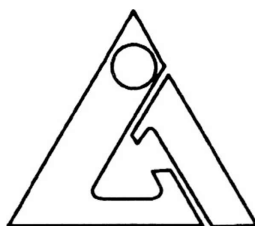


РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ



LOGICAL INVESTIGATIONS

Vol. 8



MOSCOW «NAUKA» 2001

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 8



МОСКВА «НАУКА» 2001

УДК 16
ББК 87.4
Л 69

Редколлегия:

Карпенко А.С. (отв. редактор)
Анисов А.М., Арутюнова Н.Д., Бежанишвили М.Н.,
Быстров П.И., Васюков В.Л., Войшвилло Е.К., Ивлев Ю.В.,
Маркин В.И., Непейвода Н.Н., Павлов С.А. (уч. секретарь),
Смирнова Е.Д., Успенский В.А., Финн В.К.

Editor-in-Chief:

Alexander S. Karpenko,
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences, Moscow

Логические исследования. Вып. 8. – М.: Наука, 2001. – 320 с.
ISBN 5-02-013115-6

В восьмом выпуске "Логических исследований" опубликованы статьи, в которых изложены новые результаты, полученные в различных областях современной неклассической логики, а также статьи, подготовленные по докладам, прочитанным на секциях "Символическая логика" и "Философская логика" Международной конференции "Третьи Смирновские чтения" (Москва, май 2001).

Для логиков, философов, математиков.

ТП-2001-II-5

Logical Investigations. Vol. 8. – М.: Nauka, 2001. – 320 p.
ISBN 5-02-013115-6

The 8th issue of "Logical Investigations" contains the papers in which are discussed important new results obtained in different fields of modern non-classical logic and some interesting papers prepared on the bases of reports presented at sections "Symbolic Logic" and "Philosophical Logic" of the 3-d International Conference "Smirnov's Readings" (Moscow, May 2001) and.

For logicians, philosophers and mathematicians.

ISBN 5-02-013115-6

© Коллектив авторов, 2001
© Российская академия наук
и издательство "Наука",
серия "Логические исследования"
(разработка, оформление),
1993 (год основания), 2001

А.М.Анисов

СВОЙСТВА ВРЕМЕНИ*

Abstract. *After having read the majority of publications on the problem of time, which are numerous, we acquire a grievous feeling that it is being mis-treated. The issues discussed are often other than time itself but quite different phenomena although related to it in certain ways. Here we intend to focus discussion right on the phenomenon of time as it is without substituting it by other problems no matter how important they are. Eight fundamental properties of time are being considered in this paper.*

Постановка проблемы

По прочтении подавляющего большинства из многочисленных статей и книг, посвященных проблеме времени, возникает неприятное ощущение, что нас ввели в заблуждение. Речь зачастую ведется не о времени как таковом, а о явлениях иного рода, хотя и имеющих какое-то отношение к феномену темпоральности. Пишут «время», а в действительности говорят о периодических процессах, часах, возрасте, математических структурах (которые без должных оснований объявляют моделями времени), высказываниях о времени, процедурах измерения времени и т.д.¹. Мы намерены здесь обсуждать именно проблему времени саму по себе, не подменяя ее вопросами хотя и важными, но другими.

Рамки работы заставляют принять следующее утверждение без дальнейшего обсуждения. Время и пространство будем считать феноменами *объективными*. Иными словами, время и пространство полагаются существующими и в отсутствие познающего субъекта. Тем самым за скобками остается Кант, экзистенциализм, вопросы психологии времени и многое что еще. Проблема пространства не ставится. Достаточно условиться, что мы способны отличать вещи, находящиеся в объективном пространстве, от объектов вне пространственных, таких, например, как числа. Можно получить ответ на вопрос о том, в каком месте находится человек или где проходит грозовой фронт, но не на вопрос, где находится число четыре.

* Статья подготовлена при поддержке РГНФ, проект № 01-03-00300.

¹ Подробнее см.: Анисов А.М. Время и компьютер. Негеометрический образ времени. М., 1991.

Первое свойство

Теперь по существу. **Первое и простейшее свойство времени** – это его способность *упорядочивать*. Мир без времени – это первозданный хаос, в котором нет ни «раньше», ни «позже». Но как только оказывается, что некоторый x случился раньше (или позже), чем некоторый y , появляется время. В дальнейшем, не теряя общности, будем использовать только отношение «раньше, чем», поскольку для любых x и y x раньше y тогда и только тогда, когда y позже, чем x . Что означает термин «упорядочивать»? В логико-математической литературе *строгим частичным порядком* называют антирефлексивное и транзитивное отношение.

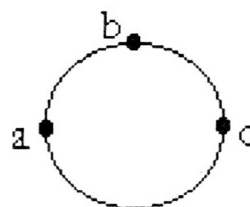
Если необходимо учитывать, что x может происходить одновременно с y , то в качестве основного темпорального отношения можно взять отношение « x раньше, чем y , или одновременно с y ». В этом случае отношение становится рефлексивным, транзитивным и антисимметричным – тоже частичный порядок, но *нестрогий*. Какое отношение порядка (строгое или не строгое) взять за основу – дело вкуса. Я предпочитаю строгое отношение порядка, дополненное отдельным отношением одновременности, которое удовлетворяет свойствам рефлексивности, транзитивности и симметричности, т.е. является отношением эквивалентности.

Но при любом подходе частичный порядок это все же именно порядок, в отличие от многих структурированных образований, порядка не образующих. А время упорядочивает – вот что важно. Поэтому если какую-то структуру призывают считать моделирующей темпоральное отношение «раньше, чем», то она обязана быть структурой по крайней мере частичного порядка. Возможно, кому-то уже стало скучно: зачем так подробно о таких простых вещах? Затем, что, к сожалению, люди склонны не замечать даже очевидных следствий из принятых положений. Весьма широкое распространение получила концепция так называемого мифологического времени, характеристическим свойством которого объявлена цикличность². Мифологические события не просто следуют одно за другим, а повторяются вновь и вновь. В некоторых мифах творение мира происходит неоднократно. При этом буквально воспроизводится последовательность мировых событий, вплоть до очередной гибели мира. М.Элиаде различает в связи с этим бесконечное циклическое время (ряд событий повторяется бесконечное число раз) и ограниченное циклическое время (число повторов конечно; например, золотой век может возвратиться, но лишь

² См., напр.: Элиаде М. Космос и история. М., 1987.

однажды)³. Парадоксальным образом, циклическое время, помимо мифов, встречается в современных физических теориях. Так, в 1949 г. К.Гёдель получил космологическую модель, в которой некоторые временноподобные линии оказались замкнутыми⁴.

Все это очень увлекательно, однако цена принятия концепции циклического времени – отказ от отношения «раньше, чем» как порядкового отношения. Примирить идеи цикла и порядка логически невозможно. Либо время как цикл, либо время как порядок, но не то и другое вместе. Если время изобразить при помощи замкнутой линии, как на рисунке, то сказать, какое из событий *a*, *b*, *c* произошло раньше, нельзя в принципе. Если о событиях известно лишь то, что одно произошло в 3 часа, другое в 9, а третье в 12 часов, но неизвестно, произошли ли они в один и тот же день, ничего о временной последовательности этих событий сказать невозможно. Проблема в том, можно ли вообще использовать по сути пространственную структуру – линию – для моделирования времени. На наш взгляд, это можно делать только тогда, когда точки линии упорядочены (допустим, как на отрезке или интервале прямой). Но точки окружности уже не упорядочены, так как для них не выполняются приведенные аксиомы частичного порядка. Упомянутый результат К.Гёделя приходится оценивать как математический артефакт, открытый в геометрической теории, без должных оснований отождествляющей линию и время.



Тут мы сталкиваемся с достаточно распространенной ситуацией. Сначала предлагается плохо пригнанная к реальности математическая теория, использующая, однако, устоявшиеся термины в несвойственном им значении, затем моря чернил проливаются по поводу мнимой глубины этой теории, которая, дескать заставляет нас постичь всю парадоксальность привычных феноменов. Все это немедленно исчезает, как только осознаешь, что разгадка заключается именно в нетрадиционном приписывании значений терминам.

Сказанное касается не только математических теорий, но и концепций, ограничивающихся использованием естественного языка. Если имеются претензии на научность, пользоваться им надо с особой осторожностью. Даже если исследуешь мифы, не нужно наследовать мифологический стиль. Иначе, как в рассмат-

³ Там же. С. 107.

⁴ Gödel K. An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Equations of Gravitation // Reviews of Modern Physics. 1949, Vol. XXI.

риваемом случае, претендующая на научность концепция мифологического циклического времени сама превращается в миф. Если изобразить бесконечное циклическое «время» и его ограниченный аналог рядами $\dots, a, b, c, a, b, c, \dots$ и a, b, c, a, b, c соответственно, то наглядно видно, что эти циклические цепочки событий не являются упорядоченными и потому не могут быть моделями времени (между прочим, ряд a, b, c уже упорядочен!).

Итак, *время либо упорядочивает, либо вообще не существует*. Мы без колебаний выбираем первую альтернативу, хорошо согласующуюся не только с нашими интуитивными представлениями о времени, но и с анализом времени в многовековой философской традиции, поколебать которую модные физические теории не в состоянии по той простой причине, что повествуют они вовсе не о времени, как уже было сказано в самом начале.

Второе свойство

Но что упорядочивает время? Напрашивается ответ – события. А что такое событие? Будет ли событием, например, вспышка света? В физике это и будет примером события. Обозначим его буквой a . Однако вспышки света происходят многократно, так что появляется запрещенный ряд вида $\dots, a, a, a, a, \dots$. Чтобы спасти ситуацию, в математизированных науках упорядочивают не события как таковые, а сами моменты времени. В качестве моментов обычно берется множество действительных чисел, а естественный порядок «меньше, чем» на числах отождествляется с отношением «раньше, чем». Таким образом, если вспышка света a произошла в момент $t = 2$ и вспышка a в момент $t' = 4$, то первая в перечне вспышка произошла раньше, чем вторая, поскольку $2 < 4$. Такой подход допустим, но он накладывает незримые границы на возможности адекватного постижения времени.

Другой подход основан на упорядочении самих событий. Реализовать его гораздо сложнее. Что раньше, рождение или смерть? – Рождение, напрашивается ответ. Однако смерть Льва Толстого произошла раньше, чем рождение читающего сейчас эти строки. Сами по себе акты рождения и смерти ничем в смысле возможности их упорядочить не отличаются от вспышек света и падений тел. Но вот если придать событиям уникальные, индивидуализированные черты... Тогда временной порядок вроде бы возникает сам собой: рождение Ю. Цезаря, произошло раньше, чем рождение Льва Толстого, а рождение Льва Толстого раньше, чем его смерть, – подобные цепочки можно строить в неограниченном количестве. С этой точки зрения и физические события тоже уникальны:

вспышка света при взрыве первой атомной бомбы, произошла раньше, чем вспышка от взрыва первой водородной бомбы и т.п. Все же приходится признать, что легкость выстраивания во времени уникальных событий лишь кажущаяся. Мы имеем в виду не те трудности, с которыми сталкиваются историки, пытающиеся датировать события. Перед нами встает более фундаментальный логический вопрос: какие события следует называть уникальными, индивидуализированными? На самом деле перед нами одна из формулировок старой проблемы принципов индивидуации, в поисках которых немало было сломано копий еще схоластами⁵.

Ответ снова как бы лежит на поверхности. Явление уникально, если оно отличается от всех других явлений, за исключением себя самого. Просто и ясно (если предположить, что нам известно, что такое равенство). Проблема в том, что данному определению удовлетворяют и абстрактные объекты, те же числа. Число 4 уникально, неповторимо и индивидуально в ряду прочих чисел, ибо оно от всех них отличается. Что же тогда, правомерно высказывания типа «–4 раньше, чем 4»? Нежелательность подобных предложений очевидна. Числовая индивидуальность, по преобладающим современным представлениям, носит вневременной характер⁶. Но если мы порекомендуем в качестве событий брать только такие, которые вступают между собой в темпоральные отношения, то налицо порочный круг: чтобы образовывать темпоральные цепочки, мы требуем уникальности их звеньев, а чтобы выбрать нужные звенья, предполагаем наличие этих самых цепочек. Разорвать порочный круг позволит обращение к реальному пространству, обращаться с которым, по выше введенному допущению, мы умеем. Исправим первоначальное определение. Назовем явление *уникальным* или *индивидуализированным* (обладающим индивидуальностью), если оно, во-первых, отличается от всех других явлений, за исключением себя самого, и, во-вторых, располагается в объективном пространстве. Последнее означает, в частности, что такие явления в принципе могут быть наблюдаемы (в отличие от любых абстракций, которые мы отныне лишаем уникальности и неповторимости в нашем смысле).

Однако не каждое уникальное явление следует называть событием. *Событие* – это такое пространственно локализованное явление, в котором нет «раньше» и «позже», иными словами, которое не имеет протяженности во времени. Поэтому необходимо разли-

⁵ Подробности и современный взгляд на проблему см. в кн.: Рассел Б. Человеческое познание. Киев, 1997.

⁶ Не все с этим согласны. Интуиционисты, например.

чать события и последовательности событий – *процессы*. Гибкость естественного языка позволяет принимать предложения типа «Событие *a* началось тогда-то и закончилось тогда-то». Но лучше сказать «Процесс *a* начался тогда-то и закончился тогда-то». Ведь если в явлении мы различаем его начало во времени и его конец, то речь идет как минимум о двух событиях – событиях начала и конца этого явления. Такое явление будет не событием, а процессом. Другой вопрос, что не надо абсолютизировать понятие события. То, что в одном отношении выступает как событие, в другом отношении может оказаться процессом. Все зависит от принятого масштаба рассмотрения. Выстрел «Авроры» можно считать событием, а можно и процессом (воспламенение пороха, расширение пороховых газов, возникновение звуковой волны и т.д.). С логической точки зрения все же какие-то события должны оказаться далее не делимыми в темпоральном отношении сущностями, но что конкретно берется в качестве таких сущностей – диктуется не логикой, а особенностями изучаемой предметной области. Физические процессы могут занимать мельчайшие доли секунды, в гражданской истории процессы потребуют, как минимум, минут, в геологических процессах счет идет на годы... Отсюда и событиями в каждом случае окажутся явления различного типа.

Теперь все готово для указания на **второе фундаментальное свойство времени: в отношении «раньше, чем» вступают уникальные индивидуализированные события**. Последовательности таких событий также уникальны и индивидуализированы и образуют *историю* соответствующей области реальности.

Здесь мы сталкиваемся с первым важным *следствием* второго свойства времени – *время и история неразрывно связаны*. Если есть время, значит существуют и индивидуализированные события и последовательности таких событий, т.е. история. И наоборот, история разворачивается в последовательности уникальных событий, а последние упорядочены отношением «раньше, чем» – появляется время. Каждый понимает, что невозможна история, протекающая вне времени, но далеко не все осознают, что употребление термина «время» в контекстах, исключающих исторический взгляд на действительность, ведет к подмене: традиционное, устоявшееся значение этого термина заменяется другим. Не лучше ли взять другое слово? Скажут в ответ -- а что это за устоявшееся значение, в чем оно состоит? Быть может, напротив, никакого устойчивого понятия времени не существовало и не существует (разве идущая уже многие века полемика по проблеме времени не тому свидетельство?), и потому каждый волен вкладывать в это понятие какое угодно содержание. – Разумеется, дело не в словах,

и любой термин можно использовать как заблагорассудится. Термин может быть один, а понятия разные. Так вот, коль скоро речь идет не о слове, а о понятии, то у понятия времени все же есть, по крайней мере, три устойчивых аспекта (в этой работе они появляются под номерами 1, 3 и 4 свойств времени), с которыми были согласны не только практически все мыслители прошлого⁷, но и не обремененные научными проблемами люди, в том числе наши современники. Об одном из этих аспектов уже шла речь: события происходят или раньше, или позже, или одновременно с другими событиями.

Третье свойство

Следующий неизменный аспект понятия времени связан с разделением событий на *прошлые, настоящие и будущие*. Подчеркнем, что ни в одной физической теории, претендующей на статус теории времени, нет ни прошлого, ни настоящего, ни будущего. Сказанное требует пояснений. Традиционно всегда считалось и считается, что существуют только события настоящего. События прошлого по-настоящему уже не существуют, а события будущего еще не существуют. Формулировали эту мысль по-разному, но суть была одна. Как писал Т.Гоббс, «...только настоящее имеет бытие в природе, прошедшее имеет бытие лишь в памяти, а будущее не имеет никакого бытия»⁸. Все же налицо факт достоверных рассказов о прошлом и высказываний, правильно предсказывающих будущее, которые не были бы таковыми, если бы не основывались на реальной почве. На эту сторону проблемы указывает Блаженный Августин: «И в самом деле, как могли, например, пророки, которые предсказывали будущее, видеть это будущее, если бы оно не существовало? Ведь того, что не существует, и видеть нельзя. И опять, те, которые рассказывают нам о прошедшем, не могли бы рассказать о нем, как о действительно существовавшем, если бы оно в душе их не представлялось таковым; как же оно могло бы предназначаться им, если бы вовсе не существовало? Итак, надобно полагать, что и прошедшее, и будущее время также существуют, хотя непостижимым для нас образом»⁹.

Получается, что на вопрос, существуют ли прошлое и будущее в объективной реальности, мы готовы дать как отрицательный, так

⁷ Исключения были. Элеаты, например. Но это именно исключения, поражающие своей парадоксальностью.

⁸ Гоббс Т. Левиафан, или материя, форма и власть государства церковного и гражданского. // Избр. произведения: В 2 т. М., 1964. Т. 2. С. 62.

⁹ Исповедь Блаженного Августина. М., 1914. С. 320-321.

и утвердительный ответ, что противоречиво. Выход из противоречия заключается в разделении бытия на области, существующие в разных смыслах. Прошедшее и будущее объективно существуют, наличествуют в бытии, но не так, как настоящее. Однако эти смыслы оставались непостижимыми, что приводило исследователей к субъективизации времени. Гоббс, говоря о прошлом, ссылается на память, не найдя для будущего даже субъективного условия существования, Августин увидит основание будущего в чаяниях и надеждах¹⁰, но за две с половиной тысячи лет обсуждений никто не смог найти решения проблемы. В такой ситуации нередко пытаются элиминировать сам неудобный вопрос. Так и произошло в рассматриваемом случае. Было объявлено, что все события существуют в одном и том же смысле. Разделение событий на прошлые, настоящие и будущие всецело субъективно. Существовать в 1000 году, в 2000 или в 3000 – это одно и то же и никакой разницы в бытии этих событий нет. Я пишу эти строки в 2000 году и мне лишь мнится, что я нахожусь в настоящем. Кто-то, возможно, прочтет их в N-ом году (причем $2000 < N$), который будет настоящим для него, тогда как 2000 год окажется в прошлом. Все зависит от субъективного выбора точки отсчета, а в качестве таковой можно брать произвольный момент времени. Относительно событий этого момента, взятого за «настоящий», более ранние события будут «прошлыми», более поздние – «будущими». Но как только мы возьмем другой момент, картина изменится и относительно него выстроятся свои «прошлое» и «будущее». В подкрепление этой картины ссылаются на современную физику и справедливо ссылаются, между прочим. В составе физических теорий времени действительно нет понятий прошлого, настоящего и будущего. Это просто факт и тут ничего не поделаешь. С любым физическим событием можно связать лишь момент времени, когда оно произошло, или указать, какие события произошли раньше или произойдут позже данного события. Вопрос, какие события происходят в момент теперь или сейчас, какие в абсолютном прошлом, а какие в абсолютном будущем, либо бессмысленный, либо субъективный.

А если не соглашаться с тем, что все события мирового универсума (физические в том числе) существуют в одинаковом смысле? Можно ли найти объективное основание для такой позиции? Мы предлагаем следующий ответ на поставленные вопросы. Каждое событие происходит, случается с какими-то объектами. Оставим в стороне события психического ряда и сосредоточимся

¹⁰ Там же. С. 334-335.

на объектах, располагающихся в реальном пространстве. Любой такой объект обладает некоторыми свойствами и вступает в некоторые отношения с другими объектами. На языке современной логики свойства и отношения объектов называют предикатами. Введем следующую абстракцию. С каждым объектом x в каждый момент времени t будем связывать совокупность всех его предикатов. В честь Г.Лейбница назовем такую совокупность *лейбницианом* x в момент t . Например, применительно к конкретному человеку в данное мгновение в его лейбнициан попадут его рост, вес, уровень образованности, состояние здоровья по всем параметрам, его отношения с другими людьми и с принятыми законами и т.д. и т.д. Уже из этого примера видно, что понятие лейбнициана крайне не конструктивно. У нас нет способа исчерпывающего перечисления предикатов реальных объектов. Более того, нет даже общего способа определения, вносить или нет некоторый конкретный предикат в лейбнициан. Скажем, будет ли предикатом свойство « x находится в 4 световых годах от звезды Альфа Центавра»? А отношение « x любит y »? Не будем забывать, что введена именно абстракция, притом очень высокого уровня. Такие абстракции вообще свойственны науке. Даже в математике (точнейшей из наук!) мы находим подобного рода неконструктивные понятия. Например, в теории множеств с аксиомой выбора доказывается, что континуум действительных чисел можно вполне упорядочить. Но до сих пор никто не нашел (и вряд ли найдет) конкретный пример упорядочения, существование которого утверждается. Получается, что оно существует лишь в абстракции абстракций (поскольку и понятие действительного числа, и понятие порядка это тоже абстракции).

Уточнить понятие лейбнициана можно следующим образом. Поскольку это понятие предполагает оперирование некими абстрактными совокупностями, резонно для его уточнения воспользоваться аппаратом теории множеств, как раз приспособленным для описания такого рода объектов. Но здесь есть одно формальное затруднение. Собственно теоретико-множественные совокупности во времени не меняются, поэтому применение идеи лейбнициана к объектам теории множеств лишено смысла. Например, что может дать применение оборота «лейбнициан пустого множества»? Значит, необходим нестандартный подход.

В стандартной теории множеств принимается принцип *экстенциональности*, согласно которому два множества или класса считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. В данной работе будет построена теория множеств, в которой мы получим возможность различать совокупности, состоящие (в

некотором неклассическом смысле слова «состоять») из одинаковых элементов. В стандартном случае множества, представляющие свойства и отношения, подчиняются принципу экстенсинальности, так что такие свойства и отношения будем называть *экстенсинальными*. В противоположность этому назовем свойство или отношение *Р интенсинальным*, если в рамках соответствующей теории множеств допускается существование¹¹ такого *Q*, что из утверждения «*Р* и *Q* состоят из одних и тех же элементов» не следует утверждение «*Р* = *Q*».

Еще в 20–30 годы Френкель и Мостовский ввели в рассмотрение теории множеств, в которых принцип экстенсинальности не выполнялся в полном объеме. Речь идет о так называемых теориях множеств с *атомами* или *праэлементами*. Атомы не содержат никаких элементов, однако отличаются друг от друга и от пустого множества. Поэтому, если *a* – атом, то верно утверждение $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in \emptyset)$. Однако также верно, что $a \neq \emptyset$, вопреки принципу экстенсинальности. Теории множеств с атомами первоначально предназначались для построения моделей, в которых не выполняется аксиома выбора¹². Впоследствии для достижения этой цели научились обходиться без атомов, однако, на наш взгляд, теории множеств с праэлементами представляют не только чисто технический интерес, но и важны для философии.

Рассмотрим аксиоматическую теорию множеств с атомами ZFA, которая строится на базе теории множеств Цермело–Френкеля ZF.

Добавим к языку первогопорядкового исчисления предикатов с равенством символ бинарного отношения $\in$ и две индивидуальных константы $\emptyset$ и *A*. Условимся вместо формул вида $\neg(x \in y)$ писать $x \notin y$. Аксиомами ZFA будут следующие утверждения.

1. *Аксиома пустого множества*:

$$\forall x(x \notin \emptyset).$$

2. *Аксиома множества атомов*:

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \neq \emptyset \ \& \ \forall y(y \notin x)).$$

Будем называть элементы из *A* *атомами*, а *множествами* – объекты, не являющиеся атомами, то есть *x* – атом, если и только если $x \in A$, и *x* – множество, если и только если $x \notin A$.

3. *Аксиома экстенсинальности для множеств*:

$$(\forall x \notin A)(\forall y \notin A)(x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

¹¹ То есть предположение о существовании объекта с требуемыми свойствами не приводит к противоречию.

¹² Подробнее см.: Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М., 1973; Он же. Об аксиоме выбора // Справочная книга по математической логике. Ч. II. Теория множеств. М., 1982.

4. Аксиома пары:

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

5. Аксиома суммы или объединения:

$$\forall x (\exists y \notin A) \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \& z \in u)).$$

6. Аксиома степени:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x),$$

7. Аксиома бесконечности:

$$\exists x (\emptyset \in x \& \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)),$$

8. Схема аксиом подстановки:

$$\forall x (\forall u (u \in x \rightarrow \exists! z F(u, z)) \rightarrow \\ (\exists y \notin A) \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \& F(u, z)))),$$

где $F(u, z)$ – любая формула, не содержащая переменную u свободно.

9. Схема аксиом выделения подмножества:

$$\forall x (\exists y \notin A) \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \& F(z)),$$

где $F(z)$ – произвольная формула, в которую u не входит свободно.

10. Аксиома регулярности:

$$\forall x (\exists z (z \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \& y \cap x = \emptyset)),$$

На этом список аксиом теории ZFA завершён¹³. Отметим, что ни в одной из аксиом не требовалась непустота множества атомов A . Поэтому, добавив к ZFA формулу $A = \emptyset$, мы получим обычную теорию ZF, что вовсе не входит в наши планы. Но не приведет ли к противоречию непустота множества A ? Оказывается, нет. Более того, было показано, что система аксиом $(ZFA + \text{«}A \text{ – бесконечное множество»})$ непротиворечива относительно ZF и останется непротиворечивой после добавления аксиомы выбора¹⁴. Нам не понадобится аксиома выбора. Более того, как мы увидим из дальнейшего, она будет нам мешать.

Расширим язык теории ZFA, добавив к нему индивидуальные константы Π и O , а также одноместный функциональный символ f . Построим в этом языке теорию ZFAI, аксиомами которой являются выше сформулированные аксиомы 1–10 и следующие аксиомы 11–14, которые, в отличие от предыдущих, не будут иметь специальных названий (в результате теория ZFA будет подтеорией теории ZFAI).

$$11. \Pi \cup O = A.$$

$$12. \Pi \cap O = \emptyset.$$

$$13. \exists x \exists y (x \in \Pi \& y \in O).$$

¹³ Он несколько отличается от списка, приведенного в книге Т.Йеха 1973 г., однако эти отличия не существенны.

¹⁴ Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М., 1973. С.125.

Через ω^+ обозначим множество $\omega \setminus \{\emptyset\}$ (т.е. ω^+ – это множество положительных целых чисел). Положим $D_O =_{\text{Df}} \{O^n \mid n \in \omega^+\}$.

$$14. (\forall x \notin \Pi)(f(x) = \emptyset) \ \& \ (\forall x \in \Pi)(\exists n \in \omega^+)(f(x) \subseteq O^n).$$

Факт. Теория ZFAI непротиворечива относительно ZF^{15} .

Теперь все готово для введения важного определения *интенциональной принадлежности* ε .

$$x \varepsilon y \leftrightarrow_{\text{Df}} x \in f(y).$$

Содержательно запись вида $a \varepsilon r$ означает, что для некоторого $n \geq 1$ последовательность индивидов $a = (a_1, \dots, a_n) \in O^n$ находится в интенциональном отношении $r \in \Pi$, так что можно использовать привычную запись $r(a_1, \dots, a_n)$. Далее нас будет интересовать связь между отношением r и объектом $a_i \in a$ (для всех $a \varepsilon r$ и всех i в интервале от 1 до n).

Для каждого $\alpha \in O$ определим *лейбнициан* α ($L(\alpha)$):

$$L(\alpha) =_{\text{Df}} \{r \in \Pi \mid \exists a (\exists i \in \omega^+)(a \varepsilon r \ \& \ \alpha_i \in a)\}.$$

Иными словами, $L(\alpha)$ есть множество всех отношений, в которых участвует индивид α . Рассмотрим множество всех лейбницианов $L =_{\text{Df}} \{x \mid (\exists \alpha \in O)(x = L(\alpha))\}$ и множество $LC =_{\text{Df}} \{x \mid x \text{ — кардинал} \ \& \ (\exists y \in L) \ |y| = x\}$. Каждый элемент $L(\alpha) \in L$ будем считать тем набором предикатов, который определяет место объекта α на шкале времени. От чего зависит это место? – От *мощности* соответствующего лейбнициана. Объект α находится в моменте «теперь», если эта мощность максимальна, т.е. если $(\forall \beta \in O)(|L(\beta)| \leq |L(\alpha)|)$. Но как отличить прошлое от будущего? Резонный ответ заключается в том, что события даже ближайшего будущего ведут более прозрачное существование, чем оставившие следы события отдаленного прошлого. Реализовать эту мысль можно по-разному. Например, простейшее решение состоит в принятии постулата о конечности лейбницианов будущих индивидов и бесконечности лейбницианов прошлых вещей. Более радикальное решение состоит в постулировании на LC такого отношения между кардиналами лейбницианов, которое удовлетворяет каким-либо аксиомам временного порядка.

Таким образом, бытие событий прошлого и будущего отличается от бытия событий настоящего постольку, поскольку количество предикатов, локализованных в реальном пространстве объек-

¹⁵ Доказательство несложно. См.: Анисов А.М. Представление интенциональных отношений в теории множеств с атомами // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998. С. 27-34.

тов прошлого и будущего, меньше, чем количество предикатов объектов настоящего. **Количественное различие разновременных лейбницианов, обуславливающее разделение событий на прошлые, настоящие и будущие, будет третьим фундаментальным свойством времени.** В той или иной форме данное свойство времени знакомо как историкам, так и исследователям, разрабатывающим сценарии будущего. Представители точного естествознания с этим свойством не сталкиваются, поэтому их теории времени не адекватны.

Четвертое свойство

Оставшийся традиционный аспект понятия времени можно выразить двумя словами: *время течёт*. Говорят еще, что *время идет*. Или (в несколько ином смысле, но по сути том же значении) *идет время*. Течение, ход времени состоит в том, что события будущего *становятся* событиями настоящего, события настоящего – событиями прошлого, а события прошлого – событиями еще более далекого прошлого. **Течение времени – четвертое его неотъемлемое, фундаментальное свойство.** Используя слова «течение времени» и «становление» как синонимы, отметим тот факт, что существование течения времени или становления – неоспоримое свидетельство индивидуального опыта каждого из нас. Поскольку философы и ученые тоже люди, они также имеют этот опыт постижения времени. Но они хотят все выразить на языке теорий. Дальше начинается поистине детективная история. Как только появлялась очередная теория времени (или пространства и времени, или пространства-времени) обнаруживалось, что в теоретической конструкции время не течет, никуда не идет, оно стабильно, неизменно и неподвижно. В чем же состоит преступление, коль скоро речь идет о детективе? В том, что в угоду теории жертвуют свидетельствами опыта и при этом причисляют себя к лагерю поборников эмпирического метода. Не все виновны в этом преступлении. Древний грек Парменид, по-видимому, первый мыслитель, отвергший течение времени, честно заявил, что жертвует чувственным опытом в пользу теоретических рассуждений. Еще один честный человек, французский философ Анри Бергсон, поступил наоборот и провозгласил бессилие науки в ее попытках постичь феномен текущего времени. Блаженный Августин видел проблему яснее всех, но решения не нашел и также честно в этом признался.

Само собой, имеется в виду логическое преступление и интеллектуальная честность. Но от этого не легче. Ведь люди все еще

верят науке. А наука говорит, что время не течет и не идет. Но мы-то знаем, что идет. И живем и действуем в соответствии с этим знанием. А когда нам напоминают, что по науке это не так, смущенно соглашаемся: да, да, конечно... Не торопитесь соглашаться. А то получится так, как получилось с гелиоцентрической системой. Все видели, как солнце всходит и заходит и верили глазам своим. Затем теория объяснила, что верить не следует. Не верить даже стало одно время модным. Теперь, без лишнего шума, правда, дан задний ход: все дело в системе отсчета; находясь на солнце, увидим, как земля вращается вокруг светила, находясь на земле, видим, как солнце крутится вокруг нас. Вопрос о том, что вокруг чего вращается, теряет остроту, и теория Птолемея в принципе ничуть не хуже, а быть может, в каких-то аспектах (ведь мы-то на земле, а не на солнце!) лучше, чем теория Коперника. Короче говоря, мы предлагаем принцип «верь глазам своим». Если теория не согласуется с чувственным опытом, тем хуже для теории. Тем многим, кто, прикрываясь авторитетом точного естествознания, лишает время одной из его неотъемлемых фундаментальных черт, пора честно сознаться в том, что их теории – вовсе не теории времени. Быть может, это очень хорошие и полезные теории. Но они *не про это*.

Я был бы не прав, если бы одни имели опыт восприятия течения времени, а другие столь же многочисленные человеческие существа его не имели. Но чего нет, того нет. И если теория превращает этот опыт в массовую галлюцинацию, якобы не имеющую отношения к реальному времени, то серьезные сомнения должны возникнуть именно в отношении такой теории. Сделаем одно уточнение. Индивидуальный чувственный опыт структурирован. Мы обладаем способностью различать, какие его части относятся к внешнему миру, а какие к внутреннему. Так, универсально знакомое чувство боли мы относим именно к себе, а не к окружающей реальности. Испытывая чувство боли, мы никогда не скажем, что болит та вещь, которая была причиной боли. Со временем сложнее. Мы нередко используем фразы типа «время идет так медленно», «время помчалось вскачь» и т.п., апеллируя именно к самим себе, к своему восприятию времени в тот или иной период. Но при этом отдаем отчет в том, что за этими субъективными явлениями скрывается объективное становление: как бы различно ни воспринималось время в зависимости от состояния субъекта, неизменным остается факт восприятия течения времени как феномена внешней реальности. Мы можем субъективно ускорить или замедлить ход времени, и безошибочно относим это к себе. Но столь же безошибочно наш спыт фиксирует безостано-

вочность течения объективного времени, внешнего по отношению к миру наших переживаний. Если и возникает чувство, что время остановилось, то лишь на мгновение.

Пятое свойство

Таким образом, индивидуальный опыт каждого из нас с несомненностью свидетельствует о том, что течение времени – феномен объективный, тогда как ускорение или замедление течения времени – сфера субъективных переживаний. Но мы вовсе не собираемся вводить ускорение или замедление времени в перечень его объективных свойств. Такое решение продиктовано соображениями не только опытного, но и логического порядка. Как определить, замедлилось время или нет? Очевидно, необходим эталон для сравнения. Замедлилось или ускорилося по отношению к чему? Не скажешь ведь, что по отношению к самому себе – это было бы абсурдно. Остается одна возможность: время изменило свой ход по отношению к какому-то другому времени. В этом случае время оказывается не универсальным. Вместо универсального, единого для всей Вселенной времени приходится говорить об отдельных, локальных временах.

Здесь мы покидаем сферу устойчивых представлений о времени и вступаем в область гипотез и предположений, принимаемых одними и отвергаемых другими исследователями. Суть, конечно, не в этих различиях как таковых, а в том, какие аргументы приводятся в защиту избранной позиции. Универсально время или нет? Для мыслителей прошлого самого этого вопроса не существовало. Подразумевалось как само собой разумеющееся, что время универсально. Сегодня положение иное. Получила широкое распространение концепция локальных времён, согласно которой есть время физическое, химическое, космологическое, геологическое, биологическое, социальное (я не претендую на полный перечень, ведь легко изобрести еще какие угодно разновидности времён), и все эти времена объективны. Основной аргумент – должны же темпоральные процессы иметь особенности протекания применительно к различным видам и условиям движения материи. Быть может, так. Но в чем заключаются эти особенности, какие фундаментальные свойства времени ими затрагиваются? Вразумительных ответов нет, за исключением одного: пишут о том, что время по-разному длится в зависимости от вида реальности или условий движения.

Откуда взялась эта концепция? Приоритет тут принадлежит современной физике. Именно физики ввели в оборот идею

локальных времён. Самое яркое и известное ее проявление – так называемый «парадокс близнецов» в теории относительности. Если один из близнецов отправляется в путешествие с около световой скоростью, а другой остается на Земле, то встретившись, они обнаружат, что путешествовавший близнец окажется моложе своего брата-домоседа. Вывод: время путешественника текло иначе, чем время остававшегося на Земле. Вот вам и два локальных времени. Только остается вопрос: зачем использовать термин «время»? Не лучше ли просто сказать, что процессы на корабле путешественника шли медленнее, чем аналогичные процессы на Земле? Но тогда не тот пропагандистский эффект. Кого удивит тем, что одни и те же по типу процессы могут занимать разное время, могут ускоряться или замедляться. Если понизить температуру тела, то процессы жизнедеятельности замедлят свой ход, и наоборот, с повышением температуры все аналогичные процессы ускорятся. Строить можно быстро, а можно и не торопясь. Но температура и долготрой – явления не менее объективные, чем физическое явление замедления хода часов на движущемся с ускорением корабле. Стало быть, наряду с физическим локальным временем есть время биологическое и социальное. Процесс распада универсального времени, что называется, пошел.

Предвижу вопрос: Вы отказываетесь связывать ход времени с темпами протекания материальных процессов – в чем же тогда заключается течение времени? *Течение времени* – это переход событий дальнего будущего в события более близкого будущего, событий ближайшего будущего в события настоящего, событий настоящего – в события близкого прошлого, событий прошлого – в еще более далекое прошлое. Только с этим переходом и можно связывать становление во времени, а вовсе не с измерением продолжительности тех или иных локальных процессов. Основное, что тут нужно понять, – упомянутый переход не занимает времени в том смысле, что его длительность принципиально невозможно измерить по каким-либо часам. *Течение времени протекает не во времени. Все процессы протекают во времени, за исключением самого времени.* Вот в чем суть. Тело человека состоит из атомов, но это тело – не атом. Так и со временем. Из атомарных временных переходов складывается время, но длительность измеряемого времени не есть сумма длительностей актов атомарных переходов. Подобно тому как линия складывается из точек, но длина линии не есть сумма длин составляющих ее безразмерных точек.

В итоге не видно достаточных оснований для введения локальных времён. Не нужно умножать сущности без необходи-

мости. Есть одно, единое и общее время мира. *Универсальность* – пятое фундаментальное свойство времени.

Шестое свойство

В чем состоит атомарный временной переход? Либо в потере, либо в приобретении предикатов находящейся в потоке времени вещь. Если объект во времени приближается к настоящему или становится настоящим, его насыщенность предикатами возрастает. В момент настоящего – до наибольшего значения. В дальнейшем, по мере ухода в прошлое, происходит только безвозвратная утрата ранее имевшихся предикатов. Переходящий в прошлое объект оставляет следы в настоящем, но след – это не сам объект, его оставивший. По следам событий историки воссоздают картину прошлого, но эта картина заведомо неполна, так как по следу объективно возможно восстановить только часть предикатов исчезнувших вещей и событий. И чем дальше в прошлом находится событие, тем скуднее эта часть. Отсюда, кстати говоря, вытекает, что распространенное представление о неизменности прошлого несостоятельно. *Прошлое меняется*, поскольку следы однажды бывшего постепенно, с каждым тактом времени, теряются, исчезают. Если же следы исчезли полностью, то полностью растворилось во времени и событие. А события будущего даже следов не имеют, и описывать их, как правило, бывает труднее, чем события ушедшего прошлого¹⁶.

Теперь мы готовы указать на **шестое фундаментальное свойство времени** – его **необратимость**. Невозможно вернуться в прошлое, и однажды бывшее никогда не повторится. Оснований для этого вывода два: во-первых, как уже говорилось, временной порядок налагает запрет на петли во времени; во-вторых, нельзя попасть в мир событий, которых уже нет, которые по-настоящему не существуют в том смысле, что они утратили часть своих предикатов. Возместить эту утрату нельзя никоим образом. В противном случае никакой утраты просто не было. Действительно, если бы имелась объективная возможность восполнить лейбницианы объектов прошлого до лейбнициана настоящего, то это означало бы, что никакой потери предикатов по сути не произошло.

Представим себе, что никаких объективных следов, указывающих на родителей Каспара Гаузера, не осталось. Значит, никакими мыслимыми способами нельзя попасть в тот момент вре-

¹⁶ Есть исключения. Например, если имеются только данные о текущих параметрах орбиты запущенного спутника, то легче предсказать будущую траекторию его полета, чем сказать, откуда и когда он был запущен.

мени, где такие следы есть. В момент рождения К.Гаузера, безусловно, присутствовала его мать. Но не правильно и наивно представлять себе эту сцену таким образом, будто мы свидетели данного события и способны идентифицировать роженицу. Данное событие в абсолютном прошлом и некорректно даже мысленно воспроизводить его в качестве происходящего в настоящем, если мы претендуем на объективность описания. Можно при помощи воображения воссоздать картину прошлого, но это будет всего лишь субъективный плод нашей фантазии. Это будет что-то новое, а не изображение того, что когда-то было. Добавляя к событию прошлого недостающие предикаты взамен исчезнувших без следа, мы действуем не как историки, описывающие реально бывшее, а как художники, творцы нового. Нам может лишь казаться, что мы все правильно помним. В фантастическом романе Р.Шекли главный герой возвращается из Искаженного Мира на Землю. Его гложут сомнения, в тот ли мир он вернулся, он тщетно ищет детали, которые позволили бы отличить прошлую Землю от нынешней. Но все было знакомо и привычно: дубы-гиганты по-прежнему перекочевывали каждый год на юг, солнце плыло по небу в сопровождении темного спутника, отец пас крысиные стада... И герой постепенно успокаивается¹⁷. Иллюзия возвращения полная. Но логические сомнения неустранимы...¹⁸

Седьмое свойство

Перейдем к следующему существенному свойству времени. Наличие этого свойства постепенно находит признание даже в далекой от подлинных проблем темпоральности сфере точного естествознания. Речь идет о том, что имеется неустраняемая неопределенность в отношении событий, которые могут случиться в моменты, последующие за некоторым исходным моментом времени. Лаплас полагал, что если для произвольного момента времени известны все положения и скорости частиц, то все прошлые и будущие времена откроются для всестороннего описания, и лишь ограниченность человеческих познавательных способностей этому препятствует. Ныне считают, что малейшие объективно обусловленные неточности в описании положений и скоростей частиц материи в момент времени t приводят к возрастающей потере информации о том, что случится в последующие моменты.

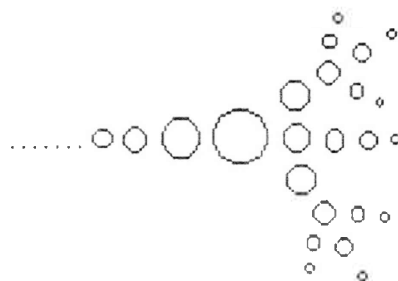
¹⁷ Шекли Р. Рассказы, повести. М., 1968. С.325-326.

¹⁸ Подробно феномен необратимости рассмотрен нами в работе: Анисов А.М. Направленность и обратимость времени // Логические исследования. Вып.6. – М.: РОССПЭН, 1999. С.195-217.

В антропном измерении та же самая проблема возникает в многовековой полемике фаталистов и сторонников идеи человеческой свободы. И хотя все признают сокрытость будущего, многие полагают, что эта сокрытость есть лишь результат нашего незнания, тогда как в действительности будущее предопределено.

Другие придерживаются прямо противоположной позиции, которую на нашем языке можно выразить так: **седьмым фундаментальным свойством времени является нефиксированность будущего**. Возможны альтернативные сценарии развития событий будущего. При этом из множества таких сценариев реализуется только какой-то один. Если в прошлом случилось то, что случилось, то в будущем еще ничего не случилось и лишь одному из возможных вариантов еще предстоит произойти. Вариативность будущего (но не настоящего и прошлого!), графически представим следующим образом.

Как видно из рисунка, время ветвится в будущее от момента настоящего, изображенного кругом наибольшей площади. Моменты прошлого вместе с моментом настоящего образуют прямую линию. Более того, если от любого момента двигаться к более ранним, то каждый раз будем получать линию без ветвлений: время линейно в направлении прошлого. Прошлое не имеет альтернатив, что закреплено в известном выстраданном историками тезисе: история не знает сослагательного наклонения. Лишь в отношении будущего уместно обсуждение возможных альтернативных сценариев. Переход в прошлое означает потерю предикатов. Переход из будущего – не только приобретение предикатов, но и выбор одной из доступных на данном шаге становления альтернатив.



