимся теперь к условию (1). Пусть мы имеем вывод в смысле $D1$. И пусть последовательность вывода имеет вид $B_1, \dots, B_m$. Допустим, что в выводе имеет место ненормализованное использование MP . Посылки, к которым было применено правило, обозначим как $B_l \rightarrow B_i$ и B_l . Соответственно, заключением будет B_i .

Начнем с требования нормализованности MP , которое обозначено как (b). Обратимся, если таковые имеются, к первому в выводе нарушению (b). При таком нарушении между меньшей посылкой B_l и заключением B_i стоят одна или несколько формул последовательности $B_{k1}, \dots, B_{km}$, каждая из которых получена на иных основаниях, чем применение MP , меньшей посылкой которого является B_l . Нормализованность применения MP относительно (b) достигается за счет перестановки всех перечисленных формул $B_{k1}, \dots, B_{km}$ в том же порядке сразу вслед за B_l . После этого осуществляются необходимые изменения в анализе (в нумерации шагов вывода, в записи оснований для каждого шага). После этих преобразований последовательность останется выводом в смысле $D1$.

После устранения в выводе всех нарушений условия (b) переходим к требованию (a). Если (a) нарушено без нарушения (c), то меньшая посылка B_l представляет собой в этом случае теорему. Чтобы устранить ненормализованность, надо поставить эту же теорему после большей посылки $B_l \rightarrow B_i$ перед заключением B_i . Шаг B_l , если он теперь не нужен в выводе, устранить. Осуществить необходимые изменения в анализе.

Теперь рассмотрим нарушения, связанные с требованием (c). Если такие нарушения есть, обратимся к первому из них. Пусть B_l зависит от некоторой гипотезы (или гипотез), которые предшествуют $B_l \rightarrow B_i$.

Выпишем все те члены последовательности, от которых зависит B_l , в порядке их вхождения, кончая самой малой посылкой B_l . Получившийся в результате такой процедуры список формул включим в старую последовательность на место малой посылки, если она была ниже большей, и включим сразу после большей в

противном случае². В преобразованной последовательности удалим те повторяющиеся члены, устранение которых не влечет нарушения нормализации, и осуществим необходимые изменения в анализе. Поступим аналогичным образом со всеми другими нарушающими (с) ненормализованными применениями *MP*. В результате получим нормализованный вывод с теми же гипотезами и заключением, что и исходный вывод.

Указав процедуру нормализации выводов, мы фактически доказали следующую универсальную для любого исчисления мета-теорему:

MT1. *В любой теории T классы следствий из данных гипотез, получаемые в силу $D1$ и в силу $D2$, в точности совпадают.*

Требование, которое мы выдвигали при построении определения нормализованного логического вывода, выполнено. Различие между $D1$ и $D2$ состоит только в том, что не всякая конечная последовательность $B_1, \dots, B_m$, которая является выводом B из Γ в смысле $D1$, является нормализованным выводом B из Γ в смысле $D2$. При этом всякий нормализованный вывод является выводом в соответствии с $D1$, и всякий вывод B из Γ в смысле $D1$ может быть нормализован.

2. Теорема дедукции для D-теорий

2.1. Пусть последовательность $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T . Выделим в этой последовательности такой ее член B_k с наименьшим индексом, после которого в выводе к членам последовательности, которые зависят от посылок, не применялось правило адъюнкции *RA*. Пусть теперь $A_1, \dots, A_n$ есть все те члены последовательности, не обязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве посылок, начиная с шага B_k .

2.2. Пусть далее Γ_a - список всех тех посылок из Γ , которые были использованы в выводе до шага B_k . И, наконец, пусть Γ_o - список тех посылок из Γ , которые не использовались в выводе вообще.

Мы имеем, таким образом, три списка посылок Γ_a , Γ_o и $A_1, \dots, A_n$, которые в своей совокупности исчерпывают весь список Γ и каждый из которых в конкретном случае может быть пустым.

² Сама малая посылка B_1 в этом случае остается пока на месте. Можно ли будет ее вычеркнуть, зависит от того, не повлечет ли такое вычеркивание несоответствий с определением нормализованного вывода и вывода вообще.

2.3. Выражение $\{\Gamma_o\}, \Gamma_a, \downarrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ будем называть *нормализованной записью* утверждения $\Gamma \vdash B$ для нормализованного вывода B из Γ , имеющего вид $B_1, \dots, B_m$. Записи $\Gamma_a, \downarrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ и $\{\Gamma_o\}, \downarrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ говорят о пустоте соответствующего списка посылок. Запись $C_1, \dots, C_k, \downarrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ показывает, что после посылок $C_1, \dots, C_k$ в выводе использовалось RA . При пустоте обоих списков Γ_o и Γ_a будем начинать нормализованную запись со стрелки $\downarrow A_1, \dots, A_n \vdash B$, показывая тем самым, что ни к одной из посылок не применялось в выводе правило RA . Запись $C_1, \dots, C_k \downarrow \vdash B$ означает, что гипотез, после которых в выводе не применялось правило RA , нет. Наконец, обычная запись (без стрелки) $A_1, \dots, A_n \vdash B$ говорит только о том, что из указанных посылок можно вывести B , но не утверждается, что запись вывода нормализована.

MT2. (Теорема дедукции для D -теорий). Если последовательность $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой D -теории T , и $\{\Gamma_o\}, \Gamma_a, \downarrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения $\Gamma \vdash B$, то в T имеет силу всякое утверждение:

$$\{\Gamma_o\}, \Gamma_a, \downarrow A_1, \dots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B \quad (1 \leq i \leq n).^3$$

3. Теорема дедукции для всех систем

Формулировка универсальной теоремы дедукции требует дополнительных терминологических соглашений.

3.1. Пусть последовательность $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T . Будем говорить, что формула последовательности B_i , являющаяся гипотезой, *блокирована для дедукции*, если и только если имеет место по крайней мере одно из следующих *блокирующих условий*:

(b1) если B_i является первой по счету гипотезой, входящей в последовательность, и не использована в выводе в качестве большей посылки.

(b2) после шага B_i в выводе к зависящим от гипотез формулам было применено правило адъюнкции RA ;

(b3) после шага B_i имеет место заключение по MP при том, что в качестве малой посылки выступает теорема теории, а в качестве большей - зависящая от гипотез формула.

³ Доказательство этой теоремы и более детальное изложение всего материала даны в [6]. Ниже имеется строгое доказательство универсальной теоремы дедукции MT3, из которой видна справедливость MT2.

(b4) после шага B_i имеет место заключение по MP , в качестве малой посылки которого выступает зависящая от гипотез формула A , а большей посылкой служит член последовательности, предшествующий всем тем гипотезам, от которых зависит A ;

3.2. Пусть последовательность $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T . Выделим в этой последовательности такую гипотезу B_k с наименьшим индексом, которая не блокирована для дедукции. Пусть теперь $A_1, \dots, A_n$ есть все те члены последовательности, не обязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве гипотез, начиная с шага B_k включительно.

Пусть далее Γ_b - список всех тех (блокированных) гипотез из Γ , которые были использованы в выводе до шага B_k . И, наконец, пусть Γ_o - список тех гипотез из Γ , которые не использовались в выводе вообще.

Мы имеем, таким образом, три списка гипотез Γ_b, Γ_o и $A_1, \dots, A_n$, которые в своей совокупности исчерпывают весь список Γ и каждый из которых в конкретном случае может быть пустым.

3.3. Выражение $\{\Gamma_o\}, \Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ будем называть нормализованной записью утверждения $\Gamma \vdash B$ для нормализованного вывода B из Γ , имеющего вид $B_1, \dots, B_m$. Список Γ_o будем опускать. Запись $\uparrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ в отличие от записи $\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ говорит о пустоте Γ_b , и, значит, о том, что ни одна из гипотез не блокирована для вывода. В свою очередь запись $\Gamma_b, \uparrow \vdash B$ говорит, что все использованные в выводе гипотезы (при данном построении вывода) блокированы для дедукции. Наконец, обычные записи $\Gamma_b, A_1, \dots, A_n \vdash B$ и $A_1, \dots, A_n \vdash B$ говорят о том, что из указанных гипотез можно вывести B , но не утверждается, что запись вывода нормализована.

МТЗ. (Универсальная теорема дедукции). Если последовательность $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T , и $\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ ($n \geq 1$) есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения $\Gamma \vdash B$, то в T имеет силу утверждение:

$$\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B \quad (1 \leq i \leq n).$$

Доказательство. Пусть в некоторой теории T (возможно, пустой) существует нормализованный вывод $B_1, \dots, B_m$ формулы B из гипотез Γ , которому соответствует нормализованное утверждение $\Gamma_b \uparrow A_1, \dots, A_n \vdash B$. Надо показать, что в этом случае верно всякое утверждение:

$$\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B \quad (1 \leq i \leq n)^4.$$

Доказательство будем вести по исчерпывающим случаям. Согласно принятым требованиям к нормализованным утверждениям в последовательности $B_1, \dots, B_m$ после появления гипотезы A_1 никакие ограничения, блокирующие гипотезы, силы не имеют. Рассмотрим ту часть последовательности (назовем ее подпоследовательностью G_{lm}), которая начинается с шага B_1 , на котором в последовательность включена гипотеза A_n , и кончается последним шагом B_m , на котором мы имеем формулу B . Покажем, что эта подпоследовательность всегда состоит только из двух членов B_{m-1} и B_m , совпадающих с A_n и B соответственно.

Убедимся сначала, что подпоследовательность G_{lm} не может состоять всего из одного члена, т.е. что B_m не может совпасть с гипотезой A_n . Это ясно из того, что A_n в таком случае была бы единственной гипотезой, совпадая с A_1 при пустом списке неблокированных гипотез, от которых зависит совпадающее с этой гипотезой заключение B_m . Весь вывод состоит из единственного шага B_m , где $m=1$. Но тогда B_m в силу блокирующего ограничения $b1$ не может входить в последовательность как гипотеза, поскольку указанное ограничение требует, чтобы первая гипотеза последовательности была использована как меньшая посылка.

Гипотеза A_n во всех случаях может быть только меньшей посылкой. Если бы она была большей посылкой, то после нее должна была бы находиться меньшая. Если бы при этом меньшая была теоремой, то было бы нарушено блокирующее ограничение $b3$. А если бы меньшая зависела от гипотез, то было бы нарушено условие (с) нормализованного использования MP .

Чтобы доказать, что между формулами B_1 (она же A_n) и B_m не может находиться ни одна промежуточная формула последовательности B_{l+1} , убедимся, что после B_1 невозможно включить в последовательность никакую формулу B_{l+1} , отличную от последней формулы B_m . Исследуем все возможные случаи.

Случай 1. Допустим, что B_{l+1} является теоремой и используется как меньшая посылка MP . Большая посылка при этом от гипотез зависеть не может, так как это нарушило бы $b3$. Если же большая посылка от гипотез не зависит, являясь теоремой, то результатом MP будет опять-таки теорема. При этом в нарушение требований нормализованного вывода формула B_m не будет зависеть от B_{l+1} . Таким образом, теоремой и меньшей посылкой B_{l+1} быть не может. Не может B_{l+1} быть также теоремой и большей посылкой. Действительно, если меньшей посылкой является теорема, то от

⁴ Коррективы, которые надо внести в доказательство МГЗ при пустоте Γ_b , видны из формулировки самой теоремы.

B_{l+1} не будет зависеть B_m , а если меньшей посылкой будет зависящая от гипотез формула, то это нарушит требование (с) нормализованного использования MP .

Случай 2. B_{l+1} зависит от гипотез. Включить B_{l+1} в последовательность вывода можно было бы в этом случае исключительно за счет применения MP . При этом малой посылкой могла бы быть только гипотеза A_n , так как в противном случае было бы нарушено условие (b) нормализованного использования MP , согласно которому не должно быть никаких членов последовательности между меньшей посылкой и заключением. Чтобы B_m зависело от B_{l+1} , последнее должно быть использовано как одна из посылок MP . Большой посылкой B_{l+1} быть не может, потому что после нее нельзя включать ни формул, зависящих от гипотез (условие (с)), ни теорем (b3).

Остается рассмотреть последнюю возможность, при которой B_{l+1} является меньшей посылкой. Это означает, что в последовательности вывода имеются предшествующие B_l формулы $A_n \rightarrow B_{l+1}$ и $B_{l+1} \rightarrow B_{l+2}$, где B_{l+2} формула, от которой зависит B_m (возможно совпадая с ней) и которая получается по MP из $B_{l+1} \rightarrow B_{l+2}$ и B_{l+1} . Теперь если две указанные импликации $A_n \rightarrow B_{l+1}$ и $B_{l+1} \rightarrow B_{l+2}$ входят в вывод в указанной последовательности, то оказывается нарушенным условие (с), так как B_{l+1} зависит от $A_n \rightarrow B_{l+1}$. Если порядок иной, то нарушенным оказывается блокирующее ограничение b4. Таким образом, случай 2, как и случай 1, оказывается невозможным.

Следовательно, A_n всегда находится на шаге B_{m-1} . В силу наших ограничений на MP формула A_n может быть только малой посылкой этого правила, в результате применения которого получено B_m . Это значит, что в качестве большей посылки мог быть только член последовательности имеющий вид $A_n \rightarrow B$. Но если формула $A_n \rightarrow B$ входит в последовательность вывода до гипотезы A_n , то значит она является выводимой из $\Gamma_a, A_1, \dots, A_{n-1}$. Заметим сразу, что $A_n \rightarrow B$ не может не зависеть ото всех остальных гипотез $\Gamma_a, A_1, \dots, A_{n-1}$, так как в противном случае не выполнено было бы требование о зависимости заключения B (которое получается из $A_n \rightarrow B$ и A_n в один шаг) от всех гипотез. Таким образом, возможность по крайней мере однократного применения теоремы дедукции доказана.

Мы же должны доказать теперь верность более сильного утверждения:

$$\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B \quad (1 \leq i \leq n).$$

Нам надо показать, что нормализованная последовательность вывода $B_1, \dots, B_m$ формулы B из $\Gamma_b, A_1, \dots, A_n$ может быть преобра-

зована в нормализованную последовательность $C_1, \dots, C_r$, которой будет соответствовать:

$$\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B.$$

При доказательстве того, что принцип дедукции применим к последней гипотезе A_n , мы видели, что формула $A_n \rightarrow B$ или сама предшествовала гипотезе A_n , или ее можно было получить из предшествующих гипотез формул с помощью имеющихся в T теорем. В первом случае требуемый нормализованный вывод $C_1, \dots, C_r$, обеспечивающий вывод $A_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow B$ из $\Gamma_b, A_1, \dots, A_{n-2}$, мы получим, ограничив последовательность шагом, на котором получено $A_n \rightarrow B$. Во втором - поставив на место A_n заключительную формулу $A_n \rightarrow B$ и включив в вывод соответствующие теоремы.

Так мы можем поступать после каждого применения принципа дедукции.

Нам остается показать, что МТЗ адекватна любой теории T в смысле следующей метатеоремы:

МТ4. (Теорема адекватности). Утверждение $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ верно во всякой теории T , если и только если существует нормализованная последовательность G вывода B из гипотез Γ и A , которой соответствует нормализованное утверждение $\Gamma, \uparrow A \vdash B$.

Действительно, раз существует вывод $A \rightarrow B$ из Γ , его всегда можно нормализовать (МТ1). Конечной формулой последовательности нормализованного вывода будет $A \rightarrow B$. Добавив к этой последовательности две формулы: A (как гипотезу) и B (как результат MP), мы получим нормализованный вывод B из Γ и A , а значит требуемое $\Gamma, \uparrow A \vdash B$. Обратное утверждение получается на основании МТЗ. Таким образом, МТ4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоренко Е.А. Нормализованные выводы и обобщение теоремы дедукции // Логические исследования, М.: Наука, 1998. Вып. 5. С. 101-118.
2. Сидоренко Е.А. О различных понятиях вывода из гипотез // Модальные и релевантные логики. М.: ИФ АН СССР, 1982.
3. Смирнов В.А. Формальный вывод и логические исчисления // М.: Наука, 1972.
4. Смирнов В.А. Формальный вывод, теоремы дедукции и теории импликации // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 54-68.
5. Сидоренко Е.А. Теорема дедукции для классических и неклассических исчислений // Логические исследования. М.: Наука, 1993. Вып. 2. С. 128-138.
6. Сидоренко Е.А. Релевантная логика (Предпосылки, исчисления, семантика). М., 2000.

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕОРЕМАХ О ДЕДУКЦИИ В НОРМАЛЬНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ¹

Abstract. *Questions about effective variants of deduction theorem for normal modal logics are discussed. Some proof of an external deduction theorem for minimal normal modal logic K – a formula ψ is deducible from φ in K iff the formula $\Box^* \varphi \rightarrow \psi$ belongs to the dynamic logic – is given.*

Ниже везде речь идет об исчислениях гильбертовского типа. В частности, всякая нормальная модальная логика задается следующим образом. Полагаем, что в качестве схем аксиом и правил вывода берутся: какой-нибудь набор схем аксиом, обеспечивающий полноту классического исчисления высказываний с единственным правилом вывода *modus ponens*, модальная схема аксиом $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$, быть может, еще какие-либо схемы аксиом и ровно два правила вывода – *modus ponens* и правило Геделя $\varphi/\Box\varphi$. Разумеется, всегда, говоря о схемах аксиом, мы подразумеваем, что они задаются над соответствующим языком – модальным в случае модальных логик, безмодальным в случае классической логики и т.д. Еще одно соглашение, обычно принимаемое «по умолчанию»: вместо «дополнительных схем аксиом» говорят о «дополнительных аксиомах» и в соответствии с этим пишут, к примеру, вместо схемы $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$, где α – произвольная формула, формулу $\Box p \rightarrow \Box\Box p$, считая, что в нее можно вместо переменной p подставлять произвольные формулы.

Обычная теорема о дедукции для классического исчисления высказываний (для имеющегося здесь в виду определения классического исчисления в предыдущем абзаце нужно опустить все упоминания про модальную и «еще какие-либо» схемы и правило Геделя) позволяет сводить вопрос о производности правила вывода к выводимости некоторой формулы: правило вывода $\varphi_1, \dots, \varphi_n/\psi$ производно (т.е. из гипотез $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ можно вывести ψ) в классическом исчислении высказываний тогда и только тогда, когда в нем выводима формула $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots (\varphi_n \rightarrow \psi) \dots))$. Таким образом, поскольку классическая логика разрешима, то разрешима и проблема производности в ней правил вывода, причем алгоритм

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 99-03-19706.

выяснения производности правил вывода по сложности таков же, как и для выяснения выводимости.

Похожа ситуация и во многих стандартных нормальных модальных логиках. Так, если нормальная модальная логика L содержит **K4**, которая получается из минимальной нормальной модальной логики **K** добавлением аксиомы $\Box p \rightarrow \Box \Box p$, то для нее теорема о дедукции выглядит следующим образом:

$$\Gamma, \varphi \vdash_L \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_L \varphi \wedge \Box \varphi \rightarrow \psi.$$

(В дальнейшем можно считать, что $\Gamma = \emptyset$, поскольку для наших целей этого достаточно. Скажем, при рассмотрении проблемы производности правил вывода мы, ввиду возможности соединения формул в конъюнкцию, вполне можем обойтись однопосылочными правилами.) И так же, как и для классической логики, разрешимость самой логики **K4** с помощью этой теоремы о дедукции позволяет установить разрешимость и проблемы производности в **K4** правил вывода (без изменения порядка сложности алгоритма). Отметим ключевую роль здесь того факта, что в правой части эквивалентности стоит формула, *фиксированным образом* полученная из формул из левой части. Точнее, если обозначить $\chi(p, q) = p \wedge \Box p \rightarrow q$, то теорему о дедукции для логики L , расширяющей **K4**, можно переписать так:

$$\Gamma, \varphi \vdash_L \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_L \chi(\varphi, \psi).$$

В общем случае можно было бы рассматривать вопрос о теореме о дедукции для логики L как вопрос о существовании формулы $\chi(p, q)$ с указанным свойством. Этот вопрос в свое время получил неожиданный и тем не менее естественный ответ (см. об этом в [2] и/или [8]): такая формула $\chi(p, q)$ для нормальной модальной логики L существует тогда и только тогда, когда логике L принадлежит какая-нибудь формула вида $p \wedge \Box p \wedge \Box \Box p \wedge \dots \wedge \Box^n p \rightarrow \Box^{n+1} p$, причем тогда можно полагать, что $\chi(p, q) = p \wedge \Box p \wedge \Box \Box p \wedge \dots \wedge \Box^n p \rightarrow q$.

А как быть в том случае, когда такой фиксированной формулы $\chi(p, q)$ нет? Ответ не столь уж оптимистичен. Конечно, для всякой нормальной модальной логики L справедлива теорема о дедукции в следующей форме:

$$\Gamma, \varphi \vdash_L \psi \Leftrightarrow \exists n \Gamma \vdash_L \varphi \wedge \Box \varphi \wedge \Box \Box \varphi \wedge \dots \wedge \Box^n \varphi \rightarrow \psi,$$

однако квантор существования здесь весьма (невольный каламбур) существен: *a priori* нет никаких эффективных методов подтверждения существования или отсутствия требуемого n . Например, автором в [3] (см. раздел 16.7) построена разрешимая нормальная

модальная логика, для которой проблема производности правил вывода неразрешима.

С другой стороны, для стандартных нормальных модальных логик удастся упомянутый квантор существования эффективизировать, установив верхнюю границу для его параметра в зависимости от размеров участвующих в утверждении о выводимости формул, см. [3]. Приведем точную формулировку эффективной теоремы о дедукции для K :

$\Gamma, \varphi \vdash_L \psi \Leftrightarrow \exists n (n \leq 2^{|\text{Sub}\varphi \cup \text{Sub}\psi|} \ \& \ \Gamma \vdash_L \varphi \wedge \Box \varphi \wedge \Box \Box \varphi \wedge \dots \wedge \Box^n \varphi \rightarrow \psi)$,
где $\text{Sub}\varphi$ и $\text{Sub}\psi$ – множества подформул формул φ и ψ , соответственно, а $|\text{Sub}\varphi \cup \text{Sub}\psi|$ – количество всех этих подформул. В результате мы вновь получаем эффективный способ распознавать производность правил вывода в рассматриваемой логике. Правда, в отличие от ситуации, когда существовала фиксированная формула $\chi(p, q)$ (см. выше) из-за экспоненты в формулировке эффективной теоремы о дедукции для K сложность алгоритма, распознающего производность в K правил вывода, оказывается существенно выше сложности алгоритма, выясняющего принадлежность формулы логике K . Более того, эту экспоненциальную оценку, по-видимому, невозможно понизить существенно ввиду того, что проблема производности правил вывода в K является *EXPTIME*-полной (см. [7]) в то время как проблема выводимости в K «всего лишь» *PSPACE*-полна (см. [5]). Аналогична ситуация с этими вопросами и в других логиках, скажем, в $T = K + \Box p \rightarrow p$, в $D = K + \Box p \rightarrow \Diamond p$.

Варианты теоремы о дедукции, о которых шла речь до сих пор, уместно называть *внутренними теоремами о дедукции*: в самой рассматриваемой системе существует возможность говорить о выводимости из гипотез. Теперь обратимся к иной возможности обсуждать в рамках формальных систем выводимости из гипотез в других системах – к типу утверждений, которые можно было бы назвать *внешними теоремами о дедукции*.

Прежде всего обратим внимание на то, что при выводе из гипотез у нас нет никаких ограничений на размеры совокупности гипотез: множество гипотез может быть даже бесконечным. Конечно, реально в выводе мы не можем использовать все гипотезы из бесконечной совокупности, но можем использовать сколь угодно много. Поясним это.

При использовании одного лишь правила *modus ponens* для любой рассматриваемой логики выводимость формулы ψ из гипотезы φ равносильна выводимости импликации $\varphi \rightarrow \psi$. Поэтому приводившиеся выше теоремы о дедукции можно интерпретиро-

вать как утверждение об элиминации правила Геделя при подходящем изменении совокупности гипотез. Допустим, нам нужно вывести с помощью правила *modus ponens* и правила Геделя из гипотезы φ формулу ψ . Это равносильно тому, чтобы вывести формулу ψ из бесконечного множества гипотез $\{\varphi, \Box\varphi, \Box\Box\varphi, \Box\Box\Box\varphi, \dots\}$ уже без применения правила Геделя². И если бы у нас были формульные средства записи бесконечной конъюнкции в формулах, то мы могли бы записать последний факт в виде выводимости соответствующей импликации. В самих нормальных модальных логиках таких средств нет!

Пора вспомнить, что содержательные бесконечные конъюнкции вида $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \Box\Box\Box\varphi \wedge \dots$ удавалось формализовывать средствами логик с конечноместными пропозициональными связками. А именно такая задача решалась при описании итерации в динамических логиках. Впервые о возможности использования динамических логик для описания вывода из гипотез в нормальных модальных логиках автор услышал от М.Крахта в августе 1994 г., но до сих пор не встречал в литературе формулировок (и доказательств³) утверждений, подобных приводимой ниже теореме.

Воспользуемся решением этой задачи описания итерации, содержащимся в [1] (или в более ранней работе [6]). При этом нам будет достаточен фрагмент динамической логики, в котором всего одна программа (действие) и ее (его) итерация. В соответствии с этим опустим все ненужные нам здесь детали, что, в частности, позволит нам, слегка изменив обозначения, сделать их менее громоздкими.

Логика K^* – это нормальная бимодальная логика, ее модальностями являются $\Box$ (обычная необходимость) и $\Box^*$ (подразумеваемый смысл: $\Box^*\varphi$ означает то же, что и бесконечная конъюнкция $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \Box\Box\Box\varphi \wedge \dots$). Семантика Крипке для K^* определяется как и для обычных нормальных модальных логик, но с указанием, что формула вида $\Box^*\varphi$ истинна в мире a данной шкалы при данной оценке, если формула φ истинна во всяком мире, достижимом из a за произвольное конечное число шагов (в част-

² Чтобы сохранить конечность понятийного аппарата выводимости, можно факт выводимости из этого бесконечного множества формулировать так: «формула ψ выводится из подходящего конечного подмножества множества гипотез $\{\varphi, \Box\varphi, \Box\Box\varphi, \Box\Box\Box\varphi, \dots\}$ ». Здесь «подходящего» по существу и есть тот самый квантор существования, который участвует в формулировке общей теоремы о дедукции для нормальных модальных логик.

³ Это не оговорка. Часто бывает, что доказательство дает больше, чем требует доказываемое утверждение.

ности, и за 0 шагов, т.е. в самом мире a). Аксиоматизация логики K^* нам сейчас не важна, но для полноты картины приведем некоторый ее вариант: в качестве схем аксиом берутся те же схемы, что и для K (в языке, обогащенном модальностью $\Box^*$), а также схемы $\Box^*p \leftrightarrow p \wedge \Box\Box^*p$, $p \rightarrow (\Box^*(p \rightarrow \Box p) \rightarrow \Box^*p)$, в качестве правил вывода берутся *modus ponens* и правила Геделя для обеих модальностей. В упомянутых сочинениях показано, в частности, что логика K^* полна относительно корневых конечных шкал Крипке⁴, а потому и просто полна по Крипке, и, кроме того, разрешима.

Нужную нам связь K и K^* устанавливает

ТЕОРЕМА. Для всяких формул φ и ψ , не содержащих модальности $\Box^*$, справедливо:

$$\varphi \vdash_K \psi \Leftrightarrow K^* \vdash \Box^*\varphi \rightarrow \psi.$$

Утверждение этой теоремы и предлагается расценивать как внешнюю теорему о дедукции для логики K . Ввиду разрешимости K^* эта теорема является эффективной и, в частности, позволяет распознавать производность в K правил вывода.

Итак, докажем сформулированную теорему.

Предположим, что $\varphi \vdash_K \psi$. Тогда по теореме о дедукции для нормальных модальных логик найдется такое n , что логике K принадлежит формула $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \dots \wedge \Box^n\varphi \rightarrow \psi$, а потому и формулы $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \dots \wedge \Box^m\varphi \rightarrow \psi$ при всех $m \geq n$. Допустим теперь противное доказываемому, т.е. что формула $\Box^*\varphi \rightarrow \psi$ не принадлежит K^* . В соответствии с полнотой K^* относительно конечных шкал Крипке, найдется такая шкала, в корне которой при некоторой оценке истинна формула $\Box^*\varphi$, но опровергается ψ . Ввиду истинности в корне $\Box^*\varphi$ мы получаем, что формула φ истинна во всех точках шкалы, а значит, в корне шкалы истинны все формулы вида $\Box^m\varphi$, т.е. мы получили, что в корне опровергаются все формулы $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \dots \wedge \Box^m\varphi \rightarrow \psi$, и потому они не могут принадлежать K^* . Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно, т.е. на самом деле формула $\Box^*\varphi \rightarrow \psi$ принадлежит K^* .

Теперь предположим, что ψ не выводится из φ в K , т.е. логике K не принадлежит ни одна из формул вида $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \dots \wedge \Box^n\varphi \rightarrow \psi$, и покажем, что формула $\Box^*\varphi \rightarrow \psi$ не принадлежит

⁴ Напомним, что мир шкалы называется ее корнем, если из него всякий другой мир этой шкалы достижим за конечное число шагов по отношению достижимости. Шкал с корнями (корневых шкал) всегда достаточно при рассмотрении полных, по Крипке, логик, причем можно считать, что опровержимые формулы опровергаются именно в корнях подходящих шкал.

K^* . Для этого воспользуемся известной полнотой K относительно конечных интранзитивных деревьев⁵.

Пусть $p_0, \dots, p_k$ – все переменные, входящие в формулы φ и ψ . Рассмотрим класс моделей C' для модального языка с этими переменными, основанными на конечных интранзитивных деревьях, которые в этом классе не имеют p -морфных образов (или редуктов в терминологии [3]). Обозначим d_n модальную глубину формулы $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \dots \wedge \Box^n\varphi \rightarrow \psi$. Для всякого n ($n \in \omega$) будем обозначать C_n класс моделей из C' , опровергающих $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \dots \wedge \Box^n\varphi \rightarrow \psi$ в своих корнях и имеющих глубину, не превосходящую d_n . Ясно, что все классы C_n не пусты и конечны (это легко доказывается индукцией по глубине). Определим бинарное отношение S на множестве $C = \bigcup_{n \in \omega} C_n$: для $M' \in C_n$ и $M'' \in C_{n+1}$ полагаем, что $M'SM''$, если M' и M'' изоморфны или M' является p -морфным образом модели, получаемой из M'' удалением миров, достижимых из ее корня более чем за d_n шагов. Ввиду конечности всех классов вида C_n всякая модель в C имеет лишь конечное множество S -последователей. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: класс C конечен. Тогда существует некоторая модель M в C , в корне которой опровергаются все формулы вида $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \dots \wedge \Box^n\varphi \rightarrow \psi$. Ясно, что тогда в этом же корне опровергается и формула $\Box^*\varphi \rightarrow \psi$, т.е. она не принадлежит K^* .

Случай 2: класс C бесконечен. Тогда по лемме Кенига мы имеем бесконечную S -возрастающую последовательность $M_1SM_2SM_3S\dots$ моделей из C_n . Нужную нам модель хотелось бы получить как «предел» этой последовательности. Однако этому мешает тот факт, что элементы этой последовательности непосредственно не связаны друг с другом своей «геометрией»: если M_iSM_j , то вполне может оказаться, что M_j не является «продолжением» M_i . Чтобы устранить этот дефект, сделаем эти модели в определенном смысле однородными. Для этого для каждого i заменяем в модели M_i каждый мир вместе с порождаемой им моделью счетным множеством копий: сначала так поступаем с самыми верхними мирами (мирами глубины 0) – заменяем каждый такой мир на счетную совокупность миров с той же оценкой переменных, полагая, что все они достижимы из того же мира, что и в исходной модели, затем в получившейся модели каждую подмодель, порождаемую

⁵ Напомним, что шкала с корнем является иррефлексивным интранзитивным деревом, если в ней для любых двух миров имеется не более одного способа попасть из одного мира в другой по отношению достижимости, т.е. если $xRa_1Ra_2\dots a_kRy$ и $xRb_1Rb_2\dots b_lRy$, то $k = l$ и $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k$. Всякая интранзитивная шкала, конечно же, иррефлексивна.

миром глубины 1, заменяем на счетную совокупность изоморфных ей подмоделей, полагая, что их корни достижимы из того же мира, что и в предыдущей модели, затем аналогично поступаем с подмоделями, порождаемыми мирами глубины 2, и т.д. В результате получаем последовательность моделей $N_1, N_2, N_3, \dots$ (N_i получена из M_i). Поскольку наши преобразования моделей были обратными p -морфизмами, модель M_i является p -морфным образом N_i , а значит в мирах N_i истинны в точности те же формулы, что и в их прообразах при копировании из M_i . Вторым достоинством полученной последовательности является то, что N_{i+1} получается из N_i присоединением каких-то верхних миров, т.е. N_{i+1} – продолжение N_i . Если теперь взять модель N как объединение («предел») всех моделей N_i , то в ее корне будут опровергаться все формулы вида $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \dots \wedge \Box^i\varphi \rightarrow \psi$, т.е. опровергается ψ и истинны все формулы вида $\Box^i\varphi$. Последнее означает, что формула φ истинна во всех мирах модели N , а потому в корне N истинна формула $\Box^*\varphi$. В результате мы получаем опровержение в корне N формулы $\Box^*\varphi \rightarrow \psi$, т.е. вновь получили факт, опровергающий принадлежность этой формулы K^* .

Таким образом, теорема доказана.

Итак, мы получили точное формульное выражение того факта, что из бесконечного множества гипотез с помощью лишь правила *modus ponens* выводима некоторая формула. Недостатком приведенного доказательства, точнее – его доказательства, является то, что здесь речь идет только о логике K и специфика ее семантики используется существенно. Можно предположить, однако, что утверждение доказанной теоремы останется справедливым для любой нормальной модальной логики и ее бимодального напарника, получаемого так же, как мы из K получили K^* . С другой стороны, семантика K^* показывает, что мы поступали довольно естественным образом. Однако остались вопросы: является ли K^* минимальной бимодальной логикой, удовлетворяющей формулировке теоремы, есть ли иные подходы к получению указанного вида.

Что касается упомянутой минимальной бимодальной логики, то K^* ею не является. С учетом доказанного выше свойства K^* можно показать, что минимальной бимодальной логикой, для которой справедлив аналог нашей теоремы, является логика, определяемая как K^* , но вместо последних двух схем аксиом K^* следует взять бесконечное множество схем $\{\Box^*\varphi \rightarrow \psi : \varphi \vdash_K \psi\}$. Эта логика, в частности, не является конечно-аксиоматизируемой. Неминимальность K^* получается также из нижеследующего.