С формальной точки зрения структура временного порядка теперь определяется следующими аксиомами.

1. $\forall x \neg (xRx)$.
2. $\forall x \forall y \forall z (xRy \ \& \ yRz \rightarrow xRz)$.
Положим $x|y \Leftrightarrow_{\text{Df}} xRy \vee yRx \vee x = y$.
3. $\forall x (x|h)$ (Все моменты связаны с настоящим h).
4. $\forall x \forall y \forall z (yRx \ \& \ zRx \rightarrow y|z)$ (Линейность в прошлое).
5. $\forall x (hRx \rightarrow \exists y \neg (x|y))$ (Будущее ветвится).

Остается добавить, что аксиомам 1-5 должно подчиняться множество кардиналов лейбницианов LC , т.е. $h \in LC$ и отношение R также задано на LC . Можно вводить дополнительные аксиомы временного порядка. Скажем, аксиому об отсутствии начала вре-

мени. Цена за это – отказ от аксиомы выбора АС. Ведь при наличии АС кардиналы линейно упорядочены (и тогда прощай ветвление будущего) и нет бесконечно убывающих последовательностей кардиналов (что ставит крест на времени, не имеющем начала). Однако без АС, согласно результату Т.Йеха, «для любого частично упорядоченного множества существует модель теории множеств, в которой есть множество кардиналов, изоморфное данному частично упорядоченному множеству»¹⁹, что нам и требовалось.

Восьмое свойство

Приведенный рисунок и аксиомы временного порядка демонстрируют еще один характерный признак времени, о котором скажем коротко²⁰. Настоящему, пока оно существует (сколь бы мимолетным ни было это существование), соответствует *свое* прошлое и *свое* будущее. Когда настоящее уйдет в прошлое, один из моментов возможного будущего станет настоящим. Время изменится как в отношении составляющих его событий и их предикатных характеристик, так и, возможно, в отношении деталей своей структуры (например, может уменьшиться или увеличиться количество будущих альтернатив). Всю структуру, вместе с текущим настоящим и соответствующими ему линейным прошлым и ветвящимся будущим, мы называли *метанастоящим* или *метамomentом*. С этой стороны *течение времени* состоит в переходе от одного метамомента к другому метамоменту, причем на каждом шаге становления существует только один метамомент, единственное метанастоящее, «внутри» которого есть линейно упорядоченные моменты прошлого, выделенный уникальный момент настоящего и ветвящиеся моменты будущего. Таким образом, **восьмой фундаментальной особенностью времени является его метамоментная структура.**

Все сооружение напоминает метлу, древко которой составляет прошлое, веник – будущее, а настоящее связывает то и другое. Метафорическое сравнение времени со стрелой, ставшее привычным, отныне устарело. В связи с этим метафору о стреле времени следует заменить метафорой о метле времени.

¹⁹ Справочная книга по математической логике: В 4-х частях. – Ч. II. Теория множеств. – М.: Наука, 1982. С. 59.

²⁰ Подробнее см. в кн. *Анисов А.М.* Время и компьютер. Негеометрический образ времени. М., 1991..

Заключение

Восемь перечисленных свойств времени однозначно выделяют феномен темпоральности среди всех других явлений. Все эти свойства необходимы для характеристики времени, но, весьма возможно, недостаточны, и у времени есть еще какие-то фундаментальные признаки.

В заключение поставим вопрос: *почему вообще существует феномен времени?* Ведь многочисленные теории универсума вполне обходятся без подлинного времени, довольствуясь его суррогатами, и легко представить себе мир, в котором времени нет. Но в реальности наш мир всецело темпорален, и все без исключения находящиеся в пространстве вещи захвачены потоком становления. По-видимому, *наличие времени обусловлено универсальной нехваткой ресурсов существования*. Один из универсальных ресурсов – объективное пространство, вместилище вещей. Однако места всем не хватает. Объектов в мире гораздо больше, чем способно вместить в себя пространство. Если на место планеты Земля будет претендовать космическое тело соизмеримой или бóльшей массы, при лобовом столкновении Земля перестанет актуально существовать как планета, но будет существовать в прошлом. Динозаврам нет места в настоящем – все места их возможного обитания заняты более преуспевающими видами. Как это ни печально, прежние поколения людей вынуждены были уйти в прошлое, чтобы освободить место новым поколениям. И так во всем.

М.Н.Бежанишвили

ИСЧИСЛЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ ХАО ВАНА И ИХ РАСШИРЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ИТЕРАЦИЮ ИМПЛИКАЦИИ

Abstract. Hao Wang [10] suggested two extensions of predicate calculus permitting partially defined predicates. He formulated two calculi of partial predicates PP and EP. Interpretation of implication of these calculi depends on the relations between all possible values of its parts. Therefore, the notion of a formula is restricted in PP and EP as implication is not iterating in them. A.Rose [9] constructed an independent system of axioms for propositional fragment of PP with finite number of axioms and proved its completeness by means of a syntactic criterion of provability in it. N.M.Ermolaeva [4] has done the same for propositional fragment of EP applying semantical criterion of the validity. In the present article we give the Rose style proof of completeness of the propositional fragment of EP introducing a syntactic criterion of provability in it, and on the ground of a modified relational semantics we formulate extensions of PP and EP permitting iteration of implication.

Введение

При исследовании различных версий исчисления предикатов и теории множеств обычно ограничиваются рассмотрением полностью определенных предикатов и множеств. Для того чтобы естественным образом обобщить такой подход, некоторые логики считают целесообразным привлечение к рассмотрению частично определенных предикатов и множеств. В разные периоды своей деятельности такой обобщенный подход разрабатывали Т.Скулем, Г.Беман, Д.Бочвар, В.Аккерман, К.Шюгте, Ф.Фитч, С.Феферман и др. (ссылки на их работы можно найти в [10] и [8]). Схожими способами они стремились без использования типовых ограничений устранить антиномии логики и теории множеств и в этом направлении достигли определенных успехов. Но несмотря на общность цели, они пришли к существенно различным построениям. Это свидетельствует, что до конца еще не выяснено, как следует трактовать такую обобщенную точку зрения на логику. Один из альтернативных подходов был предложен Хао Ваном в [10].

Исчисления частичных предикатов Хао Вана

Алфавит исчисления частичных предикатов Хао Вана **PP** содержит логические связки для отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и импликации: $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и $\rightarrow$, кванторы всеобщности и

существования: $\forall$ и $\exists$, неограниченные множества: индивидуальных переменных (**Ind**), n -арных функциональных знаков (**Fun**; $n \geq 0$), n -арных предикатных букв (**Prl**; $n \geq 0$). Он может также содержать конкретные функциональные и предикатные знаки.

Термы (**Trm**) и атомарные формулы (**Atm**) определяются обычно. Формулы (**Frm**) образуют наименьшее множество такое, что $\text{Atm} \subseteq \text{Frm}$ и если $x \in \text{Ind}$, а A и B – не содержащие знака $\rightarrow$ формулы, то $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\forall x A(x)$, $\exists x A(x) \in \text{Frm}$. Заметим, что, согласно этому определению, ни в одной формуле не допускается итерация знака $\rightarrow$.

Интерпретация PP. Моделью исчисления частичных предикатов Хао Вана **PP** является пара $\langle \mathbf{D}, \mathbf{V} \rangle$, где $\mathbf{D}$ – любое непустое множество индивидов, а $\mathbf{V}$ – означивающая функция из **Prl** в $\{t, u, f\}$, такая, что если P^n – пропозициональная переменная ($n=0$), $V(P^n)=t$ или u или f , а если P^n – n -арная предикатная буква ($n>0$), $V(P^n)=(R, S)$, где (R, S) есть пара, такая, что $R \cap S = \emptyset$ и $R, S \subseteq \mathbf{D}^n$, где $\mathbf{D}^n$ – n -кратное декартово произведение $\mathbf{D}$ на себя.

Если задана модель для **PP**, то с помощью индукции по строению формул мы сможем определить значение любой формулы A при данном сопоставлении свободным индивидуальным переменным $x_1, \dots, x_n$ формулы A элементов $a_1, \dots, a_n$ из $\mathbf{D}$.

Если P – пропозициональная переменная, то $V(P)$ уже задано моделью. $V(P^n(x_1, \dots, x_n))=t$ при данном сопоставлении свободным индивидуальным переменным $x_1, \dots, x_n$ формулы $P^n(x_1, \dots, x_n)$ элементов $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{D}$, если n -ка $(a_1, \dots, a_n) \in Q$, $V(P^n(x_1, \dots, x_n))=f$, если $(a_1, \dots, a_n) \in S$, в противном случае, $V(P^n(x_1, \dots, x_n))=u$.

Оценка формул, в которые входят только знаки: $\neg$, $\wedge$ и $\vee$, осуществляется согласно трехзначным таблицам Лукасевича: $V(\neg A)=t$, если $V(A)=f$; $V(\neg A)=f$, если $V(A)=t$; в противном случае, $V(\neg A)=u$.

$V(A \wedge B)=\min(V(A), V(B))$ и $V(A \vee B)=\max(V(A), V(B))$, предполагая, что $t > u > f$.

Кванторы $\forall$ и $\exists$ трактуются как обобщения связок $\wedge$ и $\vee$: $V(\forall y A(x_1, \dots, x_n, y))=t$ при сопоставлении свободным индивидуальным переменным $x_1, \dots, x_n$ формулы $\forall y A(x_1, \dots, x_n, y)$ элементов $a_1, \dots, a_n$ из $\mathbf{D}$, если при том же сопоставлении $V(A(x_1, \dots, x_n, y))=t$, когда значением y является любой элемент b из $\mathbf{D}$; $V(\forall y A(x_1, \dots, x_n, y))=f$ при сопоставлении свободным индивидуальным переменным $x_1, \dots, x_n$ формулы $\forall y A(x_1, \dots, x_n, y)$ элементов $a_1, \dots, a_n$ из $\mathbf{D}$, если при том же сопоставлении $V(A(x_1, \dots, x_n, y))=f$, когда значением y является хотя бы один элемент b из $\mathbf{D}$; в противном случае, $V(A(x_1, \dots, x_n, y))=u$. Оценка формул вида $\exists y A(x_1, \dots, x_n, y)$ производится двойственным образом.

Импликация является связкой более высокого уровня. Поэтому Хао Ван определяет не истинность формулы вида $A \rightarrow B$ в модели, а ее общезначимость по отношению к множеству означиваний.

Формула вида $A \rightarrow B$ общезначима в **PP** тогда и только тогда, когда для всякого означивания V , всякий раз, когда $V(A)=t$, то и $V(B)=t$.

Отметим, что ни одна не содержащая знака $\rightarrow$ формула не является общезначимой.

Аксиомы **PP** имеют вид $A \rightarrow B$, где A и B – такие бескванторные формулы, что для всякого означивания V , если $V(A)=t$, то и $V(B)=t$.

Правила вывода PP.

Правила для введения кванторов: из $A \rightarrow B(y)$ следует $A \rightarrow \forall x B(x)$; из $A \rightarrow B(s)$ следует $A \rightarrow \exists x B(x)$; из $B(y) \rightarrow A$ следует $\exists x B(x) \rightarrow A$ и из $B(s) \rightarrow A$ следует $\forall x B(x) \rightarrow A$, где $A, B \in \mathbf{Frm}$, $x, y \in \mathbf{Ind}$, $s \in \mathbf{Trm}$ и y не входит свободно в A .

Правила для сокращения сторон $\rightarrow$: из $A \wedge A \wedge B \rightarrow C$ следует $A \wedge B \rightarrow C$; из $A \rightarrow B \vee B \vee C$ следует $A \rightarrow B \vee C$, где $A, B, C \in \mathbf{Frm}$;

Правила для протаскивания кванторов: пусть $A, B, C, D \in \mathbf{Frm}$, $x \in \mathbf{Ind}$ и x не входит свободно в B , а $C \approx D$ означает, что замена подформулы C на D или D на C из нижеследующего списка формул в любую теорему **PP** вновь дает нам теорему **PP**:

$$\begin{aligned} A \quad & \forall x \neg A(x) \approx \neg \exists x A(x), \quad \exists x \neg A(x) \approx \neg \forall x A(x), \\ & \forall x (A(x) \wedge B) \approx \forall x A(x) \wedge B, \quad \exists x (A(x) \wedge B) \approx \exists x A(x) \wedge B, \\ & \forall x (A(x) \vee B) \approx \forall x A(x) \vee B, \quad \exists x (A(x) \vee B) \approx \exists x A(x) \vee B. \end{aligned}$$

Хао Ван в [10] показал что **PP** является корректным и полным (т.е. $A \rightarrow B$ является теоремой **PP** тогда и только тогда, когда для всякого V , если $V(A)=t$, то $V(B)=t$). Он также установил, что сечение является допустимым правилом **PP** и исследовал отношение **PP** с классической логикой. Кроме того, Хао Ван построил альтернативное по отношению к **PP** исчисление **EP**, которое отличается от **PP** лишь толкованием импликации: $V(A \rightarrow B)=t$ в **EP** тогда и только тогда, когда для всякого означивания V , если $V(A)=t$, то $V(B)=t$ и если $V(A)=u$, то $V(B) \neq t$.

Язык, интерпретация (с только что указанным единственным отличием) и правила вывода для **EP** те же самые, что и для **PP**, а ограничительное условие аксиом **EP** соответствует интерпретации знака $\rightarrow$ в **EP**.

В [3] и [2] было показано, что аналоги интерполяционной теоремы Крейга справедливы для исчислений частичных предикатов Хао Вана **PP** и **EP**.

Пропозициональные фрагменты исчислений PP и EP

Пропозициональные фрагменты исчислений частичных предикатов Хао Вана PP и EP в дальнейшем соответственно будем обозначать через PP_S и EP_S . Очевидно, что атомарными формулами в них будут только пропозициональные переменные.

А.Роуз сформулировал независимую и полную систему аксиом для PP_S , которая содержит нижеследующие аксиомы A1-A12 и правила вывода R1-R4:

- A1. $P \rightarrow P \vee Q$,
- A2. $P \vee Q \rightarrow Q \vee P$,
- A3. $P \wedge Q \rightarrow P$,
- A4. $P \wedge Q \rightarrow Q \wedge P$,
- A5. $\neg \neg P \rightarrow P$,
- A6. $P \rightarrow \neg \neg P$,
- A7. $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,
- A8. $\neg (P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$,
- A9. $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg (P \wedge Q)$,
- A10. $\neg (P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$,
- A11. $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg (P \vee Q)$,
- A12. $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$.

R1. Из $A \rightarrow C$ и $B \rightarrow C$ следует $A \vee B \rightarrow C$;

R2. Из $A \rightarrow B$ и $A \rightarrow C$ следует $A \rightarrow B \wedge C$;

R3. Из $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$ следует $A \rightarrow C$, где A, B, C – не содержащие знака $\rightarrow$ формулы.

R4. Пусть P – пропозициональная переменная, входящая в формулу A , формула B – не содержит знака $\rightarrow$, а C получается из A в результате замены всех вхождений P в A на B ; тогда из A следует C .

А.Роуз установил также необходимое и достаточное условие доказуемости формул в PP_S , с его помощью доказал полноту PP_S и сформулировал независимую и полную систему аксиом для той версии пропозиционального фрагмента PP , которая в качестве исходных логических связей содержит лишь $\neg$ и $\vee$ (см. [9]).

Н.М.Ермолаева в [4] исследовала все возможные пропозициональные исчисления типа Хао Вана, получающиеся при варьировании аксиомы A12 и для соответствующих логик ввела особые обозначения: L_I совпадает с PP_S (т.е. с пропозициональным фрагментом PP), L_{II} получается из L_I , если в ней A12 будет заменена более слабой аксиомой A12'. $P \wedge \neg P \rightarrow Q \vee \neg Q$. При этом, она характеризует L_{II} как фрагмент трехзначной логики Лукасевича. Хотя на самом деле, логику L_{II} можно точнее описать, как пропозициональный фрагмент альтернативного исчисления Хао Вана EP , т.е.

как EP_S . Логика L_{III} двойственна к L_I (к PP_S) и получается из L_I , если в ней A12 будет заменена новой аксиомой: $P \rightarrow Q \vee \neg Q$. А L_{IV} является логикой де Моргана и получается из L_I опусканием аксиомы A12. В [4] также указывается семантический критерий истинности одноимпликативных формул и с его помощью доказывается теорема полноты для L_{II} ($=EP_S$). Ниже мы приведем другое доказательство этой теоремы, использующее синтаксический критерий доказуемости формул в EP_S . По своему характеру оно, на наш взгляд, ближе к способу, который А.Роуз использовал для установления полноты PP_S .

Замечание. Автору было известно, что в [4] исследуются пропозициональные логики типа Хао Вана, но, к сожалению, содержание этой работы до последнего времени для него оставалось неизвестным. Лишь этим следует объяснить, что ни в [3] и ни в [2], где описывается система аксиом для EP_S и дается набросок доказательства полноты EP_S , не упоминается работа [4], в которой эти факты были установлены значительно раньше.

В [4] также рассматриваются классическая логика K (она получается присоединением $P \rightarrow Q \vee \neg Q$ к аксиомам L_I) и противоречивая логика L_0 (в которой верны все формулы); описывается точная модель логики L_{IV} , далее, по включению упорядочиваются все перечисленные выше логики:

$$L_{IV} \subset L_{II}, L_{II} \subset L_I, L_{II} \subset L_{III}, L_I \subset K, L_{III} \subset K, K \subset L_0,$$

и доказывается интересный факт о том, что между каждыми двумя соседними логиками этого списка нет промежуточных логик.

В [5] В.К.Финн показал, что L_I ($=PP_S$) есть одноимпликативный фрагмент трехзначной логики Лукасевича, а в [1] предложено предикатное расширение L_{II} ($=EP_S$) и установлено, что оно в некотором смысле эквивалентно секвенциальному исчислению Дж.Клива (ср. [1] и [7]).

Конечные конъюнкции (дизъюнкции) произвольных формул в дальнейшем будем обозначать через $\prod_{i < m}$ ($\sum_{k < n}$). Пусть A и B конечные конъюнкции (дизъюнкции) формул. Будем говорить, что B является подконъюнкцией (поддизъюнкцией) A , если каждый конъюнктивный (дизъюнктивный) член формулы B также является конъюнктивным (дизъюнктивным) членом формулы A .

Отметим некоторые очевидные особенности исчислений PP_S и EP_S :

- (1) Если A – конечная конъюнкция формул и B является подконъюнкцией A , то формула $A \rightarrow B$ доказуема в EP_S ;
- (2) Если B – конечная дизъюнкция формул и A является поддизъюнкцией B , то формула $A \rightarrow B$ доказуема в EP_S ;

(3) Если формулы: $A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3, \dots, A_{n-1} \rightarrow A_n$ доказуемы в EP_S , то формула $A_1 \rightarrow A_n$ также доказуема в EP_S ;

(4) Если формулы: $A \rightarrow B_1, A \rightarrow B_2, \dots, A \rightarrow B_n$ доказуемы в EP_S , то формула $A \rightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n$ также доказуема в EP_S ;

(5) Если формулы: $A_1 \rightarrow B, A_2 \rightarrow B, \dots, A_n \rightarrow B$ доказуемы в EP_S , то формула $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \rightarrow B$ также доказуема в EP_S .

Отметим еще некоторые легко устанавливаемые особенности исчислений PP_S и EP_S . Пусть в $S^\#$ обозначает конъюнктивную нормальную форму (КНФ) формулы S , а S° – дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) формулы S , тогда

(6) Формула вида $A \rightarrow B$ доказуема в PP_S (в EP_S) тогда и только тогда, когда $A^\circ \rightarrow B^\circ$ доказуема в PP_S (в EP_S) тогда и только тогда, когда $A^\circ \rightarrow B^\#$ доказуема в PP_S (в EP_S) тогда и только тогда, когда $A^\# \rightarrow B^\circ$ доказуема в PP_S (в EP_S).

(7) Если формулы A и B не содержат знака $\rightarrow$, то замена A на B или B на A в любую теорему PP_S допустима тогда и только тогда, когда в PP_S доказуемы формулы: $A \rightarrow B, B \rightarrow A, \neg A \rightarrow \neg B$ и $\neg B \rightarrow \neg A$ [9].

(8) Формула вида $A \rightarrow B$ доказуема в EP_S тогда и только тогда, когда в PP_S доказуемы формулы: $A \rightarrow B$ и $\neg B \rightarrow \neg A$ [4].

Из (7) и (8) сразу следует

(9) Замена не содержащих знака $\rightarrow$ формул A на B или B на A в любую теорему EP_S допустима тогда и только тогда, когда в EP_S доказуемы формулы: $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$.

Критерии доказуемости формул в PP_S и EP_S

Пусть $\sum_{i < m} C_i$ есть ДНФ формулы A , $\sum_{k < n} D_k$ – ДНФ формулы B ,

$\prod_{r < s} E_r$ – КНФ формулы B и пусть для каждого $i < m$ $\sum_{k < n} F_k$ получается из $\sum_{k < n} D_k$ вычеркиванием тех конъюнктивных членов из каждого D_k ($k < n$), которые являются также конъюнктивными членами C_i .

Синтаксический критерий доказуемости формул в PP_S . Будем говорить, что формула $A \rightarrow B$ удовлетворяет синтаксическому критерию доказуемости формул в PP_S , если для каждого такого дизъюнктивного члена C_i ДНФ $\sum_{i < m} C_i$ формулы A , который в качестве конъюнктивных членов не содержит ни одной пропозициональной переменной вместе с ее отрицанием, существует такой дизъюнктивный член D_k ДНФ $\sum_{k < n} D_k$ формулы B , что D_k является подконъюнкцией C_i (*критерий Роуза*).

Семантический критерий доказуемости формул в EP_S . Для того чтобы $C_i \rightarrow \sum_{k < n} F_k$ была общезначимой, необходимо и доста-

точно, чтобы $V(\sum_{k<n} F_k) \neq f$ для всякого означивания V (критерий Ермолаевой).

Синтаксический критерий доказуемости формул в EP_S . Будем говорить, что формула $A \rightarrow B$ удовлетворяет синтаксическому критерию доказуемости формул в EP_S , если а) каждый дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m} C_i$ формулы A , который в качестве конъюнктов не содержит ни одну пропозициональную переменную вместе с ее отрицанием, удовлетворяет критерию Роуза для PP_S , и б) для каждого дизъюнктивного члена C_i ДНФ $\sum_{i<m} C_i$ формулы A , который в качестве конъюнктивных членов содержит по крайней мере одну пропозициональную переменную вместе с ее отрицанием, каждый конъюнктивный член E_r КНФ формулы B является классической тавтологией (т.е. содержит некоторую пропозициональную переменную вместе с ее отрицанием) или в качестве дизъюнктивного члена содержит хотя бы один конъюнктивный член, входящий в указанный дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m} C_i$ формулы A .

Лемма 1. *Если формула $A \rightarrow B$ не удовлетворяет синтаксическому критерию доказуемости формул в EP_S , то формула $A \rightarrow B$ не общезначима.*

Доказательство. Предположим, что условие леммы выполняется. Тогда существует такое число $i < m$, что а) если дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m} C_i$ формулы A в качестве конъюнктов не содержит ни одной пропозициональной переменной вместе с ее отрицанием, то ни для какого $k < n$ дизъюнктивный член D_k ДНФ $\sum_{k<n} D_k$ формулы B не является подконъюнкцией C_i , или б) если дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m} C_i$ формулы A в качестве конъюнктов содержит по крайней мере одну пропозициональную переменную вместе с ее отрицанием, то существует число $r < s$ такое, что конъюнктивный член E_r КНФ $\prod_{r<s} E_r$ формулы B не является классической тавтологией (т.е. не содержит ни одной пропозициональной переменной вместе с ее отрицанием), а также ни один дизъюнктивный член E_r КНФ $\prod_{r<s} E_r$ формулы B в то же время не является конъюнктивным членом C_i .

Рассмотрим случай а). Определим V_0 следующим образом: пусть $V_0(P) = t$ для всякой пропозициональной переменной P , входящей в C_i без знака отрицания. Пусть, далее, $V_0(Q) = f$ для всякой пропозициональной переменной Q , входящей в C_i со знаком отрицания, и пусть $V_0(R) = u$ для всех таких пропозициональных переменных R , которые являются конъюнктами D_k , но не являются конъюнктами C_i . Остальные пропозициональные переменные могут принимать любые значения.

Очевидно, что в таком случае $V_0(\sum_{i<m} C_i) = V_0(C_i) = t$, а для всякого $k < n$ $V_0(D_k) \neq t$ и, следовательно, $V_0(\sum_{k<n} D_k) \neq t$.

В случае б) мы зададим V_0 следующим образом: пусть $V_0(P) = u$ для всякой пропозициональной переменной P , входящей в C_i . $V_0(Q) = f$ для всякой пропозициональной переменной Q , входящей в E_r без знака отрицания, и, наконец, пусть $V_0(R) = t$ для всех пропозициональных переменных R , входящей в E_r со знаком отрицания. Остальным переменным можно придать любые значения.

В таком случае мы легко убедимся, что $V_0(C_i) = u$, $V_0(\prod_{r<s} E_r) = V_0(E_r) = f$, $V_0(\sum_{i<m} C_i) = u$ или, возможно, t , в зависимости от того, какие значения получают при означивании V_0 отличные от C_i дизъюнктивные члены C_i ДНФ $\sum_{i<m} C_i$ формулы A ($t < m$, $t \neq i$). $\square$

Лемма 2. Если формула $A \rightarrow B$ удовлетворяет синтаксическому критерию доказуемости формул в EP_S , то $A \rightarrow B$ доказуема в EP_S .

Доказательство. Пусть $A \rightarrow B$ удовлетворяет условию леммы. В таком случае мы будем иметь всего две возможности:

а). Дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m} C_i$ формулы A не содержит ни одной пропозициональной переменной вместе с ее отрицанием и существует дизъюнктивный член D_k ДНФ $\sum_{k<n} D_k$ формулы B , являющийся подконъюнкцией формулы A . Но тогда, согласно свойству (1), в EP_S доказуема $C_i \rightarrow D_k$, откуда в силу свойства (2) следует, что $C_i \rightarrow \sum_{k<n} D_k$ также доказуема в EP_S .

б). Дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m} C_i$ формулы A содержит некоторую пропозициональную переменную P вместе с ее отрицанием $\neg P$ и каждый конъюнктивный член E_r КФН $\prod_{r<s} E_r$ формулы B является либо классической тавтологией (т.е. содержит некоторую пропозициональную переменную Q вместе с ее отрицанием $\neg Q$), либо конъюнктивный член E_r КФН $\prod_{r<s} E_r$ в качестве дизъюнкта содержит G , являющийся в то же время конъюнктом дизъюнктивного члена C_i ДНФ $\sum_{i<m} C_i$ формулы A .

В первом случае, согласно свойству (1), в EP_S доказуема формула $C_i \rightarrow P \vee \neg P$. Кроме того, в силу аксиомы $A12'$ мы имеем $P \wedge \neg P \rightarrow Q \vee \neg Q$, а согласно свойству (2) в EP_S доказуема формула $Q \vee \neg Q \rightarrow E_r$. Из этих формул, используя свойство (3), мы сразу выведем формулу $C_i \rightarrow E_r$.

Во втором случае конъюнктивный член E_s КФН $\prod_{r<s} E_r$ формулы B хоть и не является классической тавтологией, но содержит некоторый дизъюнктивный член G , являющийся также конъюнктом дизъюнктивного члена C_i ДНФ $\sum_{i<m} C_i$ формулы A . Опять согласно (1) мы сначала выводим в EP_S формулу $C_i \rightarrow G$. Затем, в силу свойства (2) устанавливаем доказуемость $G \rightarrow E_r$ в EP_S и с помощью (3) убеждаемся, что в EP_S также доказуема $C_i \rightarrow E_r$.

В обоих случаях мы показали, что для любого $r < s$ в EP_s доказуема $C_i \rightarrow E_r$, но тогда согласно свойству (4) в EP_s также доказуема формула $C_i \rightarrow \prod_{r < s} E_r$ и, следовательно, $C_i \rightarrow \sum_{k < n} D_k$, в силу свойства (6).

Мы рассмотрели обе возможности а) и б) выполнения критерия доказуемости формул в EP_s и установили, что в каждой из них для любого $i < m$ в EP_s доказуемы все формулы вида $C_i \rightarrow \sum_{k < n} D_k$, но тогда, согласно свойству (5), в EP_s также доказуема формула $\sum_{i < m} C_i \rightarrow \sum_{k < n} D_k$.

Теорема 1. *Пропозициональное исчисление EP_s является полным (Ермолаева, 1973).*

Доказательство прямо следует из контрапозиции леммы 1 и из леммы 2.

Расширение исчислений частичных предикатов Хао Вана

Как только мы попытаемся обобщить понятие формулы, допустив итерацию знака $\rightarrow$ в формулах PP и EP , сразу же возникнут трудности при оценке формул, содержащих более одного вхождения знака $\rightarrow$. Как уже было отмечено, в исчислениях Хао Вана истинность формулы вида $A \rightarrow B$ зависит не от того, какие конкретные значения принимают A и B при данном означивании, а от определенного отношения между совокупностями значений A и B . Если формулу вида $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ мы все же сможем разумно оценить как $(P \wedge Q) \rightarrow P$, то обязательно столкнемся с трудностью при оценке формулы $(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P$, так как для каждого заданного значения P мы не сумеем определять конкретное значение антецедента $\neg P \rightarrow P$ этой формулы (мы сможем установить лишь то, что антецедент этой формулы не общезначим; см. [10]). Этим и отличается импликация Вана от импликаций трехзначных логик, скажем, Лукасевича или Клини. Поэтому несмотря на то обстоятельство, что PP_s является фрагментом трехзначной логики Лукасевича (о чем упоминалось выше, см. [5]), последнюю не следует считать расширением PP_s , сохраняющим своеобразие импликации Вана, так как в трехзначной логике Лукасевича значение импликации зависит от конкретных значений ее антецедента и консеквента, а не от совокупности их значений.

Если мы хотим так расширить PP и EP , чтобы итерация знака $\rightarrow$ была в них допустима, мы обязаны сохранить вышеуказанное свойство импликации Хао Вана.

Это можно, например, осуществить с помощью реляционной семантики (модифицированной для трехзначного случая)¹.

Мы можем следующим образом построить расширения PP^* и EP^* исчислений Хао Вана PP и EP . Понятие формулы PP^* (EP^*) определяется обычно (с итерациями знака $\rightarrow$), а оценка формул осуществляется в следующей реляционной семантике.

$PP^*(EP^*)$ -фрейм является упорядоченной тройкой $Fr = \langle H, R, D \rangle$, где $H \neq \emptyset$, $R \subseteq H \times H$, причем R рефлексивно и транзитивно в H , D – функция областей, определенная на H , такая, что для всякого v из H , $D(v) \neq \emptyset$ и если $(w, v) \in R$, то $D(w) \subseteq D(v)$, $w, v \in H$. Пусть, далее, Prl – множество всех предикатных букв. $PP^*(EP^*)$ -модель есть пара $\langle Fr, V \rangle$, где Fr – $PP^*(EP^*)$ -фрейм, а V – частичная функция из $Prl \times H$ в $\{t, u, f\}$, такая, что если P – пропозициональная переменная, $V(P, w) = t$ или u или f , а если P – n -арная предикатная буква, то $V(P, w) = (Q, S)$, где (Q, S) есть пара, такая, что $Q \cap S = \emptyset$ и $Q, S \subseteq [D(w)]^n$, где $[D(w)]^n$ – n -кратное декартово произведение $D(w)$ на себя. Теперь при сопоставлении переменным $x_1, \dots, x_n$ элементов $a_1, \dots, a_n$ из $U = \bigcup D(v)$, $v \in H$, $V(P^n(x_1, \dots, x_n), w) = t$, если $(a_1, \dots, a_n) \in Q$, $V(P^n(x_1, \dots, x_n), w) = f$, если $(a_1, \dots, a_n) \in S$, в противном случае, $V(P^n(x_1, \dots, x_n), w) = u$. Условия оценки для $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$ и $\exists$ такие же, как в PP и EP . Наконец, $V(A \rightarrow B, w) = t$ в PP^* , если для всякого v , такого, что $(w, v) \in R$, если $V(A, v) = t$, то $V(B, v) = t$. А для EP^* , кроме того, требуется выполнение условия: если $V(A, w) = u$, то $V(B, v) \neq f$. В противном случае $V(A \rightarrow B, w) = f$ в PP^* , соответственно в EP^* .

Легко можно показать, что $PP^*(EP^*)$ является консервативным расширением PP (EP) в следующем смысле: формула A общезначима в PP тогда и только тогда, когда A общезначима в классе фреймов $PP^*(EP^*)$.

Связь с эпистемической логикой

В [6] было сформулировано табличное исчисление частично интерпретируемой эпистемической модальной логики $E4$. Логика $E4$ интересна и тем, что в ней можно осуществить переводы формул PP^* и EP^* .

¹ На последних смирновских чтениях, в мае 2001 г., Н.Н.Непейвода сообщил автору, что он ранее исследовал возможности расширения исчислений частичных предикатов Хао Вана, допускающие итерацию импликации, без использования реляционной семантики. К сожалению, эта работа для автора остается недоступной.

Алфавит **E4** отличается от алфавита **PP*** и **EP*** лишь тем, что вместо импликации Вана $\rightarrow$ он содержит эпистемический модальный оператор знания $\Box$ (читается: «известно, что»).

Понятие формулы **E4** обычное. Фреймы и модели **E4** совпадают с **PP***- и **EP***-фреймами и моделями, а условия истинности для $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$ и $\exists$ в **E4** соответственно совпадают с условиями их истинности в **PP*** и **EP***. Наконец, $V(\Box A, w) = t$ в **E4**, если $V(A, v) = t$ для всякого v , такого, что $(w, v) \in R$. В противном случае (т.е. если существует такой v , что $(w, v) \in R$ и $V(A, v) \neq t$), $V(\Box A, w) = f$.

Заметим, что в **E4** общезначимой не является ни одна такая формула, которая не содержит $\Box$.

Теперь следующим образом определим функцию τ , соответственно τ' , перевода формул **PP***, соответственно **EP***, в **E4**:

$\tau(A) = A$, если A не содержит знака $\rightarrow$;

$\tau(A \rightarrow B) = \neg \Box \tau(A) \vee \Box \tau(B)$,

учитывая свойство (9), соответственно будем иметь

$\tau'(A) = \tau(A)$, если A не содержит знака $\rightarrow$;

$\tau'(A \rightarrow B) = \tau(A \rightarrow B) \wedge \tau(\neg B \rightarrow \neg A)$.

Используя правила построения таблиц для **E4** (см.[6]), можно показать, что справедлива следующая

Теорема 2. *Формула A общезначима в классе фреймов **PP***, соответственно **EP***, тогда и только тогда, когда $\tau(A)$, соответственно $\tau'(A)$, доказуема в **E4**.*

Мы можем расширить исчисление **PP***, не прибегнув к типовым ограничениям, допуская появление пропозициональных и предикатных букв на местах связанных переменных и разрешая появление формул на местах свободных переменных. Но основная задача при привлечении к рассмотрению частично определенных предикатов и множеств заключается в выяснении того, способна ли такая логика без порождения антиномий справиться с теми проблемами, для решения которых и было первоначально построено расширенное классическое исчисление предикатов, сразу же отвергнутое из-за его противоречивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аншаков О.М., Финн В.К. Так называемые нечеткие логики и одноимпликативные исчисления // Семиотика и информатика, вып.17. 1981. С. 71-89.
2. Бежаншвили М.Н. Об одном исчислении частичных предикатов Хао Вана // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке / Материалы VI Общероссийской научной конференции 22-24 июня 2000 г. Изд-во Санкт-Петербургского университета. 2000. С.156-158.

3. *Бежанишвили М.Н.* Интерполяционная теорема для исчислений частичных предикатов Хао Вана // Логические исследования, вып.7. М.: Наука, 2000. С.148-158.
4. *Ермолаева Н.М.* О логиках, родственных исчислению Хао Вана // Научно-техническая информация, сер.2. №8. 1973. С.34-37.
5. *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений и их алгебр // Философия в современном мире / Философия и логика. М.: Наука. 1974. С.398-438.
6. *Bezhanishvili M.* A partially interpreted modal tableau calculus // Multiple-Valued Logic. 5. 2000. P.103-116.
7. *Cleave J.P.* The notion of logical consequence in the logic of inexact predicates // Zeitschr. fuer math. Logik und Grundlagen d. Math. 20. 1974. P.307-324.
8. *Feferman S.* Toward useful type-free theories. I // JSL. 49. 1984. P.75-111.
9. *Rose A.*, A formalization of the propositional calculus corresponding to Wangs calculus of partial predicates // Zeitschr. fuer math. Logik und Grundlagen d. Math. 9. 1963. P.177-198.
10. *Wang H.*, The calculus of partial predicates and its extension to set theory. I // Zeitschr. fuer math. Logik und Grundlagen d. Math. 7. 1961. P.283-288.

ТЕОРИЯ РЕЛЕВАНТНОГО СЛЕДОВАНИЯ III: КОМБИНАТОРНАЯ СЕМАНТИКА TE

Abstract. In [1] and [2] the background for pure theory of relevant entailment was built: ideological considerations were axiomatized and supplied with algebraic semantics. In this paper I will prove the adequacy for both relational and combinatory semantics of TE.

I

Напомним, что представляет собой алгебраическая структура TE. Это группоид: $\langle D, \cap, \cup, \neg, \circ \rangle$, где

1. $\langle D, \cap, \cup, \neg \rangle$ – решетка ДеМоргана;
2. $a^\circ(b \cup c) = (a^\circ b) \cup (a^\circ c)$ – решеточная упорядоченность;
3. $a^\circ b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \rightarrow c$ – резидуальность;
4. свойства $^\circ$:
 - 4.1. $a^\circ a = a$;
 - 4.2. $(a^\circ b)^\circ c \leq a^\circ(b^\circ c)$;
 - 4.3. $(a^\circ b)^\circ c \leq b^\circ(a^\circ c)$;
 - 4.4. $a^\circ b \leq (a^\circ b)^\circ b$;
 5. $a^\circ b \leq c \Leftrightarrow a^\circ \neg c \leq \neg b \Leftrightarrow b^\circ \neg c \leq \neg a$.

Реляционная модель TE – это четверка $R = \langle K, R, *, \models \rangle$, где $K \neq \emptyset$, $R \subseteq K^3$, $*$: $K \rightarrow K$, $\models \subseteq K \times \{A\}$.

Определения:

Df.1. R^2abcd iff $\exists x (Rabx$ и $Rxcd)$

Df.2. $R^2a(bc)d$ iff $\exists x (Raxd$ и $Rbcx)$.

Модель на основе приведенных определений удовлетворяет семантическим постулатам:

- г.1. $Raaa$;
- г.2. $Rabc \Rightarrow R^2abbc$;
- г.3. $R^2abcd \Rightarrow R^2a(bc)d$;
- г.4. $R^2abcd \Rightarrow R^2b(ac)d$;
- г.5. $Rabc \Rightarrow Rac*b*$;
- г.6. $a**=a$.

Условия истинности формул:

- ($\neg$) $a \models \neg A \Leftrightarrow$ неверно, что $a^* \models A$;
- (&) $a \models A \& B \Leftrightarrow a \models A$ и $a \models B$;
- (v) $a \models A \vee B \Leftrightarrow a \models A$ или $a \models B$;
- ($\rightarrow$) $a \models A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall b, c \in K ((Rabc$ и $b \models A) \Rightarrow c \models B)$.

Формула $A \rightarrow B$ истинна в модели R ($R \models A \rightarrow B$) *iff* из A следует B *iff* $\forall a \in K(a \models A \Rightarrow a \models B)$.

Формула A общезначима *iff* A истинна во всякой модели ($\forall R R \models A$).

II

Адекватность построенной семантики продемонстрировать достаточно легко. Непротиворечивость получается тривиальным способом. Метод доказательства полноты также представляет собой комбинацию доказательства для первоуровневой релевантной логики с доказательством той же метатеоремы для системы T .

Схема рассуждений достаточно стандартна для генкиновского доказательства. Допустив общезначимость произвольной имплицативной формулы $\vdash C \rightarrow D$ и недоказуемость $(\vdash)^1$ формулы $C \rightarrow D$, получаем из второго допущения $C \nmid D$. Для перехода к следующему шагу в рассуждениях требуется так называемая **Лемма расширения** (аналог Леммы Линденбаума), позволяющая утверждать, что одноэлементное множество $\{C\}$ может быть расширено до такого множества a , что $C \in a$ и $D \notin a$. Теперь достаточно задать каноническую оценку в терминах принадлежности: $C \in a \Leftrightarrow a \vdash_c C$, чтобы перейти к утверждению $\exists a (a \vdash_c C \ \& \ a \nmid_c D)$. (Для обоснования этого перехода потребуется **Лемма о существовании канонической модели**.) Таким образом, $C \nmid D$, что противоречит второму допущению. Следовательно, если произвольная имплицативная формула общезначима в редуцированной реляционной семантике системы TE , то она TE -доказуема.

Итак, пусть a – TE -теория, если и только если это множество замкнуто относительно $m.p.$ и $\&_v$. TE -теория является простой, если выполняется следующее условие: $A \vee B \in a \Rightarrow A \in a$ или $B \in a$. Сформулируем важную для релевантной логики **Лемму расширения**:

Если $C \nmid D$, то существует такая простая теория a , что $C \in a$ и $D \notin a$.

Прежде чем определить, что значит “формула не выводима из множества формул”, потребуется дать определение отношения выводимости.

Пусть $A_1, \dots, A_n$ формулы, принадлежащие множеству Δ , а $B_1, \dots, B_m$ формулы из множества Γ . Тогда имеет место $\Delta \vdash \Gamma$, если и только если существуют $A_1, A_2, \dots, A_m$ из Δ и $B_1, B_2, \dots, B_j$ из Γ

¹ Далее вместо “невыводимо” будет использоваться знак обратной выводимости “ $\nmid$ ”.

такие, что $A_1 \& \dots \& A_m \vdash B_1 \vee \dots \vee B_j$. Для случая, когда Γ одноэлементное множество $\{D\}$, будет верно: если $\Delta \vdash \Gamma$, то $\Delta \vdash D$.

Пусть $A_0, A_1, \dots, A_k$ – список формул языка ТЕ. Поскольку Δ может быть любым, в том числе и бесконечным, придется рассмотреть последовательность множеств $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_k$. Дадим индуктивное определение.

d.0. Пусть $\Delta_0 \vdash \Gamma_0$, и $\Delta_0 = \Delta$ и $\Gamma_0 = \{B\}$. Определим Δ_{n+1} и Γ_{n+1} через Δ_n и Γ_n :

d.1. Если $\Delta_n \cup \{A_{n+1}\} \vdash \Gamma_n$, то $\Delta_{n+1} = \Delta_n$ и $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$. То есть A_{n+1} отвергается.

d.2. Если $\Delta_n \not\vdash \{A_{n+1}\} \vdash \Gamma_n$, то $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_{n+1}\}$ и $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$. То есть A_{n+1} принимается.

d.3. $\mathbf{a} = \bigcup_{n < \omega} \Delta_n$ и $\mathbf{d} = \bigcup_{n < \omega} \Gamma_n$.

Таким образом, все формулы из $\mathbf{d}$ не выводимы из $\mathbf{a}$. Представляется правомерной интуитивная трактовка, согласно которой $\mathbf{a}$ содержит все формулы, оцениваемые как истинные (приемлемые), а $\mathbf{d}$ – ложные (отбрасываемые) формулы. Итак, построена теория $\mathbf{a}$ такая, что выполняется $\Delta \subseteq \mathbf{a}$ и $D \in \mathbf{d}$. Остается показать, что $\mathbf{a}$ обладает всеми указанными в лемме чертами.

1. Покажем, что $\mathbf{a} \not\vdash \mathbf{d}$.

Допустим противное. Это означает, что

(1) существует $n > 0$ и $\Delta_n \vdash \Gamma_n$, но при этом по определению вывода $\Delta_{i-1} \not\vdash \Gamma_{i-1}$.

(2) пусть A_n отброшена и $n=i$. – допущение

(3) $\Delta_{i-1} \cup \{A_i\} \vdash \Gamma_{i-1}$ -- по d.1. из (2)

(4) $\Delta_i = \Delta_{i-1}$ и $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{A_i\}$ – по d.1. из (3)

(5) $\Delta_i \vdash \Gamma_i$ – из (1), (2)

(6) $\Delta_{i-1} \vdash \Gamma_{i-1} \cup \{A_i\}$ – из 5, 6

(7) существует конъюнкция B_1 и дизъюнкция C_1 из элементов Δ_{i-1} и Γ_{i-1} соответственно такие, что $B_1 \& A_i \vdash C_1$. – из 3 по опр. выводимости

(8) $B_1 \vdash C_1 \vee A_i$ – из (6), (4) по опр. выводимости

(9) $B_1 \vdash C_1$ – из (7), (8) на основании выводимости FDE

(10) $\Delta_{i-1} \vdash \Gamma_{i-1}$ – из (9) по опр. выводимости

(11) поскольку (10) противоречит (1), следовательно, не верно доп. (2), таким образом,

(12) A_n должно быть принято и $n=i$

(13) $\Delta_{i-1} \cup \{A_i\} \not\vdash \Gamma_{i-1}$ – из (12) по d.2.

(14) $\Delta_i = \Delta_{i-1} \cup \{A_i\}$ и $\Gamma_i = \Gamma_{i-1}$ – из (13) по d.2.

(15) Но, так как $\Delta_i \vdash \Gamma_i$, имеет место $\Delta_{i-1} \cup \{A_i\} \vdash \Gamma_{i-1}$, что противоречит (13).

Следовательно, обе возможности рассмотрены и доказано, что $a \nvdash d$.

2. По построению вывода всякая формула принадлежит a или d . Если предположить противное, допустив существование некоторой формулы общей для a и d , то сразу же получаем $a \vdash d$, что противоречит 1.

3. $\Delta \subseteq a$ и $B \in d$. Следовательно, по 2 $B \notin a$.

Теперь покажем, что a – простая (6) теория (4, 5).

4. Пусть $F \subseteq a$ и $\vdash F \rightarrow D$. Тогда $a \vdash D$ и $D \in a$. Ибо в противном случае если $D \in d$, то $a \vdash d$, что противоречит 1. Следовательно, a замкнута относительно $\rightarrow$.

5. Пусть $B \in a$ и $C \in a$, но при этом $B \& C \notin a$. Тогда $B \& C \in d$ и, поскольку $B, C \vdash B \& C$, имеет место $a \vdash d$, что опять противоречит 1. Таким образом, a замкнута относительно введения конъюнкции.

6. Пусть $B \vee C \in a$, но $B \notin a$ и $C \notin a$. Тогда $B, C \vdash d$. Следовательно, $B \vee C \vdash B \vee C$, то есть $a \vdash d$, что уже в который раз противоречит 1. Таким образом, a – простая.

Этим завершается доказательство Леммы расширения.

Каноническая модельная структура R_c – это тройка $\langle K_c, R_c, *_c \rangle$, где K_c – непустое множество простых ТЕ-теорий, $R_c abc \Leftrightarrow \forall A \forall B ((A \rightarrow B \in a \text{ и } A \in b) \Rightarrow B \in c)$, а $*_c$ определяется следующим образом: $a *_c = \{A: \neg A \notin a\}$.

Покажем, что имеет место Утверждение I

Каноническая модельная структура R_c есть действительно редуцированная реляционная модельная структура ТЕ.

Рассмотрим семантические постулаты, которым R_c должна удовлетворять.

$\Rightarrow$ r1. Пусть $A \rightarrow B \in a$ и $A \in a$, по свойству замкнутости теорий относительно введения конъюнкции, это означает, что $A \& (A \rightarrow B) \in a$. Поскольку формула $(A \& (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ – является теоремой ТЕ, по свойству теорий быть замкнутыми относительно **m.p.** будет иметь место $B \in a$ и, следовательно, $R_c aaa$.

$\Rightarrow$ r2. Пусть $R_c abc$. Требуется показать, что существует простая теория x , что $R_c abx$ и $R_c xbc$.

Для начала необходимо продемонстрировать, что можно построить такое множество x , которое будет удовлетворять определению простой теории. Итак, пусть $x = \{C: \exists B (B \rightarrow C \in a \text{ и } B \in b)\}$. Покажем, что это теория. Пусть $C_1, C_2 \in x$. Тогда $\exists B_1, B_2 (B_1 \rightarrow C_1 \in a, B_2 \rightarrow C_2 \in a, B_1 \in b \text{ и } B_2 \in b)$. Поскольку формула $((B_1 \rightarrow C_1) \& (B_2 \rightarrow C_2)) \rightarrow ((B_1 \& B_2) \rightarrow (C_1 \& C_2))$ является теоремой ТЕ, а a – теория (то есть замкнутая относительно $\&$ и **m.p.**), $(B_1 \& B_2) \rightarrow (C_1 \& C_2) \in a$. По определению x и на основании того, что b – теория, аналогичным образом получаем $C_1 \& C_2 \in x$. Пусть теперь

$C_1 \in x$ и $\vdash C_1 \rightarrow C_2$. Тогда $\exists B_1 (B_1 \rightarrow C_1 \in a \text{ и } B_1 \in b$. Поскольку $\vdash (B_1 \rightarrow C_1) \rightarrow (B_1 \rightarrow C_2)$, будет иметь место $B_1 \rightarrow C_2 \in a$. В свою очередь, так как $B_1 \in b$ и по определению x , имеет место $C_2 \in x$. Таким образом, x – теория.

Для демонстрации того, что x – простая теория, требуется доказать специальную Лемму простоты (Priming Lemma). Доказательство которой в свою очередь опирается на Лемму расширения или Лемму Цорна. Это стандартный момент в обеспечении семантической полноты для релевантных логик. Поэтому здесь достаточно ограничиться только формулировками.

Итак, Лемма Цорна гласит, что *любое непустое частично-упорядоченное множество, в котором каждая цепь имеет верхнюю границу, содержит максимальный элемент*.

Используя это утверждение, легко получить доказательство Леммы простоты. Пусть a' и x' некоторые теории, и d – простая теория. Тогда, если имеет место $Ra'x'd$, то существует простая теория x , для которой верно $x' \subseteq x$ и $Ra'xd$.

Теперь можно продемонстрировать, что будут иметь место $R_c abx$ и $R_c xbc$. $R_c abx$ получается непосредственно из определения x . Для $R_c xbc$ допустим, что $A \rightarrow B \in x$ и $A \in b$. По определению x найдется такая формула A , что $A \rightarrow (A \rightarrow B) \in a$ и $A \in b$. По аксиоме сокращения и замкнутости a относительно $m.p.$ получаем $A \rightarrow B \in a$. Наконец, поскольку имеет место $Rabc$, постольку $(A \rightarrow B \in a \text{ и } A \in b) \Rightarrow B \in c$. Два раза применяя исключение импликации, получаем $B \in c$, что и завершает доказательство.

Для постулатов г.3 и г.4 доказательство строится аналогичным, весьма изощренным, но тем не менее – благодаря многочисленным исследованиям в области релевантной логики – уже рутинным способом. При этом используются аксиомы суффиксной и префиксной транзитивности.

Два последних постулата нужны для верификации негативных аксиом. Случай с г.6 тривиален и не отличается от аналогичного момента в доказательстве полноты для первоуровневой релевантной логики. В качестве иллюстрации рассмотрим г.5.

$\Rightarrow$ г.5. Дано $R_c abc$, то есть $(\neg B \rightarrow \neg A \in a \text{ и } \neg B \in b) \Rightarrow \neg A \in c$. Пусть $A \rightarrow B \in a$, $A \in c^*$ и $B \notin b^*_c$. Из первого допущения по теореме классической контрапозиции и на основании простоты a получаем $\neg B \rightarrow \neg A \in a$. Допущение $B \notin b^*_c$ равносильно $\neg B \in b$. Все это вместе с определением $R_c abc$ дает $\neg A \in c$, то есть $\neg A \notin c^*_c$, что противоречит третьему допущению. Следовательно, $R_c ac^*.b^*_c$.

Это завершает доказательство утверждения о том, что каноническая модельная структура R_c есть действительно редуцированная реляционная модельная структура TE .

Следующий шаг в доказательстве семантической полноты состоит в демонстрации **Утверждения II** о том,

что каноническая модель, оценка на которой задана в терминах принадлежности формул простым теориям, есть действительно редуцированная реляционная модель ТЕ.

Определим $\models_c$ для произвольной формулы следующим образом: $a \models_c A \Leftrightarrow A \in a$. Доказательство утверждения сводится к доказательству **Леммы о существовании канонической модели**.

В свою очередь, доказательство леммы ведется методом обратной индукции по количеству связок в формуле A . Большинство случаев тривиально и не отличается от аналогичных для первоуровневой логики. Рассмотрим лишь ситуацию, когда A есть $B \rightarrow C$. Требуется продемонстрировать, что $B \rightarrow C \in a \Leftrightarrow \forall a, b ((R_c abc \text{ и } B \in b) \Rightarrow C \in c)$.

$\Rightarrow$: Пусть $B \rightarrow C \in a$, $R_c abc$ и $B \in b$. По определению канонического отношения достижимости $(B \rightarrow C \in a \text{ и } B \in b) \Rightarrow C \in c$. Следовательно, $C \in c$.

$\Leftarrow$: Допустим, что $\forall a, b ((R_c abc \text{ и } B \in b) \Rightarrow C \in c)$. Выберем такие b^+ и c^+ , чтобы утверждение о $C \in c$ давало искомое заключение $B \rightarrow C \in a$. Пусть $b^+ = \{D : \vdash B \rightarrow D\}$, а $c^+ = \{C : \exists D (D \rightarrow C \in a \text{ и } D \in b^+)\}$. Снимем кванторы по b^+ и c^+ . Тогда имеем $R_c ab^+c^+$ и $B \in b^+ \Rightarrow C \in c^+$. При этом по определению c^+ будет иметь место не только $B \in b^+$, но и $(B \rightarrow C \in a \text{ и } B \in b^+) \Rightarrow C \in c^+$, то есть $R_c ab^+c^+$. Применив **т.р.**, получаем $C \in c^+$. Но по определению b^+ и c^+ будет также верно $B_1 \rightarrow C \in a$ и $\vdash B \rightarrow B_1$. По аксиоме транзитивности и **т.р.** получаем $\vdash (B_1 \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$. Поскольку a – теория, то $B \rightarrow C \in a$, что и требовалось получить. Свойство быть простыми теориями для b^+ и c^+ является следствием леммы расширения, о которой шла речь выше. Этим завершается доказательство леммы и, следовательно, утверждения II.

Теперь вернемся к нашему исходному предположению. Пусть $C \nvdash D$, то есть $\nvdash C \rightarrow D$. Тогда по Лемме расширения существует такая простая теория a , что $C \in a$ и $D \notin a$. По Лемме о существовании канонической модели это означает, что $\exists a (a \models_c C \text{ \& } a \not\models_c D)$. Таким образом, $\nvdash C \rightarrow D$, что противоречит допущению. Следовательно, $\forall A^{\rightarrow} (TE \models A^{\rightarrow} \Rightarrow TE \vdash A^{\rightarrow})$.

III

Комбинаторная семантика ТЕ строится по аналогичному принципу. Модель $S = \langle K, \bullet, \#, \models \rangle$, где $K \neq \emptyset$, $\#: K \rightarrow K$, $\models \subseteq K \times \{A\}$, а $\bullet$ – бинарная операция на K .

Принимаются следующие определения:

DF.1. $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma = \delta$ iff $\exists \theta (\alpha \bullet \beta = \theta \text{ и } \theta \bullet \gamma = \delta)$

DF.2. $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = \delta$ iff $\exists \theta (\alpha \bullet \theta = \delta \text{ и } \gamma \bullet \beta = \theta)$.

Семантические постулаты, которым удовлетворяет C , следующие:

с.1. $\alpha \bullet \alpha = \alpha$;

с.2. $\alpha \bullet \beta = \gamma \Rightarrow (\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma = \gamma$;

с.3. $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma = \delta \Rightarrow \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = \delta$;

с.4. $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma = \delta \Rightarrow \beta \bullet (\alpha \bullet \gamma) = \delta$;

с.5. $\alpha \bullet \beta = \gamma \Rightarrow \alpha \bullet \gamma^\# = \beta^\#$;

с.6. $\alpha^{\#\#} = \alpha$.²

Условия истинности формул:

($\neg$) $\alpha \Vdash \neg A \Leftrightarrow$ неверно, что $\alpha^* \Vdash A$;

(&) $\alpha \Vdash A \& B \Leftrightarrow \alpha \Vdash A \text{ и } \alpha \Vdash B$;

(v) $\alpha \Vdash A \vee B \Leftrightarrow \alpha \Vdash A \text{ или } \alpha \Vdash B$;

($\rightarrow$) $\alpha \Vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall \beta, \gamma \in K ((\alpha \bullet \beta = \gamma \text{ и } \beta \Vdash A) \Rightarrow \gamma \Vdash B)$.

Формула $A \rightarrow B$ истинна в модели C ($C \Vdash A \rightarrow B$) iff из A следует B iff $\forall \alpha \in K (\alpha \Vdash A \Rightarrow \alpha \Vdash B)$.

Формула A общезначима iff A истинна во всякой модели ($\forall C C \Vdash A$).

Покажем, что комбинаторная семантика адекватна системе ТЕ. Поскольку условия приписывания значений и постулаты для отрицания в обеих (реляционной и комбинаторной) семантиках одинаковы, рассмотрим только семантики позитивного фрагмента ТЕ. Для доказательства семантической адекватности комбинаторной семантики покажем, что множество общезначимых в ней формул совпадает с множеством формул, общезначимых в реляционной семантике. Для этого необходимо доказать следующую теорему:

MT 1. $\forall A (\forall C^+ C^+ \Vdash A \Leftrightarrow \forall R^+ R^+ \Vdash A)$, где $C^+(R^+)$ есть позитивная модель.

ЛЕММА 1. $\forall A \forall R^+ \exists C^+ (C^+ \Vdash A \Rightarrow R^+ \Vdash A)$

Доказательство.

I. Покажем, что по каждой реляционной модели можно построить комбинаторную.

Пусть $\langle K, R, \Vdash \rangle$ – позитивная реляционная модель. Зададим операцию $\bullet$ на подмножествах K : $\alpha \bullet \beta = \{c: \exists a \in \alpha \exists b \in \beta Rabc\}$, где $\alpha, \beta \subseteq K$. Пусть теперь K – множество таких подмножеств K , что $\forall \alpha \in K \forall \beta \in K \exists \gamma \in K \alpha \bullet \beta = \gamma$.

Покажем, что получившаяся пара $\langle K, \bullet \rangle$ действительно есть комбинаторная модельная структура.

² Далее будем писать ab вместо $a \bullet b$

1. Множество K не пусто в силу **r.1. Raaa**. Это означает, что даже в вырожденном случае, когда $K=\{a\}$, $K=K$.

2. Операция $\bullet$ является всюду определенной и однозначной на множестве K по условию задания множества K .

3. Пара $\langle K, \bullet \rangle$ удовлетворяет постулатам **c.1.- c.4.**

c.1. По **r.1.** и определению $\bullet$ $\alpha \alpha = \alpha$.

c.2. $\alpha \beta = \gamma$

$\Rightarrow \gamma = \{c: \exists a \in \alpha \exists b \in \beta Rabc\}$ [по опр. $\bullet$]

$\Rightarrow \gamma = \{c: \exists a \in \alpha \exists b \in \beta \exists x \in \theta (Rabx \text{ и } Rxbc)\}$ [по **r.2.** и **Df.1.**]

$\Rightarrow \gamma = \{c: \exists x \in \theta \exists b \in \beta Rxbc\}$ и $\theta = \{x: \exists a \in \alpha \exists b \in \beta Rabx\}$ [по опр. $\bullet$ и усл. ист. $\&$]

$\Rightarrow \gamma = \theta \beta$ и $\theta = \alpha \beta$ [по опр. $\bullet$]

$\Rightarrow (\alpha \beta) \beta = \gamma$ [по **DF.1.**]

Аналогично доказываются и остальные постулаты. Таким образом, пара $\langle K, \bullet \rangle$ действительно есть комбинаторная модельная структура.

Зададим отношение $\Vdash \subseteq K \times \{A\}$ стандартным образом.

Условия истинности формул:

($\&$) $\alpha \Vdash A \& B \Leftrightarrow \alpha \Vdash A \text{ и } \alpha \Vdash B$;

($\vee$) $\alpha \Vdash A \vee B \Leftrightarrow \alpha \Vdash A \text{ или } \alpha \Vdash B$;

($\rightarrow$) $\alpha \Vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall \beta, \gamma \in K ((\alpha \beta = \gamma \text{ и } \beta \Vdash A) \Rightarrow \gamma \Vdash B)$.

Формула $A \rightarrow B$ истинна в модели C ($C \Vdash A \rightarrow B$) *iff* из A следует B *iff* $\forall \alpha \in K (\alpha \Vdash A \Rightarrow \alpha \Vdash B)$.

II. Теперь требуется показать, что $C^+ \Vdash A \rightarrow B \Rightarrow R^+ \Vdash A \rightarrow B$.

Пусть $C^+ \Vdash A \rightarrow B$, то есть $\forall \alpha \in K (\alpha \Vdash A \Rightarrow \alpha \Vdash B)$, но не верно, что $R^+ \Vdash A \rightarrow B$. Последнее $\exists a \in K (a \Vdash A \text{ и } a \not\Vdash B)$ ³. Для исключения импликации и получения противоречия необходимо, во-первых, $a \Vdash A \Rightarrow \alpha \Vdash A$, а во-вторых, $\alpha \Vdash B \Rightarrow a \Vdash B$, то есть надо доказать

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. $\forall A (\alpha \Vdash A \Leftrightarrow a \Vdash A)$.

Докажем это утверждение методом возвратной математической индукции по числу связок в формуле A .

1. Пусть A есть $B \& C$.

1.1.

+1. $\alpha \Vdash B \& C$

2. $\alpha \Vdash B$ и $\alpha \Vdash C$ [по усл. ист.]

3. $a \Vdash B$ и $a \Vdash C$ [по инд. доп.]

4. $a \Vdash B \& C$ [по усл. ист.]

1.2.

+1. $a \Vdash B \& C$

2. $a \Vdash B$ и $a \Vdash C$ [по усл. ист.]

³ Здесь и далее запись $a \not\Vdash B$ означает “не верно, что $a \Vdash B$ ”.

3. $\alpha \Vdash B$ и $\alpha \Vdash C$ [по инд. доп.]
 4. $\alpha \Vdash B \& C$ [по усл. ист.]

Аналогично для случая (2), когда A есть $B \vee C$.

3. Пусть A есть $B \rightarrow C$.

3.1.

- +1. $\alpha \Vdash B \rightarrow C$
 +2. $Rabc \& b \Vdash B$
 3. $\forall \beta, \gamma \in K ((\alpha\beta = \gamma \text{ и } \beta \Vdash B) \Rightarrow \gamma \Vdash C)$ [по усл. ист. из 1]
 4. $((\alpha\beta = \gamma \text{ и } \beta \Vdash B) \Rightarrow \gamma \Vdash C)$ [$\forall$ и. 2 раза из 3]
 5. $b \Vdash B$ [&и. из 2]
 6. $\beta \Vdash B$ [по инд. доп. из 5]
 7. $\exists a \in \alpha \exists b \in \beta Rabc$ [&и. из 2 и $\exists$ в. 2 раза]
 8. $\alpha\beta = \gamma$ [по опр. • из 7]
 9. $\alpha\beta = \gamma \& \beta \Vdash B$ [&в. из 6, 8]
 10. $\gamma \Vdash C$ [$\Rightarrow$ и. из 4, 9]
 11. $c \Vdash C$ [по инд. доп. из 10]
 12. $\forall b, c \in K ((Rabc \text{ и } b \Vdash B) \Rightarrow c \Vdash C)$ [$\Rightarrow$ в. из 11, $\forall$ в. 2 раза b, c - абс. ог.]
 13. $a \Vdash B \rightarrow C$ [по усл. ист. из 12]
 14. $\alpha \Vdash B \rightarrow C \Rightarrow a \Vdash B \rightarrow C$ [$\Rightarrow$ в. из 13]

3.2.

- +1. $a \Vdash B \rightarrow C$
 +2. $\alpha\beta = \gamma \& \beta \Vdash B$
 3. $\forall b, c \in K ((Rabc \text{ и } b \Vdash B) \Rightarrow c \Vdash C)$ [по усл. ист. из 1]
 4. $((Rabc \text{ и } b \Vdash B) \Rightarrow c \Vdash C)$ [$\forall$ и. 2 раза из 3]
 5. $\beta \Vdash B$ [&и. из 2]
 6. $\alpha\beta = \gamma$ [&и. из 2]
 7. $b \Vdash B$ [по инд. доп. из 5]
 8. $\exists a \in \alpha \exists b \in \beta Rabc$ [по опр. • из 6]
 9. $Rabc$ [$\exists$ и. 2 раза, a, b - абс. огр. из 8]
 10. $Rabc \text{ и } b \Vdash B$ [&в. из 7, 9]
 11. $c \Vdash C$ [$\Rightarrow$ и. из 10, 4]
 12. $\gamma \Vdash C$ [по инд. доп. из 11]
 13. $\forall \beta, \gamma \in K ((\alpha\beta = \gamma \text{ и } \beta \Vdash B) \Rightarrow \gamma \Vdash C)$ [$\Rightarrow$ в. из 12, $\forall$ в. 2 раза β, γ - абс. ог.]
 14. $\alpha \Vdash B \rightarrow C$ [по усл. ист. из 13]
 15. $a \Vdash B \rightarrow C \Rightarrow \alpha \Vdash B \rightarrow C$ [$\Rightarrow$ в. из 14],

что и завершает доказательство Утверждения 1.

Итак, допустив

- +1. $\forall \alpha \in K (\alpha \Vdash A \Rightarrow \alpha \Vdash B)$
 +2. $\exists a \in K (a \Vdash A \& a \nVdash B)$, получаем

3. $\alpha \Vdash A \Rightarrow \alpha \Vdash B$	[$\forall$ и. из 1]
4. $a \Vdash A \ \& \ a \dashv B$	[$\exists$ т., a - абс. огр из 2]
5. $a \Vdash A$	[$\&$ и. из 4]
6. $a \dashv B$	[$\&$ и. из 4]
7. $a \Vdash A \Rightarrow \alpha \Vdash A$	[из Утв. 1.]
8. $\alpha \Vdash A$	[$\Rightarrow$ и. из 7,5]
9. $\alpha \Vdash B$	[$\Rightarrow$ и. из 3,8]
10. $\alpha \Vdash B \Rightarrow a \Vdash B$	[из Утв. 1.]
11. $a \Vdash B$	[$\Rightarrow$ и. из 10,9]
12. $\neg \exists a \in K (a \Vdash A \ \& \ a \dashv B)$	[$\neg$ -в. из 6.11]
13. $R^+ \Vdash A \rightarrow B$	[по усл. ист. из 12], что и требова-

лось доказать.

Таким образом, Лемма 1. доказана.

ЛЕММА 2. $\forall A \forall C^+ \exists R^+ (R^+ \Vdash A \Rightarrow C^+ \Vdash A)$

Доказательство.

I. Покажем, что по каждой комбинаторной модели можно построить реляционную.

Пусть $\langle K, \bullet, \Vdash \rangle$ – позитивная комбинаторная модель. Пусть K есть K . Определим отношение достижимости R следующим образом: $Rabc \Leftrightarrow a \bullet b = c$.

Покажем, что получившаяся пара $\langle K, R \rangle$ действительно есть реляционная модельная структура.

1. Множество K не пусто в силу не пустоты K .

2. Пара $\langle K, R \rangle$ удовлетворяет постулатам r.1.- r.4.

r.1. По с.1. $\alpha \alpha = \alpha$. По определению R это равносильно $Raaa$.

r.2. $Rabc$

$\Rightarrow \alpha \beta = \gamma$ [по опр. R]

$\Rightarrow \exists \theta (\alpha \bullet \beta = \theta \text{ и } \theta \bullet \beta = \delta)$ [по с.2. и DF.1]

$\Rightarrow Rabx \text{ и } Rxbc$ [$\exists$ и. θ - абс. огр., по опр. R]

$\Rightarrow \exists x (Rabx \text{ и } Rxbc)$ [$\exists$ в.]

$\Rightarrow R^2abbc$ [по Df.1.]

Аналогично доказываются и остальные постулаты. Таким образом, пара $\langle K, R \rangle$ действительно есть реляционная модельная структура.

Зададим отношение $\Vdash \subseteq K \times \{A\}$ стандартным образом.

Условия истинности формул:

($\&$) $a \Vdash A \ \& \ B \Leftrightarrow a \Vdash A \text{ и } a \Vdash B$;

($\vee$) $a \Vdash A \vee B \Leftrightarrow a \Vdash A \text{ или } a \Vdash B$;

($\rightarrow$) $a \Vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall b, c \in K ((Rabc \text{ и } b \Vdash A) \Rightarrow c \Vdash B)$.

Формула $A \rightarrow B$ истинна в модели R ($R \Vdash A \rightarrow B$) iff из A следует B iff $\forall a \in K (a \Vdash A \Rightarrow a \Vdash B)$.

II. Теперь требуется показать, что $R^+ \Vdash A \rightarrow B \Rightarrow C^+ \Vdash A \rightarrow B$.

Для этого опять потребуется доказать

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. $\forall A (\alpha \Vdash A \Leftrightarrow a \Vdash A)$.

Рассмотрим только случай, когда A есть $B \rightarrow C$.

1.

+1. $\alpha \Vdash B \rightarrow C$

+2. $\mathbf{R}abc \ \& \ b \Vdash B$

3. $\forall \beta, \gamma \in K ((\alpha\beta = \gamma \text{ и } \beta \Vdash B) \Rightarrow \gamma \Vdash C)$ [по усл. ист. из 1]

4. $((\alpha\beta = \gamma \text{ и } \beta \Vdash B) \Rightarrow \gamma \Vdash C)$ [$\forall$ и. 2 раза из 3]

5. $b \Vdash B$ [&и. из 2]

6. $\beta \Vdash B$ [по инд. доп. из 5]

7. $\mathbf{R}abc$ [&и. из 2]

8. $\alpha\beta = \gamma$ [по опр. $\mathbf{R}$ из 7]

9. $\alpha\beta = \gamma \ \& \ \beta \Vdash B$ [&в. из 6, 8]

10. $\gamma \Vdash C$ [$\Rightarrow$ и. из 4, 9]

11. $c \Vdash C$ [по инд. доп. из 10]

12. $\forall b, c \in K ((\mathbf{R}abc \text{ и } b \Vdash B) \Rightarrow c \Vdash C)$ [$\Rightarrow$ в. из 11, $\forall$ в. 2 раза b, c - абс. ог.]

13. $a \Vdash B \rightarrow C$ [по усл. ист. из 12]

14. $\alpha \Vdash B \rightarrow C \Rightarrow a \Vdash B \rightarrow C$ [$\Rightarrow$ в. из 13]

2.

+1. $a \Vdash B \rightarrow C$

+2. $\alpha\beta = \gamma \ \& \ \beta \Vdash B$

3. $\forall b, c \in K ((\mathbf{R}abc \text{ и } b \Vdash B) \Rightarrow c \Vdash C)$ [по усл. ист. из 1]

4. $((\mathbf{R}abc \text{ и } b \Vdash B) \Rightarrow c \Vdash C)$ [$\forall$ и. 2 раза из 3]

5. $\beta \Vdash B$ [&и. из 2]

6. $\alpha\beta = \gamma$ [&и. из 2]

7. $b \Vdash B$ [по инд. доп. из 5]

8. $\mathbf{R}abc$ [по опр. $\mathbf{R}$ из 6]

10. $\mathbf{R}abc \text{ и } b \Vdash B$ [&в. из 7, 8]

11. $c \Vdash C$ [$\Rightarrow$ и. из 10, 4]

12. $\gamma \Vdash C$ [по инд. доп. из 11]

13. $\forall \beta, \gamma \in K ((\alpha\beta = \gamma \text{ и } \beta \Vdash B) \Rightarrow \gamma \Vdash C)$ [$\Rightarrow$ в. из 12, $\forall$ в. 2 раза β, γ - абс. ог.]

14. $\alpha \Vdash B \rightarrow C$ [по усл. ист. из 13]

15. $a \Vdash B \rightarrow C \Rightarrow \alpha \Vdash B \rightarrow C$ [$\Rightarrow$ в. из 14].

Итак, допустив $\forall a \in K (a \Vdash A \Rightarrow a \Vdash B)$ и $\exists \alpha \in K (\alpha \Vdash A \ \& \ \alpha \Vdash B)$, легко получаем противоречие, используя Утверждение 1.

Таким образом, Лемма 2. доказана.

Возвращаясь к доказательству МТ 1., сначала осуществим доказательство в одну сторону: $\forall C^+ C^+ \Vdash A \Rightarrow \forall R^+ R^+ \Vdash A$.

Предположим, что $\forall C^+ C^+ \Vdash A$, но не верно, что $\forall R^+ R^+ \Vdash A$, то есть $\exists R^+ R^+ \nVdash A$. По Лемме 1. $\forall R^+ \exists C^+ (C^+ \Vdash A \Rightarrow R^+ \Vdash A)$. Исключив кванторы общности и существования (C^+ - абс. огр.), получаем $C^+ \Vdash A \Rightarrow R^+ \Vdash A$, что по modus ponens с использованием $C^+ \Vdash A$ дает $R^+ \Vdash A$. В свою очередь, исключение квантора существования дает $R^+ \nVdash A$, что ведет к противоречию.

Доказательство метатеоремы в другую сторону осуществляется аналогично с использованием Леммы 2.

Таким образом, МТ 1. доказана. Следовательно, адекватность реляционной семантики ТЕ влечет адекватность комбинаторной семантики этой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев Д.В. Теория релевантного следования I: Аксиоматика. // Логические исследования. Выпуск 5. М., 1998. С.119-128.
2. Зайцев Д.В. Теория релевантного следования II: Семантика. // Логические исследования. Выпуск 6. М., 1999. С.109-115.
3. Dunn, J.M. and Meyer, R.K. Combinators and Structurally Free Logic // The Journal of the IGPL. 1993. Vol. 6.4.
4. Зайцев Д.В. Модальности и импликация. // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998. С.85-91.
5. Anderson, A.R. and Belnap, N.D., Jr. Entailment. The logic of relevance and necessity. Vol.1. Princeton, 1975.
6. Сегерберг К. Модальные логики с линейными отношениями альтернативности. // Семантика модальных и интенциональных логик. М., 1981. СС. 180-205.
7. Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М., 1987.
8. Anderson, A.R., Belnap, N.D., Jr., and Dunn, J.M. Entailment. The logic of relevance and necessity. Vol.2. Princeton, 1992.

Ю.В.Ивлев

КВАЗИМАТРИЧНАЯ ЛОГИКА – ОСНОВА ТЕОРИИ ФАКТИЧЕСКИХ (ФИЗИЧЕСКИХ) МОДАЛЬНОСТЕЙ*

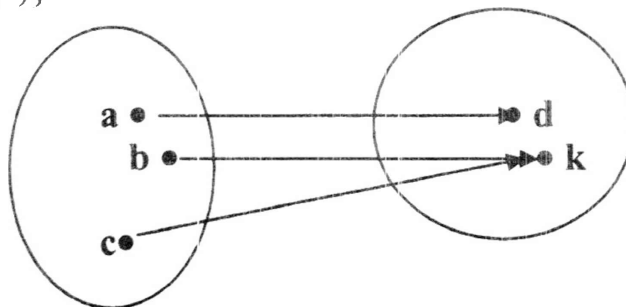
Abstract. *Quasi-matrix logic is based on generalisation of classical logic principles: bivalency (propositions take values from the domain $\{t$ (truth), f (falsity) $\}$); consistency (a proposition can not have both the values); excluded middle (a proposition necessarily has some of these values); identity (in a complex proposition, a system of propositions, an argument one and the same proposition has one and the same value from the domain $\{t, f\}$); matrix principle – logical connectives are defined by matrices. As a result of generalisation we have quasi-matrix logic principles: the principle of fourvalency (propositions take values from the domain $\{t^n, t^c, f^c, f^i\}$); consistency: can not have more than one value from $\{t^n, t^c, f^c, f^i\}$; the principle of excluded fifth; identity (in a complex proposition, a system of propositions, an argument one and the same proposition has one and the same value from the domain $\{t^n, t^c, f^c, f^i\}$); the quasi-matrix principle (logical terms are interpreted as quasi-functions). Quasi-matrix logic is a logic of factual modalities.*

Квазиматрица – это множество $(Q, G, qf_1, \dots, qf_s)$, где Q и G – непустые множества, $Q \subseteq G$; $qf_1, \dots, qf_s$ – квазифункции.

Если функцией называется соответствие, в силу которого определенный объект из некоторого множества соотносится с определенным объектом из того же или другого множества, то квазифункция – это соответствие, в силу которого некоторый объект из определенного подмножества некоторого множества соотносится с некоторым объектом из определенного подмножества того же или другого множества.

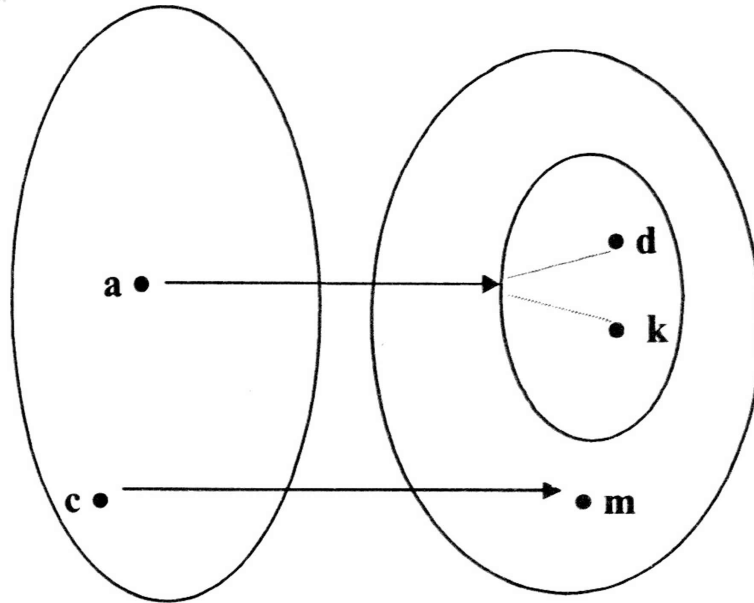
Примеры.

Функция: $\{(a,d), (b,k), (c,k)\}$.

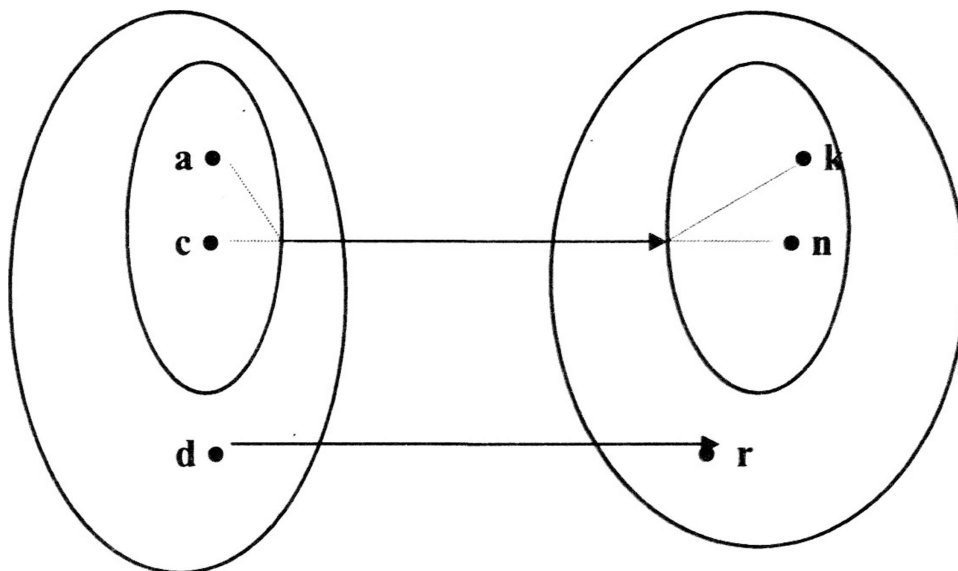


* Исследование поддержано РГНФ, грант 00-03-00319.

Квазифункция: $\{(a,d) \vee_2 (a,k), (c,m)\} = \{\{(a,d), (c,m)\} \vee_2 \{(a,k), (c,m)\}\}$.



Квазифункция: $\{\vee_4 ((a,k), (a,n), (c,k), (c, n)), (d,r)\} = \{\vee_4 [\{(a,k), (d,r)\}, \{(a,n), (d,r)\}, \{(c,k), (d,r)\}, \{(c, n), (d,r)\}]\}$



$\vee_2$ и $\vee_4$ – двух- и четырехместные метаязыковые строгие дизъюнкции. Будем считать, что дизъюнкция может быть вырожденной, то есть частным случаем квазифункции является функция. Тогда частным случаем квазиматрицы является матрица.

В общем случае объект, к которому применяется квазифункция, не определен. Не определено также значение квазифункции. Указана лишь подобласть области определения квазифункции, в которой этот объект содержится, и подобласть области значений, в

которой содержится объект, являющийся значением квази-функции.

Неопределенность может быть познавательной. Этот случай имеет место, если объективно соответствие является функциональным, но оно исследователю не полностью известно. Например, при переводе выражения одного языка на другой в словаре указываются три слова, соответствующие переводимому. Наиболее адекватно в данном контексте переводимому слову соответствует одно из трех, но переводчику не известно, какое. Такие ситуации возникают и при автоматическом переводе.

Другой причиной неопределенности является неопределенность самой реальности. Например, при планировании может возникнуть необходимость учесть следующую ситуацию. Известны пределы изменения количества сырья, которое будет произведено в следующем году. Жесткой же связи между определенным количеством производимого сырья и количеством производимой продукции, даже при известных количествах рабочей силы, оборудования и т. д., нет.

На примерах (без определений) квазифункции ввели в научный оборот Х. Райхенбах (H. Reichenbach) (1932, 1935, 1936), З. Заварский (Z. Zavorski) (1936), Ф. Гонзес (F. Gonseth) (1938, 1941), Н. Решер (N. Rescher) (1962, 1964, 1965, 1969).

Решер рассматривает материальную импликацию и дает ее определение:

A	$\supset$	B
t	t	t
t	f	f
f	(t,f)	t
f	(t,f)	f

(t,f) не является значением, это выражение означает “то ли истина, то ли ложь”, то есть в зависимости от конкретного содержания высказываний импликация в этих случаях может быть как истинной, так и ложной. Остальные связки определяются обычным образом.

Очевидно, что не все тавтологии классической логики высказываний вида $A \supset B$ принимают значения t при всех значениях составляющих.

Решер вводит понятие квазитавтологии. Это формула, которая принимает только значения t или (t,f). Если довести до логического конца предложение Решера, то следует признать квазитавтологией переменную p.

Далее Решер вслед за Гонзесом (но независимо) “исправляет” определения трехзначной логики Лукасевича:

$$\begin{array}{ccc} A & \wedge & B \\ 1/2 & (1/2, 0) & 1/2 \end{array}$$

Независимо от этих и, возможно, других авторов я пришел к сходным соображениям в конце шестидесятых – начале семидесятых годов при разработке модальной логики. Мне представлялось неудовлетворительным существовавшее тогда положение дел в модальной логике. Было разработано много “логических систем”, но не было известно, какие модальные понятия в них представлены. Даже не было известно, логические или фактические (физические) модальные понятия необходимости, возможности и т. д. ими определяются. И уж конечно не шла речь о типах фактических модальностей. Не было известно, могут ли эти “логические системы” использоваться для исследования рассуждений. Размышления над сложившимся положением дел в области модальной логики привели к тому, что я выделил в современных исследованиях по логике два направления: собственно логику и подражание логике. Собственно логика имеет своим предметом формы мыслей. Эту логику Х. Карри называет философской логикой. Подражание логике – это некоторая система, например алгебраическая, которая в каком-то отношении сходна с философской логикой (может быть сходна только в отношении некоторых значков). Далее под логикой я буду иметь в виду современную логику в смысле философской логики Карри.

Как в любой другой науке, в логике можно выделить две ступени развития – эмпирическую и теоретическую. Одним из свойств теории является ее способность объяснять явления. Таким свойством обладает, на мой взгляд, моя концепция логических модальностей, основы которой представлены в [4 и 5]. Теория фактических модальностей, которая может основываться на квазиматричной логике, находится в стадии разработки.

Разработку квазиматричной логики я начал с построения системы, которую назвал минимальной модальной логикой.

Минимальная модальная логика – $S_{\min}$. (Символы языка: $\Box$, $\Diamond$, $\neg$, $\supset$.) Известно утверждение Я. Лукасевича о невозможности определения модальных операторов “необходимо” ($\Box$) и “возможно” ($\Diamond$) в терминах “истина” и “ложь”. Это утверждение является верным лишь в случае истолкования указанных операторов в качестве функций. При истолковании их в качестве квазифункций определение в указанных терминах возможно.

Рассмотрим формулу $\Box A$. Пусть A имеет значение f (ложь). Тогда формула $\Box A$ тоже имеет значение f , так как несуществующее положение дел нельзя считать необходимым (логически или фактически). Таким образом, получена одна строка таблицы:

$\Box A$
 $f f$

Пусть формула A имеет значение t (истина). Какое значение в этом случае имеет формула $\Box A$? Значение не определено. Формула $\Box A$ имеет то ли значение t , то ли значение f . Эту ситуацию обозначим так: t/f . Рассуждая аналогично, устанавливаем, что при значении f формулы A значение формулы $\Diamond A$ неопределено. Определения знаков отрицания и импликации обычные. Выделенное значение – t .

Принципы построения классической логики высказываний и логики $S_{\min}$:

Принципы классической логики	Принципы квазиматричной логики $S_{\min}$
(1) принцип <u>двухзначности</u> – высказывания принимают значения из области $\{t, f\}$	принцип <u>двухзначности</u>
(2) принцип <u>непротиворечия</u> (высказывание не может иметь оба значения)	принцип <u>непротиворечия</u>
(3) принцип <u>исключенного третьего</u> (высказывание обязательно принимает значение из указанной области)	принцип <u>исключенного третьего</u>
(4) принцип <u>тождества</u> : в сложном высказывании, системе высказываний, аргументации одно и то же высказывание принимает одно и то же значение из области $\{t, f\}$	принцип <u>тождества</u>
(5) принцип обусловленности истинностного значения сложного высказывания истинностными значениями составляющих его простых высказываний (в пропозициональной логике этот принцип выступает в качестве <u>принципа матричности</u> – логические термины определяются посредством матриц, в логике предикатов он выражается в интерпретации логических терминов посредством функций).	принцип квазиматричности (логические термины интерпретируются посредством <u>квазиматриц</u>)

Семантически построенной системе адекватно исчисление $S_{\min}$, которое является расширением классического исчисления высказываний (КИВ) за счет добавления двух новых схем аксиом: $\Box A \supset A$, $A \supset \Diamond A$. Исчисление $S_{\min}$ является более бедной системой, чем основная модальная логика Я. Лукасевича, так как формула $\Box A \equiv \neg \Diamond \neg A$ в ней не доказуема.

Для доказательства метатеоремы о семантической полноте исчисления вводится понятие альтернативной интерпретации. Альтернативная интерпретация – это функция $\| \cdot \|$.

Определение альтернативной интерпретации.

Если P – пропозициональная переменная, то $\|P\| \in \{t, f\}$.

Если $\|A\|$ и $\|B\|$ определены,

то $\| \neg A \| = t \Leftrightarrow \| A \| = f$;
 $\| A \supset B \| = t \Leftrightarrow \| A \| = f$ или $\| B \| = t$;
 $\| A \| = f \Rightarrow \| \Box A \| = f$;
 $\| A \| = t \Rightarrow \| \Box A \| \in \{t, f\}$;
 $\| A \| = t \Rightarrow \| \Diamond A \| = t$;
 $\| A \| = f \Rightarrow \| \Diamond A \| \in \{t, f\}$.