В [4] изучались возможности повышения выразительности модального языка при введении дополнительной модальности, семантический смысл которой – «истинность во всех мирах». Скажем, если L – некоторая нормальная модальная логика с модальностью $\Box$, то логика L^u получается из нее добавлением новой модальности $\Box^u$ с правилом Геделя для нее, схем аксиом $\Box^u(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box^u p \rightarrow \Box^u q)$, $\Box^u p \rightarrow p$, $\Box^u p \rightarrow \Box^u \Box^u p$, $p \rightarrow \Box^u \neg \Box^u \neg p$ (т.е. $\Box^u$ является S5-необходимостью) и схемы $\Box^u p \rightarrow \Box p$, выражающей «универсальность» $\Box^u$. То, что это иной по сравнению с динамическим способ описания всеобщей необходимости, следует из того, что, например, K^* и K^u не содержатся друг в друге как бимодальные логики (считая их языки совпадающими и отождествляя символы $\Box^u$ и $\Box^*$). Несложно доказать (см. лемму 113 в [8]), что для любой нормальной модальной логики L и любых формул φ и ψ , не содержащих модальности $\Box^u$, справедливо:

$$\varphi \vdash_L \psi \Leftrightarrow L^u \vdash \Box^u \varphi \rightarrow \psi.$$

Ясно, что при отождествлении символов $\Box^u$ и $\Box^*$ мы получаем, что для $K^* \cap K^u$ также справедлива доказанная теорема, причем ввиду несравнимости K^* и K^u их пересечение строго содержится в каждой из них.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сегерберг К. «После» и «во время» в динамической логике // Модальные и интенциональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М.: Наука, 1984.
2. Blok W., Pigozzi D. On the structure of varieties with equationally definable principal congruences. I // Algebra Universalis. 1982. Vol. 15. P. 195-227.
3. Chagrov A., Zakharyashev M. Modal Logic. Oxford University Press, 1997.
4. Goranko V., Passy S. Using the universal modality: gains and question // Journal of Logic and Computation. 1992. Vol. 2 P. 5-30.
5. Ladner R.E. The computational complexity of provability in systems of modal logic // SIAM Journal on Computing. 1977. Vol. 6. P. 467-480.
6. Segerberg K. A completeness theorem in the modal logic of programs // Universal Algebra and Application. Warsaw: PWN, 1982. P. 31-46.
7. Spaan E. Complexity of Modal Logics. PhD thesis. Department of Mathematics and Computer Science, University of Amsterdam, 1993.
8. Zakharyashev M., Wolter F., Chagrov A. Advanced Modal Logic // Gabbay Dov (eds.), New Handbook of Philosophical Logic, 1998.

Е.Д.Смирнова

ЛОГИКА В ФИЛОСОФИИ И ФИЛОСОФИЯ ЛОГИКИ¹

Abstract. *In the paper a relation between logic and philosophy is considered. The issues of foundations of logical systems on the basis of semantics of different types are investigated. On the other hand a role of logic in solving fundamental philosophical problems such as foundations of theoretical knowledge and constructing theoretical pictures of the world is studied.*

Формальная логика всегда была связана с принципиальными философскими проблемами гносеологического и онтологического характера. С одной стороны, логика выдвигала философские проблемы, а с другой - была важным средством для их решения и обсуждения. Более того, само обоснование логики - одна из центральных философских проблем. С превращением формальной логики в символическую она стала применять сложный технический аппарат исчислений, а также использовать достаточно богатые математические средства. Однако это не отдалило логику от философии, как может показаться на первый, поверхностный взгляд. Напротив, связь формальной логики с философией, особенно с теорией познания, стала более глубокой, многосторонней и основательной.

Рассматривая связь логики с философией, мы выделяем два плана, два круга проблем: вопросы обоснования логических систем и роль логики в анализе глобальных философских вопросов (роль «логической сетки»).

Вопрос обоснования логики теснейшим образом связан с вопросом о природе логического. Что изучает логика? Является логика наукой эмпирической или теоретической? Имеет ли она собственный базис, или ее основания лежат в психологии, в теории познания, в математике? Освещение этих вопросов во многом связано с критикой психологизма в логике, который являлся господствующим направлением в конце XIX в. Согласно представителям этого направления, логика - эмпирическая наука, ее объекты существуют так же независимо от нее самой, как существуют процессы, изучаемые физикой, химией и т.д. Т.Липпс писал, что логика есть физика мышления. Согласно Дж.Ст.Миллю, логика - не обособленная от психологии, а соподчиненная ей наука, она

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 00-03-00320.

есть часть или ветвь психологии, своими теоретическими основаниями она целиком обязана психологии. Мышление есть психический процесс, и логика изучает законы и формы этого естественного, природного процесса психической деятельности людей. Ссылка на то, что логика изучает законы и формы *правильного* мышления, ничего не меняет в этом плане, поскольку правильное мышление есть тоже мышление, и логика, изучая его закономерности, является частью эмпирической психологии. Нормативный характер логики также не меняет существа дела, поскольку обосновываться он может по-разному. В частности, логические нормы и правила могут объясняться закономерностями объективно протекающего процесса человеческого мышления - тем, «как люди мыслят».

При таком подходе вопросы обоснования логики по существу снимаются. Изучай, как люди мыслят, в том числе и закономерности правильного мышления, - и только. Такой плоский эмпиризм в трактовке логических форм и законов естественным образом приводит к пониманию логических форм как изначально данных, независимых от практической познавательной деятельности людей, делает невозможной саму постановку вопроса об информативности логических форм и законов или об их отношении к реальности.

При такой трактовке «эмпиризма» фактически снимается, исчезает вопрос об онтологических и гносеологических предпосылках логики. Поэтому критика эмпиризма в логике была важной и необходимой предпосылкой разработки и обоснования современной логики. Логические законы носят нормативный характер не потому, что мы так должны мыслить, следуя природе нашего ума. Люди вполне могут мыслить, нарушая законы логики. Необходимый характер логических законов - это не та необходимость, которую имеют законы гравитации, отмечал Г.Фреге. Одно дело - как протекает процесс человеческого мышления, чем обусловлены наши суждения, другое - принципы и законы логики. Объяснение хода мышления и наших суждений, полагал Фреге, - важная, но не логическая задача.

Важными вехами в критике психологизма в логике явились работы Б.Больцано, Г.Фреге, Э.Гуссерля и других видных логиков и философов. Э.Гуссерль противопоставлял эмпирическому истолкованию логических связей (в духе психологизма) не их нормативный характер, а то, что они носят невременной, не причинный характер. Он подчеркивал, что это - связи *идеальные*. Критика Гуссерлем психологизма в логике, верная и глубокая, не утратила своего значения и в наши дни. В то же время концепция Гуссерля не дает возможности выявить специфику логики как теоретической

науки, выявить отношение идеальных связей к теоретико-познавательным предпосылкам.

Но и сторонники крайне негативного отношения к психологизму в логике, рассматривающие логику как теоретическую науку об объективных, идеальных связях и отношениях, приходят нередко к другому крайнему выводу - логика вообще не имеет никакого отношения к изучению мышления и ее трактовка как науки о законах и формах мышления есть возврат к психологизму. «Однако неверно, что логика - наука о законах мышления, - пишет Я. Лукасевич. - Исследовать, как мы действительно мыслим или как должны мыслить, - не предмет логики. Первая задача принадлежит психологии, вторая - относится к области практического искусства, наподобие мнемоники» [6, с. 48]. Лукасевич подчеркивает, что логика и ее законы не есть нечто субъективное, нечто присущее природе человеческого ума. Логика изучает вполне *объективные отношения* (силлогистика, например, базируется на объективных отношениях в сфере общих терминов, фактически - объемов понятий). Это такие же объективные отношения, как и отношения, изучаемые математикой. Именно исходя из объективного характера отношений, лежащих в основе логики, Лукасевич и делает вывод, что законы логики вообще не имеют никакого отношения к нашему мышлению. Из контекста видно, что само мышление Лукасевич при этом понимает узко, трактуя его в духе того же психологизма как процесс психической деятельности людей. «Вы, понятно, должны думать, когда вам нужно сделать вывод или построить доказательство, так же как вы должны думать, когда вам надо решить математическую проблему. Но при этом законы логики к вашим мыслям имеют отношение не в большей мере, чем законы математики. То, что называется "психологизмом" в логике, - признак упадка логики в современной философии» [6, с. 48].

В качестве альтернативы выдвигались и объективно идеалистические, и конвенционалистические подходы к истолкованию оснований логики. В последнем случае акцент переносился на нормативный характер логических принципов. При этом нормативный характер логических законов и правил обосновывался соглашениями об употреблении определенных терминов языка - логических констант. Принятие тех или иных способов рассуждений обуславливается чисто прагматическими соображениями, их теоретико-познавательное обоснование рассматривается как псевдovoпрос. Крайняя форма этого направления нашла выражение в логическом позитивизме. Особенно характерен в этом плане «принцип терпимости» Р.Карнапа. Однако логическое знание не есть знание, относящееся лишь к языку.

Еще одной альтернативой выступает тезис, согласно которому логические связи настолько фундаментальны и первичны, что не нуждаются вообще в обосновании. Логическое знание - наиболее обоснованная, надежная и универсальная часть нашего знания. Во всяком случае логика, полагают, нуждается в обосновании меньше, чем математика. По разным совершенно основаниям такое понимание присуще и логицизму, и И.Канту.

Одна из важнейших задач логики - описать правильные способы рассуждения. Но какие выводы считать правильными? Те, что соответствуют правилам? Но почему принимаются те, а не иные правила, те, а не другие логические системы? Вопрос ставится о законности, оправданности способов рассуждения, т.е. об обосновании логики.

Нормативный характер логических законов и правил определяется не свойствами нашего ума, как это полагал Кант, не априорными формами мышления, а определенными объективными связями между нашими высказываниями, определенной объективной зависимостью истинности одних наших утверждений от истинности (ложности) других. Логика и выявляет типы такого рода связей, которые лежат в основе логических принципов и правил. Понятие истинности является центральным, основным понятием логической семантики. Суть дела заключается в *особом* (принципиально отличном от всех остальных дисциплин) *отношении логики к понятию истинности*. Если психологию, например, истинность интересует не более, чем любую другую науку, ибо любая наука заинтересована в истинности своих положений, то в логике анализ понятия истинности включается собственно в ее предмет. Можно строить различные системы формального вывода. Однако какова бы ни была структура допускаемых способов рассуждения, в логике к ним предъявляется одно обязательное требование: они должны воспроизводить отношение логического следования. В зависимости от того, каким условиям отвечает принимаемое в семантике понятие истинности, находят свое оправдание и обоснование те или иные правила логики.

Попытка учесть в логике все более глубокие теоретико-познавательные характеристики истины приводит к появлению новых логических систем.

Современная логика является не только теорией дедуктивных способов рассуждения и не только теорией определмости и определений, теорией индуктивных способов рассуждения. Значительное место в ней занимает разработка процедур поиска доказательств. Этот аспект интенсивно разрабатывается в настоящее время, особенно в связи с проблемами, объединенными именем «искусственный интел-

лект». Но не заставляет ли обращение к проблемам разработки методов поиска доказательства и ряду других проблем «искусственного интеллекта» оставить жесткие антипсихологические установки и вернуться к некоторой новой версии психологизма? Б.В.Бирюков пишет: «Ныне - в свете работ по "искусственному интеллекту" - происходит как бы возрождение "логического психологизма", правда, на ином, более высоком уровне, чем это было ранее, например, в эпоху такого резкого критика психологизма в логике, каким был Г.Фреге»².

На наш взгляд, логические методы поиска доказательств не преследуют цель изучить, как человек изобретает доказательства. Интерес концентрируется на изучении возможных методов поиска доказательств, их сравнении и систематизации независимо от того, как и кем они реализуются, людьми или компьютерами. В общем, способ реализации процедур интеллектуального характера, который разработан в рамках «искусственного интеллекта», может существенным образом отличаться от тех процедур, которые осуществляются человеком. Аналогично, производственные орудия и механизмы не обязательно копируют биологические органы. П.Уинстон очень четко формулирует эту «антипсихологическую» установку: «Заметим, что желание заставить вычислительные машины быть разумными – это не то же самое, что желание заставить вычислительные машины моделировать интеллект. Искусственный интеллект привлекает людей, которые хотят вскрыть принципы, применимые ко всем интеллектуальным информационным процессорам, а не только к тем, которые почему-то сделаны из влажной нервной ткани, а не из сухих электронных компонентов. Поэтому у нас нет желания копировать человеческий интеллект, как нет и предубеждений против использования методов, которые, по-видимому, используются в интеллекте человека... Точно так же, как сведения из психологии, касающиеся обработки информации у людей, могут способствовать совершенствованию компьютеров, так и теории, построенные исключительно на основе размышления о вычислительных машинах, часто наводят на различные соображения о том, как можно было бы улучшить образование людей. Иначе говоря, методология, используемая, чтобы сделать разумнее машины, может быть, видимо, использована и для того, чтобы сделать разумнее самих людей» [9, с. 14].

Мы бы сказали еще резче: задача логики состоит не в том, чтобы описать, как из посылок извлекаются следствия человеком

² См.: Бирюков Б.В. Актуальные проблемы философско-кибернетических исследований // Философские науки. 1981. § 2. С. 32.

или компьютером (или как ищутся доказательства), а в том, чтобы обосновать возможные способы рассуждения, методы поиска доказательств и т.д. Логика, как и математика, не является эмпирической наукой. Ни первая, ни вторая не обосновываются ссылкой на то, что некто так рассуждает или вычисляет. Расширение горизонтов логики не дает оснований вернуться к «логическому психологизму» даже на новом уровне.

В проблеме психологизма в логике, с нашей точки зрения, следует различать два круга вопросов, два совершенно различных плана исследований. Одно дело - рассмотрение логических форм и законов как форм и законов некоторого *естественного, природного процесса психической деятельности людей*, другое - вопрос включения познающего субъекта, его установок, предпосылок, наконец, принимаемого им концептуального аппарата в обоснование логических форм и законов. Это две совершенно различные установки, но их нередко не различают, называя психологизмом в логике и то и другое равным образом.

Выявление роли субъекта познавательной деятельности в обосновании принимаемых приемов рассуждения занимает особое место. Появление логических систем, семантики которых включают определенные характеристики субъекта (такие, как его знание, установки, принимаемый им концептуальный аппарат и т.д.), не означает возврата к эмпиризму и психологизму в логике во всяком случае в традиционном смысле. С другой стороны, включение в семантику такого рода предпосылок может вести к пересмотру самих понятий истинности, ложности, отрицания. На этой базе возникают различного типа *нестандартные семантики*.

Сказанное не означает, что между логикой и психологией нет и не может быть взаимодействия³. Но ни психология, ни Computer Science не могут обосновать логику (равным образом математику и методологию).

Однако проблемы философских оснований логики не сводятся только к анализу понятия истинности в логике и его роли в обосновании логических систем. Другая линия связана с проблемой предметности, с проблемой методов семантического анализа смысла и значения выражений языка. *Какова роль предметной области и характера объектов рассмотрения в обосновании допустимых логических процедур и правил?*

³ Интересная программа такого взаимодействия изложена в статье Маслова С.Ю.: Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества // Семантика и информатика. Вып. 13. М., 1979. С. 17-46.

Вопрос о природе логических законов, их абсолютности, универсальности, изменяемости или неизменности всегда являлся центральным при исследовании природы логического знания. С нашей точки зрения, следует различать два типа теоретико-познавательных предпосылок, от которых зависят логики. Во-первых, это предпосылки назовем их *предпосылками онтологического характера*, налагаемые на миры, на объекты универсума рассмотрения (например, воображаемые миры Васильева или идеальные и реальные объекты у Гильберта, или возможные миры в семантиках модальных систем). Во-вторых, это *предпосылки, связанные с концептуальным аппаратом познающего субъекта*: с принимаемыми понятиями истинности, ложности, логического следования, суждения, отрицания и т.д. С предпосылками такого рода связано, на наш взгляд, включение в логику, в обоснование логических систем субъекта познавательной деятельности.

Казалось бы, логические формы, логические законы не зависят от характера объектов рассмотрения, они универсальны. Кант полагал, например, что общая (формальная) логика имеет дело лишь с необходимыми и всеобщими правилами мышления вообще, она исследует их без различия объектов, т.е. материи, являющейся предметом мысли, и посему она отвлекается от всякого содержания знания. «Общая логика открывает только форму мышления, но не материю. Она отвлекается от всякого содержания познания» [5, Фрагмент 1627].

Логика не зависит от конкретных положений дел в действительности, от эмпирических характеристик объектов рассмотрения. В этом смысле она действительно не зависит от содержания познания, как это утверждал И. Кант. Логика - теоретическая, а не эмпирическая наука. Но она не зависит лишь от конкретного содержания познания.

Четко ставит вопрос об условиях и предпосылках использования обычных законов логики в математике Д. Гильберт. В качестве предварительного условия для применения логических выводов и для выполнения логических операций нечто должно быть нам уже дано, а именно: определенные внелогические конкретные объекты, которые могут быть представлены наглядно и даны нам непосредственно. Утверждения о такого рода объектах являются *содержательными сообщениями* и могут оцениваться как истинные и ложные (« $5 > 2$ », « $2 + 3 = 3 + 2$ » и т.п.). Гильберт называет их действительными (реальными) предложениями. К такого рода высказываниям можно «свободно и не задумываясь применять обычные законы логики», их можно отрицать, они истинны или ложны, для них имеет место закон противоречия, т.е. какое-либо высказывание

такого рода и его отрицание не могут быть оба истинными; имеет место и закон исключенного третьего.

Однако указанные выше предпосылки для использования обычных законов логики не соблюдаются при введении в математику идеальных элементов [7, гл. VI, § 2]. Теории, помимо реальных, конкретных объектов, доступных опытной проверке, «населяются» еще идеальными объектами различного статуса, в том числе и фикциями, не имеющими в принципе аналога в действительности. Возникает вопрос о возможности и предпосылках использования *обычных логических законов* применительно к такого рода объектам. Оказывается, что законность умозаключений, применяемых к такого рода объектам, требует обоснования; применение обычных законов логики и процедур рассуждения может приводить теперь к противоречиям. Таким образом, обычная формальная логика оказывается вовсе не безразличной к объектам, к «материи», являющейся предметом мысли, в этом плане она не отвлекается от содержания познания.

Так, способы рассуждения, абстрагированные от математики конечных множеств, не могут переноситься и применяться - без дальнейшего обоснования - к математике бесконечных множеств. Точно так же применение обычных законов логики к рассуждениям об идеальных элементах требует обоснования, выявления условий такого рода применений. «А содержательные логические выводы, когда мы их применяем к действительным вещам или событиям, - разве они нас где-либо обманывали и где-либо нам изменяли? Нет, - содержательное логическое мышление необходимо. Оно нас обманывало только тогда, когда мы принимали произвольные абстрактные способы образования понятий... Мы, очевидно, не обратили внимания на предпосылки, необходимые для применения содержательного вывода» [3, с. 350].

К идее зависимости логических законов от «эмпирии», от характера объектов рассмотрения приходит также известный русский логик начала XX в. Н. Васильев. Васильев полагал, что определенные логические законы носят «эмпирический» характер в том смысле, что они зависят от познаваемых объектов и изменяются соответственно изменениям объектов рассмотрения. Такого рода законы не универсальны, иными словами, они зависят от учета определенных онтологических предпосылок, связанных с рассматриваемыми объектами. Согласно Васильеву, «мы можем мыслить другие миры, чем наш, в которых некоторые логические законы будут иными, чем в нашей логике... Теперь ясно, что если *при неизменности познающего субъекта* в другом мире некоторые логические законы были бы другими, чем у нас, то это было бы

возможно только при условии, что изменившиеся логические законы в нашей логике зависят не от познающего субъекта, а от познаваемых объектов, т.е. что эти логические законы не рациональны, а эмпиричны» [1, с. 57].

Таким образом, у Васильева логические законы изменяются не потому, что изменяются рациональные способности субъекта или изменяется мышление как естественный природный процесс, - изменяются те логические законы, которые связаны с определенными онтологическими или теоретико-познавательными предпосылками, связанными с *объектами рассмотрения*. Если в этом случае и допустимо говорить об «эмпиричности» логических законов, то под «эмпиризмом» надо понимать *нечто совсем иное*, нежели в том случае, когда логические законы трактуются как эмпирические обобщения, как законы некоторого естественного процесса человеческого мышления. Фактически у Васильева речь идет об информативности логических законов, об их отношении к познаваемому миру, о зависимости их от предпосылок, связанных с объектами рассмотрения. «Предположите мир осуществленного противоречия...». В таком воображаемом мире и будет действовать воображаемая, *неаристотелева* логика. «Воображаемая логика неаристотелева потому, что она имеет дело с *другим логическим миром*, с другими логическими операциями, чем те, с какими имела дело наша логика, впервые систематизированная Аристотелем» [1, с. 62].

Таким образом, рассматривая вопрос о статусе логических законов, Васильев четко различает те из них, которые обращены к миру, объектам (закон противоречия, закон исключенного третьего) и потому относительны, могут устраняться, и некоторые металогические принципы (он их называет законами металогики), которые связаны с нашими понятиями вывода, истинности, ложности, суждения и поэтому не могут отбрасываться, *они присущи любому логическому мышлению независимо от характера объектов познания*. «Суждение не может быть одновременно истинным и ложным». Этот закон *несовместимости истинности и ложности*, по Васильеву, является универсальным законом - «законом абсолютного разграничения истины и лжи», и его не следует смешивать с законом противоречия. «Без этого закона невозможна никакая логика... Тот, кто перестал бы различать истину от лжи, тот перестал бы мыслить логически» [1, с. 64-65].

Таким образом, законы и принципы логики, связанные с субъектом, Васильев рассматривает как универсальные и неизменные — без них невозможно никакое правильное мышление. Возникает важный, принципиальный вопрос, так ли это. В противо-

положность Н.А.Васильеву, мы не считаем, что законы, связанные с концептуальным аппаратом субъекта (с принимаемыми понятиями истинности, ложности, отрицания, следования), являются абсолютными и неизменными. Они так же изменяются, как и законы, связанные с определенными предпосылками относительно универсума рассмотрения. Так, пересмотр понятий истинности и ложности, отношений между ними приводит к нестандартным семантикам и обуславливает особые способы рассуждения, базирующиеся на этих семантиках.

Пусть W - множество возможных миров, $\varphi_T(p) \subseteq W$ - класс миров, в которых высказывание p имеет место (область высказывания), а $\varphi_F(p) \subseteq W$ - класс миров, в которых высказывание p не имеет места (антиобласть высказывания). Если предикаты истинности и ложности рассматривать как не всюду определенные, и понятия истинности и ложности ввести как независимые понятия, мы имеем тогда дело с такими независимыми объектами, как области и антиобласти высказываний, между которыми в принципе могут устанавливаться различные отношения, в частности приниматься или не приниматься условия:

1. $\varphi_T(p) \cap \varphi_F(p) = \emptyset$;
2. $\varphi_T(p) \cup \varphi_F(p) = W$.

Принимая оба условия, получаем стандартную, классическую семантику. Принимая 1. и отбрасывая 2. - семантику с истиннозначными провалами (gaps); принимая 2. и отбрасывая 1. - двойственную ей семантику с пресыщенными оценками (glut evaluations); наконец, не принимая условия 1. и 2., получаем релевантную семантику. Таким образом получаем *нестандартные семантики* и логики, базирующиеся на них. Получаем различные отношения логического следования; различные системы логики детерминируются именно этими отношениями логического следования в сочетании с принятием (или не принятием) условий 1. и 2. Вопрос их формализации - особый вопрос [7, гл. V.]. Таким образом, определенные типы логик детерминируются в данном случае вполне определенными объективными отношениями в сфере таких идеальных объектов, как области и антиобласти высказываний.

Особый философский вопрос - вопрос о роли (и необходимости) абстрактных сущностей в семантическом анализе, - последнее означает введение особой «онтологии» в семантику, в мир языка логики. Речь идет, естественно, не об онтологии реального мира, а о конструировании нами «платоновских сущностей» и обосновании их введения в семантику, их роли в анализе логических структур.

Отметим, что в принципе переход к более богатым языкам и системам предполагает включение в семантику абстрактных объектов более высокого уровня, идеальных объектов особого рода. Рассмотрим, например, интенциональные контексты. Переход к такого рода контекстам ведет к «умножению сущностей» в семантическом анализе. Замена эквивалентных, кодесигнативных выражений служит критерием разграничения экстенциональных или неэкстенциональных (интенциональных) контекстов. Этот критерий выполняет роль «лакмусовой бумажки», но никак не разъясняет особенностей неэкстенциональных контекстов. Следует различать два типа предикатных знаков и операторов - экстенциональные и интенциональные («знает, что...», «необходимо, что...», «искать» - в контекстах типа «Шлиманн искал местоположение Трои» и т.д.). Эти знаки отличаются прежде всего *типом сущностей*, сопоставляемых им в семантике. Если обычному экстенциональному знаку в качестве интенционала сопоставляется, напр., объект типа 2^W (пропозициональный концепт), то одноместным пропозициональным операторам - при подходе Д.Скотта - приписываются объекты типа

$$(2^W)^{(2^W)},$$

т.е. функции, сопоставляющие пропозициональным концептам пропозициональные концепты. При подходе Р.Монтегю - отношения между мирами (объектами из W) и *семействами* миров, т.е. объекты типа

$$2^{W \times 2^W}$$

- подмножества множества своеобразных пар вида $\langle w_i, S \rangle$, где $w_i \in W$, а S - семейство миров. Смысл таких пар $\langle w_i, S \rangle$: мирам сопоставляются их «окрестности» - миры (положения дел), связанные с ними. При нашем подходе - объекты типа

$$(2^{(2^W)})^W,$$

т.е. мирам сопоставляются семейства пропозициональных концептов. Таким образом, семантический анализ интенциональных контекстов предполагает своеобразную «онтологию».

Однако, с нашей точки зрения, принципиальное отличие рассматриваемых контекстов заключается в их особой *логической структуре* - ином способе связи интенциональных функторов с их *аргументами* и, соответственно, в ином способе установления экстенционалов и интенционалов сложных выражений [7, гл. IV]. Именно введение особого рода сущностей, сопоставляемых в семантике интенциональным функторам, диктует иной способ

связи этих функторов с аргументами, иную логическую структуру этих контекстов.

Вернемся к вопросам, поставленным в начале; остановимся на роли логики, «логических сеток» в анализе ряда философских проблем. Как онтологические, гносеологические предпосылки играют решающую роль в логике, в обосновании логических систем, так и принятие той или иной логики определяет решение целого ряда философских, теоретико-познавательных вопросов. Ибо логика несет в себе нагрузку определенных абстракций и идеализаций, способов конструирования, сквозь сетку которых мы «смотрим» на мир. Особый интерес представляет вопрос о роли логики в познавательной деятельности, в построении гносеологических картин мира.

Глобальной философской проблемой является проблема обоснования необходимого, теоретического знания. Связь логики и философии особенно ярко выступает в рассмотрении этого круга вопросов. В этом плане особый интерес представляет программа, выдвинутая Д. Гильбертом. Суть его метода мы видим не в формализации теории и доказательстве ее непротиворечивости, как это обычно подчеркивается, а в обосновании вводимых «идеальных образов». Одна из задач в связи с анализом этого подхода - показать роль философских идей И. Канта в гильбертовской трактовке логики и математики. Другая - показать связь логики с обоснованием вводимых «идеальных элементов» и трактовкой необходимого, математического знания.

Вслед за Кантом предполагается, что предварительным и необходимым условием применения логических выводов и операций является, как отмечалось, наличие в нашем представлении внелогических, конкретных объектов, которые «имеются в созерцании до всякого мышления». Гильберт считает это той *основной философской установкой*, которая обязательна как для математики, так и для всякого научного мышления. При этом ключ к пониманию гильбертовской трактовки подлинных объектов математики (и, соответственно, «действительных предложений») следует искать именно в кантовской идее *схематизма чистого созерцания*, ибо это не объекты эмпирического созерцания.

Каким же образом в математике, этом образце достоверности и обоснованности, возникают парадоксы? Причину возникновения парадоксов, согласно Гильберту, надо искать не в логике (не в законах и правилах классической логики), а в *несоблюдении предпосылок и условий ее применения*. Парадоксы возникают потому, что пользуются «недопустимыми и бессмысленными образованиями понятий». Содержательное логическое мышление нас «обманывало только тогда, когда мы принимали произвольные

абстрактные способы образования понятий; мы как раз недозволенно применяли содержательные выводы, т.е. мы, очевидно, *не обратили внимания на предпосылки, необходимые для применения логического вывода*» (выделено мной. – Е.С.) [3, С. 350].

Дело в том, что даже элементарная математика «уже не остается на точке зрения наглядной теории чисел» и наряду с действительными включает идеальные высказывания, предполагающие введение объектов, которые в принципе не могут быть даны ни в эмпирическом, ни в чистом созерцании. «Идеальным образам» (идеальным элементам - в терминологии Гильберта) с философской точки зрения отводится роль кантовских трансцендентальных идей, если под идеей «подразумевать понятие, образованное разумом, которое выходит за пределы всякого опыта...» [3, с. 364].

Уже Кант отмечал «склонность разума к расширению за узкие границы возможного опыта». Там, «где ни эмпирическое, ни чистое созерцание не держат разум в видимых рамках, он крайне нуждается в дисциплине, которая ... удерживала бы его от крайностей и заблуждений, так что вся философия чистого разума имеет дело только с этой негативной пользой».

В силу этого требуется «совершенно особое, и при этом негативное, законодательство», создающее «систему предосторожностей и самопроверки» [5, с. 598, 599]. На наш взгляд, именно этим определяется суть метода идеальных элементов Д.Гильберта. Обязательное условие, с которым связывается введение идеальных элементов – *доказательство их устранимости из контекста всей теории*. Доказательство формальной непротиворечивости становится «заградительной мерой» в силу того, что оно связано у Гильберта именно с элиминированностью идеальных элементов. Подробнее см. [7, гл. VI].

В то же время велика роль идеальных элементов в построении научного знания, в сохранении той же математики в полном объеме. С точки зрения Гильберта совершенно неразумно выдвигать общее требование, чтобы отдельные предложения теории - будь то математика или физика - допускали содержательное истолкование. «В теоретической физике только известная часть комбинаций и следствий из физических законов может быть контролируема опытом, - подобно тому, как в моей теории доказательства только действительные высказывания могут быть непосредственно проверяемы» [3, с. 382].

В рамках рассматриваемых вопросов коснемся определенных философских следствий, вытекающих из известных теорем Гёделя. В связи с расширением финитной установки Гильберта встает вопрос о трактовке действительных предложений матема-

тики, о соотношении действительных объектов и «мысленных образов». Результаты Гёделя показали, что для доказательства непротиворечивости даже таких простых систем, как первопорядковая арифметика, необходимо выйти за рамки финитной системы мышления в смысле Гильберта. Это означает, что для доказательства непротиворечивости в метатеории нужны определенные абстрактные, то есть не наглядные, понятия, относящиеся не к конкретным объектам наглядного созерцания, а к мысленным образам. Иными словами, мы выходим за рамки чисто синтаксических рассмотрений, относящихся к чисто формальным объектам. Означает ли в таком случае расширение финитной установки Гильберта выход за рамки познания «посредством конструирования понятий» в смысле Канта?

К.Гёдель, вслед за Бернайсом, различает в финитной установке два момента. Во-первых, конструктивный момент - наличие эффективного метода построения соответствующего понятию объекта. Во-вторых, «специфически финитистский элемент, требующий, сверх того, чтобы объекты, о которых делаются высказывания... были наглядными... Под этим понимается сопоставление им пространственно-временных элементов, все особенности которых, за исключением их равенства и различия, не существенны» [2, с. 301].

Таким образом, финитизм Гильберта - благодаря работам Г.Генцена и К.Гёделя - претерпевает изменения в том направлении, что приходится отказываться, по существу, от номиналистической установки - от требования «наглядной очевидности». С нашей точки зрения, это отказ от требования представить «общее *in concreto* (в единичном созерцании)» посредством остенсивных или знаковых конструкций. Но сохраняется Кантова идея, связанная со «схемой», - наличие общего способа, посредством которого строится объект, сообразно некоторому понятию. В то же время это все же отказ от идеи созерцательного характера математического знания, от понимания схемы «как правила синтеза воображений». Однако априорный, аподиктический характер математического знания («аподиктическая достоверность») сохраняется, поскольку мы обращаемся к тем свойствам, которые относятся к схеме, определяются правилами конструирования объекта [8].

Априоризм здесь понимается совершенно в особом смысле. Аподиктическая достоверность математических утверждений базируется не на эмпирии и не на анализе понятий, а на общих условиях конструирования объектов математического знания, задаваемых фактически «схемой» в смысле И.Канта. Именно это, с другой стороны, обуславливает достаточную независимость теоретических конструкторов от эмпирии и создает в принципе возмож-

ность построения чисто теоретических, символических моделей мира. Но это уже разговор о роли логики, «логических сеток» в построении картины мира - «логических строительных лесов» в смысле Л.Витгенштейна.

В целом расширение сферы логического, усиление роли логики в познавательной деятельности, разработка логики не только как теории рассуждений, но и как «строительных лесов» мира – одно из интереснейших и перспективнейших, с нашей точки зрения, направлений, к которому подошла современная логика на рубеже веков. Это то, что будет новым в логике нового века.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Н. Логика и металогика // Логос. Кн. первая и вторая. М., 1912-1913.
2. Гёдель К. Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения // Математическая теория логического вывода. М., 1967.
3. Гильберт Д. Основания геометрии. М.;Л., 1948.
4. Гильберт Д. Естествознание и логика // Кантовский сборник. Вып. 15. С. 122-123.
5. Кант И. Сочинения: В 6 т. М., 1964. Т.3
6. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
7. Смирнова Е.Д. Логика и философия. М., 1996.
8. Смирнова Е.Д. И.Кант и финитная установка Д.Гильберта // Логические исследования. М., 1997. Вып. 4.
9. Уинстон П. Искусственный интеллект. М., 1980.

LOGIC AND THE RELATIVITY PRINCIPLE¹

Abstract. *The logical structure of relativity-like theories is discussed. Some difficulties, arising herein, are pointed.*

My aim is to show how each scientific theory from a fairly wide class can be likened in its logical structure to special relativity. I don't assert that it is interesting to realize such an operation whenever it is possible. However, I give two instances, in which the result applying of the operation provokes some promising stumbers.

1. Logical content of special relativity

The following languages under consideration are all first-order (without identity), if it isn't stipulated for the contrary.

Let U be an axiomatic system in the language

$$S = (g_1, \dots; G_1, \dots, R, \check{R}),$$

where $R, \check{R}$ are one-place predicate symbols and among the predicate symbols $G_1, \dots$ there can be the identity symbol $\approx$. Then, let $\check{U}$ be the system obtained from U by the substitution of $\check{g}_1, \dots; \check{G}_1, \dots, \check{R}, R$ for, respectively, $g_1, \dots; G_1, \dots, R, \check{R}$ (of course, substituted symbols have suitable arities). The language of $\check{U}$ is $\check{J}b$,

$$\check{S} = (\check{g}_1, \dots; \check{G}_1, \dots, \check{R}, R).$$

I will say that axiomatic system W in the joint language

$$\Sigma = (g_1, \check{g}_1, \dots; G_1, \check{G}_1, \dots, R, \check{R})$$

is $(U, \check{U})$ -symmetric, if $W = \text{Th}(U \cup \check{U})$, where: $U, \check{U}$ are axiomatic systems (in languages $S, \check{J}b$ respectively) of the above-mentioned kind; Th denotes the deductive closure of a set $U \cup \check{U}$ of formulas in first-order logic (without identity).