Формула выполнима, если и только если она истинна при некоторой альтернативной интерпретации. Формула общезначима, если и только если она истинна при каждой альтернативной интерпретации. В качестве метатеоремы о семантической полноте доказано утверждение: существует альтернативная интерпретация $\| \cdot \|_{\Theta}$, при которой каждая формула из Θ является истинной. (Θ – максимальное совместимое с $S_{\min}$ множество формул.)

Четырехзначные квазиматричные логические системы

Значения t^n , t^c , f^c , f^i понимаются так: высказывание, принимающее значение t^n , описывает положение дел, которое имеет место в действительности и которое однозначно детерминировано какими-либо обстоятельствами; высказывание, принимающее значение t^c , описывает положение дел, которое имеет место в действительности и которое не детерминировано однозначно теми или иными обстоятельствами; высказывание, принимающее значение f^c , описывает положение дел, которого нет в действительности и отсутствие которого не детерминировано однозначно теми или иными обстоятельствами; высказывание, принимающее значение f^i , описывает положение дел, которое не имеет места в действительности и отсутствие которого однозначно детерминировано какими-либо обстоятельствами.

Четырехзначная квазиматричная логика основана на следующем обобщении принципов классической логики.

Принципы классической логики	Принципы квазиматричной логики
(1) принцип <u>двухзначности</u> – высказывания принимают значения из области $\{t, f\}$	принцип <u>четырёхзначности</u> : $\{t^n, t^c, f^c, f^i\}$
(2) принцип <u>непротиворечия</u> (высказывание не может иметь оба значения)	принцип <u>непротиворечия</u> : не может иметь более одного значения из $\{t^n, t^c, f^c, f^i\}$
(3) принцип <u>исключенного третьего</u> (высказывание обязательно принимает значение из указанной области)	принцип <u>исключенного пятого</u>
(4) принцип <u>тождества</u> : в сложном высказывании, системе высказываний, аргументации одно и то же высказывание принимает одно и то же значение из области $\{t, f\}$	принцип <u>тождества</u> : одно и то же значение из области $\{t^n, t^c, f^c, f^i\}$
(5) принцип обусловленности истинностного значения сложного высказывания истинностными значениями составляющих его простых высказываний (в пропозициональной логике этот принцип выступает в качестве <u>принципа матричности</u> – логические термины определяются посредством матриц, в логике предикатов он выражается в интерпретации логических терминов посредством функций).	принцип квазиматричности (логические термины интерпретируются посредством <u>квазиматриц</u>)

Логические термины те же, что и в S_{min} .

Определения логических терминов:

		a		b		c		d		e		f	
A	$\neg A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$
t^n	f^i	t	t	t^n	t^n	t^n	t^n	t^c	t^c	t^c	t^c	t	t
t^c	f^c	f	t	f^c	t^c	f^i	t^n	f^c	t^c	f^i	t^n	f^i	t^n
f^i	t^n	f	f	f^i	f^i	f^i	f^i	f^c	f^c	f^i	f^c	f	f
f^c	t^c	f	t	f^c	t^c	f^i	t^n	f^c	t^c	f^i	t^n	f^i	t^n

g		h		i	
$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\Box A$	$\Diamond A$
t	t	t^n	t^n	t^c	t^c
f^c	t^c	f	t	f	t
f	f	f^i	f^i	f^c	f^c
f^c	t^c	f	t	f	t

		B							B						
A	(-)	$\supset$	t^n	t^c	f^i	f^c	A	()	$\supset$	t^n	t^c	f^i	f^c		
			t^n	t^n	t^c	f^i		f^c			t^n	t^n	t^c	f^i	f^c
			t^c	t^n	t^c	f^c		f^c			t^c	t^n	t^c	f^c	f^c
			f^i	t^n	t^n	t^n		t^n			f^i	t^n	t^n	t^n	t^n
			f^c	t^n	t^c	t^c		t^c			f^c	t^n	t^c	t^c	t^n

		B			
(+) $\supset$		t^n	t^c	f^i	f
		t^n	t^n	t^c	f^c
A		t^c	t^n	t^c	f^c
		f^i	t^n	t^n	t^n
		f^c	t^n	t^c	t^c

Знаки t и f соответственно понимаются как сокращения для выражений t^n/t^c и f^i/f^c .

На основе приведенных определений строятся логические системы

$Sa^-, Sa, Sa^+, Sb^-, Sb, Sb^+, Sc^-, Sc, Sc^+, Sd^-, Sd, Sd^+, Se^-, Se, Se^+, Sf^-, Sf, Sf^+, Sg^-, Sg, Sg^+, Sh^-, Sh, Sh^+, Si^-, Si, Si^+$. Малая буква в названии системы соответствует способу определения модальных терминов, знаки +, - и отсутствие этих знаков соответствуют способу определения импликации. Выделенными значениями являются t^n и t^c .

Приведенные определения логических терминов введены на основе следующих соображений.

Пусть дана формула $\Box\Box A$. При значении t подформулы A , значение $\Box A$, как уже было сказано, не определено, то есть ситуация, описываемая высказыванием A , имеет место в действительности, но она детерминирована, например, однозначно или же не однозначно. В первом случае формуле $\Box A$ следует приписать значение t , а во втором f . То есть в первом случае высказывание A оценивается как истинное и фактически необходимое, в нашей терминологии имеет значение t^n . Какое значение в этом случае принимает формула $\Box\Box A$? Если положение дел, описываемое высказыванием A , однозначно терминировано какими-либо обстоятельствами, то

эти последние тоже могут быть детерминированы или не детерминированы какими-то иными обстоятельствами. То есть формула $\Box A$ тоже получает оценку t^n (или t^c) и т. д. Такие ситуации имеют место как в субъективной, так и в объективной действительности.

Виды однозначной и неоднозначной детерминации в биологии рассмотрены В.Ю. Ивлевым в [1, 2].

Формализацией семантически заданных систем являются исчисления, содержащие в качестве общей части все схемы аксиом классического исчисления высказываний, правило **modus ponens**, а также следующие схемы аксиом:

$$\Box A \supset A; \neg \Box \neg A \supset \Diamond A; \Diamond A \supset \neg \Box \neg A; \neg \Diamond A \supset \Box (A \supset B); \Box B \supset \Box (A \supset B); \Diamond B \supset \Diamond (A \supset B); \Diamond \neg A \supset \Diamond (A \supset B); \Diamond (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Diamond B).$$

Исчисление, представляющее собой расширение классического исчисления высказываний за счет последних восьми схем аксиом, обозначается буквой **S**. Соответствующие исчисления, обозначаемые так же, как и семантически заданные системы, строятся путем расширения исчисления **S** посредством следующих схем аксиом.

$$Sa^-: \Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Box B).$$

$$Sa: \Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B); \Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B); \Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset (\Diamond \neg B \supset (\neg A \supset \neg B))).$$

$$Sa^+: \Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B); \Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B).$$

$$Sb^-: \Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Box B); \Box A \supset \Box \Box A; \Diamond \Box A \supset \Diamond A; \Diamond A \supset \Diamond \Box A; \Box A \supset \Box \Diamond A; \Box \Diamond A \supset \Box A; \Diamond \Diamond A \supset \Diamond A.$$

$$Sb: \Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B); \Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B); \Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset (\Diamond \neg B \supset (\neg A \supset \neg B))) \Box A \supset \Box \Box A; \Diamond \Box A \supset \Diamond A; \Diamond A \supset \Diamond \Box A; \Box A \supset \Box \Diamond A; \Box \Diamond A \supset \Box A; \Diamond \Diamond A \supset \Diamond A.$$

$$Sb^+: \Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B); \Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B); \Box A \supset \Box \Box A; \Diamond \Box A \supset \Diamond A; \Diamond A \supset \Diamond \Box A; \Box A \supset \Box \Diamond A; \Box \Diamond A \supset \Box A; \Diamond \Diamond A \supset \Diamond A.$$

Исчисления Sc^- , Sd^- , Se^- , Sf , Sg^- , Sh^- , Si^- содержат схему аксиом $\Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Box B)$.

Исчисления Sc , Sd , Se , Sf , Sg , Sh , Si содержат схемы аксиом $\Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$; $\Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset (\Diamond \neg B \supset (\neg A \supset \neg B)))$.

Исчисления Sc^+ , Sd^+ , Se^+ , Sf^+ , Sg^+ , Sh^+ , Si^+ содержат схемы аксиом $\Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$;

Исчисления, в обозначении которых имеется одна и та же малая буква, например исчисления Sc^- , Sc , Sc^+ , отличаются только множествами схем аксиом

$$\{\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Box B)\}, \quad \{\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B); \quad \Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B); \\ \Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset (\Diamond \neg B \supset (\neg A \supset \neg B)))\}, \quad \{\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B); \\ \Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)\}.$$

Остальные дополнительные схемы аксиом этих исчислений одни и те же.

Приведем эти последние дополнительные схемы аксиом.

Исчисления Sc^- , Sc , Sc^+ . $\Box A \supset \Box \Box A$; $\Diamond \Diamond A \supset \Diamond A$; $\Diamond \Box A \supset \Box A$; $\Diamond A \supset \Box \Diamond A$.

Исчисления Sd^- , Sd , Sd^+ . $\Diamond A^*$, где A^* — модализированная формула. Исчисления Se^- , Se , Se^+ . $\Diamond \Diamond A$; $\Diamond \neg \Box A$; $\neg \Diamond A \supset \Diamond \Box A$; $\Box A \supset \Diamond \neg \Diamond A$; $\Diamond \Box A \supset (A \supset \Box A)$; $\Diamond \Box A \supset (\Diamond A \supset A)$; $A \supset (\Diamond \neg A \supset \Box \Diamond A)$; $\neg A \supset (\Diamond A \supset \Box \Diamond A)$.

Исчисления Sf^- , Sf , Sf^+ . $\Diamond \Box A \supset (A \supset \Box A)$; $\Diamond \Box A \supset (\Diamond A \supset A)$; $A \supset (\Diamond \neg A \supset \Box \Diamond A)$; $\neg A \supset (\Diamond A \supset \Box \Diamond A)$.

Исчисления Sg^- , Sg , Sg^+ . $A \supset (\neg \Box A \supset \Diamond \Box A)$; $\neg A \supset (\Diamond A \supset \Diamond \Box A)$; $\Box \Diamond A \supset (A \supset \Box A)$; $\Box \Diamond A \supset (\Diamond A \supset A)$.

Исчисления Sh^- , Sh , Sh^+ . $\Box A \supset \Box \Box A$; $\Diamond \Box A \supset \Diamond A$; $\Box A \supset \Box \Diamond A$; $\Diamond \Diamond A \supset \Diamond A$.

Исчисления Si^- , Si , Si^+ . $\Diamond \Diamond A$; $\Diamond \neg \Box A$; $\neg \Diamond A \supset \Diamond \Box A$; $\Box A \supset \Diamond \neg \Diamond A$.

Для доказательства семантической полноты каждого из исчислений Sb^- , Sc^- , Sd^- , Sd , Se^- (семантики этих исчислений являются матричными) доказана следующая лемма. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — все различные переменные, входящие в формулу D , а $b_1, \dots, b_n$ — истинностные значения этих переменных. Пусть A_i есть $\Box a_i$, $a_i \wedge \Diamond \neg a_i$, $\neg \Diamond a_i$ или $\neg a_i \wedge \Diamond a_i$ в зависимости от того, есть ли b_i t^n , t^c , f^i или f^c ; пусть D^* есть $\Box D$, $D \wedge \Diamond \neg D$, $\neg \Diamond D$ или $\neg D \wedge \Diamond D$ в зависимости от того, принимает ли D значение t^n , t^c , f^i , f^c при значениях $b_1, \dots, b_n$ переменных $a_1, \dots, a_n$. Тогда

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow D^*.$$

($\Rightarrow$ — знак следования.) Доказательство проведено методом обратной математической индукции.

Семантики остальных исчислений являются (собственно) квазиматричными. При доказательстве метатеорем о семантической полноте этих исчислений используются понятия альтернативных интерпретаций. Сформулируем это понятие для системы Sa^+ .

Альтернативная интерпретация – это функция $\| \cdot \|$, определяемая следующим образом.

Если P – пропозициональная переменная, то $\|P\| \in \{t^n, t^c, f^c, f\}$.

Если $\|A\|$ и $\|B\|$ определены, то $\|\neg A\| = t^n \Leftrightarrow \|A\| = f^c$; $\|\neg A\| = t^c \Leftrightarrow \|A\| = f^c$; $\|\neg A\| = f \Leftrightarrow \|A\| = t^n$; $\|\neg A\| = f^c \Leftrightarrow \|A\| = t^c$;

$\|A \supset B\| = f^c \Leftrightarrow (\|A\| = t^n \text{ и } \|B\| = f^c) \text{ или } (\|A\| = t^c \text{ и } \|B\| = f^c), \text{ или } (\|A\| = t^c \text{ и } \|B\| = f)$; $\|A \supset B\| = f \Leftrightarrow \|A\| = t^n \text{ и } \|B\| = f^c$; если или $(\|A\| = t^n \text{ и } \|B\| = t^c)$, или $(\|A\| = f^c \text{ и } \|B\| = f)$, то $\|A \supset B\| = t^c$; если $\|A\| = f$ или $\|B\| = t^n$, то $\|A \supset B\| = t^n$; если или $\|A\| = \|B\| = t^c$, или $(\|A\| = f^c \text{ и } \|B\| = t^c)$, или $\|A\| = \|B\| = f^c$, то $\|A \supset B\| \in \{t^n, t^c\}$;

$\|A\| = t^n \Rightarrow \|\Box A\| \in \{t^n, t^c\}$; если или $\|A\| = t^c$, или $\|A\| = f^c$, или $\|A\| = f$, то $\|\Box A\| \in \{f^c, f\}$;

$\|A\| = f \Rightarrow \|\Diamond A\| \in \{f^c, f\}$; если или $\|A\| = t^n$, или $\|A\| = t^c$, или $\|A\| = f^c$, то $\|\Diamond A\| \in \{t^n, t^c\}$.

В качестве метатеоремы о семантической полноте доказывается утверждение: *множество формул Δ , совместимое с исчислением, выполнимо*. Множество формул Δ расширяется до максимального совместимого с исчислением множества формул Θ . Вводится функция $\| \cdot \|_\Theta$ такая, что для произвольной формулы A верно:

$\|A\|_\Theta = t^n \Leftrightarrow A \in \Theta \text{ и } \Box A \in \Theta$; $\|A\|_\Theta = t^c \Leftrightarrow A \in \Theta \text{ и } \Diamond \neg A \in \Theta$; $\|A\|_\Theta = f \Leftrightarrow \neg A \in \Theta \text{ и } \neg \Diamond A \in \Theta$; $\|A\|_\Theta = f^c \Leftrightarrow \neg A \in \Theta \text{ и } \Diamond A \in \Theta$. Индукцией по числу вхождений логических терминов в формулу доказывается, что функция $\|A\|_\Theta$ является альтернативной интерпретацией.

Очевидно, что функция $\|A\|_\Theta$ приписывает выделенное значение каждой формуле из Δ .

S_r – квазиматричная трехзначная логика. (Язык содержит те же символы.) Вводятся значения n, c, i , которые соответственно читаются “необходимо”, “случайно”, “невозможно”. Положение дел необходимо, если и только если оно однозначно детерминировано какими-либо обстоятельствами; положение дел случайно, если и только если ни оно, ни его отсутствие не детерминировано однозначно какими-либо обстоятельствами; положение дел невозможно, если и только если его отсутствие однозначно детерминировано какими-либо обстоятельствами. Фактически здесь и выше оценки положений дел я переношу на высказывания. К сожалению, мне не удалось подобрать соответствующих подходящих терминов для оценки высказываний.

Логика S_r основана на следующих обобщениях принципов классической логики:

Принципы классической логики	Принципы квази-матричной логики S_r
(1) принцип <u>двухзначности</u> – высказывания принимают значения из области $\{t, f\}$	принцип <u>трехзначности</u> : из области $\{n, c, i\}$
(2) принцип <u>непротиворечия</u> (высказывание не может иметь оба значения)	принцип <u>непротиворечия</u> : не может иметь более одного значения из области $\{n, c, i\}$
(3) принцип <u>исключенного третьего</u> (высказывание обязательно принимает значение из указанной области)	принцип <u>исключенного четвертого</u>
(4) принцип <u>тождества</u> : в сложном высказывании, системе высказываний, аргументации одно и то же высказывание принимает одно и то же значение из области $\{t, f\}$	принцип <u>тождества</u> : принимает одно и то же значение из области $\{n, c, i\}$
(5) принцип обусловленности истинностного значения сложного высказывания истинностными значениями составляющих его простых высказываний (в пропозициональной логике этот принцип выступает в качестве <u>принципа матричности</u> – логические термины определяются посредством матриц, в логике предикатов он выражается в интерпретации логических терминов посредством функций).	принцип <u>квазиматричности</u> (логические термины интерпретируются посредством <u>квазиматриц</u>)

Определения логических терминов:

A				B			
A	$\neg A$	$\Box A$	$\Diamond A$	$\supset$	n	c	i
n	i	n	n	n	n	c	i
c	c	i	n	A	c	n c	c
i	n	i	i	i	n	n	n

$n|c$ понимается как “то ли n , то ли c ”. Выделенное значение – n .

Соответствующее исчисление включает все схемы аксиом КИВ, в которых метасимволы A, B, C обозначают модализирован-

ные формулы, **modus ponens**, **правило Геделя**, все схемы аксиом исчисления S_c^+ , дополнительные по отношению к КИВ, а также схемы: $\Box A \supset \Diamond A$; $\neg A \supset \neg \Box A$; $\neg \Diamond A \supset \neg A$; $A \supset \Diamond A$.

Альтернативная интерпретация – это функция $\| \cdot \|$, определяемая следующим образом.

Если P – пропозициональная переменная, то $\|P\| \in \{n, c, i\}$.

Если $\|A\|$ и $\|B\|$ определены, то $\|\neg A\| = n \Leftrightarrow \|A\| = i$; $\|\neg A\| = c \Leftrightarrow \|A\| = c$; $\|\neg A\| = i \Leftrightarrow \|A\| = n$;

если $\|A\| = i$ или $\|B\| = n$, то $\|A \supset B\| = n$; если $\|A\| = \|B\| = c$, то $\|A \supset B\| \in \{n, c\}$; если $\|A\| = c$ и $\|B\| = i$, то $\|A \supset B\| = c$; $\|A\| = n$ $\|B\| = i \Leftrightarrow \|A \supset B\| = i$;

$\|\Box A\| = n \Leftrightarrow \|A\| = n$; если $\|A\| = c$ или $\|A\| = i$, то $\|\Box A\| \in i$;

$\|\Diamond A\| = i \Leftrightarrow \|A\| = i$; если $\|A\| = n$ или $\|A\| = c$, то $\|\Diamond A\| = n$.

Метатеорема о семантической полноте формулируется и доказывается так же, как и в предшествующем случае.

Некоторые особенности этой логической системы.

Во-первых, в ней имеет место **правило Геделя**.

Во-вторых, все производные правила вывода классического исчисления высказываний, являясь правилами вывода данного исчисления, применимы в выводе лишь к модализированным формулам. Некоторые (по крайней мере некоторые) прямые правила вывода натурального исчисления высказываний применимы и к немодализованным формулам, например, правило: $A \vee B, \neg A \Rightarrow B$. Такие не прямые правила, как правило дедукции

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \supset B}$$

и приведения к абсурду

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B; \Gamma, A \Rightarrow \neg B}{\Gamma \Rightarrow \neg A}$$

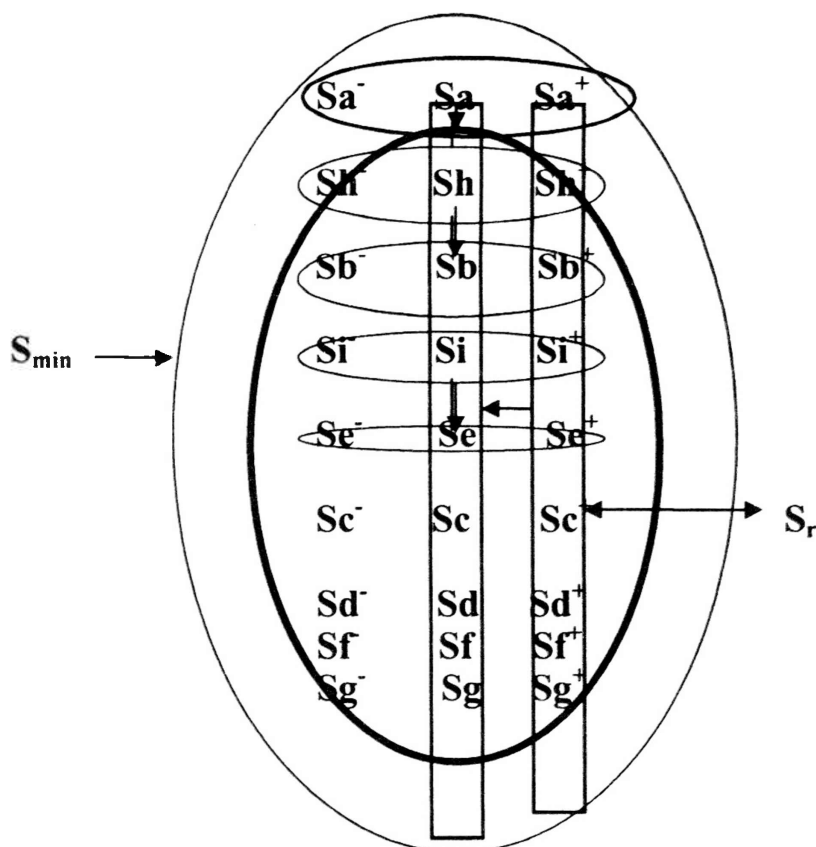
не применимы к немодализованным формулам в выводе. Однако применимым к любым формулам в выводе является *ослабленное правило приведения к абсурду*

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B; \Gamma, A \Rightarrow \neg B}{\Gamma \Rightarrow \Diamond \neg A}$$

• • •

Можно выявить зависимости между исчислениями. $S_{\min}$ включается (по множеству теорем) в каждое из приведенных исчисле-

ний, кроме S_r . S включается в каждое из исчислений, кроме $S_{\min}$ и S_r . Эти и некоторые другие отношения между исчислениями можно представить наглядно.



Стрелка обозначает включение (по множеству теорем) исчисления $S_{\min}$ в каждое из исчислений, находящихся в овале, или включение каждого из исчислений, находящихся в овале или прямоугольнике, в соответствующее ему исчисление, находящегося в овале или прямоугольнике, например, исчисление Sa^- включается в исчисления Sb^- , Sc^- , Sd^- , Se^- , Sf^- , Sg^- , Sh^- , Si^- ; а Si , – в Se ; Sc^+ – в Sc и т. д. Двойная стрелка указывает, что исчисление Sc^+ имеет наибольшее количество теорем, общих с исчислением S_r .

Открытым является вопрос о возможности построения алгебраических и реляционных семантик для приведенных систем. Исчисление S не имеет и квазиматричной семантики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев В.Ю. “Необходимость”, “случайность”, “возможность” в биологии и их философские обобщения // Категории. Философский журнал. 1997, № 2.

2. *Ивлев В. Ю.* Категории необходимости, случайности и возможности: их смысл и методологическая роль в научном познании // *Философия и общество.* 1997, № 3.
3. *Ивлев В. Ю., Ивлев Ю. В.* Проблема построения теории фактических модальностей // *Логические исследования.* Вып. 7. М., 2000.
4. *Ивлев Ю. В.* Модальная логика. М., 1991.
5. *Ивлев Ю. В.* Содержательная семантика модальной логики. М., 1985.
6. *Ивлев Ю. В.* Квазифункциональная логика // *НТИ, сер. 2. Информ. процессы и системы.* 1992, № 6.
7. *Ивлев Ю. В.* Таблицы истинности для модальной логики. // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Философия.* 1973, № 6.
8. *Карпенко А. С.* Многозначные логики. М., 1997.
9. *Финн В. К.* О некоторых характеристических истинностных таблицах классической логики и трехзначной логики Я. Лукасевича // *Исследования логических систем.* М., 1970.
10. *Rescher N.* Many-valued logic. N.Y., 1969.

А.С.Карпенко

ПОДСТРУКТУРНЫЕ ЛОГИКИ: ГИЛЬБЕРТОВСКИЙ ПОДХОД*

Abstract. *There analogies of substructural logics in Gilbert's form are considered. The main emphasis is made on Łukasiewicz's infinite valued logic L_{∞} and logic **RM**. Since some Gilbert's substructural logics are extensions of classical logic then the problem of explication of the notion of "substructural logics" arises.*

Термин "подструктурные логики" (substructural logics) был предложен К.Дошеном во время проведения в 1990 г. в Тюбингене "Семинара по естественным языковым системам", по итогам которого был опубликован сборник работ [19]. В самом конце прошлого века появилась также монография Г.Ресталла [29], посвященная этой теме.

Подструктурными обычно называют такие логические системы, секвенциальная формулировка которых получается из генценовских исчислений (см. [2]) **LK** (классической логики) и **LJ** (интуиционистской логики) за счет элиминации и ограничения различных структурных правил: утончения, сокращения и перестановки. Логические системы, полученные подобным образом из исчисления **LK**, будем называть *классическими подструктурными логиками*, а полученные из **LJ** – *интуиционистскими подструктурными логиками*. Однако отметим, что при рассмотрении подструктурных логик может также учитываться "структура" антецедента и сукцедента. Кроме ограничений на структурные правила в последнее время также рассматриваются различные ограничения на операционные правила, например, на правила для отрицания.

На самом деле, подструктурные логики открывались и перестраивались в течение последних 70 лет (и даже раньше, например, трехзначная логика Лукасевича, построенная в 1920 г., которая является логикой без сокращения) и самым известным примером здесь является интуиционистская логика. **LJ** отличается от **LK** тем, что сукцеденты секвенций первой могут состоять не более, чем из одной формулы. С другой стороны, из гильбертовского исчисления классической логики **TV** интуиционистская

* Работа выполнена при поддержке РФНФ, гранты № 01-03-00403 и № 99-03-19706.

логика **H** получается заменой закона снятия двойного отрицания $\neg\neg p \rightarrow p$ законом Дунса Скота $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ [7, с. 94]. Или за счет отбрасывания из аксиоматизации **TV** закона исключенного третьего $p \vee \neg p$ [30, р. 313].

Теперь отметим, что аналогами структурных правил утончения, сокращения и перестановки являются следующие формулы:

- | | |
|---|----------------|
| K. $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ | (утончение) |
| W. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ | (сокращение) |
| C. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ | (перестановка) |

Отдельными направлениями в области подструктурных логик являются **BCI**- и **BCK**-логики (см. [28]); релевантные логики (логики без утончения) [9], [14], [15]; различные исчисления Ламбека, которые являются логиками без утончения, сокращения и перестановки. В [25] строится полное (full) исчисление Ламбека – по существу интуиционистское исчисление без структурных правил, которое автор рассматривает как наиболее фундаментальное из всех подструктурных логик, которое, к тому же, играет важную роль в теоретических приложениях компьютерной науки. В 1987 г. появилась логическая система под названием "линейная логика" [20], имплицативный фрагмент которой представляет собой **BCI**-логику, т.е. логику без утончения и сокращения. Кроме обычных операций линейная логика снабжена различными другими операциями. Она нашла широкое применение в компьютерных науках. За удивительно короткое время образовалось новое направление [31]).

Заметим, что все выше названные направления относятся к сфере интуиционистских подструктурных логик, которые изучены намного тщательнее, чем классические подструктурные логики. Именно первому классу логик посвящена вводная статья Дошена к [19].

Некоторые примеры классических подструктурных логик (бесконечнозначная логика Лукасевича **L_∞** [24] и логика **RM** [14]) описываются матричным способом в [29, ch. 8], но совершенно не обсуждается, как эти логики получаются из **LK**. Как следует из работы В.Н.Гришина [4], элиминация правила сокращения из **LK** не дает **L_∞**, а на самом деле оказалось, что сами секвенциальные формулировки **L_∞** и **RM** чрезвычайно сложны (см., соответственно, работы [13] и [16]). Однако проблема построения логик **L_∞** и **RM** как подструктурных сравнительно легко решается, если мы перейдем к гильбертовским исчислениям.

Обратим внимание, что целым направлением в области подструктурных логик являются "логики без сокращения" [27]. Еще Хао Ван в 1962 г. в работе "На пути к механической математике" [12] выдвинул гипотезу о том, что разрешимые фрагменты исчисления предикатов можно формализовать без привлечения правил сокращения. Первая работа в этом направлении появилась только в 1971 г. и принадлежит В.А.Смирнову (см. [10, гл. 5]). См. также [23]. Одним из наиболее интересных примеров логик без сокращения являются многозначные логики Лукасевича, как *конечные*, так и *бесконечнозначная*. Свойства их столь необычны, что изучение этих логик к концу XX века стало исключительно интенсивным, что объясняется, в первом случае, их связью с теорией простых чисел (см. [6]) и, во втором случае, их глубокой связью с фундаментальными алгебраическими структурами совершенно различной природы (см. [18]).

Теперь покажем, что гильбертовское исчисление L_∞ получается из аксиоматизации классической логики TV за счет элиминации аксиомы сокращения $W: (p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$. Оказывается, наши работы в области построения булевых решеток импликативных логик имеют самое непосредственное отношение к классическим подструктурным логикам гильбертовского типа (см. [5] и [22]).

Рассмотрим следующие импликативные формулы:

I. $p \rightarrow p$

B. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

C. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

W. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

K₁. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q))$

X₂. $(p \rightarrow ((q \rightarrow q) \rightarrow p)) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p) \rightarrow p))$.

N. $f \rightarrow p$.

Правила вывода: *modus ponens* и подстановка.

Заметим, что K_1 есть ограничение K за счет подстановки в последнюю $p \rightarrow q$ вместо p и r вместо q .

ТЕОРЕМА 1. $IBCWK_1X_2N$ есть *независимая* аксиоматизация классической пропозициональной логики TV [5].

ТЕОРЕМА 2. TV без закона сокращения W есть бесконечнозначная логика Лукасевича L_∞ [5].

При этом $IBCW$ есть импликативный фрагмент релевантной логики **R**. $IBCWK_1$ – импликативный фрагмент интуиционистской

логики **H**. Но **IBCK₁X₂** не является импликативным фрагментом **L_∞**. Поэтому заменим **X₂** на **X₃**:

$$(((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow r \rightarrow (((((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r).$$

Начиная с 1995 г. предпринимались настойчивые попытки показать независимость аксиомы **I** от аксиом **BCWK₁X₃**, или наоборот, доказать выводимость **I** из аксиом **BCWK₁X₃**. Поскольку вопрос оставался открытым, то вместо аксиомы **X₃** была взята аксиома **X₄**:

$$(p \rightarrow p) \rightarrow (((((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow r) \rightarrow (((((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r)).$$

В итоге, **IBCK₁X₄N** есть независимая аксиоматизация **TV**, **IBCK₁X₄** – импликативный фрагмент **TV**, **IBCK₁X₄** – импликативный фрагмент **L_∞**. Более того, **IBCW₁X₄** есть импликативный фрагмент **RM**, в то время как **IBCW₁X₂** таковым не является.

Заметим, что только в этом году В.Е.Комендантским [8] с помощью прувера Otter была доказана выводимость **I** из **BCWK₁X₃**. Приведем реконструкцию этого доказательства.

Пусть каждый доказанный тезис будет иметь свой номер и предшествующую строку доказательства, которая состоит из двух частей, разделенных звездочкой *. Слева стоит формула (или ее номер), в которую произведена подстановка и которая является большей посылкой. Справа указывается меньшая посылка, которая также может быть получена за счет подстановки. Результат применения modus ponens указывается посредством тире, затем указывается номер формулы, после чего вся строка заканчивается запятой, а доказанная формула точкой.

ТЕОРЕМА 3. **B, C, W, K₁, X₃ |– I.**

1. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)).$
2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)).$
3. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q).$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q)).$
5. $(((((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow r) \rightarrow (((((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r)).$
 $3 \text{ } p/p \rightarrow q, q/p \rightarrow q * 4 \text{ } r/p \rightarrow q - 6,$
6. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q).$
 $2 \text{ } p/p \rightarrow q, q/p, r/q * 6 - 7,$
7. $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q).$
 $3 \text{ } p/(((p \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q * 5 \text{ } q/p, r/q - 8,$
8. $(((((p \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q)$
 $2 \text{ } p/q \rightarrow r, q/p \rightarrow q, r/p \rightarrow r * 1 - 9,$

$$9. (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

$$9 \text{ q}/(p \rightarrow q) \rightarrow q * 7 - 10,$$

$$10. (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r).$$

$$8. \text{q}/p \rightarrow p * \text{q}/p, r/p - 11,$$

$$11. p \rightarrow p.$$

В заключение хотелось бы вернуться к пониманию того, что такое "подструктурные логики". Создается впечатление, что любая подструктурная логика есть *существенное* ограничение классической. Однако гильбертовские аксиоматизации некоторых подструктурных логик можно представить как расширение классической. Это имеет место, например, для широкого класса многозначных логик [1], в том числе для логик Лукасевича; для релевантной логики **R** [26]. На то, что интуиционистская логика **H** есть расширение классической **TV**, указывает К.Гёдель [21]. При этом Гёдель опирается на результат Гливенко 1929 г. (см. [3]) о переводе **H** в **TV**. Именно теория переводов и погружений одних логических систем в другие [11], которая сейчас бурно развивается (см., например, [17]), может существенно прояснить принципы взаимоотношения различных логических систем и выяснить, что на самом деле представляют собой подструктурные логики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аншаков О.М. & Рычков С.В. Об одном способе формализации и классификации многозначных логик // Семиотика и информатика. Вып. 23. 1984. С. 78-106.
2. Генцен Г. Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967.
3. Гливенко В. О некоторых аспектах логики Брауэра // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М., 1999. С. 19-23.
4. Гришин В.Н. Об одной нестандартной логике и ее применении к теории множеств // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 135-171.
5. Карпенко А.С. Классификация пропозициональных логик // Логические исследования. Вып. 4. М.: Наука, 1997. С. 107-133.
6. Карпенко А.С. Логика Лукасевича и простые числа. М.: Наука, 2000.
7. Клини С.К. Введение в метаматематику. М.: ИИЛ, 1957.
8. Комендантский В.Е. OTTER и доказательство рефлексивности импликации // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. Вып. XV. М., 2001.
9. Сидоренко Е.А. Релевантная логика. М.: ИФРАН, 2000.

10. Смирнов В.А. Формальный вывод и логические исчисления. М.: Наука, 1972. (Переиздано с комментариями: Смирнов В.А. Теория логического вывода. М.: РОССПЭН, 1999. С. 16-233).
11. Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987. (Переиздано: Смирнов В.А. Логико-философские труды. М.: УРСС, 2001).
12. Хао Ван. На пути к механической математике // Кибернетический сборник. Вып. 5. 1962. С. 114-165. (Перевод с англ.: Wang Hao. Toward mechanical mathematics // IBM J. Res. Devel. 1960. Vol. 4. N 1. P. 2-22).
13. Aguzzoli S. & Ciabattoni A. Finiteness in infinite-valued Łukasiewicz logic // Journal of Logic, Language, and Information. 2000. Vol. 9. P. 5-29.
14. Anderson A.R. & Belnap N.D., jr. Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol. 1. Princeton Univ. Press, 1975.
15. Anderson A. R., Belnap N.D., jr., Dunn J. M. Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol. 2. Princeton Univ. Press, 1992.
16. Avron A. A constructive analyse of RM // The Journal of Symbolic Logic. 1987. Vol. 52. N 2.
17. Carnielli W.A. & D'Ottaviano M. L. Translations between logical systems: A MANIFESTO // Logique et Analyse. 1997. N 157. P. 67-81.
18. Cignoli R., D'Ottaviano J., Mundici D. Algebraic Foundation of Many-Valued Reasoning. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
19. Dozen K. & Schroeder-Heister P. (eds.). Substructural Logics. Oxford, 1993.
20. Girard J.Y. Linear logic // Theoretical Computer Science. 1987. Vol. 50. P. 1-102.
21. Gödel. K. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie // Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. 1933. Vol. 4. P. 34-38. (Англ. пер.: On intuitionistic arithmetic and number theory // K.Gödel. Collected Works / Ed. in chief S.Feferman. N.Y.: Oxford Univ. Press. Vol. 1. 1986. P. 287-295).
22. Karpenko A.S. The classification of propositional calculi // Studia Logica. 2000. Vol. 66. P. 253-271.
23. Kiriyaama E. & Ono H. The contraction rule and decision problems for logics without structural rules // Studia Logica. 1991. Vol. 50. P. 299-319.
24. Łukasiewicz J. & Tarski A. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. Classe III. 1930. Vol. 23. P. 1-21. (Англ. перевод: Investigations into the sentential calculus // Łukasiewicz J. Selected Works. Warszawa: PWN, 1970. P. 131-152).
25. MacCaull W. Relational semantics and a relational prove system for full Lambek calculus // The Journal of Symbolic Logic. 1998. Vol. 63. P. 623-637.
26. Meyer R.K. New axiomatics for relevant logics - I // Journal of Philosophical Logic. 1974. Vol. 3. P. 53-58.

-
27. *Ono H. & Komori Y.* Logics without the contraction rule // The Journal of Symbolic Logic. 1985. Vol. 50. P. 169-201.
 28. *Prior A.N.* Formal Logic. Oxford: Clarendon Press, 1962.
 29. *Restall G.* An Introduction to Substructural Logics. Routledge, 2000.
 30. *Rasiowa H.* An Algebraic Approach to Non-classical Logics. Warszawa: PWN, 1974.
 31. *Troelstra A.S.* Lectures on Linear Logic. Stanford: CSLI, 1992.

Л.Л.Максимова

НЕЯВНАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ В ПАРАНЕПРОТИВОРЕЧИВЫХ РАСШИРЕНИЯХ МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ¹

Abstract. *The family $E(J)$ of extensions of Johansson's minimal logic J can be divided into two disjoint parts: paraconsistent logics and superintuitionistic logics. We apply the results and methods found in our study of superintuitionistic logics to paraconsistent logics. We obtain the full description of paraconsistent extensions of the logic JE' containing J , which have the interpolation property CIP or the projective Beth property PBP. In addition, we find some necessary condition for a logic in $E(J)$ to have PBP or CIP.*

1. Введение

Теория паранепротиворечивости, возникшая в 70-е годы и находившаяся в русле интересов В.А.Смирнова [1], особенно активно развивается в настоящее время. Теории, основанные на паранепротиворечивых логиках, могут содержать в себе противоречие и при этом не обязательно совпадать с множеством всех формул.

Мы рассматриваем семейство $PC(J)$ паранепротиворечивых расширений минимальной логики J Йохансона и исследуем проблему описания логик из этого семейства, обладающих проективным свойством Бета [2] или интерполяционным свойством.

Семейство $E(J)$ всех логик, содержащих J , включает в себя семейство $E(Int)$ суперинтуиционистских логик, чья теория достаточно хорошо изучена. Паранепротиворечивые логики из $E(J)$ — это в точности логики, не входящие в $E(Int)$.

В [3] был найден полный список суперинтуиционистских логик с проективным свойством Бета РВР: их оказалось 16, включая противоречивую логику; восемь из них обладают интерполяционным свойством СІР. Кроме того, оба свойства оказались разрешимыми на классе суперинтуиционистских логик [4, 5]. Это означает, что существует алгоритм, который для любого конечного множества Ax схем аксиом распознает, обладает ли нужным свойством логика $Int+Ax$, полученная добавлением новых схем аксиом к аксиомам интуиционистской логики Int . Аналогичные результаты доказаны в [6] для позитивных логик, содержащих позитивный фрагмент интуиционистской логики. Более точно,

¹ Работа выполнена при поддержке РФНФ, грант 00-03-00108

существуют в точности семь позитивных логик с RBP, из них четыре логики имеют CIP; оба свойства RBP и CIP разрешимы на классе позитивных логик.

На первый взгляд может показаться, что разрешимость свойства легко следует из конечности числа логик, обладающих этим свойством. На самом деле это далеко не так, потому что одна и та же логика допускает бесконечно много аксиоматизаций. Известно, что в общем случае проблема аксиоматизации неразрешима.

Мы применим результаты статей [3,6] для доказательства следующих утверждений:

1. Существуют в точности шесть паранепротиворечивых позитивно аксиоматизируемых расширений логики J с RBP, из них три логики обладают интерполяционным свойством.

2. Логика $J+\perp$ имеет точно шесть паранепротиворечивых расширений с RBP, из них три имеют CIP.

3. Если логика L из $E(J)$ имеет CIP или RBP, то обе логики $L+\perp$ и $L+Int$ обладают тем же свойством.

4. Для любых логик L из $E(J+\perp)$ и L' из $E(Int)$, их пересечение имеет RBP (или CIP) тогда и только тогда, когда обе логики имеют RBP (соответственно CIP).

5. Проективное свойство Бета и интерполяционное свойство разрешимы в семействе позитивно аксиоматизируемых расширений логики J и в семействе всех расширений паранепротиворечивой логики $J+(\perp \vee (\perp \Rightarrow A))$.

2. Определения

Пусть P – список переменных. Через $A(P)$ обозначаем формулу, все переменные которой входят в P . Говорим, что исчисление L обладает *проективным свойством Бета RBP*, если для любой формулы $A(P, Q, x)$ из выводимости в L формулы

$$A(P, Q, x) \& A(P, Q', y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$$

следует выводимость $A(P, Q, x) \Rightarrow (x \Leftrightarrow B(P))$ для подходящей формулы $B(P)$ (здесь P, Q, Q' – попарно не пересекающиеся списки переменных, не содержащие переменных x и y); *свойство Бета BP* определяется как частный случай RBP при пустом Q . Формула $B(P)$ называется *явным определением x в L*.

Следуя [7], можно вывести RBP из *интерполяционного свойства CIP*, определенного следующим образом (где списки P, Q, R попарно не пересекаются):

CIP. Если $A(P, Q) \Rightarrow B(P, R)$ выводима в L, то существует такая формула $C(P)$, что обе формулы $A(P, Q) \Rightarrow C(P)$ и $C(P) \Rightarrow B(P, R)$ выводимы в L.

По аналогии с [8] можно доказать, что все позитивные логики, рассматриваемые в данной статье, и все расширения логики J обладают свойством Бета ВР.

Отметим, что приведенные выше формулировки свойств Бета и интерполяционного свойства предполагают, что язык содержит по крайней мере одну пропозициональную константу. В самом деле, во всех рассматриваемых в статье исчислениях выводимы формулы $x \& y \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$ и $(q \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow r)$. Поэтому из справедливости ВР или СР в каком-либо исчислении следует существование формулы B , не имеющей переменных.

Под *логикой* мы понимаем любое множество формул данного фиксированного языка, замкнутое относительно правил подстановки и modus ponens: $A, A \Rightarrow B / B$. Если L – логика, то через $E(L)$ обозначаем множество логик того же языка, что и L , содержащих данную логику L .

Если L – логика и Ax – множество формул, то через $L + Ax$ обозначаем наименьшую логику, содержащую $L \cup Ax$, то есть замыкание указанного объединения относительно двух правил вывода.

Теорией, основанной на логике L , или L -теорией называем множество формул в языке логики L , замкнутое относительно правила modus ponens. Логику или теорию называем *непротиворечивой*, если она не совпадает с множеством всех формул. Логику L называем *паранепротиворечивой*, если существует непротиворечивая L -теория, содержащая одновременно некоторую формулу B и ее отрицание $\neg B$.

3. Позитивные логики

Сначала рассмотрим позитивный фрагмент PJ минимальной логики J.

Формулы позитивной логики строятся из пропозициональных переменных с помощью конъюнкции, дизъюнкции и импликации. Для удобства мы также включаем в число логических символов пропозициональную константу T ("истина"). Формулы рассматриваемого языка называем позитивными. Множество всех позитивных формул обозначаем через PF.