Let T be an axiomatic system in the language

$$\sigma = (g_1, \dots; G_1, \dots).$$

Then I say that axiomatic system W in the language Σ is $(U, \check{U})$ -symmetric over T if W is $(U, \check{U})$ -symmetric and U is an extension of T by some defining axiom for R and by the following axiom connecting R and $\check{R}$ (σ includes neither R nor $\check{R}$):

$$\forall x(R(x) \leftrightarrow \neg \check{R}(x)).$$

¹ The work is supported by grants RFFR 97-06-80312 and RHSF 99-03-00204.

Every axiomatic system $(U, \overset{\circ}{U})$ -symmetric over T is also $(\overset{\circ}{U}, U)$ -symmetric over $\check{T}$.

Let me introduce another notion. Let T be such as above. Then I say that axiomatic system W in the language Σ is *weak* $(U, \overset{\circ}{U})$ -symmetric over T , if W is $(U, \overset{\circ}{U})$ -symmetric and U is an extension of T by some defining axiom for R and by the following axiom connecting R and $\check{R}$ (σ includes neither R nor $\check{R}$):

$$\forall x(R(x) \rightarrow \neg \check{R}(x)).$$

Every axiomatic system weak $(U, \overset{\circ}{U})$ -symmetric over T is also weak $(\overset{\circ}{U}, U)$ -symmetric over $\check{T}$.

Now I must make two remarks to motivate the subsequent formulation of the 'logical content of special relativity'.

(1) As it is known [1, p. 112 - 115], *principle of uniform translational motion relativity* reads as follows: under identical initial conditions all physical processes proceed identically in all *inertial* frames (of reference). That, however, doesn't mean that some *given* process is identically observed in all these frames. Au contraire, if, for example, point M_1 is *at rest* relative to some inertial frame, say α , then M_1 *moves* relative to another inertial frame, say β .² But if initial conditions of a movement of another point M_2 relative to β are identical with ones of the movement of point M_1 relative to α , then both of these movements will be identical also. In other words, the *equations* of physics have *the same form* in both frames α and β (or, as the saying goes, are *invariant* under the transition from frame α to frame β), but the *results of concrete measurements of concrete events* must, generally speaking, *change* under this transition.

(2) It is also known [*ibid.*, 168 - 190], that in special relativity 'simultaneity' is an instrumentally defined notion. This means that any physically meaningful judgement about the simultaneity of two concrete events is an outcome of a certain measuring procedure. But then, by force of (1), this procedure can be reproduced in every inertial frame, on the one hand, and, on the other hand, the concrete results of its execution must, generally speaking, depend on that concrete inertial frame, in which the procedure is executed. Actually, in relativistic physics the considered procedure is defined as follows. If it is realized in frame α for measuring of spatially separated events E_1 and E_2 , and if an analogous procedure for measuring of *the same* events is reproduced in frame β , then the results of these measurements satisfy the following two conditionals. If E_1 and E_2 are simultaneous according to the outcome of the measurement in α , then they are not simultaneous according to the out-

² It is supposed that inertial frames α and β move relative to one another with the velocity of v , $0 < v < c$.

come of the measurement in β . If E_1 and E_2 are simultaneous according to the outcome of the measurement in β , then they are not simultaneous according to the outcome of the measurement in α .

Let me express (1) and (2) in other form. Let us pick out that fragment of physics, which is necessary for the said definition of simultaneity. This fragment, being referred to inertial frame α , can always be considered as some consistent axiomatic system T of the fore-mentioned kind.³ Let us extend T , explicitly defining a new predicate symbol R so as to have possibility to interpret $R(x)$ as the predicate 'if x is a couple of spatially separated (in frame of reference α) events, then x is a couple of simultaneous (in frame of reference α) ones'. Then over again let us proceed this process of extending, introducing another new predicate symbol $\check{R}$ by the axiom

$$\forall x(R(x) \rightarrow \neg \check{R}(x)).$$

Let U be the axiomatic system obtained as the result of these two extensions of T .

Now let us obtain $\check{U}$ corresponding to U in the above manner. According to (1) axiomatic system $\check{U}$ can be considered as representation (relative to β) of the same fragment of physics, whose representation (relative to α) is axiomatic system U . Herein, obviously, $\check{R}$ plays the same part in $\check{U}$ as R does in U . In other words, $\check{R}(x)$ can be interpreted as the predicate 'if x is a couple of spatially separated (in frame of reference β) events, then x is a couple of simultaneous (in frame of reference β) ones'. According to (2) systems U and $\check{U}$ can be joined in a weak $(U, \check{U})$ -symmetric over T axiomatic system $W = \text{Th}(U \cup \check{U})$ in such a way that W will be a *conservative* extension of T .

The logical content of special relativity is the claim that: physics contains a fragment represented by axiomatic system W ; W is weak $(U, \check{U})$ -symmetric over T ; W is a conservative extension of T ; T is a consistent axiomatic system; T corresponds to a fragment of physics also.

2. Generalized relativity principle

Well, the logical content of special relativity is nothing else than a metasentence about two concrete (considered a moment ago) axiomatic systems T and W . This metasentence can be considered as a result of the substitution of concrete T and W for, respectively, metavariables X and Y in the metapredicate ' X is a consistent axiomatic system, Y is a conservative extension of X , and Y is weak $(U, \check{U})$ -symmetric over X '. I call this

³ For example, T can be obtained by formalizing the chosen fragment of physics within ZF and subsequent treatment of the logical identity in the obtained formalism as a signature symbol.

metapredicate the *narrow generalized principle of weak relativity* and denote it by $G(X, Y)$.

Let us consider another metapredicate ' X is a consistent axiomatic system, Y is a conservative extension of X , and Y is $(U, \bar{U})$ -symmetric over X '. I call it the narrow generalized principle of *strong* relativity and denote it by $G^\circ(X, Y)$. Obviously, for any X, Y implication $G^\circ(X, Y) \rightarrow G(X, \mathfrak{D})$, where $\mathfrak{D}$ is the result of the substitution of axiom $\forall x(R(x) \rightarrow \neg R(x))$ for axiom $\forall x(R(x) \leftrightarrow \neg R(x))$ in Y , is true. Hence sufficient conditions for the satisfiability of the narrow generalized principle of *strong* relativity are also sufficient conditions for the satisfiability of the narrow generalized principle of *weak* relativity. In this connection I indicate the following theorem.

Theorem 1. If X is a consistent axiomatic system and Y is $(U, \bar{U})$ -symmetric over X , then Y is a conservative extension of X if the defining axiom for R in U is such that sentences $\exists x \neg R(x)$ and $\exists x R(x)$ are provable in U .⁴

We have considered two versions (weak and strong) of the narrow generalized principle of relativity. Let us consider also two analogues ones of a less restrictive generalized principle of relativity. I call the metapredicate ' X is a consistent axiomatic system, Y is a consistent extension of X , and Y is weak $(U, \bar{U})$ -symmetric over X ' the *broad* generalized principle of *weak* relativity. And I call the metapredicate ' X is a consistent axiomatic system, Y is a consistent extension of X , and Y is $(U, \bar{U})$ -symmetric over X ' the *broad* generalized principle of *strong* relativity. Interrelations between these two new versions are analogues to old ones. The following theorem takes place here.

Theorem 2. If X is a consistent axiomatic system and Y is $(U, \bar{U})$ -symmetric over X , then Y is a consistent extension of X if the defining axiom for R in U is such that sentences $\forall x \neg R(x)$ and $\forall x R(x)$ are not provable in U .⁵

3. Commentary

The above motivates the following definition. I say that axiomatic system Y is *like in logical structure to special relativity* if Y has some consistent subsystem X such that X and Y fulfil the narrow or broad generalized principle of weak or strong relativity. But then the above-mentioned theorems say, virtually, how and when arbitrary scientific theory X can be likened to special relativity, i.e., transformed into some theory Y which is like in logical composition to special relativity. But,

⁴ Cp.: [2], p. 75-77.

⁵ Cp.: [3], p. 52-57.

naturally, they do not say that it is worth our effort to do so whenever it is possible. Everything depends on concrete circumstances of non-formal character. I will adduce two examples so as to give the reader a hint what casuses can herein happen.

Elementary (Peano) arithmetic N can be considered as an axiomatic system in a first-order language *without* identity if the symbol of identity $\approx$ is regarded as a signature symbol. Let $A(x)$ be some arithmetic formula weakly defining a recursively enumerable non-recursive set R in N (N is supposed to be consistent). Suppose, furthermore, that sentences $\exists x \neg A(x)$ and $\exists x A(x)$ are provable in N .⁶ Let us extend arithmetic N by two new axioms:

- (i) $\forall x (R(x) \leftrightarrow A(x));$
- (ii) $\forall x (R(x) \leftrightarrow \neg \check{R}(x)).$

Let us refer to the obtained system of language

$$S_0 = (+, *, r, 0; \approx, R, \check{R})$$

as U_0 . Having U_0 , we can, in the same way as before, obtain system U_0 . Obviously, the language of U_0 will be

$$Jb_0 = (+^{\sim}, *^{\sim}, \sim, 0^{\sim}; \approx^{\sim}, \check{R}, R).$$

Let us consider a system W_0 of language

$$\Sigma_0 = (+, +^{\sim}, *, *^{\sim}, ', \sim, 0, 0^{\sim}; \approx, \approx^{\sim}, R, \check{R}),$$

having defined W_0 by

$$W_0 = \text{Th} (U_0 \cup U_0).$$

It is clear that W_0 is (U_0, U_0) -symmetric over N and satisfies the conditions of theorem 1 *qua* Y when N is considered *qua* X . Consequently, N and W_0 satisfy the narrow generalized principle of strong relativity:

$$G^{\circ}(N, W_0).$$

But this fact causes some stumbers.

As I noted before, formula $A(x)$ is fixed so that it weakly defines recursively enumerable non-recursive set R in N and, consequently, in U_0 (for U_0 is a conservative extension of N). In the same way one could claim that formula $\check{A}(x)$ which is obtained from $A(x)$ in the above-mentioned transition from U_0 to U_0 weakly defines some recursively enumerable non-recursive set, say $\check{R}$, in $\check{N}$ and, consequently, in U_0 (for

⁶ Number n -place relation Q is called weakly definable in system S of signature $\Omega \supseteq \sigma$, where σ is the signature of Peano arithmetic, if there exists formula B of signature Ω with free variables $x_1, \dots, x_n$ such that for numbers $k_1, \dots, k_n$ and their numerals $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ $(k_1, \dots, k_n) \in Q \Leftrightarrow B(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$ is provable in S .

If Peano arithmetic is consistent and system S is a conservative extension of this arithmetic, then a number relation is weakly definable in S , iff the relation is recursively enumerable.

U_0 is a conservative extension of $\check{N}$). What - recursively enumerable or not - sets do weakly define formulae $A(x)$ and $\check{A}(x)$ in system W_0 ? The question has no definite answer and, consequently, is meaningless. Indeed, on the one hand, W_0 extends conservatively systems N and $\check{N}$, and these systems (and formulae $A(x)$ and $\check{A}(x)$) play completely symmetric parts in W_0 . On the other hand, according to axioms (i), (ii) sentence $\forall x (A(x) \leftrightarrow \neg \check{A}(x))$ is derivable in W_0 . In the issue, *if* it is N that is accounted to be Peano arithmetic, we must consider that set R *is* recursively enumerable and set $\check{R}$ *is not* recursively enumerable. Au contraire, *if* it is $\check{N}$ that is accounted to be Peano arithmetic, we must consider that set R *is not* recursively enumerable and set $\check{R}$ *is* recursively enumerable. To ask herein, which of these systems N and $\check{N}$ is a genuine arithmetic and which is not is as absurdly as to ask in special relativity, which of inertial frames α and β is a correct frame of reference and which is not. The hell of it is not that only one of systems N and $\check{N}$ describes a 'truly' arithmetic — both they equally can be accounted to be descriptions of arithmetic. The hell of it is that within W_0 the 'absolute' notion 'to be a recursively enumerable set' does not make sense, but the 'relativistic' notion 'to be a recursively enumerable set *relative to* N (or $\check{N}$)' does. Analogy with the relativistic notion of simultaneity is obvious.

In this connection another question arises: how to be with Church's thesis? Two approaches are possible here.

Firstly, we can consider that in the context of W_0 Church's thesis amounts to the biconditional: set R is effectively enumerable iff set $\check{R}$ is not effectively enumerable. That doesn't entail any new interesting effects for the philosophy of mathematics and, consequently, imparts the status of a formal prestidigitation to the fact of relativity of recursive enumerability.

Secondly, we can attempt to relativize an effectiveness in itself as an *empirical* possibility to run (in principle) a program on a physical model of an abstract universal Turing machine. A possible success of such an attempt may have an essential influence on the philosophy of mathematics. In its turn, the essential first step on the road to the success must, obviously, presuppose a successful search for determinate physical processes such that any computer working according to the common physical effects cannot simulate them in principle. I don't know whether somebody or other is engaged in such research.

Let us consider another example. It is generally assumed that in so-called 'constitutional states' a man can be officially proclaimed to be a criminal if only the jury brought in the verdict of his guilty and only on a concrete charge. This means that any such adjudication presupposes a concrete statement of offence and the ascertainment of the fact of this statement's applicability to the given person (to the indicttee).

What is a concrete statement of offence? However legalists treat this notion, from a logical point of view it is, at any rate, some one-place predicate, say $R(x)$, considered as the abbreviation for 'x is guilty of thus-and-so'. Herein it is supposed that this predicate is *definable* in some — let me call it jural — *theory*. The last can comprise civil and criminal codes, bylaws, delegated legislation etc. I'll forgo further elaboration of its structure and foundation here. Instead of it, I artlessly suppose that — from a logical point of view again — the jural theory can always be represented by axiomatic system T of the above-mentioned kind. Thus I suppose that law court deals with axiomatic system D which is the extension of T via defining axiom for R :

$$D = \text{Th}(T \cup \{\forall x (R(x) \leftrightarrow F(x))\}),$$

where $F(x)$ is a definiens in T for $R(x)$.

It is worthy of note that if law court doesn't degenerate into a farce, then defining axiom $\forall x (R(x) \leftrightarrow F(x))$ defines statement of offence $R(x)$ so that the following condition (*non-degeneration condition*) is satisfied: sentences $\forall x R(x)$, $\forall x \neg R(x)$ aren't provable in D .

The models of axiomatic system D having arbitrary communities as their universes — let M will be the class of all such ones — can be considered as *possible (legit, legally allowable) explanations (glosses)* of terms used in the lawyers' dialect. Accordingly, a choice of a concrete model from M can be considered as a choice of such a concrete gloss.

The process develops according to the following schema. Concrete model $M \in M$ containing the given indictee in the membership of its universe is choiced. Law court ascertains — amiss or not — whether the indictee belongs to subset R (of M 's universe $|M|$) corresponding to predicate $R(x)$. If the law court decides that the indictee belongs to R , then he is proclaimed to be a criminal. If it decides that the indictee doesn't belong to R , then he is proclaimed to be an innocent. It cannot be emphasized enough that adjudgement depends substantively on the above-mentioned choice of the gloss M . The responsibility for this choice rests with the law court, since any other model, say M_r , from M such that the indictee belong to $|M_r|$ is as legally allowable as M .

If we extend system D via axiom $\forall x (R(x) \leftrightarrow \neg \check{R}(x))$, designate the extended system by U , obtain, in the above mentioned way, system $\check{U}$ first and $(U, \check{U})$ -symmetric over T system W after, then we see that the non-degeneration condition coincides (within the accuracy of notation) with the conditions of theorem 2. This means that system W is consistent and, consequently, always has models. Obviously, the class of these models includes all models from M whose universes contain the indictee. Let us consider such an arbitrary model K . The reduct of this model to the signature of system D gives model L which, obviously, belongs to

class M and, consequently, is a legally allowable gloss. The reduct of this model to the signature of system $\tilde{D}$ gives a model L_r which, obviously, also belongs to class M and, consequently, also is a legally allowable gloss. Let I be the subset of set $|K|$ corresponding to predicate $R(x)$ in model L . Let $\tilde{I}$ be the subset of set $|K|$ corresponding to predicate $\tilde{R}(x)$ in model L_r (in model K subset I corresponds to predicate $R(x)$). Then by virtue of axiom $\forall x(R(x) \leftrightarrow \neg \tilde{R}(x))$ we have for any x from $|K|$: $x \in I$ iff $x \notin \tilde{I}$. Therefore the fact that system W has a model at all means in part the following: law court always has a choice between two legit glosses such that the indictee is a criminal according to one gloss but he is innocent according to the other.

Can this circumstance serve as a permanent pretext for taking an appeal? If it can't, then why it is so? If it can, then how must an appeals instance react to it?

REFERENCES

1. *Mandelstamm L.I.* Lectures on optics, relativity, and quantum mechanics. M.: Science. 1972 (in rus.).
2. *Ershov Jr.L., Goncharov S.S., Samokhvalov K.F.* Introduction to logic and methodology of science. M.: Interpraks, 1994 (in rus.).
3. *Samokhvalov K.F.* Circumstantiations of the common interpretation of Gödel's incompleteness theorems and the notion of recursive enumerability // The problems of logic and methodology of science. Novosibirsk: Science, 1982. P. 42-57 (in rus.).

К СЕМАНТИКЕ АПОДИКТИЧЕСКОЙ СИЛЛОГИСТИКИ АРИСТОТЕЛЯ

Abstract. *The aim of this article is to show that Aristotle's apodeictic syllogistic is a fragment of a one-place predicate extension of the propositional modal system T.*

На пути логического воссоздания концепции Аристотеля об аподиктических силлогизмах [1, I 8-12] имеются две главные трудности – представление этой концепции в виде единой формальной системы и ее семантическое осмысление. Первая из них связана с *проблемой аподиктического эктезиса*, вторая – с *проблемой истолкования аподиктических суждений средствами современной модальной логики*.

Доказательство посредством выделения (эктезиса) является одним из аристотелевских методов вывода правильных модусов второй и третьей фигур из модусов первой фигуры. Этот метод применяется Аристотелем как в ассерторической, так и в аподиктической силлогистике; его суть при применении в доказательствах ассерторических модусов состоит в следующем. Если среди посылок вывода или среди их следствий имеется частное высказывание SiP или SoP, то его в дальнейшем в процессе доказательства можно понимать как *данность такого нефиксированного термина М*, что, во-первых, М является частью субъекта S частного высказывания и, во-вторых, всякому М присущ предикат Р частного высказывания или, соответственно, никакому М не присущ Р, т.е. вводятся (вспомогательные) допущения MaS и MaP или, соответственно, MaS и MeP. Слово "нефиксированный" в этом контексте указывает на то, что никакие другие особенности М, кроме отмеченных, нам неизвестны и не подразумеваются и поэтому отождествлять М с каким-либо термином, встречающимся в рассматриваемом выводе, нельзя. И далее, при выводе тезиса вместо данного частного высказывания можно использовать эти допущения; т.е. если с помощью этих допущений получается заключение, которое не содержит М, то можно освободиться от них и считать, что данное заключение выводится из первоначальных посылок.

В ассерторической силлогистике на возможность применения метода эктезиса Аристотель ссылается только как на альтернативную [1, I 6, 28a 23-27, b14, b21-22] и в суммирующей главе [1, I 7]

он вообще не упоминается. И в самом деле, в ассерторической силлогистике при доказательстве несовершенных модусов он лишь дублирует другие методы вывода. Это послужило одним из оснований оценки этого метода как малозначительного в аристотелевской силлогистике как системе [5, с.114]. Однако малозначительность метода не может служить основанием для его исключения из системы – в адекватной формальной реконструкции содержательной логической теории должны быть воспроизводимы все методы, используемые в этой теории.

Как было убедительно показано Я. Лукасевичем [5, с.105-115], а позже Г. Патцигом [15, с.156-168], в эктетическом методе доказательства неявно, но существенно задействованы свойства квантора существования, язык же силлогистики, как ассерторической, так и модальной, – простой бескванторный язык. И факт, что в известных формальных представлениях ассерторической силлогистики в числе средств вывода не находим ничего такого, что можно осмыслить как реконструкцию аристотелевского метода доказательства посредством эктезиса, возможно объясняется безуспешностью попыток описать его на простом силлогистическом языке без явного использования кванторов.

Однако неудачи не имели принципиального характера; доказательство посредством эктезиса из силлогистических посылок все-таки можно целиком представить на бескванторном языке силлогистики. Оно является вариацией доказательства с применением правила удаления квантора существования, и можно предположить, что Аристотель в эктетических доказательствах применял аналоги этого правила, которые, если принимается постулат о непустоте терминов, можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{(MaS \wedge MaP) \supset F}{SiP \supset F}$$

(правило *i*-удаления),

$$\frac{(MaS \wedge MeP) \supset F}{SoP \supset F}$$

(правило *o*-удаления),

где F – силлогистическая формула, которая не содержит переменную M (эти правила, их разновидности для других систем ассерторической силлогистики, а также правила аподиктического эктезиса впервые были предложены нами в 1983 г. на Тбилисском Симпозиуме "Логика Аристотеля", см. [4]).

Хотя в ассерторической силлогистике при доказательстве модусов применения метода эктезиса можно избежать, но если будем иметь в виду заключенные в этом методе дедуктивные возможности вообще, то его оценка как малозначительного, как будет видно

из формулировки системы ассерторической силлогистики **ЕА**, оказывается неверной.

Формулами **ЕА** являются выражения вида SxP (атомарные формулы) и их истинностно-функциональные комбинации, где S и P – переменные из счетно-бесконечного списка переменных для терминов, а x – одна из силлогистических констант – a, e, i или o . Аксиомными схемами и правилами вывода системы **ЕА** являются:

- | | |
|--|--------------------|
| a0. Все подстановочные случаи классических тавтологий, | |
| a1. $\sim(SaP \wedge SeP)$, | |
| a2. $SaP \vee SoP$, | r1. modus ponens, |
| a3. $SeP \vee SiP$, | r2. i -удаление, |
| a4. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; | r3. o -удаление. |

ЕА и формальная система ассерторической силлогистики Я.Лукасевича [5, с.140], представленная в виде системы **С4** В.А.Смирнова [11], как множества теорем совпадают, однако правила эктесиса в системе Лукасевича, хотя они являются допустимыми (их присоединение к дедуктивному базису **С4** не увеличивает класса доказуемых формул), не производны: в **С4** невозможно воспроизвести доказательства посредством эктесиса.

Традиционное понимание ассерторической силлогистики можно уточнить следующим образом. Упорядоченная пара $\langle D, V \rangle$ называется *интерпретацией языка **ЕА***, если и только если D – непустое множество, а V – функция, приписывающая каждой переменной M произвольное непустое подмножество D , т.е. $\emptyset \neq V(M) \subseteq D$. В каждой из интерпретаций всякая формула F языка **ЕА** получает одно из двух истинностных значений $V(F)$, определяемое индуктивно по построению формулы, при этом базисными пунктами определения являются:

- b1. $V(SaP) = И \Leftrightarrow V(S) \subseteq V(P)$,
- b2. $V(SeP) = И \Leftrightarrow V(S) \cap V(P) = \emptyset$,
- b3. $V(SiP) = И \Leftrightarrow V(S) \cap V(P) \neq \emptyset$,
- b4. $V(SoP) = И \Leftrightarrow V(S) \not\subseteq V(P)$.

Индуктивные пункты определения задаются в соответствии с классическими таблицами истинности. Имеет место теорема семантической адекватности: для всякой формулы F языка **ЕА**, $\vdash F$ в **ЕА**, если и только если F является **ЕА**-общезначимой.

Можно заметить, что понятие интерпретации языка **ЕА**, если не принимать во внимание ограничение V непустыми значениями терминов, совпадает с понятием интерпретации одноместного УИП, а правые части базисных пунктов b1–b4 являются условиями истинности в той же интерпретации следующих формул УИП (предполагается, что множество переменных

терминов в языке **ЕА** и множество символов для одноместных предикатов в языке **УИП** совпадают):

$$(t1) \forall x (Sx \supset Px),$$

$$(t3) \exists x (Sx \wedge Px),$$

$$(t2) \forall x (Sx \supset \sim Px),$$

$$(t4) \exists x (Sx \wedge \sim Px),$$

соответственно. Очевидно, что класс общезначимых в **ЕА** формул не изменится, если снять ограничение, наложенное на V , и формулу F языка **ЕА** считать **ЕА-общезначимой**, если и только если в каждой интерпретации $\langle D, V \rangle$

$$V((P_1 i P_1 \wedge \dots \wedge P_n i P_n) \supset F) = И,$$

где $P_1, \dots, P_n$ – все входящие в F переменные. Отсюда следует, что формула F *выводится в ЕА, если и только если в УИП выводима формула* $t((P_1 i P_1 \wedge \dots \wedge P_n i P_n) \supset F)$, которая называется *переводом F в УИП* и получается из формулы $(P_1 i P_1 \wedge \dots \wedge P_n i P_n) \supset F$ заменой ее атомарных подформул SaP , SeP , SiP , SoP формулами **УИП** (t1)–(t4), соответственно, и которую можно записать как

$$(\exists x P_1 x \wedge \dots \wedge \exists x P_n x) \supset t(F).$$

ЕА является адекватной формальной реконструкцией ассерторической силлогистики Аристотеля в следующем смысле: язык **ЕА** не содержит кванторов; в **ЕА** выводим (не выводим) формальный аналог каждого утверждения явно принимаемого (отбрасываемого) Аристотелем в ассерторической силлогистике; и наконец, в **ЕА** формально воспроизводим каждый из трех методов, используемых Аристотелем в ассерторической силлогистике для сведения несовершенных корректных модусов к совершенным модусам первой фигуры.

Метод эктезиса применяется также в аподиктической силлогистике, а именно при доказательстве корректных, по Аристотелю, модусов Baroco и Bocardo с обеими аподиктическими посылками и аподиктическим заключением, т.е. модусов $Ba^L to^L co^L$ и $Bo^L ca^L rdo^L$ [1, I 8, 30a 8-13]. Однако эктезис, т.е. введение на основе частного аподиктического высказывания вспомогательных допущений, которые в дальнейшем элиминируются, не совпадает с эктезисом, при котором исходное частное высказывание является ассерторическим. Анализ указанного места из "Первой аналитики" [8], [10] показал, что при аподиктическом эктезисе одно из вспомогательных допущений должно быть аподиктическим утверждением; правила аподиктического эктезиса можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{(\text{MaS} \wedge \text{Ma}^{\text{L}}\text{P}) \supset F}{(\text{Ma}^{\text{L}}\text{S} \wedge \text{MaP}) \supset F}$$

(правило i^{L} -удаления),

$$\frac{(\text{MaS} \wedge \text{Me}^{\text{L}}\text{P}) \supset F}{\text{So}^{\text{L}}\text{P} \supset F}$$

(правило o^{L} -удаления),

где F – силлогистическая формула, не содержащая переменную M .

Имеется и существенная разница. В аподиктической силлогистике метод эктезиса не дублируется другими методами и вывод модусов $\text{Bar}^{\text{L}}\text{to}^{\text{L}}\text{co}^{\text{L}}$ и $\text{Bo}^{\text{L}}\text{ca}^{\text{L}}\text{rdo}^{\text{L}}$ с применением этого метода Аристотелем предлагается как единственно возможная версия их доказательства; в самом деле, прямой метод посредством обращения не пригоден по тем же соображениям, по каким он не может применяться для доказательства ассерторических Baroco и Bocardo , а метод *reductio ad impossibile* не проходит потому, что высказывание, контрарикторное предполагаемому заключению $\text{So}^{\text{L}}\text{P}$, является утверждением об унилатеральной возможности "Все S возможно суть P ", которое в сочетании с любой из посылок доказываемого модуса не дает ни совершенного модуса первой фигуры, ни модуса, доказанного ранее. Эта ситуация еще сильнее убеждает нас в справедливости требования воспроизводимости в формальном представлении аподиктической силлогистики всех методов вывода, применяемых Аристотелем при сведении модусов второй и третьей фигур к модусам первой фигуры.

Однако обнаруживается трудность: методом эктезиса можно доказать и более сильные модусы $\text{Baro}^{\text{L}}\text{co}^{\text{L}}$ и $\text{Bo}^{\text{L}}\text{cardo}^{\text{L}}$, в которых общеутвердительная посылка является ассерторической и которые отвергаются Аристотелем как некорректные [1, 10, 11]. Эту возможность заметил уже Александр Афродизийский. И по-видимому, можно заключить, что в аподиктической силлогистике Аристотеля невозможно совместить допустимость процедуры эктезиса (в частности, принятие правила o^{L} -удаления) с отбрасыванием указанных модусов и, следовательно, невозможно представить аподиктическую силлогистику в виде единой аксиоматической теории. Фактически так и получилось: в предложенных в какой-то мере адекватных формальных реконструкциях аподиктической силлогистики Аристотеля либо невоспроизводим метод рассуждения с процедурой эктезиса и невыводимы модусы $\text{Baro}^{\text{L}}\text{co}^{\text{L}}$ и $\text{Bo}^{\text{L}}\text{cardo}^{\text{L}}$ [14], [2], либо этот метод воспроизводим, но одновременно доказываются забракованные Аристотелем модусы $\text{Baro}^{\text{L}}\text{co}^{\text{L}}$ и $\text{Bo}^{\text{L}}\text{cardo}^{\text{L}}$ [8], [10], [6]. Эти формальные представления дополняют друг друга и тем самым отражают непоследовательность интуитивных соображений, на которые опирался греческий философ. Рассматриваемая ниже система аподиктической силлогистики

стики LEA принадлежит к реконструкциям второго рода; впервые она сформулирована в работах [8], [10].

В LEA расширяется понятие формулы, однако только за счет расширения класса атомарных формул: в выражениях вида SxP x теперь может быть также аподиктической константой – a^L , e^L , i^L или o^L .

Дедуктивный базис системы аподиктической силлогистики LEA является расширением дедуктивного базиса системы EA следующими аксиомными схемами и правилами вывода:

- | | |
|-------------------------------|---|
| a5. $Sa^L P \supset SaP$, | a9. $(Ma^L P \wedge SaM) \supset Sa^L P$, |
| a6. $Se^L P \supset SeP$, | a10. $(Me^L P \wedge SaM) \supset Se^L P$, |
| a7. $Se^L P \supset Pe^L S$, | a11. $(Ma^L P \wedge SiM) \supset Si^L P$, |
| a8. $Si^L P \supset Pi^L S$, | a12. $(Me^L P \wedge SiM) \supset So^L P$, |
| r4. i^L -удаление, | r5. o^L -удаление. |

Наша цель – семантический анализ системы LEA. После безуспешных попыток найти адекватный перевод формул аподиктической силлогистики на язык модальной логики и представить аподиктическую силлогистику Аристотеля в качестве фрагмента более широкой логической теории – какой-либо системы современной формальной модальной логики [12], [5], [16] появилось сомнение в возможности успешного решения этой проблемы вообще. Н.Решер это сомнение подкрепил обзором некоторого, по его мнению, исчерпывающего множества возможных переводов аподиктических атомарных формул на язык модальной логики одноместных предикатов и показал (с помощью компьютера), что ни один из этих 2520 (!) переводов не отображает адекватно все особенности аподиктической силлогистики Аристотеля. Тогда некоторые исследователи пришли к заключению, что для аподиктической силлогистики Аристотеля следует искать лишь "неформальную" семантику. Одна весьма впечатляющая версия такой семантики была разработана С. Мак-Коллом на основе идей Решера [14]. В своем анализе мы продолжаем линию А. Беккера – поиск перевода, "погружающего" аподиктическую силлогистику в модальную логику.

С другим направлением семантических исследований аподиктической силлогистики Аристотеля встречаемся в работах М.Бежанишвили [2], Е.К.Войшвилло [3] и В.И.Маркина [6] (к ним относятся и наши работы [8], [10]). В них хотя построены системы "формальной" семантики, однако они слишком специфичны – каждая из них в большей или меньшей мере разработана для случая аристотелевской аподиктической силлогистики и поэтому каждая из них в той же мере является концепцией *ad hoc*. Другая

общая черта: в определении интерпретации аподиктического языка в них используются кванторы с переменными для терминов, т.е. с предикатными переменными. В своем анализе мы стараемся избежать этих черт.

При поисках адекватного перевода аподиктических формул на язык модальной предикатной логики предполагалось, что формулы ассерторической силлогистики переводятся на язык немодальной логики предикатов, например, функцией t , определенной выше. Однако ассерторическая силлогистика допускает и интенциональную трактовку. Пусть F – формула ЕА, а $tr(F)$ – формула модальной логики предикатов, которая получается из F заменой атомарных подформул вида SaP , SeP , SiP и SoP формулами

$$\begin{array}{ll} (tr1) \forall x \Box(Sx \supset Px), & (tr3) \exists x \Diamond(Sx \wedge Px), \\ (tr2) \forall x \Box(Sx \supset \sim Px), & (tr4) \exists x \Diamond(Sx \wedge \sim Px) \end{array}$$

Можно показать, что F выводима в ЕА, если и только если

$$tr((P_1iP_1 \wedge \dots \wedge P_niP_n) \supset F),$$

т.е. формула

$$(\exists x \Diamond P_1x \wedge \dots \wedge \exists x \Diamond P_nx) \supset tr(F),$$

называемая переводом F на язык модального УИП, выводима в любом модальном УИП, которое является предикатным расширением нормального модального пропозиционального исчисления без или с формулой Баркан, при этом $P_1, \dots, P_n$ – все переменные, входящие в F . Некоторые места из "Первой аналитики" (например, I 15, 34 b7-19) показывают, что Аристотель был склонен понимать смысл ассерторических суждений именно так. Для нашего анализа модальное истолкование ассерторических суждений является исходным.

Упорядоченная четверка $\langle W, R, D, V \rangle$ называется интерпретацией языка LEA, если и только если $\langle W, R \rangle$ – рефлексивный фрейм, D – непустое множество (предметов), а V – такая функция, что для любой переменной P языка LEA $V(P) \subseteq D \times W$. Произвольная формула F в $\langle W, R, D, V \rangle$ при каждом $w \in W$ имеет одно из двух истинностных значений $V(F, w)$, которое определяется индуктивно по логической длине F следующим образом ($x \in D, w, v, u \in W$). Базисные пункты определения:

- c1. $V(SaP, w) = И \Leftrightarrow \forall x \forall v ((wRv \wedge (x, v) \in V(S)) \Rightarrow (x, v) \in V(P));$
- c2. $V(SeP, w) = И \Leftrightarrow \forall x \forall v ((wRv \wedge (x, v) \in V(S)) \Rightarrow (x, v) \notin V(P));$
- c3. $V(SiP, w) = И \Leftrightarrow \exists x \exists v (wRv \wedge (x, v) \in V(S) \wedge (x, v) \in V(P));$
- c4. $V(SoP, w) = И \Leftrightarrow \exists x \exists v (wRv \wedge (x, v) \in V(S) \wedge (x, v) \notin V(P));$
- c5. $V(Sa^lP, w) = И \Leftrightarrow \forall x \forall v ((wRv \wedge (x, v) \in V(S)) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \forall u (vRu \Rightarrow (x, u) \in V(P)));$

$$c6. V(Se^L P, w) = И \Leftrightarrow \forall x((\exists v(wRv \& (x, v) \in V(S)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall u(wRu \Rightarrow (x, u) \notin V(P)));$$

$$c7. V(Si^L P, w) = И \Leftrightarrow \\ \exists x ((\exists v(wRv \& (x, v) \in V(S) \& \forall u(vRu \Rightarrow (x, u) \in V(P))) \vee \\ \vee \exists v(wRv \& (x, v) \in V(P) \& \forall u(vRu \Rightarrow (x, u) \in V(S))));$$

$$c8. V(So^L P, w) = И \Leftrightarrow \exists x(\exists v(wRv \& (x, v) \in V(S)) \& \\ \& \forall u(wRu \Rightarrow (x, u) \notin V(P))).$$

Индуктивные пункты формулируются в соответствии с таблицами истинности для пропозициональных связок).

Формула F языка **LEA** называется **LEA-общезначимой** (**LEA-выполнимой**), если и только если в каждой (хотя бы в одной) интерпретации $\langle W, R, D, V \rangle$ при каждом (хотя бы при одном) $w \in W$

$V((P_1 i P_1 \wedge \dots \wedge P_n i P_n) \supset F, w) = И, (V((P_1 i P_1 \wedge \dots \wedge P_n i P_n \wedge F), w) = И),$
где $P_1, \dots, P_n$ – все входящие в F переменные термины.

Заметим, что понятие интерпретации языка **LEA** совпадает с понятием модели языка одноместного **T + BF** (одноместное **УИП** + модальная система **T** + формула Баркан) [13, 243-244] и в базисных пунктах определения $V(F, w)$ правые части равносильностей являются условиями истинности в той же модели $\langle W, R, D, V \rangle$ при том же $w \in W$ формул **T + BF**: (tr1)–(tr4) и

- (tr5) $\forall x \Box(Sx \supset \Box Px),$
- (tr6) $\forall x (\Diamond Sx \supset \Box \sim Px),$
- (tr7) $\exists x (\Diamond(Sx \wedge \Box Px) \vee \Diamond(\Box Sx \wedge Px)),$
- (tr8) $\exists x \Diamond(Sx \wedge \Box \sim Px),$

соответственно (предполагается, что множество переменных в языке **LEA** и множество символов для одноместных предикатов в языке **T + BF** совпадают).

Пусть F – формула **LEA**, а $Tr(F)$ – формула **T + BF**, которая получается из F заменой атомарных подформул $SaP, SeP, SiP, SoP, Sa^L P, Se^L P, Si^L P$ и $So^L P$ формулами (tr1)–(tr8) соответственно.

Формулу $tr((P_1 i P_1 \wedge \dots \wedge P_n i P_n) \supset F)$, т.е. формулу $(\exists x \Diamond P_1 x \wedge \dots \wedge \exists x \Diamond P_n x) \supset tr(F)$, где $P_1, \dots, P_n$ – все входящие в F переменные, будем называть *переводом F в **T + BF*** и сокращенно записывать как $E(F) \supset tr(F)$.

Для любой интерпретации $\langle W, R, D, V \rangle$ языка **LEA**, произвольной точки $w \in W$ и формулы F языка **LEA** $V(F, w) = V(tr(F), w)$ и, следовательно, F **LEA-общезначима** если и только если **общезначим перевод F в **T + BF****. Это утверждение (утверждение 1) является очевидным следствием вышеуказанного замечания и определения функции перевода tr .

*Перевод в **T + BF** каждой выводимой в **LEA** формулы G выводим в **T + BF*** (утверждение 2).

Для доказательства воспользуемся индукцией по длине вывода G в LEA. Если G отличная от $a1$ аксиома системы LEA, то в $T + BF$ выводится более сильная формула $tr(G)$; если же G есть $a1$, то доказуемо в $T + BF$, что ее перевод эквивалентен формуле $\exists x \Diamond Sx \supset \exists x \Diamond Sx$. Не сложно показать также, что если переводы посылок какого-либо из правил вывода $r1-r5$ выводимы в $T + BF$, то в ней выводится и перевод заключения этого правила. В качестве примера рассмотрим правила $r2$ и $r4$.

($r2$): пусть в $T + BF$ выводится перевод посылки правила $r2$: $(MaS \wedge MaP) \supset F$, т.е. выводится формула

$$\begin{aligned} [\exists x \Diamond Mx \wedge \exists x \Diamond Sx \wedge \exists x \Diamond Px \wedge E(F)] &\supset \\ &\supset [(\forall x \Box (Mx \supset Sx) \wedge \forall x \Box (Mx \supset Px)) \supset tr(F)], \end{aligned}$$

и при этом M не содержится в F ; тогда в $T + BF$ выводится также ее частный случай:

$$\begin{aligned} [\exists x \Diamond (Sx \wedge Px) \wedge \exists x \Diamond Sx \wedge \exists x \Diamond Px \wedge E(F)] &\supset \\ &\supset [(\forall x \Box ((Sx \wedge Px) \supset Sx) \wedge \forall x \Box ((Sx \wedge Px) \supset Px)) \supset tr(F)]. \end{aligned}$$

Но $\forall x \Box ((Sx \wedge Px) \supset Sx)$ и $\forall x \Box ((Sx \wedge Px) \supset Px)$ выводимы в $T + BF$ и, следовательно, в ней выводится и формула

$$[\exists x \Diamond Sx \wedge \exists x \Diamond Px \wedge E(F)] \supset [\exists x \Diamond (Sx \wedge Px) \supset tr(F)],$$

являющаяся переводом в $T + BF$ заключения правила $r2$ – $SiP \supset F$.

($r4$): пусть в $T + BF$ выводится перевод посылок правила $r4$: $(MaS \wedge Ma^L P) \supset F$ и $(Ma^L S \wedge MaP) \supset F$, т.е. выводятся формулы:

$$\begin{aligned} [\exists x \Diamond Mx \wedge \exists x \Diamond Sx \wedge \exists x \Diamond Px \wedge E(F)] &\supset \\ &\supset [(\forall x \Box (Mx \supset Sx) \wedge \forall x \Box (Mx \supset \Box Px)) \supset tr(F)], \\ [\exists x \Diamond Mx \wedge \exists x \Diamond Sx \wedge \exists x \Diamond Px \wedge E(F)] &\supset \\ &\supset [(\forall x \Box (Mx \supset \Box Sx) \wedge \forall x \Box (Mx \supset Px)) \supset tr(F)] \end{aligned}$$

и при этом M не содержится в F ; тогда в $T + BF$ выводятся также их частные случаи с подформулой $(Sx \wedge \Box Px)$ на место Mx для первой формулы и с подформулой $(\Box Sx \wedge Px)$ на место Mx для второй формулы; рассуждая так же, как в случае $r2$, получаем, что в $T + BF$ выводятся формулы:

$$\begin{aligned} [\exists x \Diamond Sx \wedge \exists x \Diamond Px \wedge E(F)] &\supset [\exists x \Diamond (Sx \wedge \Box Px) \supset tr(F)], \\ [\exists x \Diamond Sx \wedge \exists x \Diamond Px \wedge E(F)] &\supset [\exists x \Diamond (\Box Sx \wedge Px) \supset tr(F)]; \end{aligned}$$

но тогда в $T + BF$ выводится также формула

$$[\exists x \Diamond Sx \wedge \exists x \Diamond Px \wedge E(F)] \supset [\exists x (\Diamond (Sx \wedge \Box Px) \vee \Diamond (\Box Sx \wedge Px)) \supset tr(F)],$$

являющаяся переводом заключения правила $r4$ – $Si^L P \supset F$.

Из утверждений 1 и 2 в силу пригодности $T + BF$ [13, 249] следует пригодность системы LEA – каждая выводимая в LEA формула LEA-общезначима (утверждение 3).

Стандартное преобразование формул LEA [8], [10].

Пусть F – произвольная формула LEA. (s1) преобразуем F в дизъюнктивную нормальную форму в терминах атомарных формул, входящих в F . В каждой конъюнкции, входящей в качестве дизъюнкта в полученную на предыдущем шаге преобразования формулу, производим следующие изменения: (s2) каждый ее член вида $\sim SxP$, где x – ассерторическая константа, заменяем на атомарную формулу, контрадикторную формуле SxP ; (s3) каждый ее член вида SiP , SoP , $Si^L P$ или $So^L P$ заменяем на формулу $MaS \wedge MaP$, $MaS \wedge MeP$, $(MaS \wedge Ma^L P) \vee (Ma^L S \wedge MaP)$ и $MaS \wedge Me^L S$, соответственно, где M – общий термин, не встречающийся ранее в преобразовании (в третьем случае одновременно производим дистрибуцию, вынося знак $\vee$ из области действия знака $\wedge$); (s4) производим замыкание без повторения по следующим схемам:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 4.1 MaM , | 4.7 $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$, |
| 4.2 $Sa^L P \supset SaP$, | 4.8 $(Ma^L P \wedge SaM) \supset Sa^L P$, |
| 4.3 $Se^L P \supset SeP$, | 4.9 $(Me^L P \wedge SaM) \supset Se^L P$, |
| 4.4 $SeP \supset PeS$, | 4.10 $(\sim Si^L P \wedge SaM) \supset \sim Ma^L P$, |
| 4.5 $Se^L P \supset Pe^L S$, | 4.11 $(\sim Si^L P \wedge MaP) \supset \sim Ma^L S$, |
| 4.6 $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$, | 4.12 $(\sim So^L P \wedge MaS) \supset \sim Me^L P$ |

(применение схемы 4.1 ограничено общими терминами, входящими в конъюнкцию). Преобразование завершено.

Формула F^* , полученная в результате стандартного преобразования формулы F , является дизъюнкцией конъюнкций атомарных формул и их отрицаний (однако легко заметить, что эти конъюнкции не содержат ассерторических атомарных формул со знаком отрицания и частных атомарных формул без знака отрицания). Конъюнкция, содержащаяся в F^* в качестве дизъюнкта, называется *несовместимой*, если и только если она содержит члены хотя бы одной из следующих пар формул: (SaP, SeP) , $(Sa^L P, \sim Sa^L P)$, $(Se^L P, \sim Se^L P)$.

Можно доказать следующие утверждения:

(4) Если конъюнкция K несовместима, то $\sim K$ выводима в LEA. Если формула G получена из формулы H в процессе стандартного преобразования, в результате однократного применения одного из пунктов (s1)–(s4), то (5) если в LEA $\vdash \sim G$, то в LEA $\vdash \sim H$ и (6) если G – LEA-выполнима, то LEA-выполнима и H . (7) Если конъюнкция K , содержащаяся в F^* в качестве дизъюнкта, совместима, то она LEA-выполнима.

Доказательства утверждений (4)–(6) не представляют трудности. Поэтому докажем лишь утверждение 7.

Построение: пусть $M_1, \dots, M_p$; $A_1, \dots, A_k$ и $E_1, \dots, E_m$ соответственно являются списками всех терминов и атомарных формул

вида $Sa^L P$ и $Se^L P$, содержащихся в K со знаком отрицания. Положим: D° – множество, состоящее из произвольных $r+k+m$ элементов, которые будем обозначать числительными $1, 2, \dots, r+k+m$.

Определим совокупность W° множеств утверждений вида $n \in M_i$, где $n=1, \dots, r+k+m$ и $i=1, \dots, r$. W° содержит начальный элемент w_0 ; все другие элементы W° порождаются из уже порожденных элементов W° определенными правилами. Элементы W° могут быть связаны бинарным отношением "следует за", которое определяется вместе с W° , при этом w_0 и каждое множество, следующее за w_0 , удовлетворяют условиям:

(*a) Если SaP входит в K и w содержит утверждение $n \in S$, то w содержит также утверждение $n \in P$.

(*a^L) Если $Sa^L P$ входит в K и w содержит утверждение $n \in S$, то w и любой другой элемент W° , следующий за w , содержит утверждение $n \in P$.

w1) w_0 содержит каждое утверждение вида $i \in M_i$.

w2) Для каждой A_h ($h = 1, \dots, k$) W° содержит элементы w_{ah1} и w_{ah2} такие, что w_{ah1} следует за w_0 , а w_{ah2} – за w_{ah1} и, при этом, утверждение $r+h \in S(A_h)$ – субъект атомарной формулы A_h .

w3) Для каждой E_j ($j = 1, \dots, m$) W° содержит элементы w_{ej1} и w_{ej2} , следующие за w_0 и содержащие утверждения $r+k+j \in S(E_j)$ и $r+k+j \in P(E_j)$, соответственно, где $S(E_j)$ и $P(E_j)$ – соответственно субъект и предикат атомарной формулы E_j .

w4) Для каждой формулы $\sim Si^L P$, входящей в K , если w_0 или какое-нибудь w , следующее за w_0 , для какого-нибудь $n \in D^\circ$ содержит утверждение $n \in S$ или $n \in P$, то W° содержит множество $w_i L$, которое следует за w_0 , или, соответственно за w , и при этом содержит все утверждения, входящие в $w_0(w)$, за исключением утверждений вида $n \in M$ для всякого M такого, что MaP (соответственно, MaS) содержится в K .

w5) Для каждой формулы $\sim So^L P$ из K , если w_0 или какое-нибудь w , следующее за w_0 , для какого-нибудь $n \in D^\circ$ содержит утверждение $n \in S$, то W° содержит также множество $w_o L$, которое следует за w_0 или, соответственно, за w и при этом содержит все утверждения вида $n \in M$ для каждого M такого, что PaM входит в K .

Определим бинарное отношение R° на множестве W° и функцию V° : Для всяких $w, v \in D^\circ$ положим: $wR^\circ v$, если и только если $w = v$, либо v следует за w в построении.

V° : $V^\circ(M_i) = \{(n, w): \text{утверждение } n \in M_i \text{ принадлежит } w \in W^\circ\}$ и $V^\circ(P) = \emptyset$, если P не входит в список $M_1, \dots, M_r$.

Четверка $\langle W^\circ, R^\circ, D^\circ, V^\circ \rangle$ является интерпретацией языка LEA и в этой интерпретации $V^\circ(A, w_0) = I$ для каждого A ,

входящего в K в качестве члена конъюнкции; но тогда $V^{\circ}(K, w_0) = I$ и, следовательно, K LEA-выполнима. Из выполнимости K в силу утверждения (6) следует LEA-выполнимость формулы F .

Отсюда же очень легко следует *теорема полноты системы LEA*: если формула F не выводима в LEA, то она не LEA-общезначима (утверждение 8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аристотель* Первая аналитика // Аристотель. Сочинения. М, 1978. Т.2.
2. *Бежанишвили М.Н.* "Возможные миры" и аподиктическая силлогистика Аристотеля [4, с.112-128].
3. *Войшвилло Е.К.* Модальная силлогистика с содержательной точки зрения [4, с.121-141].
4. *Логика Аристотеля.* Материалы симпозиума (16-17 ноября 1983, г.Тбилиси). Тбилиси, 1985.
5. *Лукаевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М, 1959.
6. *Маркин В.И.* Семантический анализ аподиктической силлогистики Аристотеля [4, с.141-154].
7. *Мchedlishvili Л.И.* Эктезис в силлогистике Аристотеля // Многозначные, релевантные и паранепротиворечивые логики. М., 1984. С.119-129.
8. *Мchedlishvili Л.И.* Интерпретация аподиктической силлогистики Аристотеля // Там же. С.110-119.
9. *Мchedlishvili Л.И.* Реконструкция метода эктезиса и системы позитивной силлогистики [4, с.21-26].
10. *Мchedlishvili Л.И.* Аподиктическая силлогистика Аристотеля и отношение "обозначает суть бытия" [4, с.154-168].
11. *Смирнов В.А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчислении предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1980.
12. *Becker A.* Die aristotelische Theorie der Möglichschkeisschlüsse. Berlin, 1933.
13. *Hughes G.E., Cresswell M.J.* A New Introduction to Modal Logic. London-New York, 1968.
14. *McCall S.* Aristotle's Modal Syllogisms. Amsterdam, 1963.
15. *Patzig G.* Aristotle's Theory of the Syllogism. Dordrecht, 1968.
16. *Rescher N.* Aristotle's Theory of Modal Syllogisms and its Interpretation // The Critical Approach: Essays in Honour of Karl Popper (ed. by M.Bunge). 1963, Sect.II.

ПОГРУЖЕНИЕ ВОООБРАЖАЕМОЙ ЛОГИКИ Н.А.ВАСИЛЬЕВА В КВАНТОРНУЮ ТРЕХЗНАЧНУЮ ЛОГИКУ¹

Abstract. *The aim of the paper is to provide a formalization of Nikolai Vasiliev's imaginary logic and to establish its metatheoretical relation to quantified many-valued logic. Syllogistic type calculus Π which axiomatizes the set of imaginary logic laws is formulated. The natural translation of affirmative, negative and «indifferent» (contradictory) statements of the imaginary logic into the language of quantified three-valued logic is offered. It is proved that Π system is embedded into three-valued quantified Lukasiewicz logic.*

Общепризнанным считается сейчас тот факт, что российский логик начала XX века Н.А.Васильев был одним из основоположников современной неклассической логики. Однако по вопросу о том, предтечей какого именно из ее направлений он являлся, мнения расходятся. На первый взгляд, идеи о возможности построения корректной системы рассуждений, относящихся к противоречивой онтологии, которые развивались Н.А.Васильевым при создании «воображаемой неаристотелевой» логики, во многом созвучны содержательным установкам паранепротиворечивой логики. Тем не менее, некоторые исследователи (напр., Л.Хвистек, А.И.Мальцев и Н.Решер) считали его предшественником многозначной логики. Думается, основанием для такой оценки явилось то обстоятельство, что в воображаемой логике имеются суждения не двух, а трех типов качества: наряду с утвердительными и отрицательными Н.А.Васильев рассматривает так называемые «индифферентные» суждения – суждения противоречия, содержащие связку «суть и не суть зараз»; причем, все три типа суждений (если их субъект является сингулярным термином) попарно несовместимы и действует закон «исключенного четвертого» (т.е. дизъюнкция данных суждений логически истинна).

Следует заметить, что сам по себе факт появления нового типа высказываний еще не свидетельствует о ревизии принципа

¹ Работа выполнена при поддержке РФНФ (грант № 97-03-04352) и INTAS (Grant 95-0365). Полный вариант статьи публикуется в электронном журнале «Logical Studies» (www.logic.ru/LogStud/).

двузначности, да и в работах самого Н.А.Васильева возможность введения третьего значения всерьез не исследуется, в своих построениях он преимущественно обходится классическими оценками – «истина» и «ложь».

Вопрос о связи логического наследия казанского ученого с идеей многозначности может, на мой взгляд, решаться не только на основе анализа оригинальных васильевских текстов. Поставим этот вопрос в иной плоскости – как проблему метатеоретических взаимоотношений воображаемой логики и логики многозначной.

Цель настоящей работы – указать на существование простого, интуитивно ясного адекватного перевода логической системы Васильева в кванторную трехзначную логику, т.е. продемонстрировать, что естественную интерпретацию воображаемой логики можно дать, опираясь на принцип многозначности.

Реконструкция воображаемой логики Н.А.Васильева как особой теории силлогистического типа, формализуемой на основе классического исчисления высказываний, была осуществлена Т.П.Костюк и В.И.Маркиным в [3].

Символический язык, адекватный для решения данной задачи, включает списки сингулярных и общих терминов, пропозициональные связки и силлогистические константы, соответствующие рассматривавшимся Н.А.Васильевым типам атрибутивных высказываний.

Элементарными формулами языка являются выражения следующих видов (ν – произвольный сингулярный термин, S и P – общие термины):

- *формы единичных суждений* – $J_1\nu P$ (« ν есть P »), $J_2\nu P$ (« ν не есть P »), $J_3\nu P$ (« ν есть и не есть P »);
- *формы общих суждений* – A_1SP («Все S есть P »), A_2SP («Все S не есть P »), A_3SP («Все S есть и не есть P »);
- *формы определенно-частных суждений* – T_1SP («Некоторые S есть P , а все остальные S не есть P »), T_2SP («Некоторые S есть P , а все остальные S есть и не есть P »), T_3SP («Некоторые S не есть P , а все остальные S есть и не есть P »), T_4SP («Некоторые S есть P , некоторые S не есть P , а все остальные S есть и не есть P »);
- *формы неопределенно-частных суждений* – I_1SP («Некоторые S есть P »), I_2SP («Некоторые S не есть P »), I_3SP («Некоторые S есть и не есть P »).

Сложные формулы образуются с помощью пропозициональных связок.

Предлагаемая в [3] семантика воображаемой логики основана на идее сопоставления каждому общему термину нескольких экс-

тенциональных характеристик – его объема, антиобъема и противоречивой области. Модель для формул языка воображаемой логики (**IL**-модель) представляет собой пятерку $\langle \mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$, где $\mathbf{D} \neq \emptyset$, $\varphi(v) \in \mathbf{D}$, ψ_1, ψ_2, ψ_3 – функции, сопоставляющие каждому общему термину P подмножества $\mathbf{D}$ и обладающие следующими свойствами: $\psi_1(P) \neq \emptyset$, $\psi_1(P) \cap \psi_2(P) = \emptyset$, $\psi_1(P) \cap \psi_3(P) = \emptyset$, $\psi_2(P) \cap \psi_3(P) = \emptyset$, $\psi_1(P) \cup \psi_2(P) \cup \psi_3(P) = \mathbf{D}$. С неформальной точки зрения, $\psi_1(P)$ трактуется как объем, $\psi_2(P)$ как антиобъем, а $\psi_3(P)$ как противоречивая область термина P .

Условия истинности элементарных формул (для сложных формул они обычные) в **IL**-модели $\langle \mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 |J_1 v P| &= 1 \text{ е.т.е. } \varphi(v) \in \psi_1(P), \\
 |J_2 v P| &= 1 \text{ е.т.е. } \varphi(v) \in \psi_2(P), \\
 |J_3 v P| &= 1 \text{ е.т.е. } \varphi(v) \in \psi_3(P), \\
 |A_1 S P| &= 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \subseteq \psi_1(P), \\
 |A_2 S P| &= 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \subseteq \psi_2(P), \\
 |A_3 S P| &= 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \subseteq \psi_3(P), \\
 |T_1 S P| &= 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \cap \psi_1(P) \neq \emptyset \text{ и } \psi_1(S) \cap \psi_2(P) \neq \emptyset \text{ и } \\
 &\quad \psi_1(S) \cap \psi_3(P) = \emptyset, \\
 |T_2 S P| &= 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \cap \psi_1(P) \neq \emptyset \text{ и } \psi_1(S) \cap \psi_2(P) = \emptyset \text{ и } \\
 &\quad \psi_1(S) \cap \psi_3(P) \neq \emptyset, \\
 |T_3 S P| &= 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \cap \psi_1(P) = \emptyset \text{ и } \psi_1(S) \cap \psi_2(P) \neq \emptyset \text{ и } \\
 &\quad \psi_1(S) \cap \psi_3(P) \neq \emptyset, \\
 |T_4 S P| &= 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \cap \psi_1(P) \neq \emptyset \text{ и } \psi_1(S) \cap \psi_2(P) \neq \emptyset \text{ и } \\
 &\quad \psi_1(S) \cap \psi_3(P) \neq \emptyset, \\
 |I_1 S P| &= 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \cap \psi_1(P) \neq \emptyset, \\
 |I_2 S P| &= 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \cap \psi_2(P) \neq \emptyset, \\
 |I_3 S P| &= 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \cap \psi_3(P) \neq \emptyset.
 \end{aligned}$$

Формула A истинна в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$, е.т.е. $|A| = 1$ в данной **IL**-модели. Формула общезначима в семантике воображаемой логики (**IL**-общезначима), е.т.е. она истинна во всякой **IL**-модели.

Класс **IL**-общезначимых формул аксиоматизируется посредством исчисления **IL**, исходными силлогистическими константами которого являются $J_1, J_2, J_3, I_1, I_2, I_3$. Система **IL** имеет следующие дедуктивные постулаты:

A0. Аксиомы классического исчисления высказываний,

$$\begin{array}{ll}
\text{A1. } \neg(J_1 \vee P \ \& \ J_2 \vee P), & \text{A5. } (J_1 \vee P \ \& \ J_1 \vee S) \supset I_1 SP, \\
\text{A2. } \neg(J_1 \vee P \ \& \ J_2 \vee P), & \text{A6. } (J_2 \vee P \ \& \ J_1 \vee S) \supset I_2 SP, \\
\text{A3. } \neg(J_2 \vee P \ \& \ J_3 \vee P), & \text{A7. } (J_3 \vee P \ \& \ J_1 \vee S) \supset I_3 SP, \\
\text{A4. } J_1 \vee P \ \vee \ J_2 \vee P \ \vee \ J_3 \vee P, & \text{A8. } I_1 SS, \\
\text{R1. } \textit{modus ponens}, & \text{R2. } \frac{(J_1 \vee S \ \& \ J_1 \vee P) \supset A}{I_1 SP \supset A}, \\
\text{R3. } \frac{(J_1 \vee S \ \& \ J_2 \vee P) \supset A}{I_2 SP \supset A}, & \text{R4. } \frac{(J_1 \vee S \ \& \ J_3 \vee P) \supset A}{I_3 SP \supset A}.
\end{array}$$

(в правилах **R2–R4** термин $\vee$ не содержится в A).

Общие и определенно-частные высказывания могут быть введены посредством следующих определений:

$$\begin{array}{ll}
A_1 SP \Leftrightarrow \neg I_2 SP \ \& \ \neg I_3 SP, & T_1 SP \Leftrightarrow I_1 SP \ \& \ I_2 SP \ \& \ \neg I_3 SP, \\
A_2 SP \Leftrightarrow \neg I_1 SP \ \& \ \neg I_3 SP, & T_2 SP \Leftrightarrow I_1 SP \ \& \ \neg I_2 SP \ \& \ I_3 SP, \\
A_3 SP \Leftrightarrow \neg I_1 SP \ \& \ \neg I_2 SP, & T_3 SP \Leftrightarrow \neg I_1 SP \ \& \ I_2 SP \ \& \ I_3 SP, \\
& T_4 SP \Leftrightarrow I_1 SP \ \& \ I_2 SP \ \& \ I_3 SP.
\end{array}$$

Утверждение 1. Класс теорем исчисления **IL** совпадает с множеством **IL**-общеэзначимых формул².

В дальнейшем нам понадобится рассмотреть более широкий, чем множество **IL**-моделей, класс модельных структур. Обобщение понятия **IL**-модели будет осуществляться за счет отказа от требования непустоты объемов общих терминов.

Назовем **IL**^o-моделью пятерку $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$, удовлетворяющую всем предъявляемым к **IL**-моделям требованиям, за исключением следующего: $\psi_1(P) \neq \emptyset$. Условия истинности формул в моделях обоих типов одинаковы. Формулу, принимающую значение «1» в каждой **IL**^o-модели, назовем **IL**^o-общеэзначимой³.

Утверждение 2. Произвольная формула A **IL**-общеэзначима, е.т.е. **IL**^o-общеэзначима формула $\theta(A) = (I_1 S_1 S_1 \ \& \ I_1 S_2 S_2 \ \& \ \dots \ \& \ I_1 S_m S_m) \supset A$, где $S_1, S_2, \dots, S_m$ – список всех общих терминов в составе A .

² Доказательство представлено в кандидатской диссертации Т.П.Костюк «Реконструкция логических систем Н.А.Васильева средствами современной логики», защищенной в июне 1999 г. в МГУ им. М.В.Ломоносова.

³ Класс **IL**^o-общеэзначимых формул аксиоматизирует исчисление **IL**^o – **IL** без аксиом вида **A8** – **I₁SS**. **IL**^o не может претендовать на роль адекватной формализации воображаемой логики, поскольку в нем недоказуемы некоторые законы последней (напр., модусы третьей фигуры силлогизма).

Покажем сначала, что из IL -общезначимости формулы A следует IL° -общезначимость $\theta(A)$. Рассмотрим произвольную IL -общезначимую формулу A . Предположим, что $\theta(A)$ не является IL° -общезначимой формулой. Тогда существует IL° -модель $\langle \mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$, в которой $\theta(A)$ ложна, т.е. $|I_1 S_1 S_1| = |I_1 S_2 S_2| = \dots = |I_1 S_m S_m| = 1$, а $|A| = 0$. В силу условий истинности формул с силлогистической константой I_1 имеем: $\psi_1(S_i) \neq \emptyset$ для любого $1 \leq i \leq m$. Строим модель $\langle \mathbf{D}, \varphi, \psi_1', \psi_2', \psi_3' \rangle$ следующим образом: функции $\psi_1', \psi_2', \psi_3'$ сопоставляют каждому S_i те же подмножества $\mathbf{D}$, что и функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 , а для любого отличного от S_i общего термина P $\psi_1'(P) = \mathbf{D}$, $\psi_2'(P) = \psi_3'(P) = \emptyset$. Сингулярным терминам приписываются те же значения, что и в исходной модели. Очевидно, что $\langle \mathbf{D}, \varphi, \psi_1', \psi_2', \psi_3' \rangle$ является IL -моделью, причем значение формулы A остается в ней таким же, как и в исходной модели: $|A| = 0$ в $\langle \mathbf{D}, \varphi, \psi_1', \psi_2', \psi_3' \rangle$. Это противоречит исходному допущению об IL -общезначимости формулы A .

Продemonстрируем теперь справедливость обратного утверждения. Предположим, что $\theta(A)$ является IL° -общезначимой формулой, т.е. истинна во всякой IL° -модели. Поскольку класс IL -моделей является подмножеством класса IL° -моделей, и условия истинности формул в них совпадают, формула $\theta(A)$, т.е. $(I_1 S_1 S_1 \& I_1 S_2 S_2 \& \dots \& I_1 S_m S_m) \supset A$, истинна во всякой IL -модели. Кроме того, в каждой IL -модели $\psi_1(S_i) \neq \emptyset$, откуда следует, что $|I_1 S_1 S_1| = |I_1 S_2 S_2| = \dots = |I_1 S_m S_m| = 1$. Поэтому и формула A истинна во всякой IL -модели, т.е. IL -общезначима. Утверждение 2 доказано.

IL° -модели примечательны тем, что их можно использовать не только для оценки силлогистических формул воображаемой логики, но и для означивания формул кванторной трехзначной логики одноместных предикатов. Сформулируем в терминах IL° -моделей соответствующий вариант трехзначной логики Я.Лукаевича (L_3). Сингулярные термины языка IL будут здесь играть роль предметных констант, а общие термины – роль одноместных предикаторов.

Введем семантическую функцию g , приписывающую значения предметным переменным и релятивизированную относительно некоторой IL° -модели: $g(x) \in \mathbf{D}$ для произвольной переменной x . Свяжем с IL° -моделью $\langle \mathbf{D}, \varphi, \psi_1', \psi_2', \psi_3' \rangle$ функцию означивания V_g , сопоставляющую термам языка L_3 при некотором приписывании g элементы $\mathbf{D}$, а формулам – элементы множества $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$:

$$\begin{aligned} V_g(x) &= g(x); & V_g(v) &= \varphi(v); \\ V_g(Pt) &= 1, \text{ е.т.е. } V_g(t) \in \psi_1(P); & V_g(Pt) &= 0, \text{ е.т.е. } V_g(t) \in \psi_2(P); \end{aligned}$$

$$V_g(Pt) = 1/2, \text{ е.т.е. } V_g(t) \in \psi_3(P);$$

$$V_g(\neg F) = 1 - V_g(F);$$

$$V_g(F \& G) = \min (V_g(F), V_g(G));$$

$$V_g(F \vee G) = \max (V_g(F), V_g(G));$$

$$V_g(F \supset G) = \min (1, 1 - V_g(F) + V_g(G));$$

$$V_g(\forall \alpha F) = 1, \text{ е.т.е. } V_{g'}(F) = 1 \text{ для любого } g' \stackrel{\alpha}{=} g;$$

$$V_g(\forall \alpha F) = 0, \text{ е.т.е. } V_{g'}(F) = 0 \text{ для некоторого } g' \stackrel{\alpha}{=} g;$$

$$V_g(\forall \alpha F) = 1/2, \text{ е.т.е. } V_{g'}(F) = 1/2 \text{ для некоторого } g' \stackrel{\alpha}{=} g \text{ и не суще-}$$

ствуется $g' \stackrel{\alpha}{=} g$ такое, что $V_{g'}(F) = 0$;

$$V_g(\exists \alpha F) = 1, \text{ е.т.е. } V_{g'}(F) = 1 \text{ для некоторого } g' \stackrel{\alpha}{=} g;$$

$$V_g(\exists \alpha F) = 0, \text{ е.т.е. } V_{g'}(F) = 0 \text{ для любого } g' \stackrel{\alpha}{=} g;$$

$$V_g(\exists \alpha F) = 1/2, \text{ е.т.е. } V_{g'}(F) = 1/2 \text{ для некоторого } g' \stackrel{\alpha}{=} g \text{ и не}$$

существует $g' \stackrel{\alpha}{=} g$ такое, что $V_{g'}(F) = 1$

(выражение $g' \stackrel{\alpha}{=} g$ означает, что g' отличается от g не более, чем приписыванием для α).

Формула F значима в IL° -модели $\langle D, \varphi, \psi_1', \psi_2', \psi_3' \rangle$, е.т.е. $V_g(F) = 1$ для любого приписывания g . Назовем формулу L_3 -обще-значимой, е.т.е. она значима в любой IL° -модели.

Как известно, в трехзначной логике Лукасевича выразимы так называемые j -операторы – операторы, репрезентирующие одноместные функции, которые одному из трех значений сопоставляют 1, а двум другим 0. Операторы необходимости (j_1), невозможности (j_2) и случайности (j_3) могут быть определены следующим образом:

$$j_1 F \equiv_{\text{Df}} \neg(F \supset \neg F); \quad j_2 F \equiv_{\text{Df}} \neg(\neg F \supset F);$$

$$j_3 F \equiv_{\text{Df}} (F \supset \neg F) \& (\neg F \supset F).$$

Очевидно, что $V_g(j_1 F) = 1$, если $V_g(F) = 1$, в противном случае – $V_g(j_1 F) = 0$; $V_g(j_2 F) = 1$, если $V_g(F) = 0$, в противном случае – $V_g(j_2 F) = 0$; $V_g(j_3 F) = 1$, если $V_g(F) = 1/2$, в противном случае – $V_g(j_3 F) = 0$.