Аксиоматика позитивного исчисления может быть найдена, например, в [9]. Мы добавляем T в качестве дополнительной аксиомы и обозначаем это исчисление, а также задаваемую им логику, через PJ. В [6] была доказана

Теорема 1. *В множестве $E(PJ)$ всех расширений логики PJ существуют в точности семь позитивных логик с проективным свойством Бета, а именно*

- (1) PJ,
- (2) $PJ+(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$,
- (3) $PJ+ p \vee (p \Rightarrow q)$,
- (4) $PJ+p$,
- (5) $PJ+ p \vee (p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q))$,
- (6) $PJ+ p \vee (p \Rightarrow q \vee (q \Rightarrow r))$,
- (7) $PJ+ p \vee (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$.

Первые четыре логики обладают, а остальные не обладают интерполяционным свойством.

Кроме того, в [6] установлена разрешимость проективного свойства Бета на классе $E(PJ)$. Разрешимость интерполяционного свойства была отмечена в [4].

В работах [3]–[6] использовались, преимущественно, алгебраические методы. В [2] был найден алгебраический эквивалент проективного свойства Бета – свойство SES сильной сюръективности эпиморфизмов соответствующего многообразия алгебр. Равносильность интерполяции и амальгамируемости была установлена ранее в [4].

Отметим, что логика (4) совпадает с множеством PF всех позитивных формул, то есть является противоречивой. Что касается остальных логик, то они могут быть охарактеризованы с помощью подходящих классов шкал Крипке, то есть частично упорядоченных множеств. При этом означивания формул удовлетворяют тем же условиям, что и в интуиционистских моделях Крипке, а именно:

- K1) $(x \models p \text{ и } x < y) \rightarrow y \models p$;
- K2) $(x \models A \& B) \leftrightarrow (x \models A \text{ и } x \models B)$;
- K3) $(x \models A \vee B) \leftrightarrow (x \models A \text{ или } x \models B)$;
- K4) $(x \models A \Rightarrow B) \leftrightarrow (\text{неверно } x \models A \text{ или } x \models B)$;
- K5) $x \models T$ для всех x .

Логика PJ характеризуется всеми частично упорядоченными шкалами, логика (2) – классом линейно упорядоченных шкал, логика (3) – одноэлементной шкалой. Логика (5) полна относительно класса шкал, удовлетворяющих условию:

$$(x < y \text{ и } x < z) \rightarrow (y \leq z \text{ или } z \leq y);$$

логика (6) характеризуется шкалами, не содержащими цепей длины три, а логика (7) – одной двухэлементной цепью.

4. Минимальная логика Йохансона и ее расширения

Минимальная логика Йохансона [10] так же, как и интуиционистская, содержит все аксиомы позитивной логики. Однако минимальная логика отличается от интуиционистской тем, что в последней противоречие имплицирует любую формулу.

Минимальная логика может быть сформулирована в языке, который в дополнение к связкам позитивной логики содержит, взамен отрицания, пропозициональную константу $\perp$ ("абсурд") [11]. В этом случае отрицание в минимальной логике рассматривается как сокращение: $\neg A = A \Rightarrow \perp$. Константа $\perp$ в минимальной логике, в отличие от интуиционистской и классической логик, не обязательно интерпретируется как "ложь".

При такой формулировке минимальное исчисление J имеет те же аксиомы и правила вывода, что и позитивное исчисление PJ , а интуиционистское исчисление Int содержит дополнительную аксиому $\perp \Rightarrow p$, то есть $Int = J + (\perp \Rightarrow p)$.

Для любой логики L обозначим $L\perp = L + \perp$. Множество всех формул указанного языка обозначаем через F .

Пусть L – произвольная логика, содержащая J , и Γ – любая L -теория. Если Γ содержит B и $\neg B$ для некоторой формулы B , то Γ содержит $\perp$, так как формула $B \Rightarrow ((B \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp)$ выводима в J . Если Γ содержит $\perp$, то Γ содержит также $\neg \perp$ ($= \perp \Rightarrow \perp$). Поэтому логика L является паранепротиворечивой тогда и только тогда, когда логика $L\perp$ непротиворечива. В частности, логика, содержащая $\perp$, паранепротиворечива в том и только в том случае, когда она непротиворечива.

Предложение 2. *Логика, содержащая J , является паранепротиворечивой, если и только если она не содержит Int .*

Доказательство. Если логика L содержит Int , то логика $L + \perp$, содержит также и переменную p , а значит, совпадает с множеством всех формул. Поэтому такая логика не является паранепротиворечивой. Напротив, покажем, что любая логика L , содержащая J и не содержащая Int , паранепротиворечива. В самом деле, рассмотрим логику $L\perp = L + \perp$. Эта L -теория содержит одновременно формулы $\perp$ и $\neg \perp$. Если она непротиворечива, то L паранепротиворечива. Если же $L + \perp$ является противоречивой, то содержит переменную p . Тогда по теореме о дедукции, справедливой во всех расширениях логики J , получаем, что L содержит формулу $(\perp \Rightarrow p)$.

Заметим, что для любого конечно аксиоматизируемого расширения L логики J свойство паранепротиворечивости легко прове-

ряется, так как оно равносильно тождественной истинности всех аксиом исчисления L в двухэлементной импликативной решетке [9], если константа $\perp$ интерпретируется как 1 ("истина").

Следующие утверждения доказаны в [6].

Предложение 3. Пусть L – позитивная логика из $E(PJ)$. Если L имеет PBP или CIP, то $J+L$ обладает тем же свойством.

В частности, сама логика J имеет CIP.

Предложение 4. Если L из $E(J)$ имеет CIP (или PBP), то следующие логики также имеют CIP (соответственно PBP):

$$L+\perp, L+(\perp \Rightarrow p), L+\perp \vee (\perp \Rightarrow p).$$

Отсюда следует, что логики $J+\perp$ и $JE'=J+\perp \vee (\perp \Rightarrow p)$ обладают интерполяционным свойством.

Отметим, что если L из $E(J)$ имеет CIP, то интерполянт формулы $(A \Rightarrow B)$ в $L\perp$ совпадает с интерполянтом формулы $((A \& \perp) \Rightarrow B)$ в L . Пусть L имеет PBP и формула $A(P, Q, x) \& A(P, Q', y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$ выводима в $L\perp$. Тогда формула $(A(P, Q, x) \& \perp) \& (A(P, Q', y) \& \perp) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$ выводима в L , и требуемое явное определение для x в $L\perp$ совпадает с явным определением, существующим в L для последней формулы. Интерполянты и явные определения в логиках $L+(\perp \Rightarrow p)$ и $L+\perp \vee (\perp \Rightarrow p)$ также эффективно вычисляются по интерполянтам и явным определениям для подходящих формул из L .

Любой логике L из $E(J)$ соответствует ее *позитивный фрагмент* PL , состоящий из всех позитивных формул, входящих в L . Хорошо известно, что $PJ=PInt$. Кроме того, нетрудно показать, что для любого множества Ax позитивных формул справедливо равенство: $P(J+Ax) = P(J\perp+Ax) = PJ+Ax$. Более того, $P(Int+Ax) = PInt+Ax$ [12].

Может случиться, что суперинтуиционистская логика позитивно аксиоматизируема над Int и обладает интерполяционным свойством, а ее позитивный фрагмент не имеет даже проективного свойства Бета [6]. Для позитивно аксиоматизируемых расширений логики J ситуация иная, как показывает следующая

Теорема 5 [6]. Если Ax – множество позитивных формул, то следующие условия эквивалентны:

- (1) $J+Ax$ имеет CIP (соответственно PBP),
- (2) $J\perp+Ax$ имеет CIP (соответственно PBP),
- (3) позитивная логика $PJ+Ax$ имеет CIP (соответственно PBP).

Противоречивая логика $F=J+p$, конечно, обладает свойствами СР и РВР. Остальные позитивно аксиоматизируемые расширения логик J и $J\perp$ являются паранепротиворечивыми. Кроме того, любая логика L , содержащая $J\perp$, может быть аксиоматизирована добавлением к $J\perp$ позитивных формул: достаточно заменить $\perp$ на T в аксиомах логики L . Поэтому из теорем 1 и 5 непосредственно вытекают нижеследующие теоремы 6(1) и 7(1). Результаты о разрешимости, сформулированные в теоремах 6(2) и 7(2), сразу вытекают из разрешимости свойств СР и РВР в $E(PJ)$ и теоремы 5 с учетом разрешимости свойства паранепротиворечивости в $E(J)$.

Теорема 6. (1) Семейство $E(J)$ содержит точно шесть паранепротиворечивых позитивно аксиоматизируемых логик с проективным свойством Бета, из них в точности три обладают интерполяционным свойством.

(2) Существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax позитивных формул распознает, является ли логика $J+Ax$ паранепротиворечивой логикой с РВР или СР.

Теорема 7. (1) Логика $J\perp$ имеет точно шесть паранепротиворечивых расширений с проективным свойством Бета, из них в точности три обладают интерполяционным свойством.

(2) Существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax формул распознает, является ли логика $J\perp+Ax$ паранепротиворечивой логикой с РВР или СР.

Аксиоматизация логик, указанных в теоремах 6(1) и 7(1), сразу находится из пунктов (1)–(3) и (5)–(7) теоремы 1. Семантическую характеристику этих логик легко получить из приведенного в параграфе 3 семантического описания позитивных логик с РВР, пользуясь следующим правилом. Характеризация позитивно аксиоматизируемой логики в $E(J)$ с помощью шкал Крипке получается из характеристики ее позитивного фрагмента (если такая существует) без добавления каких-либо условий. Что касается логик из $E(J\perp)$, то необходимо добавить условие: $x \models \perp$ для всех x .

5. Расширения логики JE'

В этом параграфе мы рассмотрим более подробно семейство расширений логики $JE' = J+\perp\vee(\perp\Rightarrow p)$. Это семейство изучалось в [13]. В частности, там показано, что все логики из $E(JE')$ и только они представимы как пересечения подходящих логик из $E(J\perp)$ и $E(Int)$. Более точно, каждой логике L из $E(JE')$ ставятся в соответствие два напарника $L'=L\perp$ и $L''=L+Int$. Тогда имеет место равенство $L=L'\cap L''$.

Для исследования этого семейства мы применим следующее утверждение, доказанное в [6]:

Теорема 8. Пусть L содержит $J\perp$, а L' содержит Int . Тогда пересечение $L\cap L'$ имеет CIP (соответственно PBP) в том и только в том случае, если обе логики L и L' имеют CIP (соответственно PBP).

Отметим, что если L и L' имеют CIP и формула $(A\Rightarrow B)$ верна в $L\cap L'$, то ее интерполянт в $L\cap L'$ будет формула $(\perp\Rightarrow C)\&(C'\vee\perp)$, где C и C' – интерполянты этой формулы в L и L' соответственно.

Обратно, пусть логика $L\cap L'$ имеет CIP . Тогда интерполянт формулы $(A\Rightarrow B)$ в L совпадает с интерполянтом формулы $(A\&\perp\Rightarrow B)$ в логике $L\cap L'$, а интерполянт такой же формулы в L' совпадает с интерполянтом формулы $(A\Rightarrow B\vee\perp)$ в $L\cap L'$.

Далее, пусть обе логики L и L' имеют PBP и формула

$$A(P, Q, x) \& A(P, Q', y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$$

выводима в $L\cap L'$. Тогда эта формула принадлежит как L , так и L' . Получаем выводимость в $L\cap L'$ формулы

$$A(P, Q, x) \Rightarrow (x \Leftrightarrow (\perp \Rightarrow B(P)) \& (B'(P) \vee \perp)),$$

где $B(P)$ и $B'(P)$ – явные определения в L и L' соответственно. Обратно, пусть логика $L\cap L'$ имеет PBP . Если формула $A(P, Q, x) \& A(P, Q', y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$ выводима в L , то явным определением для x в L будет явное определение в $L\cap L'$, существующее для формулы $(A(P, Q, x) \& \perp) \& (A(P, Q', y) \& \perp) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$. Если же формула $A(P, Q, x) \& A(P, Q', y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$ выводима в L' , то явным определением в L' будет явное определение, существующее в $L\cap L'$ для формулы

$$(A(P, Q, x) \& (x \Leftrightarrow x \vee \perp)) \& (A(P, Q', y) \& (y \Leftrightarrow y \vee \perp)) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y).$$

Известно, что никакое пересечение двух несравнимых позитивных или суперинтуиционистских логик не имеет ни CIP , ни PBP . Таким образом, теорема 8 подчеркивает еще одно интересное отличие семейства $E(J)$ от $E(PJ)$ и $E(\text{Int})$.

Из теоремы 8 сразу вытекает

Следствие 9. Логика L , содержащая $JE' = J + \perp \vee (\perp \Rightarrow p)$, имеет CIP (PBP) в том и только в том случае, если обе логики $L + \perp$ и $L + (\perp \Rightarrow p)$ имеют CIP (соответственно PBP).

Напомним, что согласно [3] существуют шестнадцать суперинтуиционистских логик с PBP , из них восемь имеют CIP . Указанные свойства разрешимы на классе суперинтуиционистских логик [4]. Паранепротиворечивые логики из $E(JE')$ получаются как всевозможные пересечения паранепротиворечивых расширений

логик из $E(J\perp)$ с суперинтуиционистскими логиками. Поэтому из теоремы 7 следует

Теорема 10. (1) *Существуют в точности $96=6\cdot 16$ паранепротиворечивых расширений логики $JE'=J+\perp\vee(\perp\Rightarrow p)$, обладающих проективным свойством Бета, из них в точности $24=3\cdot 8$ логик имеют CIP .*

(2) *Существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax формул распознает, является ли логика $JE'+Ax$ паранепротиворечивой логикой с PBP или CIP .*

В [13] С.П.Одинцов называет собственно паранепротиворечивыми логики из $E(J)$, не входящие ни в $E(Int)$ ни в $E(J\perp)$. Исходя из теорем 10 и 7, нетрудно посчитать в $E(JE')$ число собственно паранепротиворечивых логик, обладающих проективным свойством Бета или интерполяционным свойством, и доказать существование соответствующих разрешающих алгоритмов. Однако описание логик с PBP или CIP во всем семействе $E(J)$ остается нерешенной проблемой. Неизвестно, конечно или бесконечно число логик из $E(J)$, обладающих указанными свойствами, и разрешимы ли эти свойства в семействе $E(J)$. Добавим, что теорема 10 вместе с предложением 4 дают удобные необходимые условия того, чтобы логика L из $E(J)$ обладала свойствами CIP или PBP .

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.А. Об одной системе паранепротиворечивой логики // Многочисленные, релевантные и паранепротиворечивые логики (Труды семинара по логике ИФ АН СССР). М., 1984. С. 129-133.
2. Максимова Л.Л. Явная и неявная определимость в модальных, суперинтуиционистских и релевантных логиках // Логические исследования. Вып. 5. М., 1998. С. 53-60.
3. Maksimova L. Intuitionistic Logic and Implicit Definability // Annals of Pure and Applied Logic. **105**. 2000. P. 83-102.
4. Максимова Л.Л. Интерполяционная теорема Крейга и амальгамируемые многообразия // Доклады АН СССР. **237**. №. 6. 1977. С. 1281-1284.
5. Максимова Л.Л. Разрешимость проективного свойства Бета в многообразиях гейтинг-алгебр // Алгебра и логика. **40**. 2001.
6. Максимова Л.Л. Неявная определимость и позитивные логики // Алгебра и логика (в печати).
7. Craig W. Three uses of Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory // J. Symbolic Logic. **22**. 1957. P. 269-285.
8. Kreisel G. Explicit definability in intuitionistic logic // J. Symbolic Logic. **25**. 1960. P. 389-390.
9. Расава Х., Сикорский Р. Математика метаматематики // М.: Наука. 1972.

10. *Johansson I.* Der Minimalkalkul, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // *Compositio Mathematica*. **4**. 1937. P. 119-136.
11. *Seegerberg K.* Propositional logics related to Heyting's and Johansson's // *Theoria*. **34**. 1968. P. 26-61.
12. *Верхозина М.И.* Промежуточные позитивные логики // Алгоритмические вопросы алгебраических систем. Иркутск, 1978. С. 13-25.
13. *Одинцов С.П.* Изоморфизмы логики классической опровержимости и их обобщения // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М., 1997. С. 48-61.

В.И.Маркин

ИНТЕНСИОНАЛЬНАЯ СЕМАНТИКА ТРАДИЦИОННОЙ СИЛЛОГИСТИКИ*

Abstract. *We present a formal realization of Leibnitz' idea of intensional interpretation of the traditional syllogistic. We set out an intensional semantics and prove that it is adequate to Lukasiewicz' syllogistic. The core idea of this semantics is to associate with each term of a categorical statement not a set of individuals but a concept considered as a non-empty and non-contradictory set of positive or negative characters and to treat syllogistic constants as denoting intensional relations between concepts. According to this approach, 'Every S is P' means that S contains all characters from P, 'Some S is P' means that S and P don't contain contrary characters (positive and negative).*

В традиционной и в современной логике широкое распространение получила идущая от Аристотеля и отчетливо выраженная схоластами трактовка силлогистики как теории, которая исследует связи, возникающие в сфере *объемных* отношений между общими терминами. Силлогистические константы обычно в связи с этим рассматриваются как выражающие экстенциональные отношения между двумя множествами (объемами понятий): константа *a* репрезентирует отношение теоретико-множественного включения класса в класс, константа *i* – наличие общих элементов у двух классов и т.п.

Однако в истории логики складывался иной – альтернативный экстенсиональному – подход к интерпретации смыслов категорических суждений, которые составляют предмет исследования в силлогистических теориях. Суть этого подхода заключается в трактовке субъекта и предиката высказывания как понятийных конструкций и их анализа с точки зрения *содержательных*, а не *объемных* характеристик. Силлогистические константы при этом рассматриваются как знаки отношений между понятиями по содержанию.

По-видимому, впервые идея интенциональной интерпретации силлогистики в отчетливом виде была высказана Г.Лейбницем, который прямо противопоставлял “содержательную” трактовку категорических суждений “объемной”, схоластической.

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 00-03-00273.

Автор выражает признательность проф. Владимиру Сотирову (София) за то, что он привлек его внимание к лейбницеvским идеям интенциональной интерпретации силлогистики.

“Схоластики говорят иначе, имея в виду не понятия, а примеры, являющиеся объектами общих понятий, – писал Лейбниц, выявляя суть различий между этими подходами, – поэтому они говорят, что [понятие] металла шире [понятия] золота, ибо оно содержит больше видов, чем золото... Но я предпочитаю ориентироваться на общие понятия, т.е. идеи и их комбинации, потому что они не зависят от существования индивидуальных предметов. Поэтому я утверждаю, что [понятие] золота больше [понятия] металла, ибо для [понятия] золота необходимо большее число компонентов, чем для [понятия] металла...” [3, т.3, с. 518].

В трактате “Новые опыты о человеческом разумении” Лейбниц поставил задачу обоснования традиционной силлогистики на основе интенциональной интерпретации категорических суждений: «Действительно, говоря: “*Всякий человек есть животное*”, я хочу этим сказать, что все люди находятся в числе всех животных, но одновременно я имею в виду, что идея животного включена в идею человека. Животное содержит больше индивидов, чем человек, но человек содержит больше идей или больше формальных определений. Животное содержит больше экземпляров, человек – больше степеней реальности; у первого больший объем, у второго большее содержание. Поэтому мы вправе сказать, что все учение о силлогизме можно доказать на основании учения *de continente et contento* (о содержащем и содержимом), которое отлично от учения о целом и части...» [3, т.2, с. 501-502].

Попытка решения данной задачи была предпринята самим Лейбницем в ряде работ, среди которых особо выделяется работа “Элементы исчисления”, датированная 1679 г. [3, т.3, с.514-522].

Идея интенциональной интерпретации силлогистических теорий высказывалась и логиками последующих поколений. Так, у Н.А. Васильева помимо основного, широко известного варианта “воображаемой, неаристотелевой логики” имеется набросок дедуктивной системы силлогистического типа с суждениями трех различных качеств – утвердительными, отрицательными и индифферентными, где с каждым общим термином связывается совокупность положительных и отрицательных признаков (содержание понятия), а сами суждения фиксируют различные типы отношений между содержаниями понятий [1, с.87-88]¹.

В данной работе я постараюсь показать, что поставленная Лейбницем задача построения силлогистики как теории, в основе

¹ Современная формальная реконструкция “логики понятий” Н.А. Васильева предложена в [2]. Разработанные для решения указанной задачи методы существенным образом используются и в настоящей статье.

которой лежат отношения между понятиями по содержанию, может быть успешно решена средствами современной логики. С этой целью будет сформулирована семантика, базисные конструкции которой имеют интенциональную природу, и доказана ее адекватность широко известной силлогистической системе Я. Лукасевича [4], формализующей позитивный фрагмент традиционной силлогистики.

Язык этой системы содержит бесконечный список общих терминов $P_1, P_2, P_3, \dots$ (в качестве метAPERЕМЕННЫХ по общим терминам будем использовать в дальнейшем буквы S, P, M, Q, T), исходные силлогистические константы **a** (для общеутвердительных) и **i** (для частноутвердительных суждений), пропозициональные связки. Силлогистическими формулами являются выражения видов SaP и SiP , а также их булевы комбинации.

Аксиомами силлогистики Лукасевича являются классические тавтологии и формулы следующих типов:

- | | |
|---|---|
| A1. $(MaP \ \& \ SaM) \supset SaP$, | A2. $(MaP \ \& \ MiS) \supset SiP$, |
| A3. SaS , | A4. SiS . |

Силлогистические константы **e** (для общеотрицательных) и **o** (для частноотрицательных суждений) вводятся посредством определений:

- | | |
|--|--|
| D1. $SeP \equiv_{\text{Df}} \neg SiP$, | D2. $SoP \equiv_{\text{Df}} \neg SaP$. |
|--|--|

Единственное правило вывода в системе – *modus ponens*. Понятия доказательства и теоремы обычные.

В дальнейшем при доказательстве полноты силлогистики Лукасевича нам понадобятся следующие теоремы этой системы:

- T1.** $\neg(SaP \ \& \ SeP)$,
T2. $(MeP \ \& \ SaM) \supset SeP$,
T3. $(MeP \ \& \ SiM) \supset \neg SaP$,
T4. $(MaP \ \& \ SiM) \supset \neg SeP$,
T5. $\neg PeS \supset SiP$.

Идея интенциональной семантики для силлогистики Лукасевича состоит в следующем. Общим силлогистическим терминам в качестве значений сопоставляются не множества предметов, не объемы понятий, а совокупности, включающие в себя положительные и отрицательные признаки, т.е. содержания понятий (в принятой в традиционной логике трактовке). Силлогистические константы **a**, **i**, **e**, **o** репрезентируют теперь определенные отношения между содержаниями понятий. Высказывания типа **a** интерпретируются как утверждения о том, что содержание их предиката

составляет часть содержания их субъекта. Высказывания типа *i* выражают мысль об отсутствии в содержаниях их терминов противоречащих признаков: положительного (указывающего на присутствие некоторого свойства) и отрицательного (указывающего на отсутствие данного свойства). Высказывания типов *e* и *o*, как обычно, рассматриваются как противоречащие высказываниям типов *i* и *a*, соответственно.

Эта идея может быть реализована следующим образом. Рассмотрим множество *литералов* $L = \{p_1, \sim p_1, p_2, \sim p_2, \dots\}$. Литералы, не содержащие символа “ $\sim$ ”, представляют *положительные признаки*, а содержащие данный символ – *отрицательные признаки*. В дальнейшем с целью упрощения символики будем использовать в качестве метаварiableных по положительным литералам малые буквы *s, p, m, q, t*, причем малая буква представляет литерал с индексом *j* (т.е. литерал p_j) тогда и только тогда, когда соответствующая большая буква представляет общий термин с тем же индексом (т.е. термин P_j).

Понятием (рассматриваемым в аспекте его интенциональной характеристики – содержания) назовем произвольное непустое и непротиворечивое подмножество L , т.е. множество $\alpha \subseteq L$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (i) $\alpha \neq \emptyset$;
- (ii) не существует p_i , такого что $p_i \in \alpha$ и $\sim p_i \in \alpha$.

Пусть M – множество всех понятий. Определим на M операцию $*$, которая каждому понятию α сопоставляет *противоположное* ему понятие α^* :

$$p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow \sim p_i \in \alpha \text{ и } \sim p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow p_i \in \alpha.$$

Данная операция замещает каждый положительный литерал на отрицательный литерал с тем же индексом, а каждый отрицательный – на соответствующий положительный. Например, $\{p_1, \sim p_2, p_3\}^* = \{\sim p_1, p_2, \sim p_3\}$.

Несложно показать, что операция $*$ обладает следующими свойствами:

- (a) $\alpha \cap \alpha^* = \emptyset$, (b) $\alpha^{**} = \alpha$, (c) $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^* \subseteq \beta^*$.

Определим *интерпретирующую функцию* d , сопоставляющую каждому общему термину в качестве значения некоторое (интенционально трактуемое) понятие:

$$d(P) \in M.$$

Зададим понятие *значимости* формулы языка позитивной логики при интерпретации d (выражение “ $d \models A$ ” читается как “формула A значима при интерпретации общих терминов d ”:

- (v1) $d \models SaP$, е.т.е. $d(P) \subseteq d(S)$;
 (v2) $d \models SiP$, е.т.е. $d(P)^* \cap d(S) = \emptyset$.

Условия значимости сложных формул обычные.

Силлогистическая формула A называется *общезначаимой*, е.т.е. $d \models A$ при любой интерпретации общих терминов d .

Перейдем к доказательству адекватности силлогистики Лукасевича данной интенциональной семантике.

Несложно установить, что каждая аксиома силлогистики Лукасевича общезначаима, а правило *modus ponens* сохраняет общезначаимость формул. Отсюда следует утверждение о семантической непротиворечивости этой системы:

Метатеорема 1. *Всякая теорема силлогистики Лукасевича является общезначаимой формулой.*

Обратное утверждение (метатеорема о семантической полноте) доказывается методом Хенкина.

Множество формул Γ называется *непротиворечивым*, е.т.е. не найдется формул $B_1, B_2, \dots, B_k$ таких, что формула $\neg(B_1 \& B_2 \& \dots \& B_k)$ была бы теоремой силлогистики Лукасевича.

Множество формул Δ называется *максимальным*, е.т.е. оно непротиворечиво и для любой формулы A верно, что $A \in \Delta$ или $\neg A \in \Delta$.

Максимальное множество Δ обладает рядом важных свойств:

- (m1) Δ содержит все теоремы системы,
- (m2) Δ замкнуто относительно *modus ponens*,
- (m3) $\neg A \in \Delta$, е.т.е. $A \notin \Delta$,
- (m4) $A \& B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ и $B \in \Delta$,
- (m5) $A \vee B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ или $B \in \Delta$,
- (m6) $A \supset B \in \Delta$, е.т.е. $A \notin \Delta$ или $B \in \Delta$.

Стандартным способом доказывается **Лемма 1** о том, что произвольное непротиворечивое множество силлогистических формул Γ может быть расширено до максимального множества Δ .

С каждым максимальным множеством Δ связывается *каноническое приписывание* значений общим терминам – функция d_Δ , определяемая следующим образом:

$$d_\Delta(Q) = \{t: QaT \in \Delta\} \cup \{\sim t: QeT \in \Delta\}$$

(напомним, что t есть положительный литерал, имеющий тот же индекс, что и общий термин, представляемый метапеременной T).

Прежде всего, необходимо показать, что d_Δ является понятием, т.е. обладает свойствами (i) непустоты и (ii) непротиворечивости.

(i) $\mathbf{d}_\Delta(Q) \neq \emptyset$.

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. $QaQ \in \Delta$ | A3 , (m1); |
| 2. $q \in \mathbf{d}_\Delta(Q)$ | 1, опр. $\mathbf{d}_\Delta$; |
| 3. $\mathbf{d}_\Delta(Q) \neq \emptyset$ | 2. |

(ii) не существует t такого, что $t \in \mathbf{d}_\Delta(Q)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(Q)$.

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1. $t \in \mathbf{d}_\Delta(Q)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(Q)$ | допущение; |
| 2. $QaT \in \Delta$ и $QeT \in \Delta$ | 1, опр. $\mathbf{d}_\Delta$; |
| 3. $QaT \& QeT \in \Delta$ | 2, (m4); |
| 4. $\neg(QaT \& QeT) \in \Delta$ | T1 , (m1); |
| 5. $QaT \& QeT \notin \Delta$ | 4, (m3); |

Противоречие 3 и 5.

Далее, индукцией по длине силлогистической формулы A доказывается основная лемма:

Лемма 2. Для произвольного максимального множества Δ и произвольной формулы A верно: $A \in \Delta$, е.т.е. $\mathbf{d}_\Delta \models A$.

Базис индукции содержит два случая.

I. A есть SaP .

Докажем сначала, что $SaP \in \Delta \Rightarrow \mathbf{d}_\Delta \models SaP$.

- | | |
|---|--|
| 1. $SaP \in \Delta$ | допущение; |
| 2. $t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ | допущение; |
| 3. $PaT \in \Delta$ | 2, опр. $\mathbf{d}_\Delta$; |
| 4. $(PaT \& SaP) \supset SaT \in \Delta$ | A1 , (m1); |
| 5. $SaT \in \Delta$ | 4,3,1, (m4), (m2); |
| 6. $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ | 5, опр. $\mathbf{d}_\Delta$; |
| 7. $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ | допущение; |
| 8. $PeT \in \Delta$ | 7, опр. $\mathbf{d}_\Delta$; |
| 9. $(PeT \& SaP) \supset SeT \in \Delta$ | T2 , (m1); |
| 10. $SeT \in \Delta$ | 9,8,1, (m4), (m2); |
| 11. $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ | 10, опр. $\mathbf{d}_\Delta$; |
| 12. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$ | 2–6,7–11, опр. $\mathbf{d}_\Delta$ и $\subseteq$; |
| 13. $\mathbf{d}_\Delta \models SaP$ | 12, (v1). |

Докажем далее, что $\mathbf{d}_\Delta \models SaP \Rightarrow SaP \in \Delta$.

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. $\mathbf{d}_\Delta \models SaP$ | допущение; |
| 2. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$ | 1, (v1); |
| 3. $PaP \in \Delta$ | A1 , (m1); |
| 4. $p \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ | 3, опр. $\mathbf{d}_\Delta$; |
| 5. $p \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ | 2,4; |
| 6. $SaP \in \Delta$ | 5, опр. $\mathbf{d}_\Delta$. |

II. A есть SiP .

Докажем сначала, что $SiP \in \Delta \Rightarrow \mathbf{d}_\Delta \models SiP$.

1. $SiP \in \Delta$	допущение;
2. $t \in d_{\Delta}(P)^*$	допущение;
3. $\sim t \in d_{\Delta}(P)$	2, опр. *;
4. $PeT \in \Delta$	7, опр. d_{Δ} ;
5. $(PeT \& SiP) \supset \neg SaT \in \Delta$	T3 , (m1);
6. $\neg SaT \in \Delta$	4,1,5, (m4), (m2);
7. $SaT \notin \Delta$	6, (m3);
8. $t \notin d_{\Delta}(S)$	7, опр. d_{Δ} ;
9. $\sim t \in d_{\Delta}(P)^*$	допущение;
10. $t \in d_{\Delta}(P)$	9, опр. *;
11. $PaT \in \Delta$	10, опр. d_{Δ} ;
12. $(PaT \& SiP) \supset \neg SeT \in \Delta$	T4 , (m1);
13. $\neg SeT \in \Delta$	11,1,12, (m4), (m2);
14. $SeT \notin \Delta$	13, (m3);
15. $\sim t \notin d_{\Delta}(S)$	14, опр. d_{Δ} ;
16. $d_{\Delta}(P)^* \cap d_{\Delta}(S) = \emptyset$	2–8,9–15, опр. d_{Δ} ;
17. $d_{\Delta} \models SiP$	16, (v2).

Докажем далее, что $d_{\Delta} \models SiP \Rightarrow SiP \in \Delta$.

1. $d_{\Delta} \models SiP$	допущение;
2. $d_{\Delta}(P)^* \cap d_{\Delta}(S) = \emptyset$	1, (v2);
3. $SaS \in \Delta$	A3 , (m1);
4. $s \in d_{\Delta}(S)$	3, опр. d_{Δ} ;
5. $s \notin d_{\Delta}(P)^*$	2,4;
6. $\sim s \notin d_{\Delta}(P)$	5, опр. *;
7. $PeS \notin \Delta$	6, опр. d_{Δ} ;
8. $\neg PeS \in \Delta$	7, (m3);
9. $\neg PeS \supset SiP \in \Delta$	T5 , (m1);
10. $SiP \in \Delta$	9,8, (m2).

Доказательство индуктивного перехода тривиально: оно основывается на классической семантике пропозициональных связей и свойствах (m1)–(m6) максимального множества. Лемма 2 доказана.

Теперь можно обосновать справедливость метатеоремы о полноте:

Метатеорема 2. *Всякая общезначимая формула является теоремой силлогистики Лукасевича.*

Рассмотрим произвольную общезначимую формулу A . Допустим, что она недоказуема в силлогистике Лукасевича. Тогда формула $\neg\neg A$ также не будет теоремой этой системы. Отсюда, по определению непротиворечивого множества, следует, что таковым является $\{\neg\neg A\}$. Оно, согласно Лемме 1, может быть расширено до максимального множества Δ . В силу Леммы 2, $d_{\Delta} \models \neg\neg A$. Значит,

сама формула A при каноническом приписывании не является значимой, что противоречит исходному предположению о ее общезначимости. Метатеорема доказана.

Выше уже отмечалось, что исторически первая попытка интерпретации силлогистики как дедуктивной системы, основанной на отношениях между понятиями по содержанию, принадлежала Г.Лейбницу. Завершим статью рассмотрением вопроса о том, насколько предложенная нами семантика соответствует лейбницевским идеям.

Прежде всего заметим, что Лейбниц трактует понятие, в интенциональном аспекте, именно как совокупность (или же конъюнкцию) признаков. Требование непустоты этой совокупности настолько очевидно, что не требует специального упоминания.

Несколько сложнее обстоит дело с отрицательными признаками и требованием непротиворечивости содержаний понятий. В работе “Элементы исчисления” [3, т.3, с.514-522], где наиболее подробным образом формулируется интенциональная семантика силлогистики, речи об отрицательных признаках не идет вообще. Однако в других работах того же периода Лейбниц рассматривает понятия, содержащие отрицательные признаки. Более того, у него можно обнаружить аналог введенной нами операции $*$, сопоставляющей произвольному понятию противоположное понятие за счет замены положительных признаков на соответствующие отрицательные, а отрицательных – на положительные: «Если ... будет отрицаться этот термин – “ученый не-умный, не-справедливый”, очевидно получится “справедливый, умный не-ученый”» [3, т.3, с.537]. Явная формулировка принципа непротиворечивости содержания понятия у Лейбница отсутствует, хотя все понятия, приводимые им в качестве примеров, этому требованию удовлетворяют.

Лейбницевская трактовка высказываний типа **a** в точности соответствует условию (v1) в сформулированной нами семантике: “... всякое истинное общеутвердительное категорическое предложение означает не что иное, как некую связь предиката и субъекта..., что предикат находится в субъекте, или содержится в субъекте...” [3, т.3, с.516]; “... отсюда мы можем знать, является ли истинным некоторое общеутвердительное предложение. Ведь в нем понятие субъекта, взятое абсолютно и неопределенно и вообще рассматриваемое само по себе в целом, всегда содержит понятие предиката” [3, т.3, с.520].

Более любопытен вопрос о соответствии семантического условия (v2) лейбницевской трактовке высказываний типа **i**. “... в *частноутвердительном предложении*, – пишет Лейбниц, – нет

необходимости, чтобы предикат присутствовал в субъекте, ... но достаточно предикату содержаться в каком-то виде субъекта, т.е. *чтобы понятие какого-то вида субъекта содержало понятие предиката...* [3, т.3, с.521]. Заметим, что *вид*, по Лейбницу, – это более богатое по содержанию понятие, результат добавления нового признака или нескольких признаков к содержанию исходного понятия.

Итак, согласно Лейбницу, высказывание типа *i* истинно, е.т.е. к содержанию его субъекта можно добавить признаки так, что в полученную совокупность будет включаться содержание предиката; иными словами, *субъект и предикат имеют общий вид*. В нашей семантике данное условие истинности может быть выражено следующим образом:

$$(v2') \mathbf{d} \models SiP, \text{ е.т.е. } \exists \alpha \in \mathbf{M} (\mathbf{d}(S) \subseteq \alpha \text{ и } \mathbf{d}(P) \subseteq \alpha).$$

Продemonстрируем равносильность в нашей семантике условий (v2) и (v2').

Покажем сначала, что $\exists \alpha \in \mathbf{M} (\mathbf{d}(S) \subseteq \alpha \text{ и } \mathbf{d}(P) \subseteq \alpha)$ влечет $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) = \emptyset$. Допустим, что найдется понятие α , такое, что $\mathbf{d}(S) \subseteq \alpha$ и $\mathbf{d}(P) \subseteq \alpha$, а $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) \neq \emptyset$. Последнее означает существование литерала, который содержится как в $\mathbf{d}(P)^*$, так и в $\mathbf{d}(S)$. Пусть это положительный литерал p_i (случай с отрицательным литералом аналогичен): $p_i \in \mathbf{d}(P)^*$ и $p_i \in \mathbf{d}(S)$. По определению $*$ следует, что $\sim p_i \in \mathbf{d}(P)$. Из исходного допущения получаем, что понятие α содержит p_i и $\sim p_i$ одновременно, что невозможно в силу ограничения (ii).

Докажем далее обратное утверждение. Допустим, что $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) = \emptyset$. Отсюда по определению $*$ вытекает, что $\mathbf{d}(P) \cup \mathbf{d}(S)$ является понятием, причем и $\mathbf{d}(S)$, и $\mathbf{d}(P)$ – его подмножества. Следовательно, $\exists \alpha \in \mathbf{M} [\mathbf{d}(S) \subseteq \alpha \text{ и } \mathbf{d}(P) \subseteq \alpha]$.

Таким образом, предложенное нами семантическое определение силлогистической константы *i* эквивалентно лейбницеvскому при трактовке содержаний понятий как совокупностей положительных и отрицательных признаков и принятии принципа их непротиворечивости.

Предпринятый анализ лейбницеvских текстов позволяет утверждать, что этот мыслитель если и не дал систематического и строгого решения поставленной им проблемы интенциональной интерпретации традиционной силлогистики, то вплотную подошел к данному решению; во всяком случае, его работы содержат практически весь необходимый материал для построения адекватной для указанной логической системы семантики, в которой сил-

логистические константы трактуются как знаки отношений между понятиями по содержанию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989.
2. *Зайцев Д.В., Маркин В.И.* Воображаемая логика-2: реконструкция одного из вариантов знаменитой логической системы Н.А. Васильева // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН 1998. М.: ИФ РАН, 1999.
3. *Лейбниц Г.В.* Сочинения: В 4 т. Т. 2-3. М.: Мысль, 1983-1984.
4. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: ИЛ, 1959.

ИСЧИСЛЕНИЯ ОТБРАСЫВАЕМЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ НЕТРАДИЦИОННЫХ СИСТЕМ ПОЗИТИВНОЙ СИЛЛОГИСТИКИ

Abstract. *In [4] and [1] the set of formulae rejected in the Lukasiewicz's calculus of positive syllogistic was axiomatized. In this article we construct analogous adequate calculi of rejected formulae for the systems of positive syllogistic of Slupecki [3], Shepherson [7; the system B] and Smirnov [5].*

Я.Лукасевичем в 30-е годы [1, 27], [4, 275], Е.Слупецким в 1946 г. [6,310] и В.А. Смирновым в 1981 г. [5] были построены разные формальные реконструкции ассерторической позитивной силлогистики Аристотеля (соответственно обозначим их через L, Sl и Sm). Параллельно изучался позитивно-силлогистический фрагмент исчисления классов, в котором суждения SaP и SeP вслед за Ф. Brentano без каких-либо ограничений понимаются как $S \subseteq P$ и $S \cap P = \emptyset$. Этот фрагмент был аксиоматизирован Дж.Шефердсоном в 1955 г. в виде системы В [7], [6, 310]. Исчисления Sl, Sm, L и В можно сформулировать 1) в едином языке, в котором формулы образуются из атомов вида SaP, SeP, SiP, SoP с помощью обычных пропозициональных связок, 2) на базе классического исчисления высказываний (РС), принимая в качестве аксиом все частные случаи классических тавтологий, 3) с общими исходными правилами вывода – правилом *подстановки* (переменного термина на место переменного термина), правилом *отделения антецедента (modus ponens)* и 4) со специальными силлогистическими аксиомами, которые выбираются из следующего списка формул:

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1. $SeP \supset PeS$, | 6. $\neg(SaP \wedge SeP)$, |
| 2. $\neg SaP \equiv SoP$, | 7. $SiP \supset SaS$, |
| 3. $\neg SeP \equiv SiP$, | 8. SaS , |
| 4. $MaP \wedge SaM \supset SaP$, | 9. $SiP \supset SiS$, |
| 5. $MeP \wedge SaM \supset SeP$, | 10. $SoP \supset SiS$; |

при этом аксиомами Sl являются формулы 1–6, аксиомами Sm – формулы 1–6,7, аксиомами L – формулы 1–6,8 и аксиомами В – формулы 1–5,8,9,10. В каждом из этих исчислений понятия доказательства и вывода из гипотез определяются стандартно.

Изучая текст "Первой аналитики", Лукасевич обнаружил, что Аристотель для того, чтобы показать необщезначимость силлоги-

стических форм и отвергнуть их, иногда вместо обычных опровергающих примеров, использует определенный логический прием отбрасывания, заключающийся в выводе необщезначимости одной формы из необщезначимости других форм, применяя при этом также формы, верность которых была им ранее доказана. Лукасевич обобщил аристотелевскую идею дедуктивного отбрасывания и предложил аксиоматизировать множество необщезначимых форм силлогистики (точнее, формул, не доказуемых в L). С этой целью Лукасевич совместно со Слупецким построил аксиоматическую систему отбрасываемых формул с единственной аксиомой отбрасывания

$$* 11. PaM \wedge SaM \supset SiP,$$

где "*" является знаком отбрасывания, аналогичным фрегевскому знаку утверждения, и следующими правилами отбрасывания: правило *обратной подстановки* (если отбрасывается результат подстановки в формулу F , то отбрасывается и сама формула F), правило *отделения консеквента, modus tollens* (если доказуема $F \supset G$, а G отбрасывается, то отбрасывается также F) и *правило Слупецкого* (если A и B – отрицательные атомы, а D – дизъюнкция атомов, то если отбрасываются $A \supset D$ и $B \supset D$, то отбрасывается также $A \wedge B \supset D$).

При применении правила *modus tollens* одна из посылок должна быть доказуемой в L формулой, т.е. отбрасывание (доказательство отбрасываемости) может содержать как ранее отброшенные, так и ранее доказанные формулы (для того, чтобы различать их, перед отбрасываемыми формулами будем писать индекс "*"). Поэтому на исчисление отбрасываемых формул Лукасевича–Слупецкого можно смотреть как на некое расширение исчисления L путем введения понятий "негативного" доказательства, т.е. отбрасывания, и отбрасываемой формулы, наряду с обычными понятиями "позитивного" доказательства и доказуемой формулы (за таким расширением сохраним то же обозначение " L ", но в случаях, когда необходимо отличить первоначальное исчисление L от его расширения, для последнего будем использовать обозначение " $*L$ "). Более точно понятие отбрасывания можно определить следующим образом.

Конечная последовательность формул $F_1, \dots, F_n$, где F_n и некоторые (возможно все) другие члены этой последовательности имеют индекс *, называется отбрасыванием, если и только если каждый член этой последовательности F_i удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

- (1) F_i не имеет индекса * и F_i доказуема в L ;

(2) F_i имеет индекс $*$ и

(2.1) F_i является аксиомой отбрасывания,

(2.2) для некоторого $k < i$ F_k имеет индекс $*$ и является результатом некоторой подстановки в F_i ,

(2.3) для некоторых k и $l < i$ $F_k = F_i \supset F_l$, F_k не имеет индекса и F_l имеет индекс $*$,

(2.4) F_i имеет вид $A \wedge B \supset D$, где A и B являются отрицательными атомами, а D – дизъюнкцией произвольных атомов, и для некоторых k и $l < i$ $F_k = A \supset D$, $F_l = B \supset D$ и как F_k , так и F_l имеют индекс $*$.

Отбрасывание является отбрасыванием его последней формулы.

Лукасевич многократно подчеркивает, что в L принимаются (доказываются) только общезначимые формулы, т.е. формулы, истинные для всех значений, встречающихся в них переменных, а в $*L$ отбрасываются только необщезначимые формулы (*утверждения о корректности* исчислений L и $*L$), откуда следует утверждение о несовместимости метапредикатов доказуемости¹ и отбрасываемости:

$$\{F: \#_L F\} \cap \{F: *_L F\} = \emptyset$$

Однако при доказательстве утверждений о корректности [1, §34] он пользуется лейбницевым понятием арифметической интерпретации силлогистического языка (и соответствующим понятием общезначимости), согласно которому значениями переменных терминов являются пары взаимно простых чисел, а не общие термины или круги Эйлера (произвольные классы предметов), на которые он ссылается в связи с обсуждением других проблем.

В [1, §33] также доказано *утверждение о дополнителности* метатеоретических предикатов доказуемости и отбрасываемости: любая силлогистическая формула или доказуема или отбрасываема в L , т.е.

$$\{F: \#_L F\} \cup \{F: *_L F\} = U,$$

где U – множество всех силлогистических формул. В доказательстве используется силлогистическая версия теоремы о конъюнктивной нормальной форме, согласно которой каждая силлогистическая формула эффективным способом может быть преобразована в равносильную конъюнкцию некоторых дизъюнкций атомарных формул, и далее для любой такой дизъюнкции определяется также эффективная процедура нахождения ее доказательства или отбрасывания в L . Из утверждения о дополнителности сле-

¹ Для предиката доказуемости используем символ " $\#$ ".

дуют *полнота* исчислений L и $*L$: если F – формула, общезначимая в арифметической семантике Лейбница, то $\#_L F$, в противном случае, $*_L F$. Из эффективности доказательства утверждения о дополнительности совместно с утверждением о корректности следует *разрешимость проблемы общезначимости* в лейбницево́м смысле.

Более естественную логическую семантику Лукасевич интуитивно подразумевал, однако ее явно использовал только фрагментарно при обсуждении частных проблем [1, с.155-157]. Слупецкий в более ранней работе (в ней доказаны все перечисленные результаты в качестве ответов на поставленные Лукасевичем проблемы) опирается именно на такую семантику – на интерпретацию силлогистического языка, в которой значениями переменных являются непустые классы предметов [4, с.293-295].

В настоящей работе предлагаются сопряженные с Sl , Sm и B формальные аксиоматические системы отбрасываемых формул $*Sl$, $*Sm$ и $*B$ и для них доказываются аналогии всех сформулированных выше метатеорем об L и $*L$, при этом, возвращаясь к подходу Слупецкого, в качестве семантической основы берутся понятия интерпретации с классами предметов в качестве значений переменных.

Упорядоченная пара (D, f) называется *Sm-, L-, B-интерпретацией*, а упорядоченная тройка (D, R, f) – *Sl-интерпретацией* языка позитивной силлогистики, если D – произвольное непустое множество, R – бинарное отношение на D ($R \subseteq D \times D$), а f – означающая функция, отображающая множество переменных терминов силлогистического языка 1) в множество всех подмножеств множества D (в случае Sm-, L-, B-интерпретаций) и 2) в множество всех непустых подмножеств множества D (в случае L-интерпретации). В любой интерпретации I каждой силлогистической формуле приписывается одно из двух истинностных значений (И, Л), определяемое индуктивно по построению формулы. *Базисными пунктами* определения являются:

в L- и B-интерпретациях	в Sm-интерпретациях
$I(SaP) = И$ е. т. е. $f(S) \subseteq f(P)$,	$f(S) \neq \emptyset$ и $f(S) \subseteq f(P)$,
$I(SeP) = И$ е. т. е. $f(S) \cap f(P) = \emptyset$,	$f(S) \cap f(P) = \emptyset$,
$I(SiP) = И$ е. т. е. $f(S) \cap f(P) \neq \emptyset$,	$f(S) \cap f(P) \neq \emptyset$,
$I(SoP) = И$ е. т. е. $f(S) - f(P) \neq \emptyset$,	$f(S) = \emptyset$ или $f(S) - f(P) \neq \emptyset$;

в Sl-интерпретациях

$f(S) \neq \emptyset$ и $f(S) \subseteq f(P)$ и $\forall_x(x \in f(S) \Rightarrow \exists y(y \in f(P) \text{ и } xRy))$,
 $f(S) \cap f(P) = \emptyset$ или $\forall_x \forall_y(x \in f(S) \text{ и } y \in f(P) \Rightarrow \sim xRy \text{ и } \sim yRx)$,
 $f(S) \cap f(P) \neq \emptyset$ и $\exists_x \exists_y(x \in f(S) \text{ и } y \in f(P) \text{ (} xRy \text{ или } yRx))$,
 $f(S) \neq \emptyset$ или $f(S) - f(P) \neq \emptyset$ или $\exists_x(x \in f(S) \text{ и } \forall_y(y \in f(P) \Rightarrow xRy))$.

(индуктивные пункты формулируются в соответствии с таблицами истинности для пропозициональных связок). Понятия (Sl-, Sm-, L- и B-) общезначимости и выполнимости определяются обычным образом².

(I) *Утверждение о корректности: любая доказуемая в Sl, Sm, L, B формула соответственно является: Sl-, Sm-, L-, B- общезначимой* (легко доказывается индукцией по длине доказательства формул).

В дальнейшем конъюнкцию K (соответственно, дизъюнкцию D) силлогистических атомов (*простую конъюнкцию, простую дизъюнкцию*) будем рассматривать как множество всех ее различных атомарных членов и применять соответствующие теоретико-множественные понятия.

Атом A называется BCS-выводимым из простой конъюнкции K (символически, $K \# A$), если существует конечная последовательность атомов $A_1, \dots, A_n$ такая, что $A = A_n$ и каждый член этой последовательности A_i удовлетворяет следующему условию: 1) $A_i \in K$, или существуют h и $j < i$ такие, что $A_h \wedge A_j \supset A_i$ получается подстановкой 2) из аксиомы 4 (Barbara), или 3) из аксиомы 3 (Celarent), или 4) существует $j < i$ такое, что $A_j \supset A_i$ получается подстановкой из аксиомы 1 (conversio simplex e - суждения).

Простая конъюнкция K называется BCS-замкнутой (коротко, замкнутой), если $\{A: K \# A\} \subseteq K$ и, следовательно, если $K = \{A: K \# A\}$. Из этого определения непосредственно следует, что K является BCS-замкнутой, если и только если для любых переменных S, M и P выполняются условия: 1) если $MaP, SaM \in K$, то $SaP \in K$; 2) если $MeP, SaM \in K$, то $SeP \in K$; 3) если $SeP \in K$, то $PeS \in K$.

(II) *В каждом из исчислений Sl, Sm, L, B для любой простой конъюнкции K существует единственная доказуемо-эквивалент-*

² Сложность базисных правил истинности в семантике Sl – существенная особенность этого исчисления. В отличие от других рассматриваемых нами силлогистических систем, для Sl невозможно найти адекватную интерпретацию силлогистических атомов в исчислении одноместных предикатов первого порядка ($Pr^{(1)}$), иными словами, не существует функции, погружающей Sl в $Pr^{(1)}$. Дело в том, что неэквивалентных в Sl формул с $n \geq 1$ переменными терминами больше, чем неэквивалентных в $Pr^{(1)}$ формул с n переменными для одноместных предикатов и без свободных индивидуальных переменных [2, с.11-18], [3, с.29-34].

ная ей замкнутая простая конъюнкция, которую будем называть BCS-замыканием K и обозначать через K^c .

"Быть BCS-выводимым из", "быть замкнутым", "быть замыканием" являются эффективно проверяемыми понятиями.

Несовместимыми атомами называются:

в Sl : 1) SaP и SeP , 2) SaP и SoP , 3) SeP и SiP ;

в Sm : 1), 2), 3), 4) SeS и SaP , 5) SeS и SiP , 6) SeS и PiS ,

7) SoS и SaP , 8) SoS и PaS , 9) SoS и SiP , 10) SoS и PiS ;

в L : 1), 2), 3), 11) SeS , 12) SoS ;

в B : 2), 3), 5), 6), 12), 13) SeS и SoP

(где S и P – произвольные переменные).

Простая конъюнкция K называется Sl -, Sm -, L -, B -противоречивой, если K^c содержит несовместимые, соответственно, в Sl , в Sm , в L , в B атомы.

(III) *Основная лемма. Простая конъюнкция K (Sl -, Sm -, L -, B -) выполнима, если и только если K не является (соответственно, Sl -, Sm -, L -, B -) противоречивой.*

Прямая часть леммы доказывается легко: в каждом из наших исчислений доказуемо отрицание конъюнкции несовместимых в нем атомов, откуда следует доказуемость также и $\neg K$, а в силу утверждения о корректности, невыполнимость K , где K – противоречивая простая конъюнкция.

Обратное следование доказывается построением модели для K^c с непротиворечивым K . Соответствующая интерпретация определяется следующим образом.

Пусть $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ – список всех переменных, занимающих в K^c экзистенциальную позицию³, $F = \{A_1, \dots, A_m\}$ – список всех i -атомов, а $G = \{B_1, \dots, B_l\}$ – список всех o -атомов, входящих в K^c . Положим: $D^0 = \{0, 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}$, если определяется Sl -, Sm - или L -интерпретация, и $D^0 = \{0, n+1, \dots, n+m, n+m+1\}$, если определяется B -интерпретация.

Каждой переменной P сопоставим некоторое множество

$$m(P) \subseteq D^0:$$

- 1) если $P \in P$, i – ее номер в P , $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ – все атомы из списка F , содержащие переменную P , а $B_{l_1}, \dots, B_{l_h}$ – все атомы из списка G , содержащие P в качестве субъекта, то $m(P) = \{i, n+j_1, \dots,$

³ Пусть K – замкнутая простая конъюнкция; L -экзистенциальную позицию занимают в K все переменные, встречающиеся в K ; Sl - и Sm -экзистенциальную позицию занимают в K только переменные, содержащиеся в утвердительных атомах из K ; и наконец, B -экзистенциальную позицию занимает в K переменная P , если для некоторого S в K входит 1) SiP или PiS , или 2) SoP , или 3) MaP с такой M , что K содержит MiS , SiM или MoS .

$n+j_k\}$, если определяется Sl-, Sm- или L-интерпретация, и $m(P) = \{n+j_1, \dots, n+j_k, n+m+l_1, \dots, n+m+l_h\}$, если определяется В-интерпретация;

- 2) если $P \notin P$, то $m(P) = \emptyset$, если определяется Sl-, Sm- или В-интерпретация, и $m(P) = \{0\}$, если определяется L-интерпретация.

Положим, что для любой переменной P $f^\circ(P) = m(P) \cup m(S_1) \cup \dots \cup m(S_p)$, где $S_1aP, \dots, S_paP$ – все атомы, входящие в K^c с P в качестве предиката.

Определим R° : 1) если $SaP \in K^c$, а i – номер переменной P в P , то для любого $k \in f^\circ(s)$ $kR^\circ i$; 2) если $SiP \in K$, а k и i являются номерами S и P в списке P , то $kR^\circ i$.

(D°, f°) , $(D^\circ, R^\circ, f^\circ)$ являются искомыми интерпретациями.

Используя дизъюнктивную нормальную форму силлогистических формул, в которой элиминированы все отрицания на основе законов контрадикторности (аксиомы 2 и 3), из основной леммы легко можно вывести *теоремы полноты* для каждого из исчислений Sl, Sm, L, В; однако мы будем следовать плану Лукасевича.

Исчисления отбрасываемых формул *Sl, *Sm и *В надстраиваются в разъясненном выше смысле на соответствующие исчисления Sl, Sm и В. Исходными правилами вывода в исчислениях *Sl, *Sm и *В являются те же, что в *L – обратная подстановка, отделение консеквента и правило Слупецкого, однако на последнее в *В налагается *дополнительное ограничение*: отрицательные атомы A и B и простая дизъюнкция D таковы, что если A или B имеет вид SoP , то другой из них не есть ни 1) SeS , ни 2) MeS или SeM с такой переменной M , что $SaM \in (D')^c$, ни 3) MeN с такими M и N , что $SaM \in (D')^c$ и $SaN \in (D')^c$, где D' силлогистическое отрицание D^4 .

Аксиомы отбрасывания:

*Sm: *11. $PaM \wedge SaM \supset SiP$,

*12. $SaS \supset PiP$;

*Sl: *13. $(SaS \wedge MaM \wedge PaP) \supset (PaM \wedge SaM \supset SiP)$,

⁴ Пусть F – силлогистическая формула, не содержащая отличных от $\wedge$ и $\vee$ пропозициональных связок. Формулу, которая получается из F заменой в ней всех символов " $\wedge$ " и " $\vee$ " символами " $\vee$ " и " $\wedge$ ", соответственно, и каждого атома контрадикторным атомом, будем называть силлогистическим отрицанием F и обозначать через F' . Очевидно, что F' доказуемо-эквивалентна формуле $\neg F$. Силлогистическое отрицание простой дизъюнкции (конъюнкции) является простой конъюнкцией (дизъюнкцией).

- *14. $PaS \supset (SaS \supset PiP)$,
 *15. $(SaP \wedge PaP) \supset (MaS \wedge MaM \supset SaS)$;
 *B: *16. $(PiP \wedge SiS) \supset (PaM \wedge SaM \supset SiP)$,
 *17. $SiS \supset PiP$

(понятия отбрасывания и отбрасываемой формулы определяются точно так, как в *L).

В дальнейшем существенно используются следующие свойства BCS-выводимости (при этом A и B – отрицательные атомы, C – атом, а K – произвольная простая конъюнкция):

(IV.1) $K\# \cdot SeS$, если и только если 1) $SeS \in K$, или 2) $MeS \in K$ или $SeM \in K$ с такой переменной M, что $K\# \cdot SaM$, или 3) $MeN \in K$ с такими M и N, что $K\# \cdot SaM$ и $K\# \cdot SaN$;

(IV.2) $A \wedge B \wedge K \# \cdot C$, если и только если $A \wedge K \# \cdot C$ или $B \wedge K \# \cdot C$ (при утвердительном C правую часть равносильности можно усилить до $K \# \cdot C$);

(IV.3) $A \wedge B \wedge K$ является противоречивой, если и только если противоречивой является $A \wedge K$ или $B \wedge K$ (в случае B-противоречивости A, B и K должны удовлетворять также следующему дополнительному условию: если A или B имеет вид SoP , то другой из них не есть ни 1) SeS , ни 2) MeS или SeM с такой M, что $SaM \in K^c$, ни 3) MeN с такими M и N, что $SaM \in K^c$ и $SaN \in K^c$).

(V) *Утверждение о корректности: любая отбрасываемая в Sl, в Sm, в L, в B формула соответственно является Sl-, Sm-, L-, B-опровержимой* (доказывается индукцией по длине отбрасывания формул).

Докажем только корректность правила Слупецкого. Пусть A и B – отрицательные атомы, D – дизъюнкция атомов, которые в случае исчисления *B удовлетворяют дополнительному условию, и предположим, что опровержимыми являются:

- (1) $A \supset D$ и (2) $B \supset D$;

тогда выполнимы их отрицания (3) $A \wedge D'$ и (4) $B \wedge D'$, но тогда в силу основной леммы (3) и (4) не являются противоречивыми, а в силу (IV.3) не является противоречивой также (5) $A \wedge B \wedge D$; используя опять основную лемму, заключаем, что (5) выполнима и, следовательно, опровержимо ее отрицание.

- (6) $A \wedge B \supset D$.

Из утверждений о корректности (I) и (V) следует несовместимость метапредикатов доказуемости и отбрасываемости для каждого из исчислений Sl, Sm, L, B:

$$\{F: \#F\} \cap \{F: \#F\} = \emptyset.$$

В каждом из исчислений *Sl, *Sm, *L и *B можно *обобщить правило Слупецкого* следующим образом: если $A_1, \dots, A_n$ – отрицательные атомы, а D – произвольная дизъюнкция атомов, то

если $*A_1 \supset D, \dots, *A_n \supset D$, то $*A_1 \wedge \dots \wedge A_n \supset D$,
 при этом, в случае исчисления $*B$, формулы $A_1, \dots, A_n, D$ удовлетворяют дополнительному обобщенному условию: для каждого атома $A_i (1 \leq i \leq n)$, если A_i имеет вид SoP , то никакой другой атом из $A_1, \dots, A_n$ не есть ни 1) SeS , ни 2) MeS или SeM с такой переменной M , что $SaM \in (D')^c$, ни 3) MeN с такими M и N , что $SaM \in (D')^c$ и $SaN \in (D')^c$. Корректность обобщения доказывается индукцией по n ($n \geq 2$); в случае исчисления $*B$ следует применить свойство (IV.2) с усиленной правой частью.

(VI) Любая дизъюнкция атомов D в каждом из рассматриваемых исчислений Sl, Sm, L, B или доказывается, или отбрасывается.

Доказательство разобьем на части.

(VI.1) D состоит только из утвердительных атомов. Тогда D
 1) отбрасывается в Sl ; 2) отбрасывается в Sm ; 3) доказуема в L , если D содержит атомы вида SaS или SiS , и отбрасывается в L в противном случае; 4) доказуема в B , если D содержит атомы вида SaS , или атомы вида SiS и SaP (с одной и той же переменной S), и отбрасывается в B в противном случае.

Доказательство. Двучленные дизъюнкции, удовлетворяющие указанным условиям, в каждом случае отбрасываются, соответственно, с помощью следующих отбрасываемых формул:

в Sl и Sm : SiS , в L : SiP

в B : $SiS, SaP, SiS \vee PaS, SiP \vee PaS, SaP \vee PaS$.

Если n -членная дизъюнкция $A_1 \vee \dots \vee A_{n-1} \vee A_n$ удовлетворяет указанным условиям, то каждая из следующих ее двучленных поддизъюнкций

$A_1 \vee A_n, \dots, A_{n-1} \vee A_n$, т.е. $A_1 \supset A_n, \dots, A_{n-1} \supset A_n$,

также удовлетворяет указанным условиям и они отбрасываются; но тогда в каждом случае $A_1 \vee \dots \vee A_{n-1} \vee A_n$ отбрасывается с помощью соответствующего обобщенного правила Слупецкого (в случае $*B$ следует учесть, что $A_n (= (A_n)^c)$ является отрицательным атомом).

(VI.2) D состоит только из отрицательных атомов. Тогда дизъюнкция D отбрасывается в каждом из наших исчислений $*Sl, *Sm, *L, *B$. В самом деле, пусть D° получается из D подстановкой S вместо всех других переменных, входящих в D . Можно показать, что

$\# D^\circ \supset SeS \vee SoS$ и $* SeS \vee SoS$

в каждом из наших исчислений. Но из этих формул с помощью *modus tollens* и обратной подстановки получаем отбрасывание для D .

(VI.3) D состоит только из отрицательных атомов и единственного утвердительного атома C . Каждая такая дизъюнкция доказуемо-эквивалентна некоторой импликации $A \supset C$, где A – BCS-замкнутая конъюнкция утвердительных атомов (если $D_1, \dots, D_h$ – все отрицательные атомы, входящие в D , то $A = (D'_1 \wedge \dots \wedge D'_h)^c$). Для доказательства приспособим метод Лукасевича, применяемый им в аналогичной ситуации [1, с.180-183]. Рассмотрим случаи:

(1) $C \in A$; тогда $\# A \supset C$ в каждом из исчисления Sl, Sm, L и B .

(2) $C \notin A$:

(2.1) C имеет вид SaS ; тогда $A \supset C$ 1) доказуема в L ; 2) доказуема в B ; 3) доказуема в Sm , если переменная S встречается в A , и отбрасывается в Sm , в противном случае; 4) отбрасывается в Sl . Докажем (2.1) только в части отбрасывания. Sm : пусть $B \supset C$ получается из $A \supset C$ подстановкой переменной P , отличной от S , вместо всех переменных, входящих в A , тогда начиная с формул $\# PiP \supset B$ и $* PiP \supset SaS$ с помощью *modus tollens* и обратной подстановки отбрасываем $A \supset C$:

(a) $\# PiP \supset B$

(b) $\# (B \supset SaS) \supset (PiP \supset SaS)((a), PC)$

(c) $* PiP \supset SaS$

(d) $* B \supset SaS ((b), (c), \text{modus tollens})$

(e) $* A \supset SaS ((d), \text{обратная подстановка})$.

Sl : пусть $B \supset C$ получается из $A \supset C$ подстановками переменной P , отличной от S , вместо всех таких переменных M , что $SaM \in A$ и, далее, переменной M , отличной от S и P , вместо всех остальных переменных. Легко показать, что

$\# SaP \wedge PaP \wedge MaS \wedge MaM \supset B$,

$* SaP \wedge PaP \wedge MaS \wedge MaM \supset SaS$.

Опираясь на них можно отбросить $A \supset C$ точно так, как в предыдущем случае.

(2.2) C имеет вид SiS ; тогда: $A \supset C$ 1) доказуема в L ; 2) доказуема в Sm , если S встречается в A , и отбрасывается в Sm в противном случае; 3) доказуема в Sl , если A содержит атом вида MaS с некоторым M , и отбрасывается в Sl в противном случае; 4) доказуема в B , если A содержит атомы вида SiP , или PiS , или MiP и MaS , или PiM и MaS с некоторой переменной M , и отбрасывается в B в противном случае.

Доказательство (2.2) в части отбрасывания. Sm : $* A \supset C$ получается из соответствующего подслучая (2.1) в силу доказуемой равносильности $SiS \equiv SaS$. Далее, пусть $B \supset C$ получается подстановкой

из $A \supset C$ переменной $P (\neq S)$ вместо всех переменных, отличных от S (в случае Sl) и переменной S вместо всех таких M , что $MaS \in A$, и переменной $P (\neq S)$ вместо всех переменных, отличных от S . Можно показать, что

$$\begin{aligned} \text{в } Sl : \# SaP \wedge PaP \supset B, \quad \text{в } B : \# SaP \wedge PiP \supset B, \\ * SaP \wedge PaP \supset SiS \quad * SaP \wedge PiP \supset SiS. \end{aligned}$$

С помощью этих формул можно отбросить $A \supset C$ в Sl и B так, как в предыдущих случаях.

(2.3) C имеет вид SaP с различными S и P . Тогда $A \supset C$ отбрасывается в каждом из рассматриваемых исчислений. В самом деле, пусть $B \supset C$ – результат следующих подстановок в $A \supset C$: сперва все такие переменные M , что $SaM \in A$, заменяются на S , а потом все отличные от S и P переменные – на P . Можно показать, что

$$\begin{aligned} \text{в } Sl : \# PaS \wedge PaP \wedge SaS \supset B \\ * PaS \wedge PaP \wedge SaS \supset SaP; \\ \text{в } Sm \text{ и } L : \# PaS \supset B \quad \text{в } B : \# PaS \wedge PiP \supset B, \\ * PaS \supset SaP; \quad * PaS \wedge PiP \supset SaP; \end{aligned}$$

В каждом подслучае с помощью этих формул отбрасываем $A \supset C$ так же, как в предыдущих случаях.

(2.4) C имеет вид SiP . Тогда $A \supset C$ а) доказуема в Sl , Sm и L , если A содержит атомы вида 1) SaP , или 2) PaS , или 3) PiS , или 4) MaP и MaS , или 5) MaP и SiM (или MiS), или 6) MiP (или PiM) и MaS , или 7) MaP , NaS и MiN (или NiM) для некоторых M и N , и отбрасывается в Sl , Sm и L в противном случае; в) доказуема в B , если A содержит атомы вида 3), или 5), или 6), или 7) из указанного списка, и отбрасывается в противном случае.

Опять приведем только ту часть доказательства, которая касается отбрасывания. Пусть $B \supset C$ получается из $A \supset C$ подстановками: S вместо таких переменных M , что $MaS \in A$, P вместо таких M , что $MaP \in A$ и M вместо всех других переменных, отличных от S и P . Можно показать, что

$$\begin{aligned} \text{в } Sl : \# SaS \wedge PaP \wedge MaM \wedge SaM \wedge PaM \supset B, \\ * SaS \wedge PaP \wedge MaM \wedge SaM \wedge PaM \supset SiP; \\ \text{в } Sm \text{ и } L : \# SaM \wedge PaM \supset B, \\ * SaM \wedge PaM \supset SiP; \\ \text{в } B : \# SiS \wedge PiP \wedge PaM \wedge SaM \supset B, \\ * SiS \wedge PiP \wedge PaM \wedge SaM \supset SiP. \end{aligned}$$

Из этих формул в каждом подслучае получаем отбрасывание формулы $A \supset C$ так же, как в предыдущих случаях.

(VI.4) D состоит из отрицательных атомов и более чем одного утвердительных атомов $C_1, \dots, C_k$. Всякая такая дизъюнкция доказуемо-эквивалентна следующей дизъюнкции импликаций:

$$(A \supset C_1) \vee \dots \vee (A \supset C_k),$$

где A – определяется так же, как в предыдущем случае. Если хотя бы для одного i ($1 \leq i \leq k$) $A \supset C_i$ доказуема в каком-либо из исчислений Sl , Sm , L и B , то в силу PC в том же исчислении будет доказуемой и D . Если же $A \supset C_i$ недоказуема ни для какого i , тогда в силу (VI.3) $A \supset C_i$ отбрасывается для каждого i и, следовательно, в силу PC в том же исчислении отбрасываемы

$$C'_1 \supset A', \dots, C'_k \supset A'.$$

В случае исчислений Sl , Sm и L с помощью обобщенного правила Слупецкого из этих формул получаем, что отбрасывается также

$$C'_1 \wedge A', \dots \wedge C'_k \supset A',$$

что доказуемо-эквивалентна D . В случае же исчисления B в этой ситуации имеются две разные возможности. Если для каких-либо i и j ($1 \leq i, j \leq k$) C_i имеет вид SiS , а C_j – вид SaP с одной и той же S , то $C'_1 \wedge \dots \wedge C'_k \supset A'$ доказуема и, следовательно, доказуема D . А когда это условие не выполняется, так как A' состоит из отрицательных атомов, выполняется ограничивающее условие для применения обобщенного правила Слупецкого и по этому правилу заключаем, что в B отбрасывается также $C'_1 \wedge \dots \wedge C'_k \supset A'$ и, следовательно, отбрасывается D .

(VII) *Утверждение о дополнителности: любая силлогистическая формула в каждом из исчислений Sl , Sm , L и B или доказыва-ется или отбрасывается и, таким образом,*

$$\{F: \# F\} \cup \{F: \# F\} = U,$$

где U – все множество силлогистических формул.

Доказательство. Пусть $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ – доказуемо-эквивалентная формуле F ее н.к.ф., в которой элиминированы все отрицания согласно законам контрадикторности (аксиомы 2 и 3). (VII) достаточно доказать для таких $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$. Имеются две возможности: 1) доказуемы все D_i ($1 \leq i \leq n$); тогда, в силу PC , доказуема и вся конъюнкция $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$, 2) некоторая D_i не является доказуемой; тогда, поскольку $D_1, \dots, D_n$ простые дизъюнкции, в силу (VI) отбрасывается D_i и опять, в силу PC , отбрасывается и вся конъюнкция $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$.

Из утверждений о корректности и дополнителности следует *полнота* каждого члена пары сопряженных исчислений (Sl , $*Sl$), (Sm , $*Sm$), (L , $*L$) и (B , $*B$) относительно Sl -, Sm -, L - и B -общезначимости, соответственно, а также *разрешимость* для этих понятий общезначимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукасевич Я. Аристотилевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.

2. Мchedlishvili Л.И. Ассерторическая силлогистика Аристотеля и логика одноместных предикатов // Методы логических исследований. Тбилиси, 1987, с. 11-18.
3. Мchedlishvili Л.И. Нормальные формы в силлогистике // Семантический анализ неклассической логики. Тбилиси, 1991. С. 29-34.
4. Slupecki J. On Aristotelian Syllogistic // *Studia Philosophica*, 1949/50 (4). P. 275-300.
5. Смирнов В. А. Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии, Киев. 1981.
6. Prior A.N. *Formal Logic*. Oxford, 1962 (Appendix I).
7. Shepherdson J.C. On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // *JSL*, 21 (1956), no 2. P. 137-147.

Н.М.Нагорный

К ВОПРОСУ О НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ*

Abstract. *In this article a new proof of consistency of the classical formal number theory is given. The proof is performed in the Kleene–Nelson style.*

Публикуемая работа тематически связана с докладами [29] и [30], прочитанными автором на конференциях, посвященных памяти В.А.Смирнова. Излагаемый в ней результат, по сути дела, подводит итог авторским исследованиям, начавшимся еще в ходе его участия в работе семинара по клиниевской реализуемой семантике, организованного им в Вычислительном центре АН СССР во второй половине 50-х годов прошлого столетия.

Значительная часть второго из данных докладов посвящена истории этого семинара, участниками которого были получены замечательные результаты и проанализированы труднейшие, и до сих пор остающиеся нерешенными проблемы. Что же касается первого из них, опубликованного в материалах конференции лишь в виде кратких тезисов, то данная работа представляет собой расширенную его версию. Основой для нее послужил материал, в свое время изданный небольшим тиражом в виде брошюры [28], ставшей ныне практически недоступной. Ввиду сказанного мне представилось целесообразным опубликовать этот материал повторно, внося в него необходимые поправки и изменения, а также снабдив отдельные рассуждения дополнительной аргументацией.

1. Проблема установления непротиворечивости арифметики, то есть “чистой” – неаналитической – теории чисел, оказалась в центре внимания гильбертовской *теории доказательств*, – часто называемой также *метаматематикой*, – с момента зарождения этой теории. И хотя впоследствии ближайший сотрудник Гильберта П.Бернайс высказывал мнение, что «окончательный приговор судьбе теории доказательств может вынести лишь решение задачи установления непротиворечивости *анализа*» ([1], с. 13), первой по замыслу Гильберта “проверку на непротиворечивость” должна была пройти *арифметика*, «это чистейшее, – по его выражению, – и наивнейшее дитя человеческого духа» ([2], с. 434).

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 01-06-80142.

В рассматриваемой ситуации *формальная система* арифметики мыслилась Гильбертом как соединение записанной на специально для этой цели разработанном *формальном* “логико-арифметическом языке” версии *неформальной* теоретико-множественной аксиоматики натурального ряда, ранее построенной в трудах Пеано и Дедекинда, с “классической” аристотелевской логикой в виде *классического исчисления предикатов*. Как известно, существенной чертой этой логики является наличие в ней так называемого *закона исключенного третьего*, что влечет за собой допустимость доказательств *методом “от противного”* и, как следствие, неконструктивность понятий как самой арифметики, так и всех базирующихся на ней математических теорий (и в первую очередь – математического анализа).

Исторически теория доказательств разрабатывалась Гильбертом как средство, нацеленное на преодоление *трудностей*, обнаружившихся в теоретико-множественной программе Кантора уже на начальном этапе ее реализации. Особенно тяжелое впечатление на него, как и на многих других математиков, произвело открытие в ней так называемых “*антиномий*” (“*парадоксов*”) теории множеств¹, в особенности “парадокса Рассела”. «Перед лицом этих парадоксов надо согласиться, – писал он, – что положение, в котором мы пребываем сейчас, на длительное время невыносимо. Подумайте: в математике, – этом образце надежности и истинности, – понятия и умозаключения, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепостям. Где же тогда искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?» ([2], с. 438). Теории доказательств Гильбертом отводилась также роль противовеса той критике, которой Брауэр с более общих позиций, не ограничиваясь одной лишь проблемой антиномий, подверг теорию множеств в целом.

Альтернативная программа Брауэра, – его *интуиционизм*, – предложила возводить математику на базе так называемых *умственных математических построений*, и Брауэр убедительно показал [3], что при рассмотрении этих последних требуется применять особую, *интуиционистскую*, логику, в которой, в частности, ни “закон исключенного третьего”, ни “закон снятия двойного отрицания” более не могут претендовать на роль *универсальных логических принципов*.

Таким образом, теория доказательств с самого начала возникла “на стыке” двух конфронтрующих концепций, каждая из которых пользовалась своей особой логикой, и это обусловило проблему

¹ В сущности, прямых контрадикторных *противоречий*, т. е. *ложных суждений*.

выбора логических средств, допустимых в математических рассуждениях. В самом деле, высказывание, оказавшееся *истинным* в рамках одной логики, вполне могло оказаться *ложным* в рамках другой. Более того, могло оказаться, что высказывание, *истинное* в рамках обеих логических систем, в действительности доказывалось в них по-разному, так что *доказательство*, приемлемое в рамках *одной* из этих систем, будет отвергаться в рамках *другой*, и наоборот. Впоследствии, с уточнением в 1936 г. общего понятия алгорифма и с выходом в свет работы С.К.Клини [4], создавшей благоприятную почву для разработки основ *конструктивной семантики*, сформировалось и еще одно самостоятельное направление в основаниях математики – *марковский конструктивизм*, также выдвинувший свою логическую концепцию, которую тоже надлежало “принять в расчет”.

При анализе столь сложного вопроса, как вопрос о *непротиворечивости* какой-либо *формальной* теории (в том числе и арифметики), безусловно, следует самым тщательным образом учитывать все могущие здесь возникнуть проблемы – в том числе и вопрос о соотношении *формализуемой теории* с ее *формализацией*. Он не так прост, как это представлялось в момент зарождения теории доказательств. Например, видимо, попросту не замеченное Гильбертом расхождение в языках, на которых “говорили” о натуральных числах Пеано и Дедекинда, с одной стороны, и он сам – с другой, обусловило *неполноту*² формальной арифметики (знаменитая теорема Гёделя о неполноте), а значит, и возникновение ее *нестандартных* моделей. Тем не менее, гильбертовский подход вошел в “математическую классику”, и у него есть свои резоны (см. [31]). Следует также внимательно относиться и к вопросу о том, какие логические средства могут быть в этой ситуации применены. Естественно добиваться их “нейтральности”, то есть приемлемости в рамках по крайней мере трех упомянутых выше концепций и т. п. К рассмотрению этих вопросов мы вернемся несколько позже.

2. Первое по времени (1936 г.) доказательство непротиворечивости классической формальной арифметики было опубликовано учеником Гильберта Г.Генценом [5]. Как мы теперь знаем (см. [1], с. 439), ему предшествовало более раннее доказательство того же автора, которое в свое время было необоснованно отклонено (оно по сохранившимся гранкам опубликовано [6] лишь в 1969 г.). С

² Гильберт рассчитывал получить *полную и непротиворечивую* аксиоматику не только арифметики, но и всех других математических дисциплин, включая теорию множеств.

тех пор появилось еще одно доказательство Генцена [7], а также доказательства Л.Кальмара [1; Приложение V, § 1], В.Аккермана [1; Приложение V, § 2] (см. также [8]), П.С.Новикова [9], К.Шютте [10, 11] и сравнительно малоизвестное доказательство И.Н.Хлодовского [12], опубликованное посмертно с комментариями А.С.Есенина-Вольпина.

Не вдаваясь в сравнение этих доказательств и в их подробный разбор, отметим лишь, что в основе каждого из них лежит поиск высказывания, *невыводимого* в рассматриваемой формальной системе. Тем самым система оказывается непротиворечивой, ибо в противоречивой системе можно было бы вывести *любое* высказывание. Невыводимость же подобранного высказывания доказывается путем сложного, итерированного преобразования предполагаемого вывода этого высказывания к некоему стандартному виду, причем обрыв процесса этого преобразования доказывается трансфинитной индукцией до некоторого “относительно небольшого” порядкового числа. Степень конструктивности перечисленных доказательств не всегда анализируется, и отдельные авторы (см. напр., [13], с. 295) демонстративно считают этот вопрос «проблемой субъективной природы».

Несколько особняком по отношению к упомянутым выше работам стоит более ранняя (1933 г.) публикация Гёделя [14], в которой классическая арифметика “погружается” в интуиционистскую, так что если непротиворечива интуиционистская арифметика, то непротиворечива и классическая (обратное тривиально). К этому времени какое-либо доказательство непротиворечивости интуиционистской арифметики отсутствовало (оно появилось лишь в 1936 г. как *следствие* работы Генцена [5]). Но после появления понятия *реализуемой* логико-арифметической формулы, введенного Клини в уже упоминавшейся работе [4], Д.Нельсон [15] показал, что всякая логико-арифметическая формула, выводимая в *интуиционистской* формальной арифметике, реализуема и что формула $(0=1)$, напротив, не реализуема (и, значит, в этой арифметике не выводима). Это было первое *прямое* (не ссылающееся на непротиворечивость классической арифметической системы) доказательство непротиворечивости интуиционистской формальной арифметики, и в соединении с уже упомянутой работой [14] оно давало еще одно доказательство непротиворечивости классической формальной арифметики, по своему стилю существенно отличающееся от предшествующих.

Первое утверждение только что сформулированной теоремы Нельсона доказывается индукцией “вдоль вывода формулы” и ни с какой техникой преобразования выводов дела не имеет. Анализ

проводимого при этом рассуждения показывает, что оно “нейтрально” в упоминавшемся выше смысле. Естественно пытаться доказать *аналог* теоремы Нельсона уже для *классической* формальной арифметики, надлежащим образом модифицировав клиниевское определение реализуемой формулы, но сохранив при этом обе перечисленные выше черты доказательства Нельсона.

3. С течением времени, прошедшего после публикации работы Клини [4], в литературе появился целый ряд модификаций первоначального клиниевского определения. В определенном отношении интересна модификация, содержащаяся в работе Н.А.Шанина [16]. В ней наряду с собственно *реализациями* формул фигурируют, будучи четко отделены от них, *записи* этих реализаций³. Записи представляют собой некоторым стандартным образом закодированную информацию о реализующих формулы объектах, и в полном соответствии с замыслом Клини они несут в себе “максимум” информации об этих объектах, фактически являясь их гёделевыми номерами. Такая структура определения реализации естественным образом подводит к мысли рассмотреть и другие его варианты, беря, например, в качестве записей реализаций не их гёделевы номера, а какую-нибудь иную, “более слабую” информацию.

В порядке реализации этой идеи нами в работах [17, 18] было введено и рассмотрено понятие *восполнимой* логико-арифметической формулы, представляющее собой другой “крайний” вариант клиниевского определения, в котором мы в записи объектов, восполняющих формулы, включили “минимум” информации о них: в качестве записи восполнения, вне зависимости от того, каково оно само, мы всегда брали *один и тот же* фиксированный объект – для конкретности, натуральное число нуль (за точным определением мы отсылаем читателя к работе [18, п. 3]). В частности, рассматривая это понятие без какого бы то ни было обращения к теоретико-множественным представлениям, но тем не менее с апелляцией (по-видимому, неустраимой: см. [18, теор. 4.2]) к закону исключенного третьего (то есть в рамках классической логики), мы доказали *аналог* теоремы Нельсона для *классической* формальной арифметики. Это давало *классически* справедливое доказательство непротиворечивости классической формальной арифметики. Но “нейтральным” – из-за использования закона исключенного третьего – оно не являлось.

³ В одном из писем Н.А.Шанин сообщил мне, что эта идея восходит к А.А.Маркову, который применял ее в своих лекциях еще в 1948 г.

В заметке [19] мы ввели такую модификацию понятия выполнимой логико-арифметической формулы – понятие *квазивыполнимой* формулы, – для которой соответствующий аналог теоремы Нельсона может быть доказан “нейтральными” средствами, то есть средствами, приемлемыми в рамках всех трех упоминавшихся выше концепций – теоретико-множественной, интуиционистской и конструктивной. Эти средства ниже будут охарактеризованы детально. Однако уже сейчас мы хотели бы подчеркнуть, что приводимые ниже доказательства утверждений, сформулированных в [19], мы склонны трактовать в содержательном плане, то есть доказывать *истинность* утверждений, а не их выводимость в каких-либо исчислениях (хотя и этот вариант, о чем говорится в [19] в начале с. 27, напрашивается сам собой). Выдержав наше доказательство в духе первоначального доказательства Нельсона [15] и приняв во внимание роль, которую сыграло это последнее в прямом установлении непротиворечивости интуиционистской формальной арифметики, мы хотели бы оспорить распространенное мнение, будто «любое доказательство непротиворечивости ... лишь сводит вопрос о непротиворечивости одной теории к вопросу о непротиворечивости другой» (см., напр., [20], столб. 999).

4. Чтобы сделать чтение этой работы не зависящим от заметки [19], мы повторим приведенные там определения.

4.1. Логико-арифметический язык мы будем использовать в том виде, как он описан в [21]. Буквами S и T мы будем обозначать произвольные постоянные термы этого языка. Значение терма T будет обозначаться посредством $z(T)$. Буквы P и Q будут обозначать произвольные замкнутые формулы языка. Буквой x будем обозначать произвольную переменную (числовую), а символом $R(x)$ – произвольную формулу, не содержащую параметров, отличных от x .

Наши определения мы для большей краткости будем формулировать с использованием следующих сокращений:

а) знаки $\wedge$, $\cup$, $\sim$, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ будут обозначать соответственно логические союзы “и”, “или”, “не”, “если..., то...” и “тогда и только тогда, когда ...”;

б) содержательные кванторные комплексы общности и существования мы будем обозначать выражениями типа (n) , $\dots$, (w) и (Eu) , $\dots$, (Ew) соответственно;

в) знак $=_{gr}$ будет обозначать отношение графического равенства слов (см. [26, § 2.4]), а знак $=_{df}$ будет сокращением для слов “есть по определению”.

В качестве обозначений для натуральных чисел мы будем использовать переменные m , n и p . Мы будем рассматривать также пары натуральных чисел (ПНЧ), частично рекурсивные функции одного аргумента (ЧРФ1) и одну фиксированную общерекурсивную функцию f двух аргументов такую, что $f(m,n)=0$ тогда и только тогда, когда $m=n$. В качестве обозначений для ПНЧ, ЧРФ1 и функции f мы будем использовать буквы u , v и w . Первый и второй члены ПНЧ w мы будем обозначать соответственно $(w)_1$ и $(w)_2$. Запись $!w(n)$ будет означать, что ЧРФ1 w определена в точке n . Выражения $(w \in \text{ПНЧ})$, $(w \in \text{ЧРФ1})$ и $(w \in f)$ будут соответственно означать, что w есть ПНЧ, w есть ЧРФ1 и w есть f .

4.2. Переходя к определению квазивосполнимой формулы, мы индуктивно определим два вспомогательных отношения – бинарное G и тернарное Z . (Для ориентировки подскажем читателю, что G будет аналогом клиниевского отношения «объект w реализует формулу P », а Z – аналогом шанинского отношения «число n есть запись реализации w формулы P ».) Определение G и Z мы начнем со случая замкнутых формул. Оно, с учетом определения самого понятия формулы, распадается на следующие семь подслучаев:

Подслучай а) – *элементарная формула*:

$$G(w, (S=T)) =_{df} (w \in f) \wedge (f(z(S), z(T))=0),$$

$$Z(n, w, (S=T)) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, (S=T)).$$

Подслучай б) – *конъюнкция*:

$$G(w, (P \& Q)) =_{df} (w \in \text{ПНЧ}) \wedge$$

$$\sim (u) \sim (G(u, P) \wedge Z((w)_1, u, P)) \wedge$$

$$\sim (v) \sim (G(v, Q) \wedge Z((w)_2, v, Q)),$$

$$Z(n, w, (P \& Q)) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, (P \& Q)).$$

Подслучай в) – *импликация*:

$$G(w, (P \supset Q)) =_{df} (w \in \text{ЧРФ1}) \wedge$$

$$(n) [\sim (u) \sim (G(u, P) \wedge Z(n, u, P))] \rightarrow$$

$$(!w(n) \wedge \sim (v) \sim (G(v, Q) \wedge Z(w(n), v, Q)))],$$

$$Z(n, w, (P \supset Q)) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, (P \supset Q)).$$

Подслучай г) – *всеобщность*:

$$G(w, \forall x R(x)) =_{df} (w \in \text{ЧРФ1}) \wedge$$

$$(n) [!w(n) \wedge \sim (u) \sim (G(u, R(n)) \wedge Z(w(n), u, R(n)))],$$

$$Z(n, w, \forall x R(x)) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, \forall x R(x))$$

Подслучай д) – *отрицание* - мы, как обычно, трактуем в духе

Клини [4]:

$$G(w, \neg P) =_{df} G(w, (P \supset (0 = 0'))),$$

$$Z(n, w, \neg P) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, \neg P).$$

Подслучаи е) и ж) – *дизъюнкцию и существование* – мы трактуем, следуя идее Гёделя [14]:

$$\text{е)} \quad G(w, (P \vee Q)) =_{df} G(w, \neg(\neg P \& \neg Q)),$$

$$Z(n, w, (P \vee Q)) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, (P \vee Q)).$$

$$\text{ж)} \quad G(w, \exists x R(x)) =_{df} (G(w, \neg \forall x \neg R(x))),$$

$$Z(n, w, \exists x R(x)) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, \exists x R(x)).$$

Теперь понятие *квазивосполнимости* для произвольной замкнутой логико-арифметической формулы P (символическая запись: gP^4) мы введем с помощью следующего определения:

$$(1) \quad gP =_{df} \neg(w) \neg G(w, P).$$

Случай незамкнутой формулы F трактуется обычным для подобного рода ситуаций образом:

$$(2) \quad G(w, F) =_{df} G(w, \forall^{\Delta} F),$$

$$Z(n, w, F) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, F)$$

(здесь $\forall^{\Delta} F$ – замыкание F по всем её параметрам; впоследствии (см. 7.4) мы убедимся, что порядок “связывания” параметров формулы F здесь никакой роли не играет).