Приступим теперь к решению главной задачи работы – погружению воображаемой логики Н.А.Васильева в кванторную трехзначную логику. В качестве последней рассмотрим кванторный одноместный вариант L_3 . Выбор именно этой системы трех-

значной логики, вообще говоря, не принципиален, исчисление ΠL погружаемо в любую систему кванторной трехзначной логики, в которой, во-первых, выразимы j -операторы, во-вторых, стандартные связки при классических аргументах (1, 0) принимают те же значения, что и в классической логике, в-третьих, формулы типа $\forall \alpha F$ ($\exists \alpha F$) принимают значение 1, е.т.е. при любом (при некотором) значении α F имеет значение 1, и принимают значение 0, е.т.е. при некотором (при любом) значении α F имеет значение 0; условия принятия этими формулами значения $1/2$ несущественны.

Зададим сначала отображение $*$ класса формул ΠL в множество формул кванторной трехзначной логики Лукасевича:

$$\begin{aligned} (J_1 \vee P)^* &= j_1 P \vee, & (J_2 \vee P)^* &= j_2 P \vee, & (J_3 \vee P)^* &= j_3 P \vee, \\ (I_1 SP)^* &= \exists x(j_1 Sx \ \& \ j_1 Px), & (I_2 SP)^* &= \exists x(j_1 Sx \ \& \ j_2 Px), \\ (I_3 SP)^* &= \exists x(j_1 Sx \ \& \ j_3 Px), & (\neg A)^* &= \neg A^*, \\ (A \otimes B)^* &= A^* \otimes B^*, \text{ где } \otimes - \text{любая бинарная связка.} \end{aligned}$$

Покажем, что утверждение о ΠL° -общезначимости произвольной силлогистической формулы A равносильно утверждению о L_3 -общезначимости ее перевода A^* . С этой целью докажем предварительно две леммы.

Лемма 1. Для любой формулы A языка воображаемой логики, для любой ΠL° -модели $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$ и для любого приписывания g верно: $V_g(A^*) = 1$ или $V_g(A^*) = 0$.

Индукцией по длине A несложно показать, что результаты переводов как элементарных, так и сложных формул языка воображаемой логики не могут принять значение $1/2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любой формулы A языка воображаемой логики и для любой ΠL° -модели $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$ верно: $|A| = 1$, е.т.е. A^* значима в данной модели.

Доказательство ведется индукцией по числу пропозициональных связок в составе формулы A .

Пусть A есть $J_k \vee P$, где $1 \leq k \leq 3$.

$|J_k \vee P| = 1$, е.т.е. $\varphi(v) \in \psi_k(P)$, е.т.е. для любого g $V_g(P \vee)$ есть 1 (при $k=1$), 0 (при $k=2$) или $1/2$ (при $k=3$), е.т.е. для любого g $V_g(j_k P \vee) = 1$, е.т.е. $j_k P \vee$ значима в модели $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$, е.т.е. $J_k \vee P^*$ значима в модели $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$.

Пусть A есть $I_k SP$, где $1 \leq k \leq 3$.

$|I_k SP| = 1$, е.т.е. $\psi_1(S) \cap \psi_k(P) \neq \emptyset$, е.т.е. существует $d \in D$ такой, что $d \in \psi_1(S)$ и $d \in \psi_k(P)$, е.т.е. для любого g существует $g'_x = g$ такой, что $V_{g'_x}(Sx) = 1$ и $V_{g'_x}(Px)$ есть 1 (при $k=1$), 0 (при $k=2$)

или $1/2$ (при $k=3$), е.т.е. для любого g существует $g'_x = g$ такой, что $V_g(j_1Sx) = 1$ и $V_g(j_kPx) = 1$, е.т.е. для любого g существует $g'_x = g$ такой, что $V_g(j_1Sx \& j_kPx) = 1$, е.т.е. для любого g $V_g(\exists x(j_1Sx \& j_kPx)) = 1$, е.т.е. $\exists x(j_1Sx \& j_kPx)$ значима в модели $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$, е.т.е. I_kSP^* значима в модели $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$.

Рассмотрим далее случай, когда A – сложная формула. Предположим, что утверждение леммы верно для ее подформул.

Пусть A есть $\neg B$.

$|\neg B| = 1$, е.т.е. $|B| = 0$, е.т.е. $|B| \neq 1$, е.т.е. (по индуктивному допущению) неверно, что B^* значима в модели $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$, е.т.е. (в силу Леммы 1 и замкнутости формулы B^*) $\neg B^*$ значима в данной модели, е.т.е. (по определению $*$) $(\neg B)^*$ значима в данной модели.

Пусть A есть $B \& C$.

$|B \& C| = 1$, е.т.е. $|B| = 1$ и $|C| = 1$, е.т.е. (по индуктивному допущению) B^* и C^* значимы в модели $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$, е.т.е. (в силу Леммы 1) $B^* \& C^*$ значима в данной модели, е.т.е. (по определению $*$) $(B \& C)^*$ значима в данной модели.

Случай, когда A есть $B \vee C$ рассматривается аналогично.

Пусть A есть $B \supset C$.

$|B \supset C| = 1$, е.т.е. $|B| \neq 1$ и $|C| = 1$, е.т.е. (по индуктивному допущению) B^* не значима, а C^* значима в модели $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$, е.т.е. (в силу Леммы 1 и замкнутости формулы B^*) $B^* \supset C^*$ значима в данной модели, е.т.е. (по определению $*$) $(B \supset C)^*$ значима в данной модели. Лемма 2 доказана.

Утверждение 3. Произвольная формула A языка воображаемой логики является IL° -общезначимой, е.т.е. L_3 -общезначим ее перевод A^* .

Формула A IL° -общезначима, е.т.е. $|A| = 1$ в каждой IL° -модели $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle$, е.т.е. (в силу Леммы 2) A^* значима в каждой такой модели, е.т.е. A^* является L_3 -общезначимой формулой. Утверждение 3 доказано.

По существу, мы продемонстрировали, что перевод $*$ погружает систему IL° (IL без схемы A8) в кванторную трехзначную логику Лукасевича.

Зададим теперь аналогичную адекватную операцию и для самой системы IL :

$$\Theta(A) = (\exists x j_1 S_1 x \& \exists x j_1 S_2 x \& \dots \& \exists x j_1 S_m x) \supset A^*,$$

где A – произвольная формула воображаемой логики, а $S_1, S_2, \dots, S_m$ – список всех общих терминов в ее составе.

Перевод Θ выражает предпосылку о непустоте всех общих терминов в составе любого суждения воображаемой логики. Как показано в [2], подобная экзистенциальная предпосылка принималась и самим Н.А.Васильевым для атрибутивных суждений.

Утверждение 4. *Перевод Θ равносильен в L_3 композиции переводов θ и $*$.*

По определению θ , $\theta(A)^* = ((I_1S_1S_1 \& I_1S_2S_2 \& \dots \& I_1S_mS_m) \supset A)^*$. Преобразуем правую часть, согласно определению $*$: $(I_1S_1S_1 \& I_1S_2S_2 \& \dots \& I_1S_mS_m)^* \supset A^* = (I_1S_1S_1^* \& I_1S_2S_2^* \& \dots \& I_1S_mS_m^*) \supset A^* = (\exists x(j_1S_1x \& j_1S_1x) \& \exists x(j_1S_2x \& j_1S_2x) \& \dots \& \exists x(j_1S_mx \& j_1S_mx)) \supset A^*$. Очевидно, что полученная формула равносильна в L_3 формуле $\Theta(A)$. Утверждение 4 доказано.

Основываясь на Утверждениях 1–4, докажем погружаемость формализованной воображаемой логики Н.А.Васильева – исчисления IL – в кванторную трехзначную логику Лукасевича.

Теорема. *Произвольная формула A языка воображаемой логики доказуема в системе IL , е.т.е. ее перевод $\Theta(A)$ является L_3 -общезначимым.*

Согласно Утверждению 1 доказуемость формулы A в системе IL равносильна ее IL -общезначимости. В соответствии с Утверждением 2, IL -общезначимость формулы A имеет место, е.т.е. $\theta(A)$ является IL° -общезначимой формулой. Последнее, согласно Утверждению 3, означает L_3 -общезначимость ее $*$ -перевода $\theta(A)^*$ и – с учетом Утверждения 4 – L_3 -общезначимость формулы $\Theta(A)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989.
2. Карпинская О.Ю., Маркин В.И. К вопросу об адекватной реконструкции ассерторической силлогистики Н.А.Васильева // Второй Российский Философский Конгресс «XXI век: будущее России в философском измерении». Том 1: Онтология, гносеология и методология науки, логика. Часть 1. Екатеринбург, 1999.
3. Костюк Т.П., Маркин В.И. Формальная реконструкция воображаемой логики Н.А.Васильева // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке (V Общероссийская научная конференция). СПб., 1998.

ЛОГИКА n ИЗМЕРЕНИЙ Н.А.ВАСИЛЬЕВА: СОВРЕМЕННАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ¹

Abstract. *The aim of the paper is to provide a formal reconstruction of Nikolai Vasiliev's idea of n -dimensional logic – logic with n quality types of categorical propositions. According to Vasiliev n -dimensional logic is the generalization of Aristotelian syllogistic (2-dimensional logic containing the two quality types of propositions – affirmative and negative) and of the Imaginary logic (3-dimensional logic containing the three quality types of propositions – affirmative, negative and contradictory). Natural semantics of n -dimensional logic and the adequate formal system are formulated.*

Одной из наиболее оригинальных идей Н.А.Васильева является мысль о связи между онтологией и создаваемой для описания мира логикой. Объекты нашего мира непротиворечивы, что позволяет формулировать высказывания лишь двух качеств: либо утвердительные, содержащие связку «есть», либо отрицательные – со связкой «не есть». Однако если мы вообразим существование мира, в котором предмет может заключать в себе противоречие, т.е. одновременно обладать и не обладать неким свойством, то в логике должны появиться высказывания иного качества (Васильев называет их индифферентными), отражающие этот новый тип связи между субъектом и предикатом посредством связки «есть и не есть». Каждое качество Васильев называет измерением, поэтому стандартная аристотелева логика оказывается двухмерной, а логика с тремя качественными различиями, так называемая воображаемая логика – трехмерной.

Однако, по мнению Васильева, число измерений не может быть ограничено тремя, и построив воображаемую логику, он ставит вопрос о ее обобщении: «Наша воображаемая логика знает утвердительные, отрицательные и индифферентные суждения. Но может возникнуть вопрос, не мыслима ли логика с большим числом качественных различий суждений, чем эти три вида. Это вполне мыслимо. Как Спиноза представлял себе бога с бесконечным числом атрибутов, из которых нам доступно только два: мышление и протяжение, так мы можем мыслить логические системы с каким угодно числом качественных различий суждения, из

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ (грант № 97-03-0452).

которых нам доступны только два: утвердительное и отрицательное» [1, с.76]. Так появляется идея логики n измерений. В каждой n -мерной логике действует закон исключенного $n+1$ -го (для единичных высказываний). Частными случаями этого закона являются закон исключенного третьего в аристотелевой логике и закон исключенного четвертого в воображаемой логике.

Первую попытку формальной реконструкции логики n измерений Васильева осуществил В.А.Смирнов [3, с. 258], который предложил аксиоматику для одномерной логики и продемонстрировал процедуру обобщения этой системы до двухмерной, трехмерной и в общем случае n -мерной логики. Однако для построенных исчислений не была сформулирована адекватная семантика. Кроме того, в них не рассматриваются единичные высказывания, с которых, согласно Васильеву, «начинается воображаемая логика так же, как и наша» [1, с.70].

В [2] мною совместно с В.И.Маркиным была сформулирована в семантической и аксиоматической формах система ВЛ силлогистического типа, формализующая трехмерную, воображаемую логику Васильева. ВЛ может быть естественным образом обобщена до силлогистики ВЛ $_n$ с произвольным числом n качественных различий высказываний.

В формализованном языке, который будет использоваться при реконструкции n -мерной логики, содержатся сингулярные ($v, w, \dots$) и общие ($S, P, M, \dots$) термины. Эта логика будет формулироваться на базе логики высказываний, поэтому в ее язык вводятся пропозициональные связки ($\neg, \vee, \&, \supset, \equiv$) и скобки. Кроме этого нам понадобятся по n силлогистических констант для единичных ($J_1, J_2, \dots, J_n$), общих ($A_1, A_2, \dots, A_n$) и неопределенно-частных ($I_1, I_2, \dots, I_n$) высказываний различного качества.

Атомарная формула вида $J_i v P$ содержательно означает, что объект v находится в i -том качественном отношении к P , $A_i SP$ – что всякий объект из S находится в i -том качественном отношении к P , $I_i SP$ – что некоторый объект из S находится в i -том качественном отношении к P . Можно положить, что случаю $i=1$ соответствует утвердительная связка «есть», случаю $i=2$ – отрицательная связка «не есть», а случаю $i=3$ – индифферентная связка «есть и не есть».

Помимо перечисленных типов высказываний Васильев в воображаемой логике использует определенно-частные суждения, например, «Некоторые S есть P , а все остальные S не есть P ». Для них в языке содержатся особые силлогистические константы вида T_K , где $K \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Если $K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, то $T_K SP$ содержательно означает: «Некоторые S находятся в k_1 -ом качественном

отношении к P , некоторые – в k_2 -ом качественном отношении к $P, \dots$, а все остальные – в k_m -ом качественном отношении к P ». Эти константы могут быть введены посредством определений, раскрывающих их смысл:

$$T_K SP \Leftrightarrow \&_{i \in K} I_i SP \& \&_{j \in K} \neg I_j SP.$$

Например, суждение типа «Некоторые S есть P , а все остальные S не есть P » может быть выражено посредством атомарной формулы $T_{\{1,2\}} SP$, которая равносильна сложной формуле $I_1 SP \& I_2 SP \& \neg I_3 SP \& \dots \& \neg I_n SP$.

Сложные формулы языка образуются из атомарных с помощью пропозициональных связок.

Семантическое построение системы $ВЛ_n$ основывается на идее сопоставления каждому общему термину n объемных характеристик (например, в случае трехмерной, воображаемой логики эти характеристики можно интерпретировать как объем термина, его антиобъем и противоречивую область).

В основе нашей семантической реконструкции логики n измерений лежит идея приписывания каждому общему термину P n различных экстенсиональных характеристик (обозначим их $\psi_1(P)$, $\psi_2(P)$, ..., $\psi_n(P)$), первую из которых естественно понимать как объем P , вторую – как его антиобъем, третью – как область, противоречивую относительно P .

Моделью для $ВЛ_n$ является кортеж $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \rangle$, где $\varphi(v) \in D$, $\psi_1(P) \subseteq D$; $\psi_1(P) \neq \emptyset$; $\psi_i(P) \cap \psi_j(P) = \emptyset$, где $1 \leq i, j \leq n$ и $i \neq j$; $\psi_1(P) \cup \psi_2(P) \cup \dots \cup \psi_n(P) = D$.

Условия истинности атомарных формул в модели $\langle D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \rangle$ следующие:

$$|J_i SP| = 1 \text{ е.т.е. } \varphi(v) \in \psi_i(P);$$

$$|A_i SP| = 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \subseteq \psi_i(P);$$

$$|I_i SP| = 1 \text{ е.т.е. } \psi_1(S) \cap \psi_i(P) \neq \emptyset.$$

Условия истинности сложных формул – обычные.

Формула A $ВЛ_n$ -общезначима, если и только если $|A| = 1$ во всякой модели.

Класс $ВЛ_n$ -общезначимых формул аксиоматизируется исчислением $ВЛ_n$, где в качестве исходных силлогистических констант рассматриваются $J_1, J_2, \dots, J_n, I_1, I_2, \dots, I_n$, а общие высказывания определяются так:

$$A_i SP \Leftrightarrow \&_{j \neq i} \neg I_j SP.$$

Постулатами исчисления $ВЛ_n$ являются следующие схемы аксиом и правила вывода:

A0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

A1. $\neg(J_i \vee P \& J_j \vee P)$, где $i \neq j$;

A2. $J_1 \vee P \vee J_2 \vee P \vee \dots \vee J_n \vee P$;

A3. $(J_i \vee P \& J_i \vee S) \supset I_i SP$;

A4. $I_1 SS$;

R1. *modus ponens*;

$$(J_1 \vee S \& J_i \vee P) \supset A$$

R2. $\frac{\quad}{I_i SP \supset A}$ (где A не содержит $\vee$).

$$I_i SP \supset A$$

Семантическая непротиворечивость исчисления $ВЛ_n$ доказывается стандартным образом. Полноту исчисления $ВЛ_n$ относительно предложенной семантики будем доказывать методом Хенкина.

Введем понятия $ВЛ_n$ -непротиворечивого, $ВЛ_n$ -максимального и $ВЛ_n$ -насыщенного множества.

Назовем множество силлогистических формул Γ $ВЛ_n$ -непротиворечивым, е.т.е. для любых $A_1, A_2, \dots, A_m$ из Γ формула $\neg(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_m)$ недоказуема в $ВЛ_n$.

Назовем $ВЛ_n$ -непротиворечивое множество формул Δ $ВЛ_n$ -максимальным, е.т.е. оно удовлетворяет следующим условиям:

- а) все теоремы $ВЛ_n$ содержатся в Δ ;
- б) $(A \supset B \in \Delta \text{ и } A \in \Delta) \Rightarrow B \in \Delta$;
- в) $\neg A \in \Delta$ е.т.е. $A \notin \Delta$;
- г) $A \& B \in \Delta$ е.т.е. $A \in \Delta$ и $B \in \Delta$;
- д) $A \vee B \in \Delta$ е.т.е. $A \in \Delta$ или $B \in \Delta$;
- е) $A \supset B \in \Delta$ е.т.е. $A \in \Delta \Rightarrow B \in \Delta$;
- ж) $A \equiv B \in \Delta$ е.т.е. $(A \in \Delta \Rightarrow B \in \Delta)$ и $(B \in \Delta \Rightarrow A \in \Delta)$.

Множество формул Δ называется насыщенным е.т.е. оно непротиворечиво, максимально и удовлетворяет следующему условию насыщенности:

если $I_i SP \in \Delta$, то существует ν такой, что $J_1 \vee S \in \Delta$ и $J_i \vee P \in \Delta$.

Лемма 1 (о расширении непротиворечивого множества до насыщенного). Пусть Γ – произвольное непротиворечивое множество формул, T – множество всех сингулярных терминов языка, и T_Γ – множество сингулярных терминов, содержащихся в формулах

из Γ . Если $T \setminus T_\Gamma$ бесконечно, то Γ можно расширить до насыщенного множества Δ .

Опишем процедуру насыщения Γ до Δ . Пусть $C_1, C_2, \dots, C_n$ – пересчет всех формул языка. Строим последовательность множеств $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ следующим образом:

$\Delta_1 = \Gamma$;

$\Delta_{n+1} = \Delta_n$, если $\Delta_n \cup \{C_n\}$ ВЛ_n-противоречиво;

если $\Delta_n \cup \{C_n\}$ ВЛ_n-непротиворечиво, то имеем 2 возможности:

1) если C_n имеет вид I_iSP , тогда $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{I_iSP, J_1 \vee S \& J_1 \vee P\}$, где $\vee$ не входит в Δ_n ;

2) если C_n имеет другой вид, то $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{C_n\}$.

Искомое Δ есть результат объединения всех Δ_i .

Докажем, что Δ насыщенно.

Для демонстрации непротиворечивости множества Δ достаточно показать непротиворечивость каждого Δ_i . Доказательство ведем индукцией по номеру i .

1. Δ_1 ВЛ_n-непротиворечиво по построению (в силу ВЛ-непротиворечивости Γ).

2. Допустим, что Δ_n ВЛ_n-непротиворечиво, тогда, если $\Delta_n \cup \{C_n\}$ ВЛ_n-противоречиво, то Δ_{n+1} ВЛ_n-непротиворечиво по построению и индуктивному допущению (т.к. оно совпадает с Δ_n).

3. Рассмотрим, далее, ситуацию, когда $\Delta_n \cup \{C_n\}$ ВЛ_n-непротиворечиво. В случае (1), когда C_n имеет вид I_iSP , рассуждаем от противного:

Пусть $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{I_iSP, J_1 \vee S \& J_1 \vee P\}$ ВЛ_n-противоречиво. Тогда в Δ_n имеются формулы $A_1, A_2, \dots, A_m$ такие, что

$\text{ВЛ}_n \vdash \neg(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_m \& I_iSP \& J_1 \vee S \& J_1 \vee P)$. Отсюда:

$\text{ВЛ}_n \vdash (J_1 \vee S \& J_1 \vee P) \supset \neg(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_m \& I_iSP)$,

$\text{ВЛ}_n \vdash I_iSP \supset \neg(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_m \& I_iSP)$ R2, $\vee$ не входит в консеквент

$\text{ВЛ}_n \vdash \neg(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_m \& I_iSP)$,

т.е. множество $\Delta_n \cup \{C_n\}$ оказывается ВЛ_n-противоречивым, что противоречит условию.

ВЛ_n-непротиворечивость множества Δ_{n+1} во втором случае доказывается легко.

Выполнение условий максимальности $\alpha)$ – $\beta)$ доказывается обычным образом. Условие насыщенности выполняется по построению (случай (1)). Лемма 1 доказана.

Далее задаем каноническую модель: с каждым ВЛ_n-насыщенным множеством Δ ассоциируется каноническая модель

$\langle D_\Delta, \varphi_\Delta, \psi_{1\Delta}, \psi_{2\Delta}, \dots, \psi_{n\Delta} \rangle$, в которой D_Δ – множество всех сингулярных терминов языка; $\varphi_\Delta(v) = v$ и $\psi_{i\Delta}(P) = \{w: J_i w P \in \Delta\}$, где $1 \leq i \leq n$;

Каноническая модель $\langle D_\Delta, \varphi_\Delta, \psi_{1\Delta}, \psi_{2\Delta}, \dots, \psi_{n\Delta} \rangle$ удовлетворяет всем требованиям к моделям в нашей семантике:

(i) $D_\Delta \neq \emptyset$ (т.к. множество сингулярных терминов языка не пусто);

(ii) $\varphi_\Delta(v) \in D_\Delta$ (φ_Δ сопоставляет v сингулярный термин – его самого);

(iii) $\psi_{i\Delta}(P) \subseteq D_\Delta$ ($\psi_{i\Delta}$ сопоставляет P некоторое множество терминов);

(iv) $\psi_{1\Delta}(P) \neq \emptyset$:

- | | |
|---|------------------------------|
| 1. $I_1 P P \in \Delta$ | A4 |
| 2. $\exists v (J_1 v P \in \Delta \text{ и } J_1 v P \in \Delta)$ | 1, усл. насыщенности |
| 3. $\psi_{1\Delta}(P) = \{w: J_1 w P \in \Delta\}$ | определение $\psi_{1\Delta}$ |
| 4. $J_1 v P \in \Delta$ | 2 |
| 5. $v \in \psi_{1\Delta}(P)$ | 3, 4 |
| 6. $\psi_{1\Delta}(P) \neq \emptyset$ | 5 |

(v) $\psi_{i\Delta}(P) \cap \psi_{j\Delta}(P) = \emptyset$, где $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

- | | |
|---|--|
| 1. $\psi_{i\Delta}(P) \cap \psi_{j\Delta}(P) \neq \emptyset$ | допущение |
| 2. $\exists v (J_i v P \in \Delta \text{ и } J_j v P \in \Delta)$ | 1, опред. $\psi_{i\Delta}$ |
| 3. $J_i v P \in \Delta \text{ и } J_j v P \in \Delta$ | 2, $\exists$ и |
| 4. $J_i v P \& J_j v P \in \Delta$ | 3, усл. максимальности ε) |
| 5. $\neg (J_i v P \& J_j v P) \in \Delta$ | A1, усл. максимальности α) |
| 6. $J_i v P \& J_j v P \notin \Delta$ | 5, усл. максимальности β) |
| 7. $\psi_{i\Delta}(P) \cap \psi_{j\Delta}(P) = \emptyset$ | 4, 6 |

(vi) $\psi_{1\Delta}(P) \cup \psi_{2\Delta}(P) \cup \dots \cup \psi_{n\Delta}(P) = D_\Delta$.

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. $\psi_{1\Delta}(P) \cup \psi_{2\Delta}(P) \cup \dots \cup \psi_{n\Delta}(P) \neq D_\Delta$ | допущение |
| 2. $\exists v \in D_\Delta (J_1 v P \notin \Delta \text{ и } J_2 v P \notin \Delta \text{ и } \dots \text{ и } J_n v P \notin \Delta)$ | 1, опред. $\psi_{i\Delta}$ |
| 3. $J_1 v P \notin \Delta \text{ и } J_2 v P \notin \Delta \text{ и } \dots \text{ и } J_n v P \notin \Delta$ | 2, $\exists$ и |
| 4. $(J_1 v P \vee J_2 v P \vee \dots \vee J_n v P) \notin \Delta$ | 3, усл. максимальности δ) |
| 5. $(J_1 v P \vee J_2 v P \vee \dots \vee J_n v P) \in \Delta$ | A2, усл. максимальности α) |
| 6. $\psi_{1\Delta}(P) \cup \psi_{2\Delta}(P) \cup \dots \cup \psi_{n\Delta}(P) = D_\Delta$ | 4, 5 |

Лемма 2. Для произвольного $ВЛ_n$ -насыщенного множества Δ и произвольной формулы A верно, что $|A| = 1$ в $\langle D_\Delta, \varphi_\Delta, \psi_{1\Delta}, \psi_{2\Delta}, \dots, \psi_{n\Delta} \rangle$, е.т.е $A \in \Delta$.

Доказательство ведется индукцией по числу пропозициональных связок в формуле A . Базис включает 2 случая:

I. A имеет вид $J_i v S$.

$|J_1vS| = 1$, е.т.е. $\varphi_\Delta(v) \in \psi_{i\Delta}(S)$, е.т.е. $\varphi_\Delta(v) \in \{w: J_1wS \in \Delta\}$, е.т.е. $v \in \{w: J_1wS \in \Delta\}$, е.т.е. $J_1vS \in \Delta$.

II. A имеет вид I_1SP .

$|I_1SP| = 1 \Rightarrow I_1SP \in \Delta$:

1. $|I_1SP| = 1$ допущение
2. $\psi_{i\Delta}(S) \cap \psi_{i\Delta}(P) \neq \emptyset$ 1, усл. истинности (ii)
3. $\exists v(J_1vS \in \Delta \text{ и } J_1vP \in \Delta)$ 2, определение $\psi_{i\Delta}$
4. $J_1vS \in \Delta \text{ и } J_1vP \in \Delta$ 3, $\exists$ и
5. $J_1vP \& J_1vS \in \Delta$ 4, усл. максимальности ν)
6. $((J_1vP \& J_1vS) \supset I_1SP) \in \Delta$ A5, усл. максимальности α)
7. $I_1SP \in \Delta$ 6,5, усл. максимальности γ)

В обратную сторону:

1. $I_1SP \in \Delta$ допущение
2. $\exists v(J_1vS \in \Delta \text{ и } J_1vP \in \Delta)$ 1, усл. насыщенности
3. $J_1vS \in \Delta \text{ и } J_1vP \in \Delta$ 2, $\exists$ и
4. $\psi_{i\Delta}(P) = \{w: J_1wP \in \Delta\}$ определение $\psi_{i\Delta}$
5. $\psi_{i\Delta}(S) \cap \psi_{i\Delta}(P) \neq \emptyset$ 2,3
6. $|I_1SP| = 1$ 4, усл. истинности (iv)

Индукционный шаг обосновывается тривиально. Лемма 2 доказана.

Теперь докажем Теорему о семантической полноте:

$$\forall A (ВЛ_n \models A \Rightarrow ВЛ_n \vdash A).$$

Допустим, что некоторая $ВЛ_n$ -общезначимая формула A недоказуема в $ВЛ_n$. Тогда $\neg\neg A$ не является теоремой этой системы, а это означает, что множество $\{\neg A\}$ $ВЛ_n$ -непротиворечиво. Расширим его согласно Лемме 1 до насыщенного множества Δ . Поскольку $\neg A \in \Delta$, постольку (в силу Леммы 2) $|\neg A| = 1$ в канонической модели $\langle D_\Delta, \varphi_\Delta, \psi_{i\Delta}, \psi_{2\Delta}, \dots, \psi_{n\Delta} \rangle$. Значит, в силу условия истинности формул (v), $|A| = 0$ в этой модели. Но это противоречит допущению о $ВЛ_n$ -общезначимости формулы A .

Среди законов n -мерной логики выделим следующие:

A_1SS – закон тождества,

$A_iSP \supset I_1SP$ – законы подчинения,

$A_1SP \supset I_1PS$, $I_1SP \supset I_1PS$, $A_iSP \supset \neg I_1PS$ (при $i \neq 1$) – законы обращения,

$(A_iMP \& I_1SM) \supset I_1SP$, $(A_iMP \& A_1SM) \supset A_iSP$ – модусы первой фигуры,

$A_iPM \& A_jSM \supset \neg I_1SP$, $A_iPM \& I_jSM \supset \neg A_1SP$ (при $i \neq j$) – модусы второй фигуры,

$(A_iMP \& A_1MS) \supset I_1SP$, $(I_iMP \& A_1MS) \supset I_1SP$, $(A_iMP \& I_1MS) \supset I_1SP$ – модусы третьей фигуры.

Как мы уже указывали, Васильев считает n -мерную логику обобщением воображаемой логики. Однако примечательным является тот факт, что в результате расширения языка любой n -мерной логики константами новых качеств некоторые законы логик с меньшим числом измерений не сохраняются. Например, закон исключенного четвертого трехмерной, воображаемой логики недоказуем в любой n -мерной логике, где $n > 3$, закон исключенного пятого, имеющий место в четырехмерной логике, недоказуем в логике с $n > 4$, и т.д. Таким образом, в каждой n -мерной логике действует свой закон исключенного $n+1$ -го. В то же время законы о попарной несовместимости высказываний разного качества, а также перечисленные выше законы при переходе от n -мерной логики к $n+1$ -мерной сохраняются. Следовательно, при «обобщении» воображаемой логики мы получаем не ее расширение, а преемственную по отношению к ней систему, строящуюся по тем же стандартам и в соответствии с теми же принципами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989.
2. Костюк Т.П., Маркин В.И. Формальная реконструкция воображаемой логики Н.А.Васильева // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке (V Общероссийская научная конференция). СПб, 1998.
3. Смирнов В.А. Логические идеи Н.А.Васильева и современная логика // [1].

ПРОБЛЕМА ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ ФАКТИЧЕСКИХ МОДАЛЬНОСТЕЙ¹

Abstract. *The paper regards main types of modal notions used in biology. Explanations of the meaning of the main modal terms is given and the way of usage of suggested quasi-matrix logical systems in scientific research is demonstrated.*

К настоящему времени построено много систем модальной логики (в виде исчислений, формальных семантик – алгебраических, реляционных, окрестностных и др.), однако в большинстве случаев не известен смысл описываемых в этих системах модальных понятий необходимости, возможности и случайности. Не ясно даже, являются ли эти понятия логическими или фактическими (физическими). По этой причине не известно, могут ли такие системы находить применение в научном познании.

Реализуя задачу построения содержательных систем модальной логики, т.е. систем, в которых изначально различаются логические и фактические модальности, используются понятия, традиционно употребляемые в логике («истина» и «ложь», «логическая истина» и «логическая ложь») и объясняется смысл других семантических понятий, а также логических терминов, старший из авторов (Ю.В.Ивлев) разработал теорию логических модальностей [См.: 7, 8].

Ивлевым Ю.В. построен ряд систем квазиматричной логики, предназначенных для формализации отношений по логическим формам между суждениями с фактическими (физическими, онтологическими) модальными понятиями. Эти системы создавались на основе обобщения известных принципов построения классической логики (двухзначности, непротиворечия, исключенного третьего, однозначности, тождества и матричности). В результате обобщения сформулированы новые принципы: четырехзначности – высказывание принимает значение из области $\{t^n, t^c, f, f^c\}$; непротиворечия – высказывание не может принимать более одного из указанных значений; исключенного пятого; тождества; квазиматричности – логические термины представляются в качестве квазифункций (квазифункция – это соответствие, в силу которого некоторый объект из определенного подмножества некоторого

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 00-03-00319.

множества соотносится с некоторым объектом из определенного подмножества того же самого или другого множества). Значения t^n , t^c , f^i , f^c соответственно читаются «необходимая истина» («истинно и необходимо фактически»), «случайная истина» («истинно и случайно фактически»), «необходимая ложь» («ложно и невозможно фактически»), «случайная ложь». Приведем только определения модальных терминов $\Box$ и $\Diamond$ (знаков необходимости и возможности, соответственно).

A	$\neg A$	a		b		c		d		e	
		$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$
t^n	f^i	t	t	t^n	t^n	t^n	t^n	t^c	t^c	t^c	t^c
t^c	f^c	f	t	f^c	t^c	f^i	t^n	f^c	t^c	f^i	t^n
f^i	t^n	f	f	f^i	f^i	f^i	f^i	f^c	f^c	f^i	f^c
f^c	t^c	f	t	f^c	t^c	f^i	t^n	f^c	t^c	f^i	t^n

A	$\neg A$	f		g		h		i	
		$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$
t^n	f^i	t	t	t	t	t^n	t^n	t^c	t^c
t^c	f^c	f^i	t^n	f^c	t^c	f	t	f	t
f^i	t^n	f	f	f	f	f^i	f^i	f^c	f^c
f^c	t^c	f^i	t^n	f^c	t^c	f	t	f	t

Знаки t и f соответственно понимаются как сокращения для выражений $\{t^n / t^c\}$ (и $\{f^i / f^c\}$) (формула имеет либо значение t^n , либо значение t^c ; формула имеет либо значение f^i , либо значение f^c).

Для построения теории фактических модальностей необходимо объяснить смысл модальных терминов и указанных значений и обосновать возможность применения построенных систем в научном познании.

Младший из авторов (В.Ю.Ивлев) выделил несколько случаев употребления модальных понятий в биологии.

Случай 1. *Изменение популяции в результате дрейфа генов.* Здесь используются следующие понятия. Случайность 1: случайными называются сочетания различных аллельных генов в половой клетке. Случайность 2: случайным образом особи выбирают себе партнеров при спаривании. Случайность 3: случайным образом могут происходить изменения генофонда в небольших изолированных популяциях (дрейф генов). Случайности 1 и 2 можно обобщить в одно понятие: случайным является событие, если ни оно, ни его отсутствие не детерминировано ни внешними, ни внутренними факторами. Это случайность (1, 2).

Случайность 3 можно описать и объяснить посредством теории случайных массовых явлений.

В логике и социологии случайное массовое явление (множество всех событий, составляющих явление) называют генеральной совокупностью. В нашем случае это популяция, от которой еще не отделилась часть особей. Множество предметов, выбираемых для исследования, называется выборкой, или выборочной совокупностью. Здесь это часть особей исходной популяции, которая от нее отделилась и может развиваться в новую популяцию.