Читателю было бы полезно сравнить по пунктам приведенные здесь определения с соответствующими определениями в [17] и [16].

Закljučая этот раздел, мы отметим, что для произвольной формулы F

$$Z(n, w, F) \leftrightarrow (n =_{gr} 0) \wedge G(w, F),$$

и потому

4.2.1. Для любых F , w и n

$$G(w, F) \wedge Z(n, w, F) \leftrightarrow (n =_{gr} 0) \wedge G(w, F).$$

5. Приведенные нами определения отношений G и Z и свойства g представляют собой некоторые *тексты*, которые в дальнейшем должны быть восприняты и поняты читателем. При этом, естественно, он будет руководствоваться своими представлениями о семантике (в частности, о том, следует ли считать истинными такие-то и такие-то высказывания), а также о допустимых способах рассуждений (то есть фактически о *законах логики*). Ему естественно желать, чтобы в процессе чтения у него не возникало необозримых и, тем более, запутанных ситуаций, способных вызывать сомнения. И автор обязан идти читателю навстречу.

В свете сказанного мы перечислим ниже ряд более или менее сложных, а также не слишком часто встречающихся в математическом обиходе “нейтральных” логических законов, и каждый раз, применяя их, мы будем оговаривать это специальной ссылкой.

⁴ Буква g употреблена здесь в честь Гёделя.

Говоря ниже о *высказываниях*, мы будем иметь в виду высказывания типа тех, которые уже фигурировали в определениях отношений G и Z , а также свойства g . Более точное определение *могло бы* быть сформулировано, но мы надеемся, что оно читателю не понадобится. Для уточнения позиции подчеркнем, что в наши задачи не входит построение синтаксиса “метаязыка”, поскольку нам требуется доказать лишь небольшое число утверждений, и что перечисленные нами в п. 4.1 а) – 4.1 б) логические знаки мы используем лишь “в стенографических целях” (то есть для сокращений).

Большинство используемых ниже “нейтральных” логических фактов навеяно формальными правилами интуиционистской логики и математики, как они были введены Гейтингом в его работах [22, 23]. Со временем на перечисленные в этих работах *правила* установился взгляд лишь как на некие *исчисления*, для которых якобы надо искать надлежащую семантику. Такой взгляд имеет под собой определенную почву – особенно с тех пор, как была уяснена возможность раздельно-последовательного изложения синтаксиса и семантики искусственных (формализованных) языков. Однако интуиционистская логика сформировалась *гораздо раньше* этих работ, и эти последние лишь *кодифицируют* “заведомо надежные” способы рассуждения первой. Сошлемся на самого Гейтинга, который уже в [22] пишет: «Интуиционистская математика представляет собой мыслительную деятельность, и любой язык, в том числе и формализованный, есть только подсобное средство для сообщений о ней. Разработать систему формул, которая была бы эквивалентна интуиционистской математике, невозможно в принципе, ибо возможности нашего мышления не могут быть сведены к конечному набору заранее составленных правил». Впоследствии в [24] он писал еще более определенно: «Мне жаль, что мое имя известно ныне главным образом в связи с этими работами... Они от фундаментальных идей отвлекали внимание в сторону самих формальных систем».

Разумеется, будучи истинным математиком, Гейтинг свел число исходных правил (аксиом) и способов умозаключений к *минимуму*, о чем он пишет в своем письме Оскару Беккеру от 23.07.1933 г. (см. [25], с. 16). Кроме того, система его исходных формальных правил устроена так, что система аксиом классической (аристотелевской) логики получается из нее простым присоединением закона исключенного третьего.

Надо сказать, что в связи с интуиционизмом бытует немало число досадных мифов и один из них состоит, например, в том, что работы [4] и [27] суть работы *по* интуиционистской семантике.

На самом же деле эти работы представляют собой попытку объяснить интуиционистскую семантику читателю, *не знакомому с интуиционизмом*.

Исходные правила гейтинговской системы, безусловно, были *интуиционистски приемлемы* уже в самый момент формулировки этой системы (именно это и позволило Гейтингу взять их в качестве исходных). Их *непосредственная обозримость* делала их особенно убедительными. Приемлемость *производных* (выводимых) правил также признавалась, но уже не в силу первоначальной интуиции, а в силу некоего рассуждения (индукцией по построению вывода), и по мере усложнения вывода выводимое правило, вообще говоря, становилось все менее обозримым.

Подводя итоги сказанному, мы приходим к выводу, что гарантированной “нейтральной” убедительностью будут обладать рассуждения, правильность которых обосновывается ссылками на истинность таких высказываний, которые являются “подстановочными примерами” формул⁵, имеющих обозримые (в частности, достаточно короткие) выводы в соответствующих гейтинговских (то есть интуиционистских) системах. В качестве таких формул можно было бы брать формулы, *фактически выведенные* в подходящем систематическом курсе математической логики. Мы позволим себе сослаться на фундаментальную монографию С.К.Клини [21, часть II]. Такие формулы будут выводимы и *классически* ввиду уже отмечавшейся связи между гейтинговскими и классическими системами. Это обеспечивает *классическую приемлемость* проводимых рассуждений. Гарантией *конструктивной их приемлемости* является уже упоминавшаяся выше теорема Нельсона.

6⁶. Разделу 7, в котором мы докажем важные для дальнейшего подготовительные утверждения, мы предположим список формул, на интуиционистскую выводимость которых будем в этом разделе ссылаться. Для каждой из формул мы укажем адрес ее вывода, а также те места в разделе 7, где “подстановочные примеры” этих формул будут применяться. Мы надеемся, что читатель найдет формулы этого списка простыми и обозримыми, что таковы же и фактически используемые “примеры” этих формул и что число этих примеров не слишком велико. Мы специально обращаем внимание на то, что ввиду занятости у нас под содержательное

⁵ То есть результатами подстановки в эти формулы надлежащих высказываний вместо фигурирующих в них переменных.

⁶ Этот раздел носит справочный характер и при первом чтении (особенно читателем, знакомым с интуиционистской логикой) может быть пропущен.

отрицание знака $\sim$, клиниевский знак эквивалентности $\sim$ (см. [21, § 26]) мы заменим знаком $\equiv$.

6.1. Пропозициональные формулы:

6.1.1. $\neg\neg(A \& B) \equiv (\neg\neg A \& \neg\neg B)$ [21, с. 105, ф.*25].

“Нейтрально” истинные подстановочные примеры будут иметь вид

$$\sim \sim (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\sim \sim \alpha \wedge \sim \sim \beta),$$

где α и β – некоторые высказывания. Замена по этим эквивалентностям производится при доказательстве утверждений 7.2 – 7.4 (см. соответствующие ссылки в квадратных скобках; ссылки по аналогии, специально не отмеченные, также учитываются).

6.1.2. $\neg\neg(A \supset B) \equiv (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$ [21, с. 110, ф.*60].

“Нейтрально” истинные подстановочные примеры в данном случае будут иметь вид

$$\sim \sim (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\sim \sim \alpha \rightarrow \sim \sim \beta),$$

где α и β – некоторые высказывания. Один из таких примеров используется для замены при доказательстве утверждения 7.3. (см. ссылку).

6.1.3. $\neg\neg\neg A \equiv \neg A$ [21, с. 109, ф.*49 b].

Соответствующие этой формуле “нейтрально” истинные высказывания имеют вид

$$\sim \sim \sim \alpha \leftrightarrow \sim \alpha,$$

где α – некоторое высказывание. Они используются в 7.2 и 7.3 для снятия двойного отрицания с высказываний вида gF , поскольку эти последние начинаются [см. 4 (1)] знаком $\sim$. (См. ссылки в квадратных скобках.)

6.1.4. $(A \& B) \supset C \equiv A \supset (B \supset C)$ [21, с.104, фф.*4 и *5].

Соответствующие этой формуле “нейтрально” истинные высказывания будут иметь вид

$$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma \leftrightarrow \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma).$$

Одно из них используется для замены в доказательстве утверждения 7.3 (см. ссылку).

6.1.5. Пользуясь теоремой о дедукции [21, §§ 21 и 22], а также правилами введения и удаления конъюнкции [там же, § 23], можно легко вывести эквивалентность

$$A \supset B \& C \equiv (A \supset B) \& (A \supset C).$$

Соответствующее ей “нейтрально” истинное высказывание используется для замены в доказательстве утверждения 7.3 (см. ссылку).

6.1.6. Используя формулы *63 [21, с. 109] и *30 [там же, с.107], легко вывести эквивалентность

$$\neg(\neg A \& \neg B) \equiv \neg\neg(A \vee B).$$

Соответствующая ей “нейтрально” истинная эквивалентность

$$\sim(\sim gP \wedge \sim gQ) \leftrightarrow \sim\sim(gP \cup gQ)$$

используется в доказательстве утверждения 7.6 (см. ссылку).

Добавим, что преобразования, связанные с коммутативностью и ассоциативностью конъюнкции, мы ввиду их тривиальности, как правило, оговаривать не будем.

6.2. Предикатные формулы:

6.2.1. $\exists x (A(x) \& B) \equiv \exists x A(x) \& B$, где x не является параметром B . [21, с. 148, ф.*91].

Подстановочные примеры в данном случае будут иметь вид $(Ew)(\alpha(w) \wedge \beta) \leftrightarrow (Ew)\alpha(w) \wedge \beta$,

где w не является параметром β . Такого рода “нейтрально” истинные высказывания используются в эквивалентных заменах, производимых в доказательствах утверждений 7.1 – 7.4, включая и рассуждения по аналогии (см. ссылки).

6.2.2. $\neg \forall x \neg \forall(x) \equiv \neg \neg \exists x A(x)$ [21, с. 151, таблица Гейтинга, II, фф. c_1 и c_3].

Подстановочные примеры в данном случае будут иметь вид $\sim(w) \sim \alpha(w) \leftrightarrow \sim\sim(Ew) \alpha(w)$,

где $\alpha(w)$ – некоторое высказывание, зависящее от параметра w .

Такого рода эквивалентности используются в заменах, производимых при доказательстве утверждений 7.1 – 7.4 и 7.7 (см. ссылки).

6.2.3. $\neg \neg \forall x \neg A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$ [21, с. 151, таблица Гейтинга, фф. a_1 и a_2].

Подстановочный пример этой формулы

$$\sim\sim(n) \sim(u) \sim G(u, R(n)) \leftrightarrow (n) \sim(u) \sim G(u, R(n))$$

используется на предпоследнем шаге доказательства 7.4.

6.2.4. $\forall x(A(x) \& B(x)) \equiv \forall x A(x) \& \forall x B(x)$ [21, с. 148, ф.*87].

Используется описанным выше способом на втором шаге обоснования высказывания (14) в доказательстве утверждения 7.4.

6.3. Логико-арифметические формулы:

6.3.1. На втором шаге обоснования высказывания (10) в утверждении 7.3 мы могли бы сослаться на интуиционистскую выводимость формулы

$$\forall n (n=0 \supset F(n)) \equiv F(0).$$

К сожалению, в [21] такого вывода нет. Мы оставляем его читателю в качестве легкого упражнения. Указание: воспользуйтесь интуиционистской выводимостью формулы

$$(m = n) \supset (F(m) \equiv F(n)).$$

6.3.2. На заключительном этапе доказательства утверждения 7.1 можно было бы воспользоваться интуиционистской выводимостью формулы $\bigwedge (m = n) \supset (m = n)$, которая может быть получена на основании фф. *158 и *49 ([21], сс.173 и 110). Однако “нейтральная” приемлемость этого шага общеизвестна и сама по себе.

7. Докажем теперь ряд утверждений, проливающих свет на то, как наличие свойства g у какой-либо логико-арифметической формулы F зависит от строения этой формулы и от наличия свойства g у ее составных частей, когда она не элементарна.

7.1. Пусть S и T – постоянные термы. Тогда

$$g(S = T) \leftrightarrow z(S) =_{gr} z(T).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} g(S = T) &\leftrightarrow \sim (w) \sim G(w, (S = T)) && [4(1)] \\ &\leftrightarrow \sim (w) \sim (w \in f) \wedge (f(z(S), z(T)) = 0) && [4.2:a)] \\ &\leftrightarrow \sim (w) \sim ((w \in f) \wedge (z(S) =_{gr} z(T))) && [4.1] \\ &\leftrightarrow \sim \sim (Ew) ((w \in f) \wedge (z(S) =_{gr} z(T))) && [6.2.2] \\ (1) &\leftrightarrow \sim \sim ((Ew) (w \in f) \wedge (z(S) =_{gr} z(T))) && [6.2.1]. \end{aligned}$$

Но $(Ew)(w \in f)$ имеет место (в качестве w мы можем взять f), и потому

$$\begin{aligned} g(S = T) &\leftrightarrow \sim \sim (z(S) =_{gr} z(T)) && [6(1)] \\ &\leftrightarrow z(S) =_{gr} z(T) && [6.3.2], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

7.2. Пусть P и Q – замкнутые формулы. Тогда

$$g(P \& Q) \leftrightarrow gP \wedge gQ.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} g(P \& Q) &\leftrightarrow \sim (w) \sim G(w, (P \& Q)) && [4(1)]. \\ \text{Но} &\sim (w) \sim \{ (w \in \Pi H \checkmark) \wedge \\ &\sim (u) \sim (G(u, P) \wedge Z((w)_1, u, P)) \wedge \\ (2) &\sim (v) \sim (G(v, Q) \wedge Z((w)_2, v, Q)) \} && [4.2:6)]. \\ \text{Но} & && \\ \sim (u) \sim (G(u, P) \wedge Z((w)_1, u, P)) &\leftrightarrow \sim (u) \sim (G(u, P) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0)) && [4.2.1] \end{aligned}$$

$$\leftrightarrow \sim\sim (Eu) (G(u,P) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0)) \quad [6.2.2]$$

$$\leftrightarrow \sim\sim (Eu) (G(u,P) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0)) \quad [6.2.1]$$

$$\leftrightarrow \sim\sim (Eu) (G(u,P) \wedge \sim\sim((w)_1 =_{gr} 0)) \quad [6.1.1]$$

$$\leftrightarrow \sim(u) \sim (G(u,P) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0)) \quad [6.2.2]$$

$$(3) \quad \leftrightarrow gP \wedge ((w)_1 =_{gr} 0) \quad [4(1)].$$

Аналогично получаем, что

$$(4) \quad \sim(v) \sim (G(v,Q) \wedge Z((w)_2, v, Q)) \leftrightarrow (gQ \wedge ((w)_2 =_{gr} 0)).$$

Поэтому

$$g(P \& Q) \quad \leftrightarrow (w) \sim \{ (w \in \text{ПНЧ}) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0) \wedge ((w)_2 =_{gr} 0) \wedge gP \wedge gQ \} \quad [(2),(3),(4)]$$

$$\leftrightarrow \sim\sim (Ew) \{ (w \in \text{ПНЧ}) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0) \wedge ((w)_2 =_{gr} 0) \wedge gP \wedge gQ \} \quad [6.2.2]$$

$$\leftrightarrow \sim\sim \{ (Ew) ((w \in \text{ПНЧ}) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0) \wedge ((w)_2 =_{gr} 0) \wedge gP \wedge gQ \} \quad [6.2.1].$$

$$(5) \quad \text{Но } (Ew) ((w \in \text{ПНЧ}) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0) \wedge ((w)_2 =_{gr} 0)) \text{ имеет место (в}$$

качестве w мы можем взять пару $(0,0)$), и потому

$$g(P \& Q) \quad \leftrightarrow \sim\sim (gP \wedge gQ) \quad [(5)]$$

$$\leftrightarrow \sim\sim gP \wedge \sim\sim gQ \quad [6.1.1]$$

$$\leftrightarrow gP \wedge gQ \quad [6.1.3],$$

что и требовалось доказать.

7.3. Пусть P и Q – замкнутые формулы. Тогда

$$g(P \supset Q) \leftrightarrow (gP \rightarrow gQ).$$

В самом деле,

$$g(P \supset Q) \quad \leftrightarrow \sim(w) \sim G(w, (P \supset Q)) \quad [4(1)]$$

$$\leftrightarrow \sim(w) \sim \{ (w \in \text{ЧРФ1}) \wedge$$

$$(n) [\sim(u) \sim (G(u,P) \wedge Z(n,u,P)) \rightarrow$$

$$(6) \quad !w(n) \wedge \sim(v) \sim (G(v,Q) \wedge Z(w(n),v,Q))] \} \quad [4.2:в)].$$

Но, аналогично (3), имеют место эквивалентности

$$(7) \quad \sim(u) \sim (G(u,P) \wedge Z(n,u,P)) \leftrightarrow gP \wedge (n =_{gr} 0)$$

и

$$(8) \quad \sim(v) \sim (G(v,Q) \wedge Z(w(n),v,Q)) \leftrightarrow gQ \wedge (w(n) =_{gr} 0),$$

и потому

$$g(P \supset Q) \quad \leftrightarrow \sim(w) \sim \{ (w \in \text{ЧРФ1}) \wedge (n) [gP \wedge (n =_{gr} 0)] \rightarrow$$

$$(9) \quad !w(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0) \wedge gQ \} \quad [(6),(7),(8)]$$

Но

$$(n) [(gP \wedge (n =_{gr} 0)) \rightarrow (!w(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0) \wedge gQ)]$$

$$\leftrightarrow (n) [(n =_{gr} 0) \rightarrow (gP \rightarrow (!w(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0) \wedge gQ))] \quad [6.1.4]$$

$$\leftrightarrow [gP (!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0) \wedge gQ)] \quad [6.3.1]$$

$$(10) \leftrightarrow [(gP \rightarrow (!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0))) \wedge (gP \rightarrow gQ)] \quad [6.1.5],$$

и потому [(9), (10)]

$$g(P \supset Q) \leftrightarrow \sim(w) \sim \{ (w \in \text{ЧРФ1}) \wedge (gP \rightarrow (!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0))) \}$$

$$\begin{aligned}
& \wedge (gP \rightarrow gQ)\} \\
& \leftrightarrow \sim \sim (Ew) \{(w \in \text{ЧРФ1}) \wedge (gP \rightarrow (!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0))) \\
& \quad \wedge (gP \rightarrow gQ)\} \quad [6.2.2] \\
(11) \quad & \leftrightarrow \sim \sim \{(Ew) [(w \in \text{ЧРФ1}) \wedge (gP \rightarrow (!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0)))] \\
& \quad \wedge (gP \rightarrow gQ)\} \quad [6.2.1]
\end{aligned}$$

Но $(Ew) \{(w \in \text{ЧРФ1}) \wedge (gP \rightarrow (!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0)))$ имеет место (в качестве w мы можем взять ЧРФ1, определенную в нуле и принимающую там нулевое значение), и потому

$$\begin{aligned}
g(P \supset Q) & \leftrightarrow \sim \sim (gP \rightarrow gQ) & [(11)] \\
& \leftrightarrow \sim \sim gP \rightarrow \sim \sim gQ & [6.1.2] \\
& \leftrightarrow gP \rightarrow gQ & [6.1.3],
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

7.4. Пусть $\forall x R(x)$ – замкнутая формула. Тогда
 $g\forall x R(x) \leftrightarrow (n)gR(n)$.

В самом деле,

$$\begin{aligned}
g\forall x R(x) & \leftrightarrow \sim (w) \sim G(w, \forall x R(x)) & [4(1)] \\
& \leftrightarrow \sim (w) \sim \{(w \in \text{ЧРФ1}) \wedge
\end{aligned}$$

$$(12) \quad (n)[!w(n) \wedge \sim (u) \sim (G(u, R(n)) \wedge Z(w(n), u, R(n)))] \quad [4.2:г)]$$

Но, аналогично (3), имеет место эквивалентность

$$(13) \quad \sim (u) \sim (G(u, R(n)) \wedge Z(w(n), u, R(n))) \leftrightarrow gR(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0),$$

и потому [(12), (13)]

$$\begin{aligned}
g\forall x R(x) & \leftrightarrow \sim (w) \sim \{(w \in \text{ЧРФ1}) \wedge (n) [(!w(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0)) \\
& \quad \wedge (n) gR(n)]\} & [6.2.4] \\
& \leftrightarrow \sim \sim (Ew) \{(w \in \text{ЧРФ1}) \wedge (n) [(!w(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0)) \\
& \quad \wedge (n) gR(n)]\} & [6.2.2] \\
& \leftrightarrow \sim \sim \{(Ew)((w \in \text{ЧРФ1}) \wedge (n) [(!w(n) \wedge ((w(n) =_{gr} 0)) \\
& \quad \wedge (n) gR(n)]\} & [6.2.1].
\end{aligned}$$

Но $(Ew) ((w \in \text{ЧРФ1}) \wedge (n) [(!w(n) \wedge ((w(n) =_{gr} 0))]$, имеет место (в качестве w мы можем взять тождественно равную нулю общеркурсивную функцию), и потому

$$\begin{aligned}
g\forall x R(x) & \leftrightarrow \sim \sim (n) gR(n) & [(14)] \\
& \leftrightarrow \sim \sim (n) \sim (u) \sim G(u, R(n)) & [4(1)] \\
& \leftrightarrow (n) \sim (u) \sim G(u, R(n)) & [6.2.3] \\
& \leftrightarrow (n) gR(n) & [4(1)],
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

7.5. Пусть P – замкнутая формула. Тогда
 $g \upharpoonright P \leftrightarrow \sim gP$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
g \upharpoonright P & \leftrightarrow g(P \supset (0=0')) & [4.2:д)] \\
& \leftrightarrow gP \rightarrow g(0=0') & [7.3] \\
& \leftrightarrow gP \rightarrow (0=_{gr} 0') & [7.1]
\end{aligned}$$

Но графическое равенство $0 =_{gr} 0'$ места не имеет (см. об этом более детально, напр., [26, § 2, п.4]), и потому “методом приведения к нелепости” получаем

$$g \uparrow P \leftrightarrow \sim gP,$$

что и требовалось доказать.

7.6. Пусть P и Q – замкнутые формулы. Тогда

$$g(P \vee Q) \leftrightarrow \sim\sim (gP \cup gQ).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} g(P \vee Q) &\leftrightarrow g \uparrow (\uparrow P \& \uparrow Q) && [4(1), 4.2:e)] \\ &\leftrightarrow g (\uparrow P \& \uparrow Q) && [7.5] \\ &\leftrightarrow \sim (g \uparrow P \wedge g \uparrow Q) && [7.2] \\ &\leftrightarrow \sim (\sim gP \wedge \sim gQ) && [7.5] \\ &\leftrightarrow \sim\sim (gP \cup gQ) && [6.1.6], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

7.7. Пусть $\exists x R(x)$ – замкнутая формула. Тогда

$$g\exists x R(x) \leftrightarrow \sim\sim (En)gR(n).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} g\exists x R(x) &\leftrightarrow g \uparrow \forall x \uparrow R(x) && [4(1), 4.2:ж)] \\ &\leftrightarrow \sim g \forall x \uparrow R(x) && [7.5] \\ &\leftrightarrow \sim (n)g \uparrow R(n) && [7.4] \\ &\leftrightarrow \sim (n) \sim gR(n) && [7.4] \\ &\leftrightarrow \sim\sim (En)gR(n) && [6.2.2], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом:

а) Наличие свойства g у элементарной замкнутой формулы равносильно ее истинности, – “нейтральной”, – так как решение вопроса о графическом равенстве слов не опирается ни на теоретико-множественные представления, ни на закон исключенного третьего; существенную роль здесь, – равно как и в формировании самого представления о *слове*, – играет (см. [26, § 2, п.п. 2–4]) *принцип полной индукции*, приемлемый и с теоретико-множественных позиций, и в рамках интуиционистской программы, и с точки зрения марковского конструктивизма.

б) Свойство g , как показывают утверждения 7.2–7.5, “проносится” через конъюнкцию, импликацию, отрицание и квантор всеобщности.

в) Через дизъюнкцию и квантор существования свойство g проносится лишь “с двойным отрицанием” (утверждения 7.6 и 7.7).

8. Теперь мы перейдем к установлению основного утверждения данной работы, что всякая формула, выводимая в *классиче-*

ской формальной арифметике (для конкретности мы будем иметь дело с формальной системой из гл. IV монографии [21]), квазивосполнима. Отсюда, ввиду того, что формула $(0=0')$ не является квазивосполнимой (см. 7.1), мы сможем сделать вывод, что она не выводима в рассматриваемой системе. А это, в свою очередь, позволит нам констатировать непротиворечивость этой последней.

Мы докажем квазивосполнимость всех аксиом системы и покажем, что применение ее правил вывода⁷ ведет от квазивосполнимых формул к формулам, также обладающим этим свойством.

Начнем с импликационной группы (в [21] это постулаты 1_a и 1_b).

8.1. *Всякая формула вида $(A \supset (B \supset A))$, где A и B – произвольные формулы, квазивосполнима.*

В самом деле, если A и B – замкнутые формулы, то, согласно 7.3,

$$g(A \supset (B \supset A)) \leftrightarrow (gA \rightarrow (gB \rightarrow gA)),$$

и высказывание, стоящее в правой части этой эквивалентности, “нейтрально” истинно как “подстановочный пример” интуиционистской аксиомы. Восполнимость же формулы этого вида в случае, когда хотя бы одна из формул A , B не замкнута, обеспечивается – на основе предыдущего – утверждением 7.4.

Совершенно аналогичным рассуждением – снова, с применением 7.3 и 7.4 – доказываемся

8.2. *Всякая формула вида*

$$((A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))),$$

где A , B и C – произвольные формулы, квазивосполнима.

Аналогичным же рассуждением – на этот раз с применением 7.3, 7.2 (для пренесения g сквозь конъюнкцию) и 7.4. – доказываются теоремы, касающиеся конъюнкционной группы аксиом (в [21] это постулаты 3 , 4_a и 4_b):

8.3 – 8.5 *Любые формулы следующих трех видов:*

$$(A \supset (B \supset A \& B)), ((A \& B) \supset A) \text{ и } ((A \& B) \supset B) \text{ квазивосполнимы.}$$

Перейдем теперь к группе аксиом, связанных с дизъюнкцией (в [21] это постулаты 5_a , 5_b и 6).

Имеют место утверждения

8.6 – 8.7 *Любые формулы следующих двух видов:*

$$(A \supset (A \vee B)) \text{ и } (B \supset (A \vee B)), \text{ где } A \text{ и } B \text{ – произвольные формулы, квазивосполнимы.}$$

⁷ В [21] и аксиомы, и правила вывода называются постулатами.

Как и в 8.1, мы начнем со случая замкнутых формул, после чего случай формул с параметрами может быть рассмотрен с привлечением 7.4.

Рассмотрим формулу первого вида. Тогда

$$g(A \supset (A \vee B)) \leftrightarrow (gA \rightarrow g(A \vee B)) \quad [7.3]$$

$$(1) \quad \leftrightarrow (gA \rightarrow \sim\sim (gA \cup gB)) \quad [7.6]$$

Но “нейтрально” истинны высказывания

$$gA \rightarrow (gA \cup gB) \quad [21, \text{с. 77, Постулат 5a}]$$

и

$$((gA \cup gB) \rightarrow \sim\sim (gA \cup gB)) \quad [21, \text{с.109, ф.*49a},$$

и потому по “правилу цепного заключения” [21, с. 104, ф*2] “нейтрально” истинно высказывание (1), что и оставалось доказать.

Случай формулы второго типа трактуется аналогично.

Учитывая накопившийся у читателя опыт, мы позволили себе несколько сократить приводимую аргументацию.

8.8. Любая формула вида

$$((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))),$$

где A, B и C – произвольные формулы, квазивосполнима.

Снова мы ограничимся случаем замкнутых A, B и C .

Итак, согласно 7.3 и 7.6, имеет место “нейтральная” эквивалентность

$$g((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))) \\ \leftrightarrow ((gA \rightarrow gC) \rightarrow ((gB \rightarrow gC) \rightarrow (\sim\sim (gA \cup gB) \rightarrow gC))),$$

правая часть которой может быть преобразована сначала в

$$((gA \rightarrow gC) \rightarrow ((gB \rightarrow gC) \rightarrow (\sim\sim (gA \cup gB) \rightarrow \sim\sim gC))), \quad [6.1.3],$$

затем в

$$((gA \rightarrow gC) \rightarrow ((gB \rightarrow gC) \rightarrow \sim\sim (gA \cup gB) \rightarrow gC))) \quad [6.1.2],$$

и наконец в

$$(((gA \rightarrow gC) \wedge (gB \rightarrow gC) \rightarrow \sim\sim ((gA \cup gB) \rightarrow gC))) \quad [6.1.4].$$

Но “нейтрально” истинны высказывания

$$((gA \rightarrow gC) \wedge (gB \rightarrow gC)) \rightarrow ((gA \cup gB) \rightarrow gC)) \quad [21, \text{с.77, постулат 6; 6.1.4.}]$$

и

$$((gA \cup gB) \rightarrow gC) \rightarrow \sim\sim ((gA \cup gB) \rightarrow gC) \quad [21, \text{с.109, ф.*49a},$$

и потому по “правилу цепного заключения” ([21, с.104, ф.*2]) “нейтрально” истинно высказывание (2), что и оставалось доказать.

Перейдем теперь к аксиомам, связанным с отрицанием (в [21] это постулаты 7 и 8°; последний специфичен для классической системы).

Первый из них, поскольку g проносится сквозь отрицание [7.5.], трактуется совершенно аналогично 8.1, так что

8.9. *Всякая формула вида $((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$, где A и B – произвольные формулы, квазивосполнима.*

“Нейтрально” истинно и соответствующее утверждение для второго постулата. Именно,

8.10. *Всякая формула вида $(\neg \neg A \supset A)$ квазивосполнима.*

Действительно,

$$g((\neg \neg A \supset A) \leftrightarrow (\sim \sim gA \rightarrow gA)).$$

Но, как отмечалось в 6.1.3., правая часть этой эквивалентности “нейтрально” истинна, поскольку высказывание gA начинается со знака $\sim$.

Итак, пропозициональные аксиомы системы рассмотрены. Перейдем теперь к рассмотрению кванторных аксиом (в [21] это постулаты 10 и 11).

Прежде всего отметим, что для любого постоянного терма T имеет место графическое равенство $z(z(T)) =_{gr} z(T)$, и потому любая постоянная элементарная формула $(T = z(T))$ квазивосполнима [7.1].

Покажем теперь, что

8.11. *Всякая формула вида $(\forall x A(x) \supset A(T))$, где $A(x)$ – произвольная формула, а T – произвольный терм⁸, квазивосполнима.*

Как и в 8.1, достаточно ограничиться случаем замкнутой формулы, и общий случай трактовать на основе 7.4.

Итак, пусть рассматриваемая формула замкнута. Тогда T – постоянный терм и

$$g(\forall x A(x) \supset A(T)) \leftrightarrow (g\forall x A(x) \rightarrow gA(T)) \quad [7.3]$$

$$\leftrightarrow ((n)gA(n) \rightarrow gA(T)) \quad [7.4]$$

Но формула $((T = z(T)) \supset (A(T) = A(z(T))))$ интуиционистски выводима, и потому высказывание

$$g(T = z(T)) \rightarrow (gA(T) \leftrightarrow gA(z(T))),$$

а значит, и $gA(T) \leftrightarrow gA(z(T))$ “нейтрально” истинно. Следовательно,

$$g(\forall x A(x) \supset A(T)) \leftrightarrow ((n)gA(n) \rightarrow gA(z(T))),$$

причем правая часть этой эквивалентности представляет собой “подстановочный пример” интуиционистски выводимой формулы. Тем самым наше утверждение доказано.

⁸ Здесь, а также в 8.12 должны соблюдаться условия, обеспечивающие допустимость подстановки терма T вместо параметра x . Более удобны такие варианты операции подстановки, когда за счет надлежащих переименований переменных в $A(x)$ допустимой оказывается подстановка любого терма.

8.12. Всякая формула вида $(A(T) \supset \exists x A(x))$, где $A(x)$ – произвольная формула, а T – произвольный терм, квазивосполнима.

Как и в предыдущих утверждениях данного пункта, мы опять ограничимся рассмотрением случая замкнутой формулы. В этом случае

$$g(A(T) \supset \exists x A(x)) \leftrightarrow (gA(T) \rightarrow \sim \sim (En)gA(n)) \quad [7.3, 7.7],$$

и потому, ссылаясь на “нейтральную” истинность высказываний

$$gA(T) \rightarrow \sim \sim (En)gA(n) \quad [21, \text{постулат 11}],$$

$$(En)gA(n) \rightarrow \sim \sim (En)gA(n) \quad [21, \text{с. 109, ф.*49a}]$$

и применяя “правило цепного заключения” ([21, с. 104, ф.*2]), мы, как в 8.8, можем заключить, что рассматриваемая нами формула действительно квазивосполнима.

Тем самым проверка наличия свойства g у всех логических аксиом закончена.

Перейдем теперь к проверке правил вывода.

8.13. Применение правила *modus ponens* (в [21] это постулат 2) ведет от формул, обладающих свойством g , к формуле, также обладающей этим свойством.

Легко видеть, что достаточно – на основании 7.4 – ограничиться случаем замкнутых формул.

Итак, пусть формулы A и B замкнуты, а кроме того, A и $(A \supset B)$ обладают свойством g , то есть высказывания gA и $g(A \supset B)$ являются истинными. Но тогда в силу 7.3 истинно $gA \rightarrow gB$, а значит, и gB , что и требовалось доказать.

8.14. Оба кванторных правила Бернайса (в [21] это постулаты 9 и 12) ведут от формулы, обладающей свойством g , к формуле, также обладающей этим свойством.

Напомним, что первое из них (постулат 9) разрешает переходить от формулы $(C \supset A(x))$, где C не содержит параметра x , к формуле $(C \supset \forall x A(x))$, а второе – от формулы $(A(x) \supset C)$, где C снова не содержит параметра x , к формуле $(\exists x A(x) \supset C)$.

Как и ранее, вместо общего случая достаточно рассмотреть специальный – случай, когда посылка правила не содержит параметров, отличных от x .

Для доказательства нашего утверждения удобнее всего сослаться на интуиционистскую выводимость формул

$$\forall x(C \supset A(x)) = (C \supset \forall x A(x)) \quad [21, \text{с. 148, ф.*95}]$$

$$\forall x(A(x) \supset C) = (\exists x A(x) \supset C) \quad [21, \text{с. 148, ф.*96}]$$

По предположению, посылка первого правила обладает свойством g . Но

$$g(C \supset A(x)) \leftrightarrow g\forall x(C \supset A(x)) \quad [4.2(2)]$$

$$\leftrightarrow (n)g(C \supset A(n)) \quad [7.4]$$

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow (n) (gC \rightarrow gA(n)) && [7.3] \\
&\leftrightarrow (gC \rightarrow (n) gA(n)) && [21, \text{ф.}^*95] \\
&\leftrightarrow (gC \rightarrow g\forall xA(x)) && [7.4] \\
&\leftrightarrow g(C \supset \forall xA(x)) && [7.3],
\end{aligned}$$

и потому $g(C \supset \forall xA(x))$ имеет место. Тем самым разбор первого правила закончен. Второе правило трактуется совершенно аналогично на основе формулы [21, с. 148, ф.*96].

Таким образом, утверждение 8.14 доказано, и нам теперь остается проверить квазивосполнимость арифметических аксиом и схемы индукции (в [21] это постулаты 13–21).

Начнем со схемы индукции (постулат 13), которая в [21] фигурирует в следующем “незамкнутом” виде:

$$((A(0) \& \forall x(A(x) \supset A(x')))) \supset A(x)).$$

С учетом 7.4 мы рассмотрим случай, когда формула $A(x)$ не имеет параметров, отличных от x . Покажем, что в этом случае имеет место утверждение

8.15. *Для любой формулы $A(x)$ соответствующая ей схема индукции квазивосполнима.*

В самом деле,

$$\begin{aligned}
&g((A(0) \& \forall x(A(x) \supset A(x')))) \supset A(x)) \\
&\leftrightarrow g\forall x((A(0) \& \forall x(A(x) \supset A(x')))) \supset A(x)) \\
&\leftrightarrow (n)g((A(0) \& \forall x(A(x) \supset A(x')))) \supset A(n)) && [4.2(2)] \\
&\leftrightarrow (n)((gA(0) \wedge (n)(gA(n) \rightarrow gA(n'))) \rightarrow gA(n)) && [7.3, 7.2, 7.4] \\
&\leftrightarrow ((gA(0) \wedge (n)(gA(n) \rightarrow gA(n'))) \rightarrow (n)gA(n)) && [21, \text{с.} 148, \text{ф.}^*95].
\end{aligned}$$

Но правая часть этой эквивалентности представляет собой, – как выражение общего принципа полной индукции для конкретного свойства $gA(x)$, “нейтрально” истинное высказывание [см. замечание а) в конце раздела 7]. Таким образом, интересующая нас формула действительно обладает свойством g , что и требовалось доказать.

Теперь перейдем непосредственно к аксиомам Пеано (так мы будем называть оставшиеся постулаты 14 – 21). В отличие от предыдущих рассмотрений мы будем иметь здесь дело с конкретными аксиомами, а не схемами аксиом. В каждой из них фигурирует конкретное отношение $=$, которое в определении свойства g интерпретируется посредством графического равенства слов $=_{gr}$ [см. п. 4.2.а) и утверждение 7.1]. За “нейтральным” изложением требующегося здесь материала мы отсылаем читателя к гл. I и II монографии [26] (в связи с вопросом о “нейтральности” применяемых здесь средств специально обращаем внимание на последний абзац на стр. 18 Предисловия; во 2-м издании – это предпоследний абзац на стр. XLIII).

Аксиомы (постулаты) 14 и 17 естественно рассмотреть одновременно.

8.16. Аксиомы $14((a' = b') \supset (a = b))$ и $17((a = b) \supset (a' = b'))$ квазивосполнимы. (Здесь a и b – две конкретные переменные.)

Действительно,

$$\begin{aligned} g((a' = b') \supset (a = b)) &\leftrightarrow g\forall a\forall b ((a' = b') \supset (a = b)) & [4.2(2)] \\ &\leftrightarrow (m)(n)g((m' = n') \supset (m = n)) & [7.4] \\ &\leftrightarrow (m)(n)(g(m' = n') \rightarrow g(m = n)) & [7.3] \\ &\leftrightarrow (m)(n)((m' =_{gr} n') \rightarrow (m =_{gr} n)) & [7.1]. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$g((a = b) \supset (a' = b')) \leftrightarrow (m)(n)((m =_{gr} n) \rightarrow (m' =_{gr} n')).$$

Утверждение, стоящее в правой части первой эквивалентности, представляет собой частный случай более общего “нейтрально” истинного высказывания §17.5.1 из монографии [26]⁹. Правая часть второй эквивалентности тривиальным образом доказывается правой индукцией по построению слова (см. там же §9.5) с учетом определения графического равенства (там же, §2.4). Тем самым наше утверждение доказано.

8.17. Аксиома $\lceil (a' = 0) \rceil$ (постулат 15) квазивосполнима.

В самом деле,

$$\begin{aligned} g \lceil (a' = 0) \rceil &\leftrightarrow g\forall a \lceil (a' = 0) \rceil & [4.2.(2)] \\ &\leftrightarrow (n)g \lceil (n' = 0) \rceil & [7.4] \\ &\leftrightarrow (n) \sim g(n' = 0) & [7.5] \\ &\leftrightarrow (n) \sim (n' =_{gr} 0) & [7.1]. \end{aligned}$$

Но правая часть этой эквивалентности тривиальным образом “нейтрально” истинна в силу п. Р.3 определения графического равенства (см.[26, §2.4.]: последней буквой слова n' является $'$, а последней буквой слова 0 является отличная от $'$ буква 0).

8.18. Аксиома $((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c)))$ (постулат 16) квазивосполнима.

В самом деле,

$$\begin{aligned} &g((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c))) \\ &\leftrightarrow g\forall a\forall b\forall c ((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c))) & [4.2.(2)] \\ &\leftrightarrow (m)(n)(p) ((m = n) \supset ((m = p) \supset (n = p))) & [7.4] \\ &\leftrightarrow (m)(n)(p) (g(m = n) \rightarrow (g(m = p) \rightarrow g(n = p))) & [7.3] \\ &\leftrightarrow (m)(n)(p) ((m =_{gr} n) \rightarrow ((m =_{gr} p) \rightarrow (n =_{gr} p))) & [7.1]. \end{aligned}$$

Но последняя правая часть в этой цепи эквивалентностей представляет собой “нейтрально” истинное высказывание о транзитивности графического равенства применительно к словам специаль-

⁹ Оно утверждает, что для любого слова R из графического равенства слов PR и QR вытекает графическое равенство слов P и Q .

ного вида – натуральным числам. Оно, как легко убедиться, может быть доказано на основании п.п. Р.1–Р.4 определения графического равенства (см. [26, §2.4]. Тем самым утверждение 8.18 доказано.

Квазивосполнимость оставшихся четырех аксиом (постулатов 18–21) тривиальна, поскольку аксиомы эти представляют собой описание правил, по которым вычисляется значение терма:

$$((a+0)=a), ((a+b') = (a+b) '), ((a \cdot 0)=0), ((a \cdot b') = ((a \cdot b)+a)).$$

При фиксированных значениях переменных a и b значения термов, стоящих в левых частях равенств, графически равны значениям термов, стоящих в правых частях. Проверка может быть предоставлена читателю.

Тем самым мы показали, что

8.19. *Классическая формальная арифметика непротиворечива, что и являлось целью данной работы.*

Автор выражает сердечную признательность В.А.Степанову за ряд полезных советов и за большую помощь, оказанную при подготовке текста к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Теория доказательств /Пер. с нем. М.: Наука, 1982.
2. Гильберт Д. О бесконечном // Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. М.: Факториал, 1998. С. 431-448.
3. Brouwer L.E.J. De onbetrouwbaarheid der logische principes // Tijdschrift voor wijsbegeerte. 1908. V. 2. P. 152 - 158.
4. Kleene S.C. On the interpretation of intuitionistic number theory // J. Symb. Logic. 1945. V. 10. P. 109 - 124.
5. Gentzen G. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie // Math. Ann. 1936. Bd 112, No 4. S. 493 - 565. (Рус. пер. в сб.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967. С. 77 - 153).
6. Gentzen G. The collected papers. Amsterdam: North Holland, 1969.
7. Gentzen G. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie // Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften. Neue Folge. 1939. H.4. S. 19 - 44. (Рус. пер. в сб.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967. С. 154 - 190).
8. Ackermann W. Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie // Math. Ann. 1940. Bd 117, No. S. 162 - 194.
9. Новиков П.С. On the consistency of certain logical calculus // Матем. сб. 1943. Т. 12, вып. 54. С. 231 - 261.
10. Schütte K. Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie // Math. Ann. 1951. Bd 122. S. 369 - 389.