Принципы отбора предметов из генеральной совокупности в выборку:

- 1) должны выбираться предметы из всех подклассов генеральной совокупности; в данном случае для исследования следует выбрать особи из всех подклассов, отличающихся генотипами особей, образующих эти подклассы; поскольку в обсуждаемом случае отбор осуществляет природа, то для того чтобы дрейфа генов не произошло, отделившаяся часть популяции должна содержать представителей всех генотипов;
- 2) количество предметов, включаемых в выборку из образованных подклассов генеральной совокупности, должно быть пропорционально величинам этих подклассов; например, если по видам генотипов образованы три подкласса, в один из которых входит $1/2$ всех особей, а в два другие по $1/4$, то и в выборке должна быть половина особей первого генотипа, а вторая половина выборки должна содержать представителей двух других генотипов в равных количествах: если этот принцип «природой не соблюден», то может произойти дрейф генов;
- 3) необходимо взять оптимальное число предметов для исследования.

Что же происходит в ситуации, называемой дрейфом генов? Сама природа как бы «нарушает указанные принципы», по крайней мере какой-то один из них. Речь, конечно, идет о том, что фактически происходит так, что отделяется слишком малая часть популяции или же в отделившуюся часть популяции попадают представители не всех генотипов, или же представители генотипов представлены не в той пропорции, в какой они содержатся в основной популяции. Результатом этого является нарушение условий воспроизведения генофонда. Условия нарушаются в результате внешних по отношению к исходной популяции воздействий. Таким образом, под случайностью 3 следует понимать нарушение условий воспроизведения генофонда под влиянием внешних факторов (изменения условий существования популяции), а в обоб-

щенном виде случайность 3 - это то, что возникает под влиянием внешнего воздействия на познаваемый объект (на особь, предмет, систему и т.д.).

Дрейф генов – явление случайное. Если указанные выше условия и принципы соблюдены, то дрейфа генов не происходит, т.е. действует закон о постоянстве генофонда популяции на протяжении ряда поколений – закон Харди-Вейнберга. Заметим, что он имеет место в большой популяции, когда не происходят мутации и действует второй закон Менделя – закон независимого распределения. Говорить о соблюдении приведенных выше методологических принципов, кроме принципа, основанного на законе больших чисел, в этом случае не имеет смысла, поскольку утверждение относится не к выборке, а к самой генеральной совокупности. Закон Харди-Вейнберга действует и в случае отделения части особей от основной популяции, если соблюдаются все указанные условия и принципы. Он констатирует необходимость постоянства генофонда популяции. Как охарактеризовать это понятие необходимости? Можно ли говорить о данном понятии необходимости как о понятии того, что обусловлено сущностью системы? Думаем, что можно. Явление – постоянство генофонда на протяжении ряда поколений. Сущность (в данном отношении) – чем это постоянство детерминировано – указанные выше условия и принципы, понимаемые, конечно, в данной ситуации как свойства системы.

Таким образом, случайность (случайность 3) – то что обусловлено внешними условиями существования системы, необходимость (необходимость 1) – то, что обусловлено сущностью системы. Можно считать эти категории парными. Случайность как равновероятность, как недетерминированность события или его отсутствия - это случайность (1,2).

Случай 2. Признаки организма, необходимые или случайные для его выживания. Под организмом понимается популяция, поскольку именно она является эволюционирующей единицей. Системой, относительно которой решается вопрос о необходимости или случайности, является популяция вместе со средой обитания. Условия обитания являются сущностью системы. Необходимым для выживания организмов признаком является такой, сохранение (но не возникновение) которого детерминировано сущностью системы. Это необходимость не по происхождению (необходимость 2). Признак является невозможным не по происхождению, если системой (популяция вместе со средой обитания) детерминирована гибель организмов, обладающих данным признаком. Признак

является случайным не по происхождению, если системой не детерминированы ни его сохранение, ни его утрата.

Случай 3. *Мутации*. Здесь употребляются следующие понятия необходимости и случайности. Необходимыми по обстоятельствам являются мутации, вызываемые искусственным путем, в результате целенаправленного воздействия на хромосомы и гены, т.е. необходимостью по обстоятельствам называется явление, существование или возникновение которого детерминировано внешними обстоятельствами. Случайность по обстоятельствам - мутации происходят в результате естественных внешних причин, но не у всех особей, а у меньшинства, и обусловленность не является детерминистической. Спонтанная случайность – мутации, происходящие без видимых причин иногда и только у отдельных особей. (Заметим, что термин «спонтанные» введен биологами.)

Случай 4. *Генетическая обусловленность признаков организма*. При исследовании названной обусловленности признаков используются следующие понятия необходимости, случайности и возможности. Необходимостью является однозначная детерминация признака генокодом организма. Случайностью является неоднозначная обусловленность признака спецификой генетического материала. Возможными являются признаки, детерминированные не однозначно генетическими аномалиями. Чаще всего возможности выражаются числами, большими 0 и меньшими 1.

На основе изложенного можно сформулировать несколько обобщенных понятий необходимости и случайности.

Первое понятие необходимости: необходимым (свойством, отношением, связью, событием и т.д.) является то, что однозначно детерминировано внутренними факторами вещи, системы и т.д. или внешними обстоятельствами их существования. Используемое здесь понятие однозначной детерминации поясним на примерах. Так, электропроводность металлов однозначно детерминирована наличием в них свободных электронов, а некоторые заболевания не однозначно детерминированы генными или хромосомными аномалиями, т.е. при этих аномалиях в зависимости от тех или иных обстоятельств заболевание может наступить, а может и не наступить. Неоднозначная детерминированность существует объективно. То есть при однозначной детерминации соответствующая причина является достаточным условием для возникновения определенного следствия. При неоднозначной детерминации (квазидетерминации) причина является достаточным условием для возникновения одного из нескольких определенных следствий, но какого именно, установить в принципе невозможно. Парным к этому понятию необходимости является следующее *понятие случайно-*

сти: случайным (свойством, отношением, связью, событием и т.д.) является то, что детерминировано, но не однозначно, внутренними факторами вещи (системы и т.д.) или внешними обстоятельствами ее существования.

Второе понятие необходимости: необходимость - то, что однозначно детерминировано сущностью вещи, системы и т.д. Примером сущности может служить генокод организма. *Случайность* - то, что неоднозначно детерминировано сущностью вещи (системы и т.д.), а также то, что детерминировано (однозначно или неоднозначно) внутренними несущественными или внешними обстоятельствами.

Третье понятие – понятие функциональной необходимости: признак является необходимым, если условиями существования его носителя однозначно детерминировано наличие этого признака для существования носителя, например, для выживания организма. *Случайным* является признак, отсутствие которого не препятствует существованию носителя этого признака. Примером такой случайности может служить случайность не по происхождению.

Четвертое понятие – понятие необходимости по обстоятельствам: необходимым называется явление, существование или возникновение которого однозначно детерминировано внешними обстоятельствами. Примерами такой необходимости являются мутации, вызываемые искусственным путем, т.е. путем целенаправленного воздействия на хромосомы и гены. Это понятие применимо и к социальным явлениям. *Случайность* – то, что неоднозначно детерминировано внешними обстоятельствами.

Теперь рассмотрим приведенные выше табличные определения операторов необходимости и возможности.

В каких случаях высказываниям приписываются значения t^n , t^c , f^i , f^c ? Высказывание истинно, т.е. имеет значение t , если описываемое им положение дел имеет место в действительности (с учетом временных характеристик). Далее, положение дел, имеющее место в действительности, может быть необходимым или случайным в одном из указанных выше смыслов, например, положение дел, описываемое высказыванием (ситуация), однозначно детерминировано сущностью вещи или системы (второе из приведенных выше понятий необходимости). Мы осознаем, что оценивать в этом случае высказывание в качестве необходимого нецелесообразно, так же, как нецелесообразно оценивать в качестве имеющего место в действительности высказывание, описывающее положение дел, имеющее место в действительности. Из этой ситуации могут быть два выхода. Первый – ввести оценки ситуа-

ций: «имеет место в действительности», «фактически (физически) необходимо» («однозначно детерминировано сущностью вещи»). Второй – наряду с оценкой «истина» ввести соответствующую оценку высказывания, которое описывает необходимое положение дел. Первый выход противоречит сложившейся традиции, поэтому для нас неприемлем. Во втором случае мы не можем найти подходящего выражения для оценки высказывания. Пришлось оценивать в качестве необходимых (случайных) не только положения дел, но и высказывания. Будем считать, что оценки высказываний в последнем случае имеют другой смысл, нежели оценки ситуаций.

Первая пара понятий необходимости и случайности выделяется на основе однозначной и неоднозначной детерминации положений дел. Допустим, что положение дел, описываемое высказыванием A , имеет место в действительности и его наличие однозначно детерминировано (внешними или внутренними обстоятельствами вещи, системы и т.д.), т.е. высказывание A имеет значение t^n . Очевидно, что высказывание «Необходимо A » истинно, т.е. указанная детерминация имеет место в действительности. Возникает вопрос, является ли сама эта однозначная детерминация однозначно детерминированной внешними или внутренними обстоятельствами, т.е. припишем ли мы значение t^n или t^c высказыванию $\Box A$ при указанном приписывании значения высказыванию A . На данном этапе исследования мы ограничиваемся обсуждением детерминированности обстоятельств, которые однозначно или не однозначно детерминируют положение дел. Пусть положение дел, например, заболевание организма, однозначно обусловлено внутренними аномалиями организма. Последние в свою очередь однозначно детерминированы другими аномалиями организма и т.д. В этом случае высказыванию $\Box A$ следует приписать значение t^n . Если A имеет значение t^c , т.е. положение дел, описываемое высказыванием A , имеет место в действительности и оно не однозначно детерминировано, например, внутренними обстоятельствами, то последние обстоятельства в свою очередь могут быть неоднозначно детерминированы другими внутренними обстоятельствами, и т. д. В этом случае как высказыванию $\Box A$, так и высказыванию $\Box \Box A$ следует приписать значение f^c . Аналогично рассуждая, получаем определения модальных терминов, представляемые системой b .

При определенной дополнительной интерпретации модальностей второй паре понятий необходимости и случайности соответствует система d , третьей – a , четвертой – c .

Модальные понятия, используемые в научном познании, требуют дальнейшего исследования и обобщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев В.Ю.* “Необходимость”, “случайность”, “возможность” в биологии и их философские обобщения // Категории. Философский журнал. 1997, № 2.
2. *Ивлев В. Ю.* Категории необходимости, случайности и возможности: их смысл и методологическая роль в научном познании // Философия и общество. 1997, № 3.
3. *Ивлев Ю. В.* Содержательная семантика модальной логики. М., 1885. 170 с.
4. *Ивлев Ю. В.* Модальная логика. М., 1991. 222 с.
5. *Ивлев Ю. В.* Квазифункциональная логика // Научно-технич. информ. Сер.2, 1992, № 6.
6. *Ivlev Ju. V.* Quasi-Functional Logic and Logic of Propositional Attitudes // Philosophie und Logik. Frege-Kolloquien Jena. Berlin; New York, 1993. P. 200-204.
7. *Ивлев Ю. В.* Логические модальности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 7. Философия. 1996, № 6. С. 73-78.
8. *Ивлев Ю.В.* Теория логических модальностей // Логические исследования. Вып. 6. М., 1999. С. 21-29.

О ВРЕМЕННОЙ КВАЛИФИКАЦИИ НОРМАТИВНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Abstracts. *The purpose of this paper is to show the possibility and the usefulness of temporal qualification of normative propositions. Such the device allows us to make more exact the relation of deontic alternativeness and the concept of deontic consistency. We offer to modify the so-called "standard" models. We use a temporal structure that is discrete, branching "to the left" and infinite in both directions. The system of tense-logic based on this structure has been proved to be complete and decidable one. So the temporal interpretations of deontic operators are expected to be adequate ones.*

Несмотря на выполнение или невыполнение норм «в реальном мире», они остаются нормами. И нет ничего удивительного в предположении, что все моральные дилеммы проистекают из некоторого рода несовместности (противоречивости) моральных правил. Например, Э.Дж.Леммон [4, 5] думал именно таким образом. Он различал следующие источники нашего знания о том, что следует делать: обязанности, обязательства и моральные принципы. Человеку следует делать нечто, если его обязанность (скажем, как гражданина) состоит в том, чтобы это делать. Равным образом, человеку следует это делать, если он берет обязательство сделать это. И, опять-таки, ему следует это делать, если согласно некоторому моральному принципу, который он признает, является правильным, чтобы он это делал. Кроме того, Леммон остроумно замечает, что дилеммы, к которым мы морально подготовлены и для разрешения которых нам нужно, так сказать, просто поискать готового решения в конкретном (правовом или моральном) кодексе, крайне редко встречаются и, во всяком случае, представляют очень незначительный практический интерес. Намного большей и притом подлинной значимостью обладают те дилеммы, которые *требуют решения нравственного характера (нравственный выбор)*. И, согласно Леммону, наши столкновения с неразрешимыми моральными ситуациями просто отражают неявную противоречивость в существующем кодексе, и мы, если хотим оставаться и моральными и логичными, самой ситуацией принуждаемся к тому, чтобы восстанавливать непротиворечивость нашего кодекса. По его мнению, это можно сделать посредством добавления к нашим принципам или указаний на случаи исключений из них, или расстановкой приоритетов среди принципов, или посредством и того и другого, или с помощью еще каких-то подобных приемов.

Положение дел, которое может быть созданным, расстроенным, предотвращенным от наступления или от исчезновения (в случае, когда оно уже имеет место), можно назвать *выполнимым* положением дел.

Определение: Положение дел является *выполнимым в прагматическом смысле*, если его выполнение или невыполнение в данных обстоятельствах может быть *результатом* человеческого действия.

Очевидно, положение дел, выполнение которого в данных объективных обстоятельствах является или *необходимым*, или *невозможным*, не является, с точки зрения приведенного определения, выполнимым положением дел. Невозможность, далее, может быть или невозможностью в *логическом смысле*, или невозможностью ввиду *внешних материальных условий*, или, наконец, собственно *человеческих* качеств. При этом то, что является логически невозможным, является также невозможным и с точки зрения как физических условий, так и человеческих качеств. Однако то, что является возможным с точки зрения физических условий (а также и логически возможным) может быть все-таки невозможным с точки зрения человеческих качеств. Очевидными формами выражения невыполнимости содержания нормы являются тождественно-ложная и тождественно-истинная формулы логики высказываний.

Определения: 1. *Подлинной нормой* (т.е. нормой в подлинном смысле слова) называется такая обязывающая *O*-норма или такая разрешающая *P*-норма, содержание которой является некоторым *выполнимым в прагматическом смысле* положением дел.

2. Норма, содержание которой является (алетически) или *необходимым*, или *невозможным* положением дел, называется *неподлинной*, или *неправомерной*.

Так, например, неподлинными являются норма $O(p \ \& \ \bar{p})$, которая требует выполнения чего-то невозможного, и норма $P(p \ \vee \ \bar{p})$, которая разрешает нечто являющееся необходимым.

Не соглашаясь с утверждением о том, что *все* дилеммы происходят из противоречивости кодекса [3], нельзя не согласиться с тем, что эта непротиворечивость должна быть, *по возможности*, предусмотрена. Напомним, однако, что имеется в виду не только «обычная» непротиворечивость множества (нормативных) высказываний, образующих кодекс. Должна иметь место также и *деонтическая* непротиворечивость.

Определения: 1. Множество, состоящее из некоторого числа подлинных *O*-норм, является *деонтически непротиворечивым*, если конъюнкция их содержаний выражает выполнимое положение дел, т.е. является непротиворечивой (выполнимой) формулой логики высказываний.

2. Всякое множество P -норм является *деонтически непротиворечивым*.

Например, нормы Pp и нормы $P \neg p$, конъюнкция содержаний которых, $(p \& \neg p)$, является тождественно-ложной формулой, все равно являются совместимыми друг с другом.

Утверждение: Для того чтобы кодекс, состоящий, в общем случае, из обязывающих и разрешающих норм, был деонтически непротиворечивым, необходимо и достаточно, чтобы (1) его подмножество обязывающих норм было деонтически непротиворечивым и (2) подмножество обязывающих норм должно также быть совместимым с каждым членом подмножества разрешающих норм.

Реализация вышеописанной процедуры совершенствования (в плане непротиворечивости) кодекса «по Леммону», очевидно, требует обращения к временной квалификации норм.

«Стандартная модель» в семантических исследованиях деонтической логики, как известно, представляет собой следующее:

$\mu = \langle W, R, V \rangle$, где: W – (непустое) множество возможных миров; R – отношение *деонтической альтернативности*; V – означивание на структуре $\langle W, R \rangle$, т.е. функция, которая отображает множество пропозициональных букв $Var = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ в подмножества множества W :

$V: Var \rightarrow \wp(W)$, где $\wp(W)$ – множество всех подмножеств множества W («степень множества W »); высказывание p_i является истинным в возможном мире α , если и только если этот мир α входит в множество w_i .

Очевидным образом осуществляется распространение означивания на случаи использования при построении формул логических союзов, а также и деонтических операторов; например, для оператора «обязательно» O :

$$V(OA) = \{ \alpha \in W : \forall \beta \in W (\alpha R \beta \Rightarrow \beta \in V(A)) \}.$$

В стандартных моделях не отражается зависимость норм от времени. Можно модифицировать эти модели и прибегнуть к временной квалификации нормативных высказываний.

Будем использовать модель времени в виде *дискретной, ветвящейся «влево» и бесконечной в обоих направлениях временной структуры* $\mathcal{T}_b = \langle T, < \rangle$, состоящую из (непустого) базисного множества («моментов») $T = \{x, y, z, \dots\}$ и двухместного отношения на нем «раньше-позже» $< [2]$.

Считая, что заранее ни одно из «возможных будущих» нельзя квалифицировать как действительное, – не делая при этом уступок фатализму, – используем следующие временные операторы:

F' , при этом $F'A$ обозначает “необходимо будет (когда-нибудь) так, что A ”;

F'' , при этом $F''A$ обозначает “необходимо и притом в определенное время («в свой срок») будет так, что A ”;

G' , при этом $G'A$ обозначает “необходимо всегда будет так, что A ”;

P , при этом PA обозначает “когда-то было так, что A ”.

Общепринятым образом определяем в качестве сокращений:

Df.g: $gA = \overline{F'}\overline{A} :=$ возможно, всегда будет так, что A ;

Df.g': $g'A = \overline{F'}\overline{A} :=$ возможно, всегда, кроме некоторого времени, будет так, что A ;

Df.f: $fA = \overline{G'}\overline{A} :=$ возможно, когда-нибудь будет так, что A ;

Df.H: $HA = \overline{P}\overline{A} :=$ всегда было так, что A .

Определенным образом задаются условия истинности овремененных высказываний. Соответствующая система временной логики K_b является полной и разрешимой [1,2].

Далее, вводится отношение «исторического тождества»:

$\alpha \cong \beta$, е.т.е. $\alpha(t') = \beta(t')$ для каждого $t' < t$, и релятивизируется деонтическая альтернативность миров:

R_t : если $\alpha R_t \beta$, то $\alpha \cong \beta$.

Соответственно, означивание есть теперь:

V_t : если $\alpha(t) = \beta(t)$, то $\alpha \in w_i(t)$ е.т.е. $\beta \in w_i(t)$.

В переформулированной посредством временной квалификации модели $\mu_t = \langle W_t, R_t, V_t \rangle$, где W_t - декартово произведение множества W и множества T , высказывания означиваются по отношению к парам $\langle \alpha, t \rangle$ а выражение $\mu_t \models A(\alpha, t)$ обозначает « A истинно в мире α во время t ».

Релятивизируются условия истинности:

(1) $\mu_t \models p_i(\alpha, t)$ е.т.е. $\alpha \in w_i(t)$, для $i = 0, 1, 2, \dots$

(2) $\mu_t \models A(\alpha, t)$ е.т.е. $\langle \alpha, t \rangle \in V_t(A)$

(3) $\mu_t \models \neg A(\alpha, t)$ е.т.е. не $\mu_t \models A(\alpha, t)$ (или $\mu_t \not\models A(\alpha, t)$)

(4) $\mu_t \models (A \rightarrow B)(\alpha, t)$ е.т.е. не $\mu_t \models A(\alpha, t)$ или $\mu_t \models B(\alpha, t)$

(5) $\mu_t \models OA(\alpha, t)$ е.т.е. $\forall \beta \in W_t(\alpha R_t \beta \Rightarrow \mu_t \models A(\beta, t))$

и, – опять-таки, очевидным образом – для овремененных высказываний; например:

(6) $\mu_t \models HA(\alpha, t)$ е.т.е. $\forall t' \in T(t' < t \Rightarrow \mu_t \models A(\alpha, t'))$

(7) $\mu_t \models PA(\alpha, t)$ е.т.е. $\exists t' \in T(t' < t \ \& \ \mu_t \models A(\alpha, t'))$

Деонтическим операторам теперь можно придать вполне естественную временную интерпретацию.

Очевидно, подлинность нормы формально может быть отражена посредством указания критерия, посредством которого различаются выполнимые, т.е. зависящие от человеческих усилий, положения дел и невыполнимые, т.е. не зависящие от них, положения дел.

Введем в используемый язык два *модально-временных* оператора: оператор «исторической» необходимости $\Box_t$:

$$(8) \mu_t \models \Box_t A(\alpha, t) \text{ е.т.е. } \forall \beta \in W_t (\alpha \cong_t \beta \Rightarrow \mu_t \models A(\beta, t))$$

и оператор «исторической» возможности $\Diamond_t$:

$$(9) \mu_t \models \Diamond_t A(\alpha, t) \text{ е.т.е. } \exists \beta \in W_t (\alpha \cong_t \beta \ \& \ \mu_t \models A(\beta, t)).$$

Определим еще особый *деонтически-временной* оператор O_t :

$$(10) Df. O_t A = \Box_t A \vee \Box_t \neg A.$$

Это – выражение понятия некоторого рода исторической *предопределенности*. При условии, что заданы возможный мир и время, оно означает, что *независимо от человеческих действий* положение дел, описанное в суждении, выраженном посредством высказывания A , или выполняется в каждом из миров, имеющих в данное время ту же самую историю, что и данный мир, или не выполняется ни в одном из таких миров.

Допустим теперь, что, напротив, A является таким, что на него условие (10) *не* распространяется, т.е. соответствующее действие является *выполнимым в прагматическом смысле*. И пусть, далее, мы хотим, чтобы следующим за данным (в настоящее время, текущим и т.д.) положением дел было бы такое положение дел, при котором нечто, описываемое высказыванием A , *всегда* имеет место, или это нечто *когда-то* имеет место, или же оно имеет место «*в определенный срок*», или, наконец, *никогда не* имеет места. Заметим, что невыполнение условия (10) означает, что речь идет о формулировании подлинных норм.

Формально возможны 27 дизъюнкций из форм GA' , $F'A$ и $\bar{F}'A$. Различных из них только 7:

$G'A$, которое позволяет определить деонтическую модальность «обязательно»;

$(G'A \vee F'A)$, которое выражает «благоприятно»;

$(G'A \vee \bar{F}'A)$, которое выражает «либо обязательно, либо запрещено»;

$F'A$, которое выражает «разрешено»;

$(F'A \vee \bar{F}'A)$, которое выражает «либо разрешено, либо запрещено»;

$\bar{F}'A$, которое выражает «запрещено»;

$(G'A \vee F'A \vee \bar{F}'A)$, которое выражает «нормативно безразлично».

И еще есть форма «разрешено в определенное время» – $F''A$.

Очевидно, полнота и разрешимость системы временной логики K_b распространяется и на систему деонтической логики с вышеприведенными деонтическими модальностями, определенными с помощью временных операторов системы K_b .

Та часть логической системы, которая соответствует операторам $\Box_t$ и $\Diamond_t$, является, по крайней мере, системой типа $S5$. «Смешанными» схемами доказуемых в ней формул являются, в частности:

ДВ.1 $\Box_t A \rightarrow OA$; эта схема соответствует условию R_t ;

ДВ.2 $OA \rightarrow \Diamond_t A$; эта схема тоже следует из условия R_t и представляет собой (сильную) версию известного (кантовского) принципа «должен подразумевает может»;

ДВ.3 $\Box_t A \Leftrightarrow O\Box_t A$ и

ДВ.4 $\Diamond_t A \Leftrightarrow O\Diamond_t A$; согласно им, утверждения об обязанностях, если они касаются «исторически необходимых» или «возможных» вещей, оказываются нормативно бессодержательными.

Оператор, определенный в условии (10), позволяет сделать утверждение о том, что высказывания об исторически предопределенных вещах являются, в нормативном отношении, бессодержательными:

ДВ.5 $O_t A \rightarrow (A \Leftrightarrow OA)$.

Утверждение: Пусть Ω – любая (осмысленная) темпоральная модальность прошедшего времени, т.е. нечто, выражаемое в нашем формализованном языке посредством какой-либо конечной и непустой последовательности операторов H и P . Тогда в тех случаях, когда формула A не содержит вхождений операторов $\Box_t$, $\Diamond_t$ и O , высказывание $O_t \Omega A$ является истинным.

На основании сделанного утверждения и тезиса ДВ.5 можно заключить, что суждения, которые выражаются посредством высказываний чисто прошедшего времени, всегда будут, в нормативном отношении, бессодержательными. В тех случаях, когда в формулу A не входят операторы $\Box_t$, $\Diamond_t$ и O , высказывание вида $(\Omega A \Leftrightarrow O\Omega A)$ является истинным. Это вполне понятно: обязанности, налагаемые или принимаемые в *настоящее время* и касающиеся *прошлых* событий, просто не имеют никакого нормативного значения. В самом деле, «Вам следует (сейчас) присутствовать на вчерашнем заседании» не может означать ничего иного, кроме «Вы присутствовали на вчерашнем заседании».

Учет временной квалификации норм позволяет уточнить язык правоприменительной деятельности. Рассмотрим, например, вопрос, поставленный А.Россом и касающийся порядка внесения поправок в правило конституции, которое содержит формулировку условий

внесения поправок в конституцию [6]. По мнению Росса, в такое правило внесения поправок нельзя внести поправки согласно той процедуре, которая установлена им самим. Но тогда будто бы в него вообще нельзя внести поправок посредством какой-либо правовой процедуры. Всякое изменение правила внесения поправок должно рассматриваться как самостоятельный законотворческий факт, т.е. как «разрыв» в непрерывности правового порядка.

Росс выдвигает два отдельных довода в поддержку своего тезиса, а именно: он утверждает (а) что допущение того, что в правило внесения поправок допустимо вносить поправки в соответствии с формулировкой условий, входящей в него же, означает допущение противоречий и (б) что оно входит в противоречие с некоторой «логической теоремой», согласно которой предложения со ссылкой на самих себя лишены значения.

Очевидно, говорить о существовании какой-то общей теоремы не приходится, хотя, конечно, и могут быть такие теоремы в некоторых логических системах.

Так что обратимся к утверждению (а). Пусть в определенное время действует конституция D . Пусть в ней имеется статья A , согласно которой в конституцию посредством определенной процедуры может быть внесена поправка. Пусть, далее, статья A' есть новая статья конституции, которая получена в соответствии с названной поправкой, и теперь уже она определяет процедуру внесения поправок в конституцию.

Очевидно, имеется несколько возможных способов внесения поправок в конституцию: исключение какой-то статьи конституции в результате некоторого акта, состоящего из отмены или ограничения нормы, выраженной в этой статье; дополнения конституции некоторой новой статьей и введения новой нормы или, наконец, некоторой комбинации обоих этих актов, т.е. посредством отмены одной нормы и введения другой. В любом случае мы получаем новую, другую, конституцию D' .

В самом деле, если какая-то конституционная норма была отменена или введена в данное время, то это означает, что после этого времени действует уже другая конституция. Конституция D в названное время перестает существовать, а вместо нее вводится другая конституция D' . При этом конституционные нормы, касающиеся внесения поправок и сформулированные в статьях A и A' , принадлежат к разным множествам, действуют в разное время и, следовательно, не могут противоречить друг другу. Например, не противоречат друг другу нормы Op и $O\bar{F}p$: ведь конъюнкция их содержаний $(p \& \bar{F}p)$ не является тождественно-ложной формулой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Караваев Э.Ф.* Проблемы семантики временной логики // *Логика и теория познания*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. С.119-128.
2. *Караваев Э.Ф.* Средства временной логики для представления процесса развития научного знания // *Логика и развитие научного знания*. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. С.62-82.
3. *Караваев Э.Ф.* Ответственность и рациональность выбора: неизбежность моральных дилемм // «Человек – Философия - Гуманизм»: Основные доклады и обзоры Первого Российского философского конгресса (4-7 июня 1997 г.). В 9 т. Т9. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. С.161-170.
4. *Lemmon E.J.* Deontic Logic and the Logic of Imperatives // *Logique et Analyse*. 1965. Vol. VII. No.2. P. 39-61.
5. *Lemmon E.J.* Moral dilemmas // *Moral Dilemmas*/ Ed. By Christopher W. Gowans. New York & Oxford: Oxford University Press, 1987. P. 101-114.
6. *Ross A.* On self-reference and a puzzle in constitutional law// *Mind*. 1969. Vol.78. No. P. 1-24.

M.M. Novosyolov

SUR LES INDISCERNABILITES COMME STRUCTURES ALGEBRIQUES

*La logique qui correspond à un tel état
des choses n'est pas «booléenne» ...*

Max Black

Резюме. Основная цель статьи – в логической модели отобразить «разрыв» между чистым опытом и теорией и тем самым объяснить то «нетерпимое противоречие», на которое неоднократно указывал Анри Пуанкаре. С этой целью на основе понятия о тождестве как эмпирической (интервальной) неразличимости рассматриваются структуры неразличимостей в качестве модели неклассических алгебраических структур (решётки с псевдодополнениями, алгебры Гейтинга, n -значная алгебра Гёделя и др.).

Dans l'intervention suivante, je me propose de présenter quelques-unes de mes idées sur le principe de l'identité des indiscernables commencées par mon article «Identity»¹, ma thèse «Identity with a measure of transitivity»² et mon article «On epistemological presiseness : interval approach»³.

Ce sujet est traditionnel. Mais il est polysémantique, il est ouvert à toute interprétation raisonnable. Finalement il y a beaucoup de variantes de ce principe qui dépendent de la méthode utilisée pour définir les notions.

En particulier, l'expression «identité des indiscernables» peut être interprétée en accentuant le mot «identité» ou le mot «indiscernabilité». D'ordinaire on choisit le premier accent conformément aux travaux de Leibniz sur la logique pure⁴. Mais c'est le deuxième accent qui m'intéresse maintenant. Il est conforme à ce qu'on peut trouver chez Leibniz dans ses travaux mathématiques. L'indiscernabilité y est inséparable d'une continuité.

Du moment que Henri Poincaré a exposé ses idées sur la continuité empirique, le principe de l'identité pris dans le context empirique ne devient plus la logique pure de préférence – il est

¹ Novosyolov M.M., Identity // Great Soviet Encyclopedia, a translation of the third edition, Macmillan, NY.- L., vol. 26, 1981, p. 79-80.

² LMPS'87, Abstracts, vol. 4, part 2, section 6, Moscow, 1987, p. 57-59.

³ Voir : Science as a subject of study, Moscow, 1987, p. 165-195.

⁴ Par exemple: Tarski A., Introduction à la logique, Paris- Louvain, 1960.

désirable de mettre en forme logique un phénomène de l'indiscernabilité empirique aussi. Il convient de remarquer ici que Leibniz n'a jamais tâché de souligner la différence particulière entre la continuité mathématique et la continuité empirique. Seul Henri Poincaré, en évoquant le problème de la continuité dans ses livres philosophiques, a noté que la notion de la continuité formée par l'expérience empirique est bien différente de celle formée par la connaissance théorique. D'après Poincaré, la continuité empirique est contradictoire en soi. Les données expérimentales peuvent s'exprimer par les relations suivantes: $a = b$, $b = c$, $a \neq c$, qui se trouvent en désaccord intolérable avec la loi de contradiction de la logique pure⁵.

Ainsi, d'une part, pour l'étude de la nature, pour faire une science quelconque, il faut autre chose que la logique pure parce qu'elle ne peut créer de nouveau. Mais d'autre part, c'est la contradictoire de la connaissance expérimentale qui ne permet pas de renoncer à la logique. Tel est évidemment l'état de la question.

D'habitude, comme on le sait, dans la connaissance théorique, on précise la notion intuitive de la continuité d'une manière classique — selon les méthodes ensemblistes. Et la manière de traiter l'indiscernabilité y conforme aussi aux abstractions ensemblistes: on considère la continuité comme ensemble des points où chaque point individualisé lui-même indépendamment du seuil de perception ou d'une précision de mesure.

Les images empiriques, au contraire, sont définies par rapport à notre sensibilité ou sensibilité du mesureur. Il en résulte que, dans l'expérience empirique, il y a toujours un intervalle d'incertitude ou d'approximation (ou d'abstraction) pour discerner les objets comme images ponctuelles individualisées. Au dire de Poincaré, les objets de l'expérience empirique sont enveloppés par le brouillard.

C'est pourquoi aux fins de caractéristique de la continuité empirique, il doit y avoir une autre notion de l'identité des indiscernables que celle de la logique pure (ou de Leibniz). Pour l'identité fondé sur des faits empiriques il faut échager les conditions proprement logique contre les conditions empiriques.

Au dessous je propose l'esquisse d'une telle notion.

Soit M l'univers des objets quelconques et soit N l'espace métrique de dimension finie engendrée par les vecteurs dont les composantes sont des propriétés mesurables des éléments de M . Supposons qu'il existe une application de M dans N telle que chaque objet de M est marqué par un vecteur de ses propriétés.

⁵ Voir : Poincaré H., *Science et hypothèse*, Paris, 1906, ch. 2 ou : Poincaré H., *La valeur de la science*, Paris, 1905, ch. 3, § 3.

Il est clair qu'au point de vue empirique, les objets sont indiscernables dans M quand leurs images sont indiscernables dans N. Et ces images sont indiscernables dans N lorsque la distance (la mesure d'incertitude) entre elles n'excède pas une valeur fixée.

D'où il découle le schéma de définition suivant pour les objets de M :

$$x R_{\varepsilon} y \equiv \varphi (x_i, y_i) \leq \varepsilon,$$

où ε (une valeur de seuil) appartient à l'ensemble des nombres réels positifs y compris 0 (zéro) et $+\infty$ (plus l'infini), $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, x_i, y_i ($1 \leq i \leq n$) sont les propriétés mesurables des éléments de M et R_{ε} désigne une indiscernabilité empirique. Je l'appelle aussi *identité empirique*.

Il est évident qu'en reliant l'identité empirique avec l'information sur la proximité métrique des objets, nous ne pouvons encore être certain de la révélation de toute la structure objective fondée sur les données de l'expérience, parce que l'identité empirique est la vérité de fait et son opposé est possible. Cependant, on obtient avec une haute vraisemblance une bonne approximation si on choisit une convenable fonction de distance.

Pourtant, c'est la question philosophique. Je n'en parlerai pas ici. A présent, je me borne aux quelques conséquences algébriques du schéma de définition présenté plus haut. Je vais considérer deux cas.

Le cas 1. Dans ce cas, grâce à l'introduction du paramètre ε nous pouvons supposer l'affectation d'indices des toutes indiscernabilités empiriques et nous pouvons faire abstraction de toutes leurs qualités, excepté leurs valeurs de ε .

Soit $R^+ = \{\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq +\infty\}$.

Soit R_{ε} le nom commun pour fixer qu'il s'agit de l'indiscernabilité quelconque.

Considérons l'ensemble produit (cartésien) $E = \{R_{\varepsilon}\} \times R^+$.

Le couple $\langle R_{\varepsilon}, \alpha \rangle$ où $\alpha \in R^+$, par exemple $\langle R_{\varepsilon}, 0,01 \rangle$, ce n'est autre que le nom de l'indiscernabilité concrète.

En autre terme, posons par définition $\langle R_{\varepsilon}, \alpha \rangle = R_{\varepsilon=\alpha}$.

Désignons par « $\leq$ » l'ordre de R^+ .

Désignons par « $\subseteq$ » l'ordre de E.

On voit aisément que chaque indiscernabilité sera comparé avec l'autre par le valeur de R^+ . Formellement :

$$R_{\varepsilon=\alpha} \subseteq R_{\varepsilon=\beta} \equiv \alpha \leq \beta.$$

Ainsi donc, nous sommes en présence d'un ensemble infini filtrant (à gauche et à droite) des indiscernabilités linéairement (totalement) ordonnés par inclusion. Cet ensemble a un élément nul ($R_{\varepsilon=0}$) et un

élément unité ($R_{\varepsilon} = \infty$). En outre tout sous-ensemble de lui à deux éléments $\{R_{\varepsilon} = \alpha, R_{\varepsilon} = \beta\}$ possède une borne inférieure et une borne supérieure. Donc, l'ensemble des indiscernabilités est réticulé ou *le treillis*.

Notons bien que dans notre treillis, $R_{\varepsilon=0}$ n'est autre que l'identité logique pure (ou l'égalité arithmétique). En règle générale, les logiciens associent seulement ce cas avec le principe de l'identité des indiscernables formulé par Leibniz lui-même. Mais participant à notre treillis théorique, cet identité est inaccessible pour l'expérience empirique. Voilà pourquoi j'étudie ici le cas plus générale comprenant les identités (les indiscernabilités) qui ne sont pas transitives ou sont transitives avec une certaine mesure.

Nous pouvons maintenant définir le treillis des indiscernabilités en tant que structure algébrique à deux opérations logique (la conjonction « & » et la disjonction « $\vee$ ») conformément à la règle suivante :

$$R_{\varepsilon=\alpha} \& R_{\varepsilon=\beta} \equiv \inf \{ R_{\varepsilon=\alpha}, R_{\varepsilon=\beta} \},$$

$$R_{\varepsilon=\alpha} \vee R_{\varepsilon=\beta} \equiv \sup \{ R_{\varepsilon=\alpha}, R_{\varepsilon=\beta} \},$$

c'est-à-dire en identifiant la conjonction avec la borne inférieure de l'ensemble de ses composants et la disjonction avec la borne supérieure de celui-ci.

Signalons que le treillis des indiscernabilités est distributif mais il n'est pas complété. Par conséquent, il n'est pas booléen. En effet, $R_{\varepsilon=0}$ est le complément booléen de $R_{\varepsilon=\infty}$ et réciproquement. Mais pour n'importe quelle indiscernabilité ce n'est pas vrai. Néanmoins, la négation peut être introduite à notre treillis par la table :

$R_{\varepsilon=\alpha}$	$\neg R_{\varepsilon=\alpha}$
$\alpha = 0$	$R_{\varepsilon=\infty}$
$\alpha > 0$	$R_{\varepsilon=0}$

Je voudrais remarquer que « tertium non datur » ne vérifie pas pour la négation indiquée. C'est son affaiblissement qui n'est que vérifié. Autrement dit, la négation de notre treillis est pseudo-négation ou, d'une façon exacte, pseudo-complément relatif à un élément (empirique) du treillis⁶. Donc, l'algèbre des indiscernabilités empiriques est pseudo-booléenne (à savoir *le treillis pseudo-complémenté*).

Il est utile de remarquer aussi que nous pouvons considérer séparément la conjonction et la disjonction. En conformité avec cela, on

⁶ Voir : Rasiowa H., Sikorski R., The mathematics of metamathematics, Warszawa, 1963, p. 54-62.

reçoit deux demi-treillis. On montre sans peine que dans ce cas nous aurons deux demi-groupes commutatifs où $R_{\varepsilon=\infty}$ est élément neutre pour la conjonction et $R_{\varepsilon=0}$ est celui-ci pour la disjonction.

En retournant à notre cas principal, voyons le treillis pseudo-complémenté enrichi de l'implication définie par la table suivante :

$R_{\varepsilon=\alpha}$	$R_{\varepsilon=\alpha} \Rightarrow R_{\varepsilon=\beta}$
$\alpha \leq \beta$	$R_{\varepsilon=\infty}$
$\alpha > \beta$	$R_{\varepsilon=\beta}$

Cette table s'explique naturellement. En effet, si $\alpha \leq \beta$ il est nécessaire d'évaluer l'implication $R_{\varepsilon=\alpha} \Rightarrow R_{\varepsilon=\beta}$ comme vraie. Mais si $\alpha > \beta$ cela reste à vérifier parce que sa valuation binaire comme mensonge n'est pas adéquate. Le choix au profit de notre table convient le mieux à l'expérience et il est plus préférable du point de vue logique parce qu'il correspond au pseudo-complément relatif $R_{\varepsilon=\alpha}$ par rapport à $R_{\varepsilon=\beta}$. Il est aisé de vérifier que dans ce cas nous sommes en présence de l'exemple du treillis implicatif avec les éléments nul et unité. Autraiment dit, c'est un modèle empirique de *l'algèbre de Heyting*⁷. Si l'on sait qu'il suffit de disposer du nombre fini des indiscernabilités, on aura toujours *l'algèbre à n-valeurs de Gödel*⁸.

Le cas 2. Je me borne au cas où il y a quelque modèle empirique, par exemple une certaine quantité mesurable, et un ensemble des résultats de sa mesure à la précision requise. Dans ce cas chaque indiscernabilité a une représentation matricielle. Nous pouvons évaluer chaque indiscernabilité au moyen de la (0-1)-matrice carrée. Alors la conjonction des indiscernabilités coïncide avec l'intersection logique de leurs matrices et la disjonction avec la réunion logique de celles-ci. Les symboles $R_{\varepsilon=0}$ et $R_{\varepsilon=\infty}$ changent leurs sens : $R_{\varepsilon=0}$ désigne maintenant toute indiscernabilité qui peut être représentée par la matrice unité et $R_{\varepsilon=\infty}$ toute indiscernabilité qui peut être représentée par la matrice universelle. On voit que dans ce cas actuel, il y a aussi un treillis. Ce treillis complet parce qu'il est fini.

Il nous reste à considérer l'ensemble fini des indiscernabilités muni d'une opération appelée le composé (ou le produit relatif). Pour

⁷ Cela s'accorde avec une idée de J.L.Destouches. Selon lui la logique des énoncés expérimentaux est adéquate à la logique intuitionniste. Voir : Destouches J.L., Sur la mécanique classique et intuitionnisme // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, ser. A, vol. LIV, n. 1, 1951. Voir aussi : Heyting A., Intuitionism. An introduction, Amsterdam, 1956.

⁸ Voir : Gödel K., Zum intuitionistischen Aussagenkalkül // Berka K., Kreiser L., Logik-Texte, Berlin, 1971, S. 186.

notre modèle cette opération se réduit à la multiplication (ou le produit) des matrices associées aux indiscernabilités correspondants. Mais il doit y discerner au moins deux sous-cas.

2.1. Dans ce sous-cas les résultats de nos mesures ainsi que les valeurs de ε sont exprimés en entiers naturels. En l'occurrence nous avons à faire à des indiscernabilités que je nomme « naturelles ». J'ai cherché que pour celles-ci une loi du composé est définie sous forme suivante :

$$R_{\varepsilon=\alpha} * R_{\varepsilon=\beta} = R_{\varepsilon=(\alpha+\beta)},$$

où « $*$ » désigne le produit relatif. Au point de vue purement abstrait, nous pouvons imputer à cette loi les propriétés d'une opération interne sur l'ensemble de toutes des indiscernabilités naturelles entièrement. Par conséquent, nous sommes en présence d'une structure algébrique à un opérateur. On voit facilement que cette structure munie le composé est plongée isomorphiquement sur l'ensemble des nombres naturels muni l'addition. Autrement dit notre loi du composé induit sur l'ensemble des indiscernabilités naturelles une structure algébrique de demi-groupe (à savoir *le demi-groupe dénombrable commutatif à élément unité*)⁹.

2.2. Au sous-cas où les résultats de les mesures ainsi que les valeurs de ε appartiennent au demi-axe réel positif (R^+), une loi du composé des indiscernabilités (je l'ai cherché aussi) est définie en général de la manière suivante :

$$R_{\varepsilon=\alpha} * R_{\varepsilon=\beta} = R_{\max(\alpha, \beta) \leq v \leq (\alpha+\beta)}.$$

Il est clair que la loi ci-dessus n'est pas la loi interne sur l'ensemble des indiscernabilités réelles : les indiscernabilités réelles n'est pas invariant par rapport au composé. Compte tenu de ce fait, il est souhaitable d'étendre l'ensemble de définition des valeurs de ε jusqu'à l'ensemble des nombres d'intervalles¹⁰. Alors nous aurons la possibilité d'étudier la structure des indiscernabilités que je nomme « indiscernabilités d'intervalles ».

⁹ Ici l'élément unité est $R_{\varepsilon=0}$.

¹⁰ Des nombres d'intervalles voir : Moore R.E., Interval Analysis, N.-Y., 1966 ; Alefeld G., Herzberger J., Introduction to interval computations, N.-Y. — L., 1983.

Б.БОЛЬЦАНО КАК ПРЕДШЕСТВЕННИК КОНСТРУКТИВИЗМА. I

Abstract. *The article provides foundation for the thesis of Bolzano being one of the first in the history of logic and mathematics who asserted the necessity of using only direct proofs in scientific texts. The autor is going to dewelope the foundation of the Bolzano's priority as the founder of constructivism in logic.*

Наука, по мнению Б. Больцано, как известная человечеству часть истин из области «истин в себе» должна характеризоваться двумя основными моментами: методами нахождения или открытия нового знания (эвристика) и методами изложения или отображения знания в соответствующих книгах («учебниках») с целью его наиболее легкого и полного усвоения. Если в понимании эвристики Больцано считал себя продолжателем идей Декарта, Паскаля, логики Пор-Рояля и Лейбница, и здесь у него не было недостатка в предшественниках, то в вопросах изложения науки дело обстояло иначе. Лишь у схоластов и частично в логике Пор-Рояля можно обнаружить использование элементов мнемоники и риторики при изложении наук. По существу систематические исследования в этом направлении были начаты Больцано, которые по глубине обсуждаемых им вопросов до сих пор остаются уникальными.

Больцано обращает внимание на существовавшее со времен Ренессанса понятие «система» и находит в нем смешение двух элементов: науки как таковой и способов ее изложения. Вместо указанного понятия он вводит в «Наукоучении» [1] понятие «учебник», трактуя его в четырех основных аспектах: как последовательность взаимосвязанных высказываний; как целостную систему истин; как описание методов изложения научного содержания; как такое представление истин конкретной науки, которое позволяет обнаружить их «объективные» основания. Последний аспект понимания «учебника» впервые позволяет сделать научное содержание собственно наукой. Историческим примером учебника подобного рода Больцано считал «Топику» Аристотеля, а наиболее близкими себе взглядами в понимании цели научного знания – идеи Спинозы, излагаемые в «Трактате об усовершенствовании разума».

Истины, по мнению Больцано, должны быть отнесены к некоторой науке на основании анализа свойств той области, которую мы ставим своей целью изучить. В своих сочинениях он не приводит классификации наук, но считает необходимым разделить все науки на теоретические (априорные) и эмпирические (опытные). Аналогом подобного разделения служит для Больцано различие между чисто понятийными и наглядными истинами. Первые, согласно Больцано, никогда не могут обосновываться последними, но обратное возможно. Единство различных истин теоретических или эмпирических наук определяется характером их логической связи между собой, позволяющей определять форму и степень зависимости одних истин от других. Без глубокого понимания общих для всех наук логических связей и отношений между истинами, согласно Больцано, наука вообще невозможна. Идею единства научного знания, основанную на «одинаковости» логических связей и отношений для каждой конкретной науки, он и пытается развить путем исследования и описания методов изображения наук в своих «учебниках», ссылаясь при этом на Декарта и Лейбница как на своих предшественников. Идеей единства науки он, по существу, предвосхищает один из главных принципов позитивизма – принцип методологического монизма.

Изложение содержания конкретной науки Больцано предлагает начать с разделения всех предложений учебника (истин) на главные, вспомогательные и случайные в зависимости от отношения их к основному содержанию науки, а также от субъективных целей их использования в построении доказательств. Можно отметить, что главными оказываются чисто понятийные (теоретические) истины. Они должны обладать свойством самоочевидности либо представлены в учебнике таким образом, чтобы читатель был уверен в их истинности. Они являются наиболее общими по объему своего логического субъекта. К числу вспомогательных Больцано относит истины, которые способствуют повышению степени уверенности в истинности основного содержания науки. Виды вспомогательных предложений существенным образом зависят от субъективных целей: на какой класс читателей рассчитан учебник, с какой степенью уверенности должно быть усвоено основное содержание науки и т.п. К случайным у Больцано относятся предложения, с помощью которых устанавливается связь данной науки с другими, описывается история данной науки, способы применения в практике ее результатов, делаются различные ссылки и пояснения и т.п.

Особое место среди методов изложения наук в учебниках занимают у Больцано вопросы, связанные с пониманием сущно-

сти, места и роли доказательств и обоснований. Уже в одной из своих первых работ по математике Больцано выдвигает тезис о том, что научные доказательства должны быть не уверениями (Gewißmachung), но обоснованиями (Begründung), демонстрирующими те «объективные» основания, на которые опирается доказываемая истина [2]. В дальнейшем практически во всех своих работах Больцано настаивает на том, чтобы при изложении науки использовались только *прямые доказательства*, опирающиеся на отношения выводимости (Ableitbarkeit) или точной выводимости (genau Ableitbarkeit), или, еще лучше, на отношение объективного следования (objektive Abfolge) [3].

Впервые об отношении выводимости Больцано говорит в § 155 «Наукоучения»: «Если мы утверждаем, что известные предложения $A, B, C, \dots, M, N, O, \dots$ находятся относительно варьируемых представлений $i, j, \dots$ в отношении совместимости, то мы тем самым утверждаем, что имеются определенные представления, которые на месте $i, j, \dots$ превращают все эти предложения вместе в истинные. Но до сих пор оставался нерешенным вопрос: имеются ли кроме представлений, превращающих в истинные все вместе предложения $A, B, C, \dots, M, N, O, \dots$, еще какие-нибудь другие представления, которые превращают в истинные только одну или другую часть этих предложений отдельно, но не делают все их истинными; и если такие представления имеются, то какие из данных предложений можно сделать истинными чаще, чем остальные. Очевидно этот вопрос имеет важное значение. Мы предположим, что среди совместимых между собой предложений $A, B, C, \dots, M, N, O, \dots$ существует такое отношение, что все представления, которые при замене варьируемых представлений $i, j, \dots$ делают определенную часть этих предложений, а именно все $A, B, C, \dots$, истинными, обладают также свойством делать истинными и другую часть этих предложений, а именно, $M, N, O, \dots$. Это особое отношение, которое мы обнаруживаем между предложениями $A, B, C, \dots$, с одной стороны, и $M, N, O, \dots$ – с другой, настолько значительно, что поскольку мы его однажды узнали, оно позволяет нам из известных истин $A, B, C, \dots$ тотчас же получать истины $M, N, O, \dots$. Такому отношению, которое имеет место между предложениями $A, B, C, \dots$ с одной и $M, N, O, \dots$ с другой стороны, я даю название отношение **в ы в о д и м о с т и** и говорю, что предложения $M, N, O, \dots$ будут выводимы из предложений $A, B, C, \dots$ относительно варьируемых представлений $i, j, \dots$, если каждая совокупность представлений, которая при замене $i, j, \dots$ делает истинным все $A, B, C, \dots$, делает также истинными и все $M, N, O, \dots$ ».

Данное определение содержит, как мы видим, условие, ограничивающее отношение выводимости требованием совместимости посылок и заключений относительно списка варьируемых представлений. Указанное ограничение влечет за собой сужение числа возможных выводов, поскольку не позволяет, например, выводить заключения из логического противоречия.

В дальнейшем Больцано ослабляет ограничения, наложенные на отношение выводимости, отказываясь от условия совместимости посылок и заключений, и оставляет только требование совместимости посылок. Это ослабленное отношение выводимости Больцано называет тем же словом «выводимость», хотя иногда прибавляет к нему слово «простая».

«Из предложений $A, B, C, \dots$ относительно варьируемых представлений $i, j, \dots$ просто выводимы $M, N, O, \dots$, если первые совместимы между собой относительно $i, j, \dots$ и если каждая совокупность представлений, которая при замене $i, j, \dots$ в предложениях $A, B, C, \dots, M, N, O, \dots$ делает истинным все $A, B, C, \dots$, делает истинными также и все $M, N, O, \dots$ ».

Одну из главных задач своей «новой логики» Больцано видел в том, чтобы разрабатываемые им логические средства помогли сделать научные доказательства более точными и строгими. Критерию точности и строгости научное доказательство удовлетворяет, согласно Больцано, в том случае, когда выполняются следующие два условия:

- 1) в ходе доказательства не должны использоваться лишние аргументы (посылки);
- 2) в ходе доказательства необходимо использовать все данные аргументы (посылки).

Поскольку основу доказательств, по мнению Больцано, составляет некоторый логический вывод заключения из посылок, а основу самого вывода составляет отношение выводимости между посылками и заключением, то для удовлетворения критерию строгости необходимо снова обратиться к рассмотрению отношения выводимости. Необходимо так определить отношение выводимости, чтобы в число посылок не включались не относящиеся к делу, чтобы все посылки «участвовали в деле». Формулируя задачу в чисто логическом плане, Больцано преследует цель отличить случаи выводимости, при которых между посылками и заключениями имеет место избыточная связь, от выводимости без избыточной связи. Он пишет: «Если посылки $A, B, C, \dots$, из которых относительно варьируемых представлений $i, j, \dots$ выводимо предложение M , обладают таким свойством, чтобы нельзя было выбросить ни одного предложения $A, B, C, \dots$ или даже какую-нибудь часть в

отдельном предложении без того, чтобы из них все еще оставалось выводимо предложение М, то отношение выводимости между посылками А, В, С, ... и М в этом случае следовало бы назвать *т о ч н ы м*, а в противном случае *и з б ы т о ч н ы м*».

Особое место в логике как наукоучении занимает у Больцано отношение аналогичное понятию выводимости, но выделяемое им не как отношение между предложениями, а как отношение между истинами. Больцано называет его немецким словом - *Abfolge*, т.е. следование, добавляя (почти всегда) к нему определение - «объективное». Это отношение должно сыграть, по его замыслу, главную роль в наукоучении как методе построения систем научного знания.

Смысл отношения объективного следования Больцано пытается раскрыть с помощью следующего примера. Пусть имеются два истинных предложения: (1) «Летом теплее, чем зимой» и (2) «Летом ртутный столбик термометра стоит выше, чем зимой». В обычной разговорной практике из знания о том, что летом теплее, чем зимой, мы заключаем, что летом ртутный столбик термометра стоит выше, чем зимой. И с равным успехом из знания о том, что летом ртутный столбик термометра стоит выше, чем зимой, мы заключаем, что летом теплее, чем зимой. Но, очевидно, никому не придет в голову утверждать, что именно оттого летом теплее, чем зимой, что ртутный столбик термометра стоит выше, чем зимой. Возникает вопрос: почему при выведении одной истины из другой нам иногда бывает безразлично, какая из них выступает в качестве основания для познания другой? Однако порядок следования не безразличен в том случае, когда мы выясняем, например, является ли высота ртутного столбика действительной причиной того, что летом теплее, чем зимой. Это, по мнению Больцано, происходит потому, что мы сами выбираем, какая из истин должна в данном случае выступать в качестве «основания познания».

Например, основанием для познания истины (1) может служить истина (2), а для познания истины (2) – истина (1). Но если мы хотим определить, какая из этих двух истин является «объективным основанием» или причиной другой истины, то их уже нельзя произвольно менять местами. Порядок истин в этом случае уже не зависит от нас и обусловлен причинной зависимостью между фактами. Если же иметь в виду «основания познания», то порядок истин может не соответствовать последовательности фактов.

«Между истинами, – говорит Больцано, – имеется одно особенно важное отношение, в силу которого одни из них относятся к другим как объективные основания к своим объективным следст-

виям. Можно сказать, что истины, которые относятся к другим истинам, как следствие к своим основаниям, находятся тем самым в отношении следования между собой».

Вышеприведенное объяснение отношения следования является в «Наукоучении» единственным, которое можно принять за его определение.

Хотя исторически, считает Больцано, истина «Земля – круглая» узнается из истины «Силуэт Земли на Луне – кругообразный», однако вторая не является объективным основанием первой. Объективные основания первой истины следует искать совсем в других истинах. Основания познания могут изменяться познающим субъектом, а объективные основания, согласно Больцано, всегда остаются неизменными. Объективное основание некоторого предложения выступает основанием его истинности. Последними объективными основаниями всех истин являются в его логике «основные» чисто понятийные истины, которые не имеют своего объективного основания ни в каких других истинах. Их объективное основание, согласно Больцано, находится в Боге, и в божественном откровении человек получает знание этих истин. Для людей число основных истин всегда конечно.

Больцано уточняет далее понятие следования, сравнивая его со сходными понятиями. Отношение следования необходимо, по его мнению, отличать от отношения причинности или отношения между причиной и действием. В противоположность понятиям «основание» и «следствие», которые относятся к истинам самим по себе, т.е. к чему-то недействительному (не вещному), понятия «причина» и «действие» относятся к вещам, которые есть нечто действительное. Отношение причинности имеет место только между действительными вещами. Но из этого еще не следует, что понятия причины и действия не могут быть включены в смысл понятий основания и следствия. Оба отношения, по мнению Больцано, связаны друг с другом, поскольку каждому истинному предложению о причинной связи соответствует определенное высказывание о следовании. «Так, очень часто употребляются предложения, которые выражают причинные отношения. Это так называемые каузальные предложения, то есть предложения формы: «Х есть причина Y» или «Х производит Y» или «Y есть действие X» должны быть причислены к предложениям, которые определяют отношение следования между другими предложениями. Так как «Х есть причина Y» означает: «истина, что Х есть, относится к истине, что есть Y, как основание (частичное основание) относится к своему следствию (частичному следствию). Так, например, мы говорим, что бог есть причина наличного бытия мира, а мир есть

действие бога, так как в истине, что бог есть, лежит основание истины, что есть мир».

Причинные предложения, согласно этому, оказываются тогда не чем иным, как высказываниями о следовании одной истины из другой.

С другой стороны, не каждое предложение, которое говорит о следовании, можно считать предложением о причинности. В противном случае отношение следования имело бы место только между истинами, говорящими о чем-то действительном, вечном. Но этому, по мнению Больцано, противоречит пример математики, истины которой не говорят о действительных вещах и все же могут находиться между собой в отношении объективных оснований и следствий. Отношение причинности охватывает, таким образом, только часть отношений следования.

Отношение следования нужно отличать также от отношения простой и логической выводимости. Отношение простой и логической выводимости допускает симметричные случаи выводимости. Объективное же основание никогда не может быть одновременно и следствием своего объективного следствия, а объективное следствие не может быть основанием своего объективного основания. Отношение следования обладает свойствами антисимметричности, тогда как отношение выводимости лишь несимметрично.

Наличие отношения выводимости не означает, что между предложениями (истинами) имеет место и отношение следования. Так, в приведенном выше примере из (1) выводимо (2) и из (2) выводимо (1). Однако отношение следования имеет место лишь в первом случае.

Кроме антисимметричности отношение объективного следования обладает еще свойством антирефлексивности, так как «никакое объективное основание не может быть основанием самого себя, так же как и объективное следствие – следствием самого себя». Иначе говоря, любое основание или следствие должны быть самонезависимыми. Указанные свойства, согласно Больцано, должны распространяться и на «основные» истины. «Если основанием каких-либо истин в конечном итоге являются основные истины, то основанием последних не могут быть никакие другие».

Очевидно, что отношение объективного следования обладает свойством транзитивности, поскольку Больцано предполагает восхождение к конечным основаниям любой истины, к «основным» истинам.

Объективное обоснование, опирающееся на отношение следования, Больцано считает высшей формой научного доказательства. Но если каждое объективное обоснование должно быть,

согласно его требованию, прямым доказательством, то это не означает обратного: что каждое прямое доказательство должно быть объективным обоснованием. Непрямые доказательства, по мнению Больцано, никогда не могут стать объективными обоснованиями истины, так как не позволяют совершить «восхождение к её объективным основаниям». Из строго научного учебника, адресованного ученым, а не обывателям, Больцано считает необходимым полностью исключить не прямые методы доказательства. Для одного и того же предложения могут существовать несколько прямых доказательств, среди которых может находиться и объективное обоснование. Критикуя древнегреческое толкование науки как чего-то завершенного, где каждая истина обнаруживает собственное обоснование, поскольку относительно каждого научного факта известно не только «что», но и «почему» он есть, Больцано замечал, что вряд ли возможно указать объективные связи всех истин в любом научном сочинении. Он рассматривал это требование скорее как идеал «строго научного» изложения, которое может быть впервые только и делает науку собственно наукой. В то же время Больцано отмечал, что ни одна наука, даже математика, пока ещё этого идеала не достигла.

Требование указать объективные связи истин (типа причинно-следственных связей) является, по существу, первой попыткой исследования гносеологического аспекта процедур доказательства в логике, попыткой преодоления интуитивно-психологической его трактовки, классическим примером которой являлось доказательство теорем в «Началах» Евклида. Именно стремлением к выявлению объективных связей между истинами можно объяснить постоянную неприязнь Больцано к непрямым доказательствам, которая прослеживается в его математических и логических сочинениях. Непрямые доказательства, как отмечал неоднократно сам Больцано, не отвечают на вопрос «почему» относительно доказываемого положения и уж тем более не позволяют проникнуть в его объективные связи с другими истинами излагаемой науки. Они по структуре своей не могут содержать объективных оснований и потому в принципе не могут быть обоснованиями, построенными на отношении объективного следования, но могут быть лишь доказательствами как уверениями, использующими отношение выводимости (в смысле отношения семантического следования в духе А. Тарского), но не доказательствами как убеждениями (Zuversicht).

Требование единственного прямого доказательства, выступающего в качестве объективного обоснования при «строго научном» изложении, Больцано считал основным и называл его «первым правилом» своего «истинно хорошего метода» изложения

науки в собственном учебнике. Оно, как и другие правила, лежит в русле тех требований, которые Больцано обнаруживает у Аристотеля, Петра Рамуса, Декарта и Лейбница. В своих математических работах и в «Наукоучении» он неоднократно ссылается на «Вторую Аналитику», на критику П.Рамусом метода Евклида, на принципы научного изложения в логике Пор-Рояля, на идеи Лейбница и Декарта. Но если «первое правило» метода у предшественников Больцано обозначено лишь в самой общей форме, то у него оно получает впервые логическое завершение в разработке отношения логического следования, лежащего в основе доказательства как объективного обоснования [4].

«Второе правило» метода «строго научного» изложения касается необходимости использования в доказательствах «одного вида» понятий, лежащих в пределах одного (логического) рода. Использование «чужих» понятий приводит к неоправданным «петлям» – окольным путям в доказательствах. Так, при доказательстве теорем Пифагора, по мнению Больцано, нередко смешивают геометрические понятия с понятием движения. Он отвергает, например, определение окружности через аппроксимацию вписанного и описанного многоугольников и считает неправильным выводить истины арифметики, алгебры или анализа из положений геометрии. Использование «чужих» понятий не способствует, в конечном счете, установлению связей доказываемого положения со своими объективными основаниями.

«Третье правило» метода требует, чтобы следствия или заключения не были по своему составу менее сложными (*zusammengesetzte*) или более общими, чем их объективные основания или посылки. Иначе говоря, при «строго научном» изложении необходимо переходить от простого к сложному и от общего к частному (особенному), но не наоборот. Вопрос о том, какая из истин является более простой, возникает, согласно Больцано, лишь в том случае, когда надо определить, какая из них выступает основанием или частичным основанием другой истины.

«Четвертое правило» является последним в методе «строго научного» изложении знаний и связано у Больцано с пониманием отношения объективного следования в духе отношения точной выводимости. Правило требует, чтобы из возможно меньшего числа посылок как оснований можно было получить максимальное число заключений как следствий. В этом случае, очевидно, заключения не должны быть проще посылок. Часть истин, в которой господствуют лишь причинно-следственные зависимости, должна быть меньше той части, как полагает Больцано, в которой наряду с

отношением объективного следования имеет место еще место и отношение выводимости.

С позиции метода «строго научного» изображения науки лучшей оказывается такая система аксиом (или основных положений), которая не только является минимальной, но и единственно возможной. Критерием выявления подобной системы выступает у Больцано объективная связь между истинами как аналог причинно-следственной их зависимости, т.е. отношение объективного следования. Хотя Больцано не оставил после себя законченного сочинения, в котором полностью были бы реализованы все правила «хорошего метода» изложения наук, он неоднократно в различных своих работах использует указанный метод. Прежде всего, мы находим применение этого метода в его математических сочинениях. Больцано предполагал, что в большей степени этому методу соответствует арифметика натуральных чисел. Но уже в элементарной геометрии он обнаруживает трудности воплощения своего метода изложения науки, поскольку большинство ее доказательств направлено на создание достоверности, основанной на отношении выводимости, но не на создание убежденности, основанной на использовании отношения объективного следования. «Новое» построение математики было для Больцано весьма важным делом, которое он так и не завершил. Но он постоянно подчеркивал, что «первые положения» оснований математики не могут быть названы таковыми до тех пор, пока не будет показана их роль в качестве объективных оснований (причин), на которые опираются сами математические доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bolzano B. Wissenschaftslehre. Bünde, Sulzbach, 1837.*
2. *Bolzano B. Philosophie der Mathematik oder Beitrage zu einer begründeten Darstellung der Mathematik. Prag, 1810.*
3. *Федоров Б.И. Логика Бернарда Больцано. Л., 1980.*
4. *Федоров Б.И. Объективное и субъективное в построении доказательств //Логика и философские категории. Л., 1982. С.112-120.*

Е.Е.Ледников

О ПОНЯТИИ И СУЖДЕНИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Abstract. *The paper reevaluates Kant's argument against treating the existence notion as a predicate. The author agrees with Kant, Russell, Carnap, and Quine's point of view that existence contexts are expressed with the help of logical quantifiers. At the same time the author believes existence predicate to be modal (meaning epistemic modalities) and it helps us to construct true assertions about physically nonexistent objects impossible for example in Russell's theory of definite descriptions.*

Понятие существования своей кажущейся загадочностью все еще привлекает философов. Эпизодически вспыхивает, по крайней мере в логико-философской литературе, дискуссия о том, является ли существование предикатом¹. Мы намерены продолжить эту дискуссию – не только решительно возразить против понимания существования как предиката, но и пойти несколько дальше обычных дискуссий такого рода, по-новому взглянув на природу суждений существования.

Анализируя понятие существования, следует прежде всего воздать должное И.Канту. Он, как известно, не признавал ни опытной, ни теоретической возможности доказательства бытия бога. Последнее, по его мнению, выступает только объектом веры. Поэтому Кант не мог согласиться с правомочностью так называемого онтологического доказательства, обычно приписываемого средневековому схоласту А.Кентерберийскому. Изучая его структуру, Кант пришел к заключению, что существование не является свойством вещей, предикатом, способным увеличивать содержание субъекта мысли. «Если я мыслю вещь посредством каких угодно предикатов и какого угодно количества их (даже полностью определяя ее), то от добавления, что эта вещь *существует*, к ней ничего не прибавляется. В противном случае существовало бы не то же самое, а больше того, что я мыслил в понятии, и я не мог бы сказать, что существует именно предмет моего понятия. Если я даже мыслю в какой-нибудь вещи все реальности, кроме одной, то

¹ Последняя – в статье К.Ф.Самохвалова, где автор не только призывает «не пренебрегать предикатами существования», но и делает весьма обязывающий вывод, что «при некоторых естественных предпосылках невозможно быть последовательным атеистом» [1, с. 276].

от того, что я скажу: *эта вещь, в которой чего-то не хватает, существует*, – недостаточная реальность не прибавляется: вещь существует именно с тем недостатком, с каким я ее мыслил; в противном случае существование принадлежало бы к чему-то иному, а не к тому, что я мыслил» [2, с. 362]. Замечание Канта выглядит и убедительным, и остроумным, поскольку от того, является ли существование предикатом, у него зависит сама возможность адекватного воспроизведения предметов действительности в мысли. Чуть раньше Кант замечает, что сотня действительных талеров не содержит в себе «ни на йоту больше», чем сто возможных талеров – в противном случае мы не смогли бы правильно вообразить действительные талеры [там же].

Идея Канта о том что существование не является предикатом, разделялась видными представителями философии логики – Б.Расселом [3, с. 103], Р.Карнапом [4, с. 83], У.Куайном [5, с. 224]. Уже это обстоятельство заставляет быть осторожным в ее критической оценке. Содержит ли аргументация Канта слабые места, уязвимые для критики? На первый взгляд, не совсем ясно, как согласовать кантовские рассуждения о сотне талеров с тем, что он хорошо понимал различие между мыслимым и реальным существованием, предостерегая от заключений о бытии вещи на основе ее возможности, т.е. на основе логически непротиворечивого представления ее в мысли [2, с. 361]. Ведь воображаемыми деньгами не расплатишься за покупки, и никому не придет в голову пообедать воображаемым бифштексом. Почему же у действительных талеров не больше свойств, чем у воображаемых? В чем в таком случае заключается различие действительного и возможного, если не в свойствах?

Однако более внимательное прочтение Канта позволяет обнаружить, что он имел в виду не сравнение мыслимых денег с реальными, а мыслимых денег в присутствии реальных и при их отсутствии. Ясно, что присутствие или отсутствие предмета мысли не должно влиять на ее содержание. «От связи с содержанием совокупного опыта, – говорил Кант, – понятие предмета несколько не обогащается» [2, с. 363]. Другими словами, реальность предмета, его существование означает не обогащение его понятия предикатом существования, а, говоря словами Канта, «выход за его (понятия) пределы» (там же). «Для предметов чувств, – продолжает он, – это достигается посредством связи с каким-нибудь из моих восприятий по эмпирическим законам» [там же]. То есть реальные предметы от воображаемых Кант отличает по тем особенностям, что свойства первых воспринимаются, тогда как свойства вторых – нет. В более общей форме, существование осознается нами либо

с помощью непосредственного восприятия свойств существующих предметов, либо с помощью выводов, связанных с восприятием [там же]. Так что реальные деньги воспринимаются покупателем и продавцом, служат платежным средством, а воображаемые остаются лишь мечтой бедняка.

Давайте придадим сказанному Кантом более современную форму. Предикация с помощью связки «есть» предполагает использование одного из ее значений: 1) выражения принадлежности элемента классу, как в суждении «Сократ (есть) мудр»; 2) выражения включения одного класса в другой, как в суждении «греки (суть) люди»; 3) выражения тождества, как в суждении «Сократ (есть) муж Ксантиппы» [6, с. 227]. Ограничимся, для простоты, значением (1). В этом случае предикация означает зачисление предмета мысли в какой-то разряд (класс), тем самым определяя его специфику. В частности, предикация «*a* (есть) красный», где *a* – предметная константа, зачисляет предмет *a* в класс красных предметов, и он уже не может принадлежать к зеленым. Но предикация «*a* (есть) существующий» действительно, в согласии с мнением Канта, ничего не добавляет к характеристике предмета; коль скоро предмет *a* назван, он тем самым уже отнесен к выбранному универсуму рассуждения. Поэтому, в отличие от предиката «красный», позволяющего специфицировать красные предметы, отличать их от предметов другого цвета, предикат существования такой специфицирующей функции в универсуме рассуждения не выполняет. Предикация существования оказывается, таким образом, фиктивной.

Не меняет сути дела использование в качестве субъекта суждения предметной переменной – ведь оно предполагает задание области ее изменения, т.е. опять-таки выбор универсума рассуждения. Так что выражение «*x* существует», в отличие от «*x* красный», не образует элементарной формулы логики предикатов, истинной для одних значений *x* и ложной для других. Вот почему в стандартной кванторной теории смысл утверждений существования выражается кванторами общности и существования, а среди логических и дескриптивных предикатных констант предиката существования в ней нет. В стандартной кванторной теории существовать – значит, говоря словами Куайна, «быть значением квантифицируемой переменной» [5, с. 224], т.е. выполнять (делать истинным) предложение формализованного языка. Но выполнить предложение – значит попасть в число объектов, составляющих объем дескриптивного предиката (или набора предикатов в случае сложного предложения кванторной теории). А это значит, что у Куайна критерий существования подразумевает под существованием предмета

наличие у него некоторых дескриптивных свойств². В том случае, если предмету нельзя приписать никаких известных свойств (предмет не попадает в объем никакого предиката), он не существует. Таким образом, существование или несуществование предмета выражается истинностью или ложностью соответствующего высказывания о нем. Истинность высказывания устанавливается либо наблюдением приписанных предмету свойств (их восприятием, сравним с приведенным выше рассуждением Канта), либо доказательством того, что предмет обладает интересующими нас свойствами. К первому случаю относится существование красных предметов, ко второму – существование простого числа больше ста.

Итак, логика как будто не нуждается ни в каких дополнительных средствах, кроме кванторов и переменных квантификации, для выражения контекстов существования. Однако не все так просто. Как различать существование «в уме», «в реальности», «в математике», «в эмпирических науках» и т.п.? К.Ф.Самохвалов предлагает ввести шесть предикатов существования, среди них предикаты «эмпирического» существования, «идеального» существования, «ментального» (а как его отличать от «идеального» или «воображаемого» существования? – Е.Л.), «реального» существования... [1, с. 277]. При желании подобных предикатов можно придумывать и побольше. Но вот его призыв «каждый такой предикат снабдить подходящими аксиомами» [там же], остается невыполненным – так, может, преждевременно «обогащать» подобными предикатами язык? Почему «логико-математическое» существование передается, по мнению Самохвалова, с помощью классических кванторов, а все остальные «виды» существования – с помощью специальных (впрочем, не определенных в статье) предикатов?

Статья Самохвалова порождает слишком много вопросов, чтобы все их обсуждать в данной работе. Ограничимся двумя замечаниями. Прежде всего, вводя «предикаты существования», он не замечает, что в действительности вводит сложные предикаты, включающие предикат тождества и дескриптивные характеристики предметов. Ведь «существовать эмпирически», «существовать идеально», «существовать реально» и т.п. значит, вполне в духе кантовской идеи, а также того, что говорилось Расселом, Карнапом, Куайном, существовать в виде чего-то более-менее определенного, так что все контексты существования, беспокоящие Самохвалова, выражаются высказываниями вида $(\exists x)(x =$

² Одним из них может быть и логический предикат, например, предикат тождества в случае предложений $(\forall x)(x = x)$ или $(\exists x)(x = y)$.

$(\iota y)P(y)$), где $(\iota y)P(y)$ - описание подходящего объекта умственных или чувственных и т.п. манипуляций (определенная дескрипция), а P - дескриптивный предикат, но не предикат существования.

Далее, еще Рассел, разрабатывая теорию определенных дескрипций, установил, что фразы о несуществующих объектах не являются указательными и не предполагают существования субъекта в высказываниях вида «золотая гора не существует», «круглый квадрат не существует». (Сюда же относится употребление слова «бог» атеистами, на которое Самохвалов пытается наложить запрет.) При логической перестройке предложения субъект в виде «пустого» имени исчезает. В результате оказывается, что, например, выражение «золотая гора не существует» означает: «не имеется объекта s такого, что выражение " x - золотое и имеет форму горы" истинно только тогда, когда x есть s , но не иначе» [7, с. 345]. Проще говоря, в суждении «золотая гора не существует» постулируется неосуществимая комбинация свойств, которой не обладает ни один предмет в выбранной нами предметной области географических объектов. Выражение «бог не существует», используемое атеистами, ничем в этом отношении не отличается и никаких особых трудностей не создает.

Остается еще одна важная проблема, обычно выпадающая из поля зрения исследователей. Если вернуться к кантовскому анализу онтологического аргумента, то напрашивается вывод, что все рассуждения о не существующем реально боге, как и о не существующих талерах и т.п. следует признать ложными. Вымысел не обогащает нас знанием мира, подобно тому как купца не обогащает приписывание к его кассовой наличности нескольких нулей [2, с. 364]. В этом же духе высказывался Рассел, который руководствовался «грубым чувством реальности», почему и объявил ложными все утверждения о «нынешнем короле Франции» [3, с. 103]. Однако мы постоянно делаем истинные высказывания о «не существующих» предметах. Кто усомнится в истинности высказывания «Пегас был пленен Беллерофонтом», если именно это происшествие случилось с крылатым конем в греческой мифологии? Кто усомнится в справедливости высказывания, что круглый квадрат не является треугольником? Кто усомнится в том, что Цезарь перешел Рубикон?

По нашему мнению, подобное возможно потому, что все суждения существования при их логической реконструкции обнаруживают скрытую модальную природу³. Ведь содержательно ясно,

³ В смысле эпистемических модальностей, с помощью которых технически наиболее удобно реконструировать перечисляемые далее контексты.

что рассуждать о существовании чего-либо можно только в том случае, если речь идет об *известном* или *предполагаемом* существовании. Поэтому любое высказывание, характеризующее предмет мысли, должно, вообще говоря, начинаться с указания источника знания (или мнения): «из чувственного опыта известно, что...» (когда говорим об объектах чувственного восприятия); «из физики известно, что...» (когда говорим об объектах физического мира); «из математики известно, что...» (когда говорим о математических объектах); «из моих фантазий мне ясно, что...» (если речь идет о моем воображаемом «мире»); «из мифологии известно, что...», и т.д. В таком случае понятия «существующего» и «несуществующего» объектов теряют свой абсолютный смысл, попадая в зависимость от модальных контекстов знаний и мнений. И если завтра кому-нибудь вздумается написать литературную фантазию о похождениях «нынешнего короля Франции», то в контексте подобного литературного произведения данный объект будет не менее «реальным», а ряд высказываний о нем – истинными, чем это касается объектов чувственного восприятия. Строго говоря, нет пределов тому, что человек способен логически корректно рассматривать в качестве существующего, поскольку мысленно могут быть построены любые желаемые объекты и заданы контексты, относительно которых высказывания о подобных объектах будут истинными или ложными. Так что суждение «арбуз – красный» будет истинным исходя из нашего восприятия, «существуют простые числа» – исходя из наших знаний о теории чисел, а «существует миллион рублей в моем кармане» – исходя из моих фантазий.

Разумеется, далеко не всегда возникает необходимость в явном указании контекстов существования. В случае «однородного» контекста, когда речь идет, скажем, исключительно о физическом мире или о математических объектах, или даже о мифологии, постоянное упоминание контекста только усложняет выражение мыслей. Открывая книгу по греческой мифологии, мы не нуждаемся в постоянном напоминании о том, что именно мы читаем. Но в случае «смешанного» контекста, если в одном ряду идут рассуждения, скажем, об астрономической Вселенной, перемежающиеся математическими выкладками и экскурсами в мифологию, явное указание контекста становится обязательным.

Таким образом, никакой нужды в многочисленных предикатах существования или хотя бы в единственном подобном предикате логика не испытывает, хотя, разумеется, такие предикаты могут вводиться в логические языки с помощью аксиом или явных определений. Вот только приведет ли подобная процедура к обогаще-

нию выразительных возможностей этих языков, или предикаты окажутся элиминируемыми? Во всяком случае, языки с эпистемическими модальностями в предикатах существования не нуждаются. Учет модальной природы контекстов существования позволяет сохранить кантовскую аргументацию по поводу понятия существования, одновременно усовершенствовав все то, что говорилось по поводу утверждений существования Расселом, Карнапом, Куайном и другими выдающимися философами логики двадцатого столетия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самохвалов К.Ф. Предикаты существования и «онтологический аргумент» // Логические исследования. М., 1999. Вып.6.
2. Кант И. Критика чистого разума. М., 1994.
3. Russel B. On denoting // Contemporary readings on logical theory. N.Y., 1967.
4. Карнап Р. Преодоление метафизики логическим анализом языка // Аналитическая философия: становление и развитие. М., 1998.
5. Quine W.V. Methods of logic. N.Y., 1961.
6. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М., 1966.
7. Рассел Б. История западной философии. М., 1993, Т.2.

КАНТОВСКАЯ МОДЕЛЬ БОГА¹

В данной статье представлена логико-философская реконструкция кантовской трансцендентальной модели Бога. Основное требуемое для реконструкции содержание излагается И. Кантом в его работе «Критика чистого разума» в разделах, посвященных идеалу чистого разума.

Итак, в этой работе Кант обращает внимание на два принципиальных обстоятельства.

Первое из них состоит в том, что понятие некоторой вещи (именно понятие, а не сама вещь) должно быть, с одной стороны, непротиворечивой совокупностью признаков, а с другой – оно полностью определённо только относительно своего содержания и неопределённо относительно других предикатов, не входящих в его содержание. Эта мысль выражается следующим образом: «Всякое *понятие* неопределенно в отношении того, что не содержится в нем самом, и подчинено основоположению об *определимости*, согласно которому из двух противоречащих друг другу предикатов понятию может быть присущ только один. Это основоположение опирается на закон противоречия и потому составляет чисто логический принцип, отвлекающийся от всякого содержания познания и имеющий в виду только логическую форму его» [1, 503].

Иначе говоря, в определении (дефиниции) понятия вещи

$$xP(x) =_{Df} xA(x),$$

где P – примитивный предикатор, $xP(x)$ – определяемое понятие, а $xA(x)$ – определяющее понятие, в котором выражение $A(x)$ представляет собой некоторый сложный предикат, этот предикат, в соответствии с общими требованиями логики, должен быть непротиворечивым, на что и обращает внимание И. Кант. И кроме того, все, что мы можем сказать о предмете по его понятию, полностью задается содержанием предиката $A(x)$. Все остальное, что не входит в содержание $A(x)$ или логически не следует из этого содержания, остается неопределенным относительно предмета, заданного этим понятием.

Второе обстоятельство касается самой вещи, а не его понятия. Кант обращает внимание на то, что вещь, чтобы иметь в принципе возможность быть вещью, чтобы мы могли рассматривать ее

¹ Работа написана при содействии РГНФ, грант № 98-03-04069.

именно как вещь, должна кроме требования непротиворечивости совокупности присущих ей свойств удовлетворять еще одному требованию – она должна быть определена либо положительно, либо отрицательно относительно любого предиката. Приведем в связи с этим цитату из И.Канта. «Но всякая *вещь*, если иметь в виду ее возможность, подчинена еще принципу *полного определения*, согласно которому из *всех возможных* предикатов *вещей*, поскольку они сопоставляются со своими противоположностями, ей должен быть присущ один. Это основоположение опирается не только на закон противоречия, так как оно... рассматривает всякую вещь еще в отношении ко *всей сфере возможного* как совокупности всех предикатов вещей вообще и предполага[ет] всю эту сферу как априорное условие... Этот принцип есть основоположение о синтезе всех предикатов, которые должны составлять полное понятие вещи» [1, 504].

В этом месте И. Кант в категорическом плане высказывает идею, которая была им впервые представлена в работе 1762 года «Единственное возможное основание для доказательства бытия Бога». Обсуждая вопрос, «можно ли сказать, что в существовании содержится нечто большее, чем в простой возможности», и полемизируя с Х. Вольфом и А. Баумгартеном, И. Кант отмечает, что положение, согласно которому возможная вещь неопределенна относительно многих предикатов, является неверным, «ибо правило исключения среднего (закон исключенного третьего – В.Б. и Т.Ю.) между двумя противоречащими противоположностями запрещает нам подобного рода неопределенность, и потому, например, человек без какого-то роста, не относящийся ни к какому времени, без возраста, места и т.п. вообще невозможен» [2, 406]. Иначе говоря, согласно И. Канту, вещь, не определенную положительно или отрицательно хотя бы относительно одного предиката, нельзя рассматривать как *возможную*, напротив, такая вещь является *невозможной*. Отметим, что подобная трактовка вещи рассматривает ее как объект трансцендентальный, так как любой предмет, данный нам в его проявлениях, никогда не представляет собой определенности во всех своих качествах и отношениях к другим вещам, т.е. наше реальное знание вещи всегда ограничено. Эта трансцендентальная вещь, будучи вынесена за пределы познания, т.е. в план трансцендентный, становится вещью в себе.

Следующий важный момент развиваемой Кантом концепции состоит в его трактовке *всей сферы возможного*. Эта сфера рассматривается И. Кантом как априорное условие возможности, а в силу вышесказанного, и существования вещи. Но эта сфера,

согласно И. Канту, не просто совокупность всех возможных предикатов, а и некая целостность (тотальность), «множество, рассматриваемое как единство» [1, 178], т.е. полностью завершенное множество, не допускающее присоединения к себе никакого нового элемента. Хорошим примером целокупного множества является класс доказуемых формул в классической логике высказываний, не допускающий присоединения к себе без противоречия никакой новой формулы.

Определение этой совокупности в отношении содержащихся в ней предикатов происходит путем «очищения» (термин И. Канта. – В.Б. и Т.Ю.) множества всех предикатов за счет исключения из него «множества предикатов, которые или уже даны посредством других предикатов как производные, или не могут стоять рядом с друг другом (в силу противоречия. – В.Б. и Т.Ю.)». Иначе говоря, сфера всех возможных предикатов – это целокупное множество, обладающее двумя свойствами: оно непротиворечиво в силу того, что содержит только позитивные предикаты, и все предикаты попарно не зависимы друг от друга. Пусть таким множеством предикатов будет множество:

$$\{P(-), Q(-), R(-), S(-)...\}.$$

(Для простоты дальнейшего изложения мы ограничимся только случаем одноместных предикатов.)

Функция, которую выполняет это множество в трансцендентальном (теоретическом, спекулятивном) познании, состоит в том, что каждая вещь «выводит свою собственную возможность (а при определенных условиях и свое существование. – В.Б. и Т.Ю.) из своего участия во всей сфере возможного. Следовательно, это основоположение относит всякую вещь к общему корреляту, а именно ко всей сфере возможного, которая, если бы она (т.е. материал для всех возможных предикатов) находилась в идее единичной вещи, обнаружила бы сродство всего возможного благодаря тождеству основания для полного определения его» [1, 504]. Последнее означает, что «для полного познания вещи необходимо познать все возможное и посредством него определить вещь утвердительно или отрицательно» [1, 505].

Так как позитивные предикаты, согласно Канту, выражают бытие, он называет эту сферу позитивных предикатов идеей всей реальности (вещностью), ибо только на ее основе «предметы суть нечто (вещи)». Итак, каждая вещь в обязательном порядке соотносится со сферой всего возможного в позитивном или негативном плане, и только будучи соотнесена таким образом с этой сферой она получает свою определенность. При этом «благодаря такому

обладанию всей реальностью понятие *вещи в себе* представляется как полностью определенное, а понятие некоторого *ens realissimum* (всереальной сущности) есть понятие единичной сущности, так как из всех возможных противоположных друг другу предикатов один, а именно тот, который безусловно присущ бытию, всегда имеется в ее определении» [1, 506].

Тогда, используя сферу всех реальных предикатов, понятие Бога как задающее некую единичную сущность можно было бы определить следующим образом:

$$\text{Бог} =_{\text{Df}} \iota x(P(x) \& Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots),$$

где « ι » – оператор определенной дескрипции, а $P(x) \& Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots$ – конъюнкция всех реальных предикатов. Это понятие единично в том смысле, что предикат $P(x) \& Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots$ – уникальный предикат, присущий (если он присущ) ровно одному объекту.

С другой стороны, по вышеуказанной целокупности (тотальности), могут быть построены все возможные описания состояний:

$$\begin{aligned} &P(-) \& Q(-) \& R(-) \& S(-) \& \dots \\ &\neg P(-) \& Q(-) \& R(-) \& S(-) \& \dots \\ &P(-) \& \neg Q(-) \& R(-) \& S(-) \& \dots \\ &\neg P(-) \& \neg Q(-) \& R(-) \& S(-) \& \dots \\ &P(-) \& Q(-) \& \neg R(-) \& S(-) \& \dots \\ &\neg P(-) \& Q(-) \& \neg R(-) \& S(-) \& \dots \\ &P(-) \& \neg Q(-) \& \neg R(-) \& S(-) \& \dots \\ &\neg P(-) \& \neg Q(-) \& \neg R(-) \& S(-) \& \dots \\ &P(-) \& Q(-) \& R(-) \& \neg S(-) \& \dots \\ &\neg P(-) \& Q(-) \& R(-) \& \neg S(-) \& \dots \\ &P(-) \& \neg Q(-) \& R(-) \& \neg S(-) \& \dots \\ &\neg P(-) \& \neg Q(-) \& R(-) \& \neg S(-) \& \dots \text{ и т.д.,} \end{aligned}$$

а по каждому из них – понятие некоторой вещи. При этом по самому первому описанию состояний строится указанным выше способом понятие Бога как всереальной сущности, так как в это описание состояний предикаты входят только положительно. По всем же остальным (на самом деле некоторым) описаниям состояний могут быть построены только понятия ограниченной вещи, так как они наряду с положительными вхождениями предикатов будут содержать и их отрицательные вхождения. Знак отрицания здесь играет роль ограничителя тотальности. Напомним, согласно теории определения, определить некоторую вещь – зна-

чит указать ее границы, но чтобы были указаны границы, необходимо предварительно уже иметь некое *безграничное все*.

Кант пишет: «В основе полного определения, необходимо присущего всему, что существует, лежит трансцендентальный *идеал*, составляющий высшее и полное материальное условие возможности всего существующего, к которому должна сводиться всякая мысль о предметах вообще касательно их содержания» [1, 506-507], так как «полное определение всякой вещи основывается на ограничении этой *совокупности* реальности, причем некоторая доля ее приписывается вещи, а все остальное исключается из нее» [1, 507].

Согласно Канту, «идеал есть для разума прообраз (*prototypon*) всех вещей, которые как несовершенные копии (*естура*) заимствуют из него материал для своей возможности, и более или менее приближаясь к нему, все же всегда бесконечно далеки от того, чтобы сравняться с ним» [1, 508]. Таким образом, вещи – это лишь бледные тени (Платон) подлинной реальности. Причем отметим, что такая характеристика вещей, с точки зрения предложенной логико-философской конструкции, является совершенно точной и вряд ли может вызвать возражения.

Остановимся теперь на вопросе о тех предикатах, которые при таком подходе мы вынуждены атрибутировать тому объекту, который задается указанным понятием Бога.

Во-первых, не совсем понятно, что следовало бы назвать термином «Бог». Является ли им тот объект, который задается описательным именем

$$\iota x(P(x) \& Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots),$$

или таковым следует считать саму тотальность

$$\{P(-), Q(-), R(-), S(-) \dots\}?$$

В пользу и того и другого решения можно выдвинуть целый ряд аргументов.

Так, первый вариант, к которому склоняется Кант, оправдывается тем обстоятельством, что обычно под Богом имеют в виду, хотя и духовную, но некоторую субстанцию, т.е. индивид, в том смысле последнего термина, как он трактуется в первопорядковой логике. Более того, это не просто индивид, но и персона, личность. С этой точки зрения ясно, что множество (тотальность) $\{P(-), Q(-), R(-), S(-) \dots\}$ не является ни индивидом, ни личностью.

С другой стороны, объект, задаваемый описательным именем $\iota x(P(x) \& Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots)$, не может быть ни материальным, ни идеальным – в смысле, например, идеальных объектов математики. Действительно, так как предикаты, входящие в совокупность

$P(-)$, $Q(-)$, $R(-)$, $S(-)$ и т.д., являются попарно независимыми, мы не можем считать предикат $P(x) \& Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots$ самопротиворечивым, однако ни один материальный и даже идеальный объект не может обладать одновременно всеми реальными предикатами, в силу чего этот предмет должен быть содержательно пустым, что прямо соответствует материалистической трактовке идеи Бога.

Правда, данное обстоятельство – содержательная пустота понятия Бога, задаваемая условием $\iota x(P(x) \& Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots)$, с определенной точки зрения является не недостатком, а достоинством. Ведь Бог, согласно общепринятому мнению, находится вне мира как материальных, так и идеальных предметов типа предметов математики.

И тем не менее у второй возможности, а именно, когда под Богом понимается сама тотальность $\{P(-), Q(-), R(-), S(-) \dots\}$, имеются очень серьезные преимущества. Во-первых, этот объект является исходным, первичным, в то время как понятие, определяемое описательным именем $\iota x(P(x) \& Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots)$, является вторичным, производным. Иначе говоря, ему ничто не предшествует, а Бог как объект должен быть, согласно всем теологическим концепциям, именно таким. Во-вторых, этот объект есть не что иное, как аристотелевское понятие Бога как *формы форм*. Действительно, $\{P(-), Q(-), R(-), S(-) \dots\}$ логически предшествует, а тем самым и логически порождает все возможные конкретные формы предметов:

$$\begin{aligned} &P(x) \& Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots \\ &\neg P(x) \& Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots \\ &P(x) \& \neg Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots \\ &\neg P(x) \& \neg Q(x) \& R(x) \& S(x) \& \dots \\ &P(x) \& Q(x) \& \neg R(x) \& S(x) \& \dots \\ &\neg P(x) \& Q(x) \& \neg R(x) \& S(x) \& \dots \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Так как указанные выражения, согласно современной логике, действительно являются формами, а в нашей новой трактовке описаний состояний – формами предметов, множество (тотальность) $\{P(-), Q(-), R(-), S(-) \dots\}$ представляет собой форму форм, так как именно по этой форме создаются формы конкретных предметов.

Независимо от того, как мы будем далее трактовать термин «Бог» – в первом смысле или во втором, – этому объекту могут быть приписаны специфические атрибуты. На некоторые из них указывает И. Кант. К их числу относятся следующие.

Всереальнейшая сущность (*ens realissimum*). Исходя из вышесказанного, доказательство этого положения очевидно. Отсюда

вытекает так же, что это *наисовершеннейшая* сущность, так как она содержит только реальность, бытие, и не содержит ничего из небытия.

Первосущность (ens originarium). Этот тезис должен быть релятивизирован относительно только что сделанных замечаний по поводу двух возможных пониманий идеи Бога.

Высшая сущность (ens summum), т.е. *высшая реальность*. Действительно, все остальные реальности, т.е. вещи, ниже данной реальности, так как содержат в себе и элементы небытия.

Сущность всех сущностей (ens entium), поскольку все подчинено ей как обусловленное. С этой точки зрения она может трактоваться как *первопричина* всех вещей. Все остальные вещи производны от нее.

Простота первосущности, так как ее нельзя мыслить состоящей из множества производных сущностей. Кант по этому поводу пишет: «Выведение всякой другой возможности из этой первосущности, строго говоря, нельзя представлять себе... как деление ее; ведь в таком случае первосущность рассматривалась бы как простой агрегат производных сущностей, что, согласно предыдущему, невозможно... Скорее высшая реальность составляет *основание* возможности всех вещей, а не их *совокупность*, и многообразие вещей зиждется на ограничении не самой первосущности, а полноты ее следствий (неоплатоник сказал бы эманаций, – В.Б. и Т.Ю.), к числу которых должна относиться также вся наша чувственность вместе со всей реальностью в явлении, так как она не может входить в идею высшей сущности как составная часть» [1, 508-509].

Единая сущность, так как нет ничего равного ей, а сама она представляет собой целокупность, тотальность.

Вседовлеющая сущность, так как все остальные сущности являются ее производными.

Вечная сущность, так как ее существование не определено никакими временными рамками. Она содержит в себе все предметы со всеми их модификациями, оставаясь сама по себе не подверженной никаким модификациям. При логическом порождении обусловленного она сама остается неизменной.

Абсолютная сущность, так как содержит всю совокупность условий всякого бытия. Сама же является *безусловной*.

Всемогущая сущность, так как является причиной, основанием порождения всего космоса, всего вечно бытия. В мире нет ничего, что так или иначе не было бы соотнесено с нею.

Всезнающая сущность, так как в ней заключена вся возможная информация о мире.

Интересно обратить внимание и на следующее обстоятельство. Если рассмотреть одну из форм, порождаемую тотальностью, а именно форму

$$\neg P(x) \& \neg Q(x) \& \neg R(x) \& \neg S(x) \& \dots,$$

в которой каждый реальный предикат взят с отрицанием, то объект, который удовлетворял бы этому условию, не обладал бы ни одним свойством. Из истории философии нам известен такой объект. Это аристотелевская *первоматерия*. Последняя никак не структурирована, не обладает ни одним реальным свойством, а есть чистая возможность принять в себя некоторую форму. Если теперь мы определим эту первоматерию понятием

$$\text{Первоматерия} =_{\text{Df}} x(\neg P(x) \& \neg Q(x) \& \neg R(x) \& \neg S(x) \& \dots),$$

то окажется, что идея первоматерии уже содержится в тотальности и является производной от нее.

Разоблачая все эти ухищрения ума, И. Кант обращает внимание на два момента.

Во-первых, то обстоятельство, что разум положил в основу полного определения вещей трансцендентальную идею всей реальности, вовсе не предполагает, «чтобы вся эта реальность была дана объективно и сама составляла вещь. Последнее предположение есть чистый вымысел, посредством которого мы охватываем и реализуем многообразное [содержание] нашей идеи в идеале как особой сущности, между тем как мы не имеем никакого права на это и не имеем оснований допускать даже возможность такой гипотезы» [1, 509]. Мы полностью присоединяемся к этой точке зрения И. Канта, о чем и заявили выше, когда истолковали так введенное понятие Бога пустым по объему.

Во-вторых, И. Кант обращает внимание на то, что источником рассмотренной выше трансцендентальной идеи сферы реальных предикатов (тотальности) является незаконный, по его мнению, перевод опытно данной нам совокупности эмпирической реальности, т.е. эмпирически установленного множества предикатов, в трансцендентальную область. В частности, он указывает на то, что «общее понятие реальности вообще не может быть a priori подразделено нами, так как без опыта мы не знаем определенных видов реальности, которые содержались бы в родовом ее понятии» [1, 507].

Это, конечно, здравая мысль, но мысль не выходящая за рамки эмпиризма, полагающего, что всякое ухищрение ума подозрительно уже потому, что оно выходит за жесткие рамки опыта. Мы же со своей стороны полагаем вполне оправданной, философ-

ски полезной и плодотворной трансцендентальную идею тотальности. При этом вовсе не важно, что многие реальные предикаты нам сегодня не известны, так как эмпирически не установлены. Плодотворность этой идеи определяется тем простым обстоятельством, что те цели и задачи, которые ею решаются, вовсе и не предполагают в качестве обязательного условия конкретного знания всей этой совокупности. Нам достаточно лишь спекулятивно предположить существование такой совокупности, и такое предположение вовсе не является вздорным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кант И.* Соч.: В 6 т. М., 1964. Т. 3.
2. *Кант И.* Соч.: В 6 т. М., 1963. Т. 1.

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ	5
EDITORS' NOTE	6
Карпенко А.С. Логика на рубеже тысячелетий	7
Нагорный Н.М. Реализуемость семантика раннего периода марковского конструктивизма (история и проблемы)	61
Непейвода Н.Н. О прикладных теориях с суперинтуиционистскими логиками	72
Попов В.М. Погружение импликативного фрагмента классической логики в импликативный фрагмент интуиционистской	80
Чагров А.В. Два замечания о строго импликативных формулах в модальной логике S3	84
Васюков В.Л. Импликативные логики, дедуктивные импликативные сис- темы и экспоненциальные мультикатегории	90
Одинцов С.П. О негативно эквивалентных расширениях минимальной логики	119
Попов В.М. Секвенциальная аксиоматизация квазимиимальной логики	128
Mints G., Soloviev S. Classical multiplicative linear logic	132
Эсакиа Л.Л. Синописис теории фронтонов	137
Бежанишвили М.Н. Интерполяционная теорема для исчислений час- тичных предикатов Хао Вана	148
Горбунов К.Ю., Любецкий В.А. Об алгоритме выявления регуляторного сигнала в наборе последовательностей	159
Анисов А.М. Аксиоматическое исчисление неопределенности	164
Павлов С.А. Условия применимости классической логики в рамках языков неклассических логик	174
Быстров П.И. Аналитические таблицы для позитивных логик, свободных от "парадоксов" материальной импликации	181
Микиртумов И.Б. Семантика анафоры как оператора доопределения	192
Сидоренко Е.А. Универсальная теорема дедукции	199
Чагров А.В. Об эффективных теоремах о дедукции в нормальных модальных логиках	209
Смирнова Е.Д. Логика в философии и философия логики	217
Samokhvalov K.F. Logic and the relativity principle	232
Мчедlishvili Л.И. К семантике аподиктической силлогистики Аристо- теля	240
Маркин В.И. Погружение воображаемой логики Н.А.Васильева в кван- торную трехзначную логику	252
Костюк Т.П. Логика N измерений Н.А.Васильева: современная рекон- струкция	261
Ивлев В.Ю., Ивлев Ю.В. Проблема построения теории фактических модальностей	269
Караваев Э.Ф. О временной квалификации нормативных высказываний	277
Novosyolov M.M. Sur les indiscernabilites comme structures algebriques	285
Федоров Б.И. Б.Больцано как предшественник конструктивизма	291
Ледников Е.Е. О понятии и суждениях существования	301
Бочаров В.А., Юраскина Т.И. Кантовская модель Бога	308

CONTENTS

EDITORS' NOTE (In Russian)	5
EDITORS' NOTE	6
<i>Karpenko A.S.</i> Logic at the border-line of millennium	7
<i>Nagorny N.M.</i> Early Markov's constructivism realizability semantics (sums and issues)	61
<i>Nepeivoda N.N.</i> On applied theories with superintuitionistic logics.....	72
<i>Popov V.M.</i> An embedding of implicative fragment of classical logic into implicative one of intuitionistic logic	80
<i>Chagrov A.V.</i> Two remarks concerning strict implicative formulas in modal logic S3	84
<i>Vasyukov V.L.</i> Implicative logics, Lambek's systems and exponential multi- categories	90
<i>Odintsov S.P.</i> On negative equivalent extensions of minimal logic.....	119
<i>Popov V.M.</i> Sequential axiomatization of quasiminimal logic	128
<i>Mints G., Soloviev S.</i> Classical multiplicative linear logic	132
<i>Esakia L.L.</i> Synopsis of fronton theory	137
<i>Bezhanishvili M.N.</i> Interpolation theorem for Hao Wang's partial predicate calculus	148
<i>Gorbunov K.Yu., Lubetsky V.A.</i> On algorithm of eduction of a regulator signal in the packet of consequences	159
<i>Anisov A.M.</i> An axiomatic calculus of uncertainty	164
<i>Pavlov S.A.</i> Conditions of an applicability of classical logic in the framework of languages of non-classical logics	174
<i>Bystrov P.I.</i> Analytical tableau for positive logic free from "paradoxes" of material implication	181
<i>Mikirtumov I.B.</i> Semantics of anaphora as an operator of accomplishing definition	192
<i>Sidorenko E.A.</i> Universal deduction theorem	199
<i>Chagrov A.V.</i> On effective deduction theorems in normal modal logics	209
<i>Smirnova E.D.</i> Logics in philosophy and philosophy of logics	217
<i>Samokhvalov K.F.</i> Logic and the relativity principle	232
<i>Mchedlishvili L.I.</i> Concerning the semantics of Aristotle's apodictic syllogistic ...	240
<i>Markin V.I.</i> An embedding of N.A.Vasiliev's imaginary logic into quantified three-valued logic	252
<i>Kostyuk T.P.</i> N.A.Vasiliev's N-dimensional logic: modern reconstruction	261
<i>Ivlev V.Yu., Ivlev Yu.V.</i> A problem of building up the theory of factual modalities	269
<i>Karavayev E.F.</i> On temporal qualification of normative propositions	277
<i>Novosyolov M.M.</i> Sur les indiscernabilites comme structures algebriques	285
<i>Fyodorov B.I.</i> B.Bolzano as the forerunner of constructivism	291
<i>Lednikov E.E.</i> On existential concepts and judgements	301
<i>Bocharov V.A., Yuraskina T.I.</i> Kant's model of God	308

Научное издание

Логические исследования
Вып. 7

Утверждено к печати
Ученым советом
института философии РАН

Зав. редакцией *Р.С. Головина*
Редактор издательства *Е.А. Жукова*
Художественный редактор *Г.М. Коровина*
Компьютерная верстка
С.А. Павлов

Компьютерный набор выполнен
в Институте философии РАН

ЛР № 020297 от 23.06.1997

Подписано к печати 04.08.2000. Формат 60×90 ¹/₁₆
Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Усл.печ.л. 20,0. Усл.кр.-отг. 20,3. Уч.-изд.л. 20,8
Тираж 370 экз. Тип. зак. 3415

Издательство "Наука"
117864 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

Санкт-Петербургская типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12