11. *Schütte K.* Beweistheorie. Springer-Verlag: Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1960.
12. *Хлодовский И.Н.* Новое доказательство непротиворечивости арифметики // Успехи матем. наук. 1959. Т. 16, вып. 6. С. 105 - 140.
13. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. 3-е изд. / Пер. с англ. М.: Наука, 1984. 319 с.
14. *Gödel K.* Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie // Ergebnisse eines math. Koll. 1932 - 33. Н. 4. PP. 40.
15. *Nelson D.* Recursive functions and intuitionistic number theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1947. V. 61. P. 307 - 368.
16. *Шанин Н.А.* О некоторых логических проблемах арифметики. М.: Изд-во АН СССР, 1955 (Тр. матем. ин-та АН СССР. Т. 53).
17. *Нагорный Н.М.* О реализуемых и восполнимых логико-арифметических формулах // ДАН СССР. 1964. Т. 157, No 3. С. 529 - 531.
18. *Нагорный Н.М.* Об одном варианте определения реализуемой логико-арифметической формулы // Исследования по теории алгоритмов и математической логике. 2. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1976. С. 32 - 45.
19. *Нагорный Н.М.* Одна конструктивная модель классической формальной арифметики // ДАН. 1993. Т.332, No 1. С. 26 - 28.
20. *Плиско В.Е.* Непротиворечивость // Матем. Энцикл. Т. 3. М.: СЭ, 1982, столб. 998 - 999.
21. *Клини С.К.* Введение в метаматематику /Пер. с англ. М.: ИЛ, 1957.
22. *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse. 1930. S. 42 - 56.
23. *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. II, III. Ibid. S. 56 - 71, 158 - 169.
24. *Heyting A.* History of the foundations of mathematics // Nieuw Arch. Wisk. Ser. 3. 1978. V. 26. P. 1 - 21.
25. *Troelstra A.S.* Arend Heyting and his contribution to intuitionism // Nieuw Arch. Wisk. Ser. 3. 1981. V. 29. P. 1 - 21.
26. *Марков А.А., Нагорный Н.М.* Теория алгоритмов. М.: Наука, 1984. 432 с. (2-е изд. М.: Фазис, 1996. 448 с.)
27. *Kolmogoroff A.N.* Zur Deutung der intuitionistischen Logik // Math. Zeitschr. 1932. Bd 35. S. 58 - 65.
28. *Нагорный Н.М.* К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики //Сообщения по прикладной математике. ВЦ РАН. М., 1965. 25 с.
29. *Нагорный Н.М.* К вопросу о непротиворечивости классической арифметики // Международная конференция «Смирновские чтения». М., 1997. С. 20-22.
30. *Нагорный Н.М.* Реализуемость семантика раннего периода марковского конструктивизма (история и проблемы) // Логические исследования. Вып. 7. М., 2000. С. 61-71.
31. *Нагорный Н.М.* К работам по основаниям математики // Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. М.: Факториал, 1998. С.562-570.

Н.Н.Непейвода

О ФОРМАЛИЗАЦИИ НЕФОРМАЛИЗУЕМОГО*

Abstract. *Phenomenon of informalizability is studied from two points of view. First of all, as a phenomenon of humanitarian thinking. Secondly it is treated as one of the levels in the hierarchy of knowledge and skills following pr. Beloselsky-Belozersky.*

Историческая и содержательная постановка задачи

В конце 70-х годов один из новосибирских логиков - Николай Владимирович Белякин – начал делать доклады под несколько странным, на первый взгляд, девизом: «Формализация неформализуемых понятий». Кажется, что это название внутренне противоречиво и напоминает недоброй памяти диалектическую «логику». Но на самом деле Н. В. Белякин просто обратил внимание на феномен, который все равно существует в нашем мире. Более того, он приложил к этому явлению одновременно и достижения современной математической логики, и выработанную советской интеллигенцией систему многоуровневого мышления, использовавшуюся как метод самозащиты от жесточайшего промывания мозгов.

Современная наука пронизана, говоря образами даосской философии, мужской силой *ян*. Она стремится к порядку, рациональности, определенности, формализации и навязывает это свое стремление обществу.

Но, как известно, когда *ян* достигает расцвета, появляется *инь* – женское начало, соответствующее неупорядоченности, иррациональности, неопределенности, неформализуемости.

Таким образом, наряду с исследованиями того, как порядок может появляться из хаоса, нельзя игнорировать и развивающиеся на наших глазах процессы порождения хаоса из порядка, превращения сложных формализмов при попытке их применения на практике в нечто неформализуемое. Такое реально происходит на каждом шагу. Вспомните хотя бы, как Вы ведете себя со сложной компьютерной программой, которая *в принципе* является чисто формальным инструментом.

Н.В.Белякин проанализировал прежде всего ситуацию, возникшую вокруг теоремы Гёделя о неполноте. Он обратил внимание на то, что конструкция Гёделя обладает удивительной устой-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 98-06-80205.

чивостью к модификациям теорий и логик. Достаточно выразительная теория сама помогает опровергать себя, сама помогает строить утверждение, с которым она не может справиться, не может ни доказать, ни опровергнуть. Соответственно, никакие попытки примитивного понимания типа

Любое утверждение либо доказуемо, либо опровержимо, либо неразрешимо,

ничему не помогают. Если же мы пытаемся строить целую последовательность теорий, то либо сами ее члены должны порождаться неформализованно, либо и эта последовательность поможет построить неразрешимое ни в одной из ее теорий утверждение.

Итак, даже в математике достаточно сложные понятия невозможно формализовать. Тем не менее мы всюду пользуемся их формализациями.

С гуманитарными понятиями дело обстоит еще сложнее. Развитие гуманитарных понятий характеризуется двумя внешне противоречивыми тенденциями: стремлением к канонизации и необходимостью пересмотра. Именно эти тенденции в их взаимосвязи уловил Белякин.

Основная его идея следующая. Гуманитарное понятие (например, любовь, дружба, честь) разъясняется на прецедентах и получает неявное алгоритмическое определение. Но деятели культуры специализируются на том, что каждый раз, когда такое определение становится почти фиксированным и общепринятым (когда возникает формализация), придумывают прецеденты, не подходящие под данное определение. В частности, отношения Ромео и Джульетты были прецедентом, не подходившим под почти формализованное в тот момент понятие любви. Это допускает уточнение в рамках современной теории алгоритмов. В ней доказано существование продуктивных множеств, которые позволяют по каждому своему вычислимому приближению выдать контрпример, на котором данное вычислимое приближение ошибается. Это – та же ситуация, которую с логической стороны высветил К. Гёдель.

Таким образом, с точки зрения Белякина в каждый данный момент в данной культуре гуманитарное понятие имеет формализацию, то есть систему точных правил, по которой проверяется любой прецедент. Но не зря в Евангелиях те, кто строго следовал писанным правилам и лишь им, называются книжниками и фари́сеями и характеризуются отрицательно. Каждая формализация сама порождает прецедент, входящий в идеальное множество, но

не подходящий под нее саму. Более того, таким свойством обладает и каждая вычислимая последовательность формализаций. Значит, хотя в некотором смысле формализации неформализуемого понятия по Белякину и стремятся к идеальному пределу, но любой реальный предел сам себя помогает опровергнуть (точно так же, как любая непротиворечивая теория сама помогает построить пример неразрешимого в ней истинного утверждения).

Конечно же, на данные аспекты обращалось внимание в современной науке и философии (в частности, в таких течениях, как деконструктивизм, постмодернизм, фаллабилизм.) Но уровень моделей, потребовавшихся для получения хоть каких-то точных результатов в данной области, резко контрастирует с разговорным и в значительной степени конформистским духом данных направлений. Необходимо всегда помнить, что негативизм - одна из форм конформизма, а эпатаж - одна из форм филистерства. Единственный способ преодоления пут, наложенных предрассудками общества, без разрушения основ этого общества и воссоздания в нашем новом мире тех же либо еще более тупых предрассудков - жить в обществе и быть свободным от общества, как показали китайские мудрецы времен Великого безвременья между династиями Хань и Тан, между китайской античностью и китайским Возрождением.

За последние пятнадцать лет, прежде всего в России, получены результаты, развиты конструкции и методы, которые позволяют говорить о появлении теории неформализуемых понятий.

Теория неформализуемых понятий выростала на базе многих, внешне враждебных, но на самом деле единых в своей глубине и беспощадной рефлексии подходов в современной логике и математике, и оплодотворялись идеями классической и современной философии, восточного и западного искусства. Так что географическое место появления и время - промежуток между Западом и Востоком и период затяжных смен династий и безвремений в великой евразийской империи - пожалуй, были единственно возможными. Нужно было полностью лишить целый народ в двух поколениях корней и иллюзий (в том числе и иллюзий по поводу стандартных методов преодоления иллюзий), чтобы отрезать легкие пути прямых отрицаний и благоглупостей, на которые неизбежно скатываются и конформисты, и диссиденты в более мягком обществе. Поэтому данная теория с самого начала стала междисциплинарной и, более того, *вынуждена* использовать трудные методы и результаты из различных дисциплин. В частности, она пользуется аппаратом следующих наук:

1) Математическая логика, включая:

- a) Модели Крипке и неклассические логики;
 - b) Гибридные логические системы;
 - c) Конструктивизм и интуиционизм;
 - d) Теория рекурсий;
 - e) Теория доказательств.
- 2) Методы теории систем.
 - 3) Достижения европейской позитивной философии и структурализма вместе с достижениями интуитивистских школ.
 - 4) Даосская и элементы буддийской философии. Китайский метод научного изложения материала, ярко представленный в классических военных трактатах.
 - 5) Современная информатика, в первую очередь методы описания и анализа сложных формальных языков, их семантики и синтаксиса, методы моделирования сложных систем.
 - 6) Современная теория точного творческого мышления, в частности, технического творчества.

Один этот список показывает, почему те, кто чувствуют ловушки, заложенные в примитивно понимаемой рационалистической парадигме современной науки, так часто скатываются к постмодернизму либо фаллабилизму. Ну нет здесь царского пути, так же, как и в вопросах веры. Чтобы построить настоящую *научную* альтернативу «позитивному» взгляду, нужно пользоваться высшими достижениями самого этого направления, так же, как для того, чтобы построить гёделеву формулу для теории, нужно проделать сложную конструкцию над данной теорией.

Компьютеризация и неформализуемость

Далее, компьютеризация всех сфер человеческой деятельности приводит к (слишком часто неосознанной) формализации и тех понятий, которые всегда трактовались как неформальные.

Эта сторона была впервые ярко подчеркнута Дж. Вейценбаумом.

Дж. Вейценбаум – один из ярчайших (но отнюдь не самых преуспевших) представителей направления, известного под названием *искусственный интеллект*.

В середине 60-х годов он создал программу ELIZA (названную по имени героини пьесы Б. Шоу «Пигмалион»), которая имитировала диалог между психоаналитиком и пациентом. Она не пыталась понять человеческий язык (что было в принципе невозможно на том уровне развития компьютеров и информатики), а просто на основе формальных знаний о синтаксисе фраз возвра-

щала человеку его собственные утверждения в виде вопросов либо замечаний.

Некоторые из правил переформулировки были весьма остроумны, например, на утверждения типа:

– Никто меня не любит, –

мог последовать вопрос:

– Кого конкретно Вы имеете в виду?

Эта программа послужила эффективным экспериментальным опровержением теста Тьюринга: люди воспринимали программу как вполне разумного и доброжелательного собеседника.

Столь творческая и критически мыслящая личность, как Вейценбаум, не могла быть не шокирована тем, что вокруг его программы, которая была наполовину шуткой, наполовину опровержением почтенной и глубокой гипотезы (Тьюринг, пожалуй, просто переоценил интеллект среднего человека), поднялся невероятный шум как вокруг великого достижения искусственного интеллекта. Это навело его на мысль проанализировать другие «достижения» искусственного интеллекта, знаменитые к началу 70-х годов, и выявившаяся картина была просто ужасной: воинствующее полужнание, игнорирующее все достижения мировой гуманитарной и математической мысли, примитивные модели, рекламируемые как универсальный решатель задач, разгул агрессивной саморекламы и профанации.

Далее, компьютер слишком часто используется для того, чтобы, используя колоссальные логические и вычислительные ресурсы, продлить жизнь тупиковых и отживших себя структур. Известно, что слишком большие и легкодоступные вычислительные ресурсы отнюдь не стимулируют поиск новых решений. Появляется соблазн просто купить больше памяти или более мощный процессор и запустить, скажем, сразу несколько известных методов.

И, наконец, компьютеры привели к появлению новой цензуры знаний. Данные, закладываемые в базы, далее начинают восприниматься как окончательная истина, а не заложенные в них – исчезают из использования.

Поэтому Г. Вейценбаум написал горькую книгу, говорящую о том, что на самом деле происходит не компьютерная революция, а компьютерная контрреволюция и в науке, и в обществе.

Ведь любая компьютерная программа заодно является формализацией понятий, с которыми она работает. Но человек, за исключением законченных хакеров или системных администрато-

ров¹, понимает ее, пытаясь приписать ей цели и рациональное поведение. Возможно, приписанные им программе цели частично и совпадают с целями авторов программы, но наверняка они понимались по-разному, да и были реализованы несовершенно и с ошибками. Поэтому поведение программы часто воспринимается как нечто непредсказуемое, а сами использованные программой содержательные понятия она начинает деформировать.

И, наконец, компьютеры *заставили* людей работать со сложными формализациями, причем они, как идеальные бюрократы, строго следуют букве этих формализаций. И тут выявилось, что даже сложные формальные понятия человек склонен понимать как неформальные. На эту особенность человека впервые обратил внимание автор данной работы в своем обзоре по алгоритмическим языкам 1982 г.

Более того, такую особенность человека нельзя высокомерно игнорировать как недоразвитость. Только принимая в расчет якобы ошибочное понимание человеком, можно дать понятие ошибки в языке программирования. Критерии ошибки в математической формализации достаточно ясны: либо прямое противоречие, либо расхождение с истинностью в стандартной модели. Критерии ошибки в программе тоже просты: в лучшем случае выдает не то, что надо, а в типичном — просто «виснет». А вот в описании алгоритмических языков очень трудно сделать такую ошибку, которая привела бы к невычислимости некоторых конструкций. Поэтому, как ни парадоксально, есть понятие ошибки в программе, но до сих пор в информатике практически нет понятия ошибки в том, на чем базируются программы: в определении алгоритмических языков.

Оказалось, что модели, созданные для описания формализаций неформализуемых понятий, действуют и в данном случае как инструмент анализа методов понимания сложных систем формализованных понятий реальными людьми.

Те же модели позволяют прояснить и феномен, открытый современной психологией: волнообразное формирование понятий у детей. Ребенок, вроде бы овладевший, скажем, понятием объема,

¹ Так называемые системные администраторы являются редким типом людей, которые могут чисто формально рассматривать исключительно сложные ситуации, возникающие при работе современных сверхсложных и запутанных программных систем. Обычному же человеку кажется, что программа ведет себя почти как индивидуум (чаще всего удивительно злобный, особенно если она стремится быть дружелюбной и окружает его массой медвежьих услуг; см. Microsoft Word, с помощью которого подготовлен текст данной статьи).

затем как будто теряет его, а затем вновь овладевает. Нужно помнить о неформализуемости если не самих понятий (они часто почти формализованы, поскольку современная физика уточнила их, превратив в термины), то их употребления в естественном языке, которое остается содержательным и часто противоречащим примитивно понимаемому формализованному смыслу. Поэтому ребенок, овладев формализацией, ведет себя не как биокомпьютер, а как действительно мыслящее существо (ведь творческие способности у множества людей отшибаются лишь в детских учреждениях или в младших классах школы, а от двух до пяти они все еще творцы). Он осознает, что пользоваться точным смыслом слова можно не всегда. И, естественно, ребенка увлекает поиск исключений, и вроде бы освоенное точное понятие отходит временно в тень, поскольку оно начинает осваиваться на новом уровне: как одна из ипостасей содержательного понятия.

Компьютерная аналогия приводит к тому, что начинает прослеживаться взаимосвязь между формализацией неформализуемого и фундаментальной философской проблемой соотношения веры и сомнения. Слепая вера соответствует формализации, которая дает возможность человеку успешно действовать, когда нет проблемы выбора целей. При необходимости выбора целей слепая вера быстро ведет в тупик, и необходимо сомнение. Настоящая религия (в отличие от тоталитарных сект) дает место и вере, и сомнению.

Постулаты неформализуемости

По перечисленным и многим другим причинам дальше нельзя игнорировать вопрос о том, что же такое формализация неформализуемого, как с ней работать и как не попасться в ловушки, явно имеющиеся в понятии, с самого начала содержащем внутреннее противоречие.

Следующие принципы естественно принять как постулаты теории неформализуемых понятий.

1. **Понятия могут описываться лишь в их взаимосвязи.** Совокупность взаимосвязанных понятий может быть описана как сигнатура σ (называемая в гуманитарных исследованиях *тезаурусом*)².

Скажем, понятия любви и ревности тесно взаимосвязаны и принадлежат одному и тому же тезаурусу.

² Данный постулат не принимался Белякиным, но давно уже использовался (часто неявно) в работах Тарского, Карнапа, Витгенштейна и др.

2. Объем понятия является производным от его содержания и взаимосвязей с другими понятиями³.

Например, пересматривая понятие ревности, мы тем самым изменяем понимание любви.

3. Для гуманитарных понятий и их объемы, и их взаимосвязи все время меняются, их нельзя однозначно зафиксировать.

Тем не менее, можно заметить, что взаимосвязи намного стабильнее объемов. В частности, что ревность – отрицательное чувство, взаимосвязанное с любовью, можно утверждать почти всегда (впрочем, хозяин гарема при случае смертельно ревновал своих одалисок, и не чувствуя любви к ним).

4. Имеется оператор диагонализации, выдающий по любой эффективно заданной последовательности уточнений рассматриваемых понятий новое уточнение, не совпадающее ни с одним из членов последовательности⁴.

Так же легко проиллюстрировать данное положение, как предыдущие, уже не удастся. Оно является первым шагом на пути к точной математической теории. Такая теория всегда является формализацией высокого уровня, она вводит идеальные понятия, прямо не интерпретируемые в непосредственно понимаемой реальности, но позволяющие сделать гигантские скачки в рассуждениях об этой реальности и намного увеличить силу строгих аргументов. «В жизни» просто нет бесконечной системы уточнений, реально воспринимаемых одним и тем же человеком. Вот здесь и нужны такие разделы, как теория алгоритмов и математическая логика, поскольку они позволяют увидеть, что описанная выше ситуация сплошь и рядом появляется в математических теориях, занимающихся вопросами определимости сложных понятий. Она получила название *продуктивности*.

Даже понятие истинности формулы на стандартной системе целых чисел продуктивно, любая последовательность теорий, претендующих на приближение к нему, сама позволяет построить пример истинного высказывания, не доказуемого ни в одной из этих теорий.

5. Имеется оператор альтернативы, выдающий по каждой паре уточнений φ_0, φ_1 , где φ_1 расширяет φ_0 , новое уточнение φ_2 , расширяющее φ_0 , но несовместимое с φ_1 ⁵.

³ Пожалуй, впервые этот принцип явно сформулировал Карнап.

⁴ Н.В.Белякин

⁵ А этого у Белякина не было, поскольку он первоначально не рассматривал даже отрицание.

В жизни такие ситуации встречаются сплошь и рядом, но для математиков большим сюрпризом было их появление и в самой точной из наук. Неевклидова геометрия вызвала просто шок у большей части не только полуобразованной публики, но и профессионалов. Следующие аксиоматические теории и новые числовые системы такого шока не вызывали, пока Л. Э. Я. Брауэр в 1908 г. не опубликовал философскую диссертацию с вызывающим названием «О недостоверности логических принципов». В ней он обрушился не просто на закон исключенного третьего⁶, он высказался против попыток формализовать математику и логику, заявив, что они подменяют понятия. Он выступил против самой идеи логических значений, поскольку нам нужна не истинность формулы, а построение, содержащееся в ее обосновании.

Брауэр не был ни фаллабилистом, ни постмодернистом. Он не вышучивал в карнавальном духе то, что уже было сделано, а серьезнейшим образом пересмотрел все это с новой точки зрения. Правда, и уровень его образования, и кругозор был пошире, чем у многих модных философов. Он начинал не как математик, а как философ, великолепно знал китайскую и индийскую философию, а в математике подтвердил свою квалификацию первокласснейшими результатами.

Брауэр шокировал многих математиков, которые не могли отделаться от суеверий, берущих начало от Пифагора и подкрепляемых примитивно понятыми текстами Платона, и поэтому получивших в современной философии дискредитирующее глубокого мыслителя имя *платонизм*. Им казалось, что математические понятия существуют, если не в нашем мире, то в мире более высокого порядка, более реальном, чем наш. Они дерзали втайне считать, как Пифагор, что Бог есть Число. Еще более шокировало их поведение Брауэра в качестве редактора авторитетнейшего математического журнала. Он заявлял, что некая работа не имеет никакого смысла, после чего объективно разбирал ее достоинства

⁶ Принять существование других логических значений, кроме **истины** и **лжи**, как это предложил русский логик Н. А. Васильев, математики и философы были готовы, тем более, что и сам Аристотель оговаривал сильный закон исключенного третьего

Любое высказывание либо истинно, либо ложно

множеством условий, и сам демонстрировал случаи, когда закон неприменим. Более того, когда Дж. Буль создал булеву алгебру и показал, что для представления логики достаточно пользоваться всего двумя значениями, это было некоторым шоком.

Оригинальная аристотелева формулировка закона исключенного третьего *Утверждение и его отрицание не могут быть одновременно ложны*, остается справедливой и в интуиционистской логике, созданной Брауэром.

и недостатки с точки зрения общепринятой, классической математики.

Принципиально выступая против формализации, Брауэр тем не менее поддерживал Гильберта в самые критические минуты, когда примитивно понятая теорема Гёделя о неполноте казалась мировому научному сообществу крахом программы Гильберта формализации и обоснования математики. Брауэр поставил перед своим учеником А. Гейтингом задачу формализовать интуиционистскую логику. А когда у интуиционистов начались расхождения, он не стал клеймить уклонистов и ревизионистов, а спокойно заявил:

Поскольку интуиционисты говорят на неформализованном языке, между ними неизбежно должны были появиться расхождения во взглядах.

По этим причинам Брауэра можно считать идейным отцом теории неформализуемых понятий⁷.

6. Имеются абсолютно общепризнанные соотношения между понятиями (трюизмы), но они — самые бесполезные из всех соотношений.

В самом деле, трюизмом является, скажем, описание ревности как отрицательного чувства к объекту действительного или предполагаемого увлечения любимого (любимой). Из этого определения, вполне почтенного для какого-либо научного трактата, никаких позитивных выводов не сделаешь. Зато принципы (принадлежащие противоположным культурам любовных отношений):

Если ты — джигит, зарежь подонка, посягающего на твою любимую!

Если ты — светский человек, не дай чувству ревности проявиться наружу!

позитивны, дают конкретную стратегию поведения в соответствующей ситуации, но полностью несовместимы друг с другом.

И последний постулат уже практически следует из самой цели теории — формализации неформализуемых понятий.

7. В каждый данный момент для данной конкретной цели взаимоотношения понятий описываются как классическая формальная теория.

Эта теория называется *ипостасью* системы неформализуемых понятий.

На основе этих постулатов были построены математические модели систем неформализуемых понятий.

⁷ Брауэр вовсе не был идеальной личностью. Он на своих лекциях не терпел вопросов студентов. Он поддерживал нацистов, пока те не оккупировали Голландию. Тем более характерна его позиция в вопросах науки.

Эта теория прошла проверку, в частности, рефлексией, самоприменимостью, чего не выдерживает ни одна теория низкого уровня.

Скажем, предположение, что каждая ипостась описывается теорией, применяющей классическую логику, было обосновано внутри самой теории неформализуемых понятий.

Теория неформализуемых понятий позволила дать подходы к решению многих задач, связанных с несоответствием понятий в языках программирования. Выявились скрытые противоречия в том, что называют структурным программированием. В частности, циклические конструкции и функции высоких уровней противостоят друг другу. Далее, выяснилось, что конструкции, традиционно трактуемые как еле терпимые, от которых хотелось бы избавиться, да вот почему-то не удается, например, операторы перехода, на самом деле просто плохо совместимы с конструкциями общепринятого структурного программирования. Их надо использовать как средства управления глобальными, а не локальными операциями, и если уж использовать, то только их, интенсивно и в подходящем контексте.

Таким образом, универсальная система – та, которая соединяет недостатки нескольких специализированных. В данном случае ипостаси на алгоритмическом уровне не противостоят друг другу прямо, но сильно мешают, а на логическом уровне начинаются и прямые противоречия. Непрямые – концептуальные – противоречия стали страшным врагом больших программных систем, тем более страшным, что рекламно-фирменная система документирования всячески затушевывает их, а наука в большинстве случаев просто игнорирует, хотя предупреждения появлялись неоднократно, и как раз в наиболее серьезных и глубоких работах.

Тут уж доходишь до того, что пора бы подавать в суд на фирмы либо «ученых» (в данном случае точнее было бы сказать – шаманов, освящающих своими пассажами нечто, за что им заплатили), перечисляющих лишь достоинства системы без указания равноценных им ограничений и недостатков. Ведь *действительно хорошая система должна быть специализированной, должна, как уже известно в теории, иметь и достоинства, и недостатки.*

Системы формализаций неформализуемых понятий позволяют выразить и еще одну важнейшую сторону знания, впервые затронутую в интуиционистской математике. Поскольку незнание всеобъемлюще и неистребимо, порою один из самых мощных видов знания — знание о незнании. Конкретные классические теории не позволяют этого использовать, а вот в их системах постулирование и использование незнания вполне возможно.

И, наконец, теория неформализуемых понятий позволила выразить и обосновать глобальные утверждения (например, что А содержательно следует из В в том смысле, что приняв при формализации А, мы вынуждены принимать и В во избежание распада системы понятий), здесь она интенсивно пользуется неклассической логикой.

Несколько слов о многоуровневом критическом мышлении

Конечно же, в словах Солженицына, обзывавшего интеллигенцию «образованщиной», много горькой правды, особенно если брать наиболее политически активную ее часть, торчашую на виду у средств массовой информации. Для успеха в политике либо в современном русском «деловом мире» нельзя иметь в мозгу более двух извилин, одна из которых направлена на то, как извлечь быструю и ближайшую выгоду для себя, а вторая – как создать свой имидж у ближнего своего, т. е., проще говоря, как его надуть. Мы рассматриваем другую часть интеллигенции, которая не ставила успех в качестве высшей жизненной ценности и которая поэтому столь антипатична кальвинистски мыслящей части западных идеологов и их русским подголоскам. Находясь под жесточайшим прессом тоталитарного общества, она вынуждена была отстаивать право на внутреннюю свободу и выработала систему, дающую иммунитет от пропаганды и рекламы. Но эта система вредна для карьеры, поскольку любой успех в нашем обществе зиждется прежде всего на саморекламе, а не на реальных достижениях, что беспощадно вскрывается при ближайшем взгляде, и остается либо цинично закрывать на это глаза (самоубийство души), либо отходить в сторону и вновь оставаться во внутренней эмиграции, вспоминая слова Конфуция:

Если государство хорошо устроено, стыдно не быть богатым и знатным. Если государство плохо устроено, стыдно быть богатым и знатным.

Первым частично показал новый метод мышления Дж. Оруэлл в своей книге «1984». Но для него, как для человека с типично англосаксонским складом ума, соответствующим силе *яи*, это было только извращением, насаждаемым коммунистами. Его книга сыграла благородную роль иммунизации англосаксонского мира от идей коммунизма, с которыми заигрывала значительная

часть «*прогрессивной интеллигенции*», становившейся в случае победы тоталитарных идей первой их жертвой⁸.

Но он показал карикатурную сторону двоемыслия, не увидев за этим целой системы *многоуровневого мышления*, позволяющей, как показывает опыт, защитить рациональность в абсолютно антиразумном обществе, защитить глубокую иррациональность от экспансии примитивно понимаемой рациональности и защитить личность от агрессивных информационных воздействий (реклама, пропаганда и даже недозволенные скрытые информационные воздействия, применявшиеся, в частности, в предвыборной кампании Б. Н. Ельцина 1996 г.). Эта система весьма тяжело формулируется и более успешно передается непосредственно от учителя к ученику.

Эта система соответствует интуиционистской логике по уровню в классификации знаний и умений. Соответственно, она находится на промежуточном уровне между сферой метода, на которую становятся лучшие представители традиционного рационализма (и на которой, как показал горький опыт тоталитарных режимов, они бессильны с точки зрения интеллектуальной самозащиты) и сферой *дао*. Настоящая религия, обеспечивающая связь человека со сферой дао, также доказала свою успешность как средство духовной самозащиты, но здесь мы делаем упор на рациональных методах.

Многоуровневое (отнюдь не двухуровневое!) критическое мышление состоит, в частности, в том, что понимается и ограниченность применяемой формализации, и неизбежность ее использования. На недостатки применяемых методов, на их побочные эффекты отнюдь не закрываются глаза, а высший пилотаж состоит

⁸ Из истории всячески стараются не извлекать уроков и благоглупость неизлечима. В 1997 г. в Москве состоялся знаменательный судебный процесс Якунин–Дворкин, на котором бывший «прогрессивный» священник-диссидент призвал к ответу автора книги, повествующей о методах распознавания тоталитарных сект. Естественно, *прогрессивная интеллигенция* (и российская, и эмигрантская, в частности, парижское «Новое русское слово»), встала грудью на сторону Якунина и лишь его собственные грубейшие ошибки и неприличные действия помешали ему оказаться моральным победителем процесса. Они даже не взглянули в коротенькую брошюру Дворкина и не убедились в том, что решающий вопрос, к которому она подводит в беседе с человеком, чьи убеждения проверяются на тоталитарность:

– Назовите три вещи, которые Вам не нравятся в руководителях Вашей общины, в ее деятельности либо в учении?

Очевидно, что отсутствие сомнений – первый признак тоталитарности.

Если, не дай Бог, одна из тоталитарных сект, которые защищал Г.Якунин, придет к власти, первым делом она расправится с «прогрессивной» интеллигенцией, и раньше всего со своими защитниками.

в том, чтобы *использовать эти недостатки как достоинства*. Конечно, это возможно лишь в данном контексте и для данной цели. Но отнюдь не всегда это делается лишь на короткое время.

Например, если народ не выносит порядка, понимаемого по-немецки либо по-англосаксонски, то нужно пытаться не навязать ему эти порядки, а использовать инициативность и предприимчивость народа. Так сделали в Италии, и страна резко пошла вперед.

В частности, в советское время что-либо разумное и доброе можно было, как правило, сделать, лишь опираясь на плохую работу и ошибки государственной бюрократической системы, поскольку система законов и инструкций была призвана предотвратить все хорошее, дабы государство получило как можно больше примитивно понимаемой выгоды⁹.

Поскольку любая формализация имеет недостатки, многоуровневое мышление особенно необходимо при применении современных математических и формальных методов. Например, нужно понимать, что *результат тестирования на самом деле ничего не определяет как раз для самых интересных случаев*. Во-первых, тут не выполняется базовое требование теории измерений – однородность шкалы, так что даже складывать баллы нельзя, не говоря уже о более сложных действиях. Во-вторых, чересчур умный человек может заметить в тестовых вопросах и заданиях неоднозначности, которые не замечали авторы, либо просто найти новое решение. В свое время многоуровневое мышление блестяще было продемонстрировано членами жюри Московской математической олимпиады, поставившими высший балл участнику, не решившему задачу, поскольку он заметил, что решение из данных в школе аксиом геометрии не следует (там надо было воспользоваться очевидным фактом, что прямая, пересекающая одну из сторон треугольника, пересекает и другую; но это действительно аксиома, забытая Евклидом и сформулированная французским геометром Пашем). Этим жюри дало путевку в жизнь одному из выдающихся российских математиков.

Многоуровневое мышление заставляет диссидента любить свою Родину больше, чем квасного патриота и не скатываться на позиции типа «Уж русских-то я не буду защищать!»¹⁰ или «Как сладостно Отчизну ненавидеть» (при этом, конечно же, яростная критика недостатков своей страны, не дающих ей использовать ее

⁹ Может быть, столь враждебная всему разумному и доброму система законов была связана с антихристианской природой коммунизма как извращения идеи Царства Божьего, основанного не на любви, а на (классовой) ненависти.

¹⁰ Слова одного из крупнейших российских «правозащитников» во время первой чеченской войны, когда ему напомнили о геноциде русского населения Чечни.

природные достоинства, не смягчается). Оно удерживает человека от огульного разрушения традиций, поскольку их кажущая нерациональность слишком часто является препятствием к тому, чтобы примитивно понимаемая выгода не подменила собою пользу, а немедленный успех – стабильность.

Многоуровневое мышление впервые в мировой литературе было четко продемонстрировано в книге Екклесиаста. Конечно же, это отнюдь не оптимистическая сфера разума. За защищенность и сохранение рациональности человек расплачивается глубоким ощущением ущербности рациональности¹¹. Современная наука еще не поднялась до таких высот, где можно было бы постичь рациональными методами часть сферы духа (или дао, как мы ее называем). Тем не менее, после Брауэра наступление на новую сферу рациональности представляется неизбежным направлением развития науки. Другое дело, успеет ли она заняться этим в течение жизни данной цивилизации, или же заложенные семена прорастут уже после ее краха и новых Темных веков.

¹¹ Правда, еще глубже он понимает ущербность низкоуровневого примитивного иррационализма, который не просто не обеспечивает защиты, как сфера метода разума, а прямо толкает человека в объятия той сущности, что в традиционных религиях выступает под именем Князя мира сего.

КОМБИНИРОВАННЫЕ ЛОГИКИ В.А.СМИРНОВА И ЛОГИКА С ОПЕРАТОРАМИ ИСТИННОСТИ И ЛОЖНОСТИ*

Abstract. *There are two stages in V.A.Smirnov's constructing of combined calculi of propositions and events. In [5] a number of two-level combined calculi are constructed where external level of propositions corresponding to an abstract part of logic is varied as well as their internal level corresponding to ontological presuppositions. At the same time the event terms p differ from propositions θp and acts of assertion are not iterated.*

In his later work [6] V.A.Smirnov points out that an act of assertion itself is an event and the question of iteration arises. Referring to ideas laying in the grounds of von Wright's logic TL in [7] V.A.Smirnov proposes the generalized combined logic of propositions and events.

V.A.Smirnov compares the language of combined logic of propositions and events OCM with the language of von Wrights logic of truth TL and shows that for each T-sentence corresponding formula of OCM can be constructed and vice versa.

Since von Wright's logics of truth are similar to the logic with operators of truth and falsehood [3.4] (these are compared in [4]) it is interesting to compare the last one with combined logic of propositions and events.

V.A.Smirnov formulates a number of combined calculi and logic of truth TL in sequent form. It is formulating the logic with operators of truth and falsehood FL4 also in sequent form.

Исходя из двоякой интерпретации пропозициональной логики – сентенциальной и событийной, В.А.Смирнов построил ряд комбинированных исчислений предложений и событий [5, 6]. Построенные логики являются двухуровневыми, включающими внешний уровень для предложений, соответствующий абстрактной части логики, и внутренний, соответствующий онтологическим предпосылкам.

Четкое различение двух уровней логики В.А.Смирнов находит у Н.А.Васильева, в работах которого металогика отделяется от эмпирической логики [1].

В.А.Смирнов исходит также из фрегевского различения утвердительного употребления предложений от неутвердительного.

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 99-03-00120.

1. Два этапа построения двухуровневых комбинированных исчислений

В построении В.А.Смирновым комбинированных исчислений высказываний и событий можно выделить два этапа. На первом этапе в работе [5] построено несколько исчислений, в которых варьируется как внешний уровень для высказываний, так и внутренний уровень, принятым для каждого в отдельности как классической, так и неклассической логик. При этом различаются и не смешиваются событийные термы a и высказывания θa . Акты утверждения не итерируются.

В последующей работе [6], которая может рассматриваться как второй этап построения комбинированных исчислений, В.А.Смирнов отмечает, что акт утверждения сам является событием, и возникает вопрос о его итерации.

В.А.Смирнов предлагает различать два акта: акт предикации – синтез свойств (или отношений) с объектами и акт утверждения – акт соотнесения мыслимого содержания с реальностью.

Акты предикации записываются как выражения вида: $P(a), R(a_1, \dots, a_n)$, которые описывают некоторые положения дел, события и являются событийными термами.

Акты утверждения записываются как выражения вида: $\theta P(a), \theta R(a_1, \dots, a_n)$, которые являются предложениями или высказываниями. Событийные термы и высказывания не смешиваются.

Приведем язык одного из комбинированных исчислений предложений и событий, а именно $СМ^1$.

Алфавит

$p, q, p_1, q_1, \dots$	переменные, пробегающие по событиям
θ	указатель акта утверждения
$\cap, \cup, \supset, \sim$	внутренние логические знаки
$\&, \vee, \rightarrow, \neg$	внешние логические знаки

Правила образования

- 1) событийные переменные суть термы.
- 2) если a, b – термы, то $(a \cap b), (a \cup b), (a \supset b), \sim a$ суть термы.
- 3) если a есть терм, то θa есть формула.
- 4) если α, β есть формула, то $(\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), \neg \alpha$ суть формулы.

Отметим, что выражения $\theta p \rightarrow p, \theta p \cap \theta q$ не есть ни термы, ни формулы, они не являются правильно построенными выражениями. То есть не разрешается смешивать термы и высказывания.

¹ Здесь употребляются символы языка $СМ$, согласованные с символами последующего расширения этого языка.

Связка эквивалентности определяется стандартно:

$$(\alpha \equiv \beta) =_{df} (\alpha \rightarrow \beta) \& (\beta \rightarrow \alpha)$$

Схемы аксиом

B0. Схемы аксиом классического пропозиционального исчисления.

$$B1. \theta(a \cap b) \equiv \theta a \& \theta b$$

$$B2. \theta(a \cup b) \equiv \theta a \vee \theta b$$

$$B3. \theta \sim(a \cap b) \equiv \theta \sim a \vee \theta \sim b$$

$$B4. \theta \sim(a \cup b) \equiv \theta \sim a \& \theta \sim b$$

$$B5. \theta \sim \sim a \equiv \theta a$$

Правило вывода – modus ponens.

Система **СМ** является логикой де Моргана с внешней классической логикой [5].

В системе **СМ** и в других исчислениях [5] нет итерации акта утверждения. Однако акт утверждения, в свою очередь, может рассматриваться как событие, поэтому В.А.Смирнов предложил расширение **СМ**, в котором такое рассмотрение было бы возможным.

Вторым этапом построения комбинированной логики стало такое ее обобщение В.А.Смирновым, которое включает в рассмотрение итерацию акта утверждения. Акт утверждения рассматриваться им как событие.

Ссылаясь на идеи, положенные в основание логики истины **ТЛ** [7] фон Вригта, В.А.Смирнов предлагает обобщенную комбинированную логику предложений и событий **ОСМ**.

Правила образования термов и формул языка **ОСМ** задаются следующим образом:

К алфавиту **СМ** добавляются символы квадратных скобок [], роль которых состоит в преобразовании формул, заключенных в них, в событийные термы.

К правилам образования **СМ** добавляем следующее правило:

5) если α есть формула, то $[\alpha]$ есть терм.

Далее к системе аксиом **СМ** добавляем аксиому

$$\theta[\alpha] \equiv \alpha.$$

Таким образом к ряду комбинированных логик из [5] добавляется еще одна².

Это обобщение комбинированной логики В.А.Смирнов провел в работе [6], опубликованной в сборнике, посвященном IV-му

² Поэтому авторам, проводящим сопоставление с комбинированными логиками, следует указывать, с какой из них проводится сопоставление или какая из них используется.

Советско-Финскому коллоквиуму по логике. В этой статье он сравнивает язык обобщенной комбинированной логики предложений и событий **ОСМ** с языком логики истины **TL**, рассмотренной фон Вригтом в работе [7], опубликованной в номере “Synthese”, посвященном 3-му Советско-Финскому коллоквиуму по логике.

Приведем формулировку языка логики истины **TL**³

- 1) Переменная или функционально-истинностная комбинация переменных, предваряемые символом T , есть атомарное T -предложение.
- 2) Если α переменная, то $T\alpha$ есть атомарное T -предложение.
- 3) Если α есть функционально-истинностная комбинация переменных, то $T\alpha$ есть атомарное T -предложение.
- 4) Если α есть функционально-истинностная комбинация атомарных T -предложений и (или) переменных, то $T\alpha$ есть атомарное T -предложение.
- 5) Функционально-истинностная комбинация атомарных T -предложений есть молекулярное T -предложение.
- 6) Атомарное или молекулярное T -предложение есть T -предложение.

Аксиомы

A0 Все тавтологии **PL** (классической пропозициональной логики), когда вместо переменных стоят T -предложения.

- A1 $Tr \rightarrow \sim T\sim p$
- A2 $Tr \leftrightarrow T\sim\sim p$
- A3 $T(p \& q) \leftrightarrow T(p) \& T(q)$
- A4 $T\sim(p \& q) \leftrightarrow T(\sim p) \vee T(\sim q)$
- A5 $T\sim Tr \leftrightarrow \sim Tr$

Правила вывода

- R1. Подстановка **PL**- или **TL**-формул вместо переменных в доказуемые формулы.
- R2. Modus ponens
- R3. Правило истины: если α – теорема, то $T\alpha$ – теорема.

Оператор истины T логики истины **TL** интерпретируется В.А.Смирновым как акт утверждения θ .

В.А.Смирнов показывает, что по каждому T -предложению можно построить формулу языка **ОСМ**, и обратно. Например T -предложению $T(p \rightarrow T(p))$ соответствует формула $\theta([(p \supset [\theta p])])$, а формуле $Tr \rightarrow T\sim T\sim p$ соответствует формула $\theta p \rightarrow [\neg\theta\sim p]$.

Отметим, что остается вопрос о соответствии формул, не являющихся T -предложениями, формулам языка **ОСМ**.

³ В этой формулировке исправлен ряд опечаток, имеющих в работах [6] и [7].

Для логики де Моргана В.А.Смирнов вводит четырехзначную интерпретацию с истинностными значениями 1, 0, И (неопределенность), w (абсурд) [6].

Теоремой **СМ** и **ОСМ** является следующая тетралемма:

$$T1.1 \quad (\theta p \& \neg \theta \sim p) \vee (\theta \sim p \& \neg \theta p) \vee (\neg \theta p \& \neg \theta \sim p) \vee (\theta p \& \theta \sim p)$$

Аналогичная этой теореме тетралемма доказуема в логике истины **T''L** фон Вригта [2]. Отметим, что после логики истины **TL** фон Вригт построил серию логик истины в [2] и в ряде других работ.

Аналогичная T1.1 тетралемма имеет место и в исчислении предикатов истинности и ложности, опубликованном в сборнике тезисов 2-го Советско-Финского colloquium по логике [3].

В [3] имеется также аксиома $|p \equiv p$ (где $|$ есть символ оператора истинности), аналогичная аксиоме $\theta[\alpha] \equiv \alpha$ **ОСМ**.

В связи с тем, что логики истины фон Вригта имеют сходство с логикой с операторами истинности и ложности **FL4**, (сопоставление этих логик проведено в [4]), представляет интерес сравнить последнюю с комбинированными логиками предложений и событий.

Отметим, что выразительные возможности языка **FL4** шире, чем языка **ОСМ**.

2. Секвенциальная формулировка логики с операторами истинности и ложности

Ряд комбинированных исчислений и логику истины **TL** В.А.Смирнов формулирует также и в секвенциальной форме. Поэтому имеет смысл сформулировать и логику с операторами истинности и ложности **FL4** в секвенциальной форме.

Отметим, что логика с операторами истинности и ложности **FL4** может рассматриваться как двухуровневая. В ее формулировке используются метAPERЕМЕННЫЕ A, B для ппф (первый уровень) и P, P_1 для Т.Ф.-формул (второй уровень). Для Т.Ф.-формул имеет место классическая логика. Операторы истинности и ложности обозначим символами $|$ и $\sim$, исходную импликацию Imp^4 .

К обычным правилам для классических связок добавляем следующие логические фигуры заключения:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, P}{\Gamma \rightarrow \Delta, |P} \qquad \frac{P, \Gamma \rightarrow \Delta}{|P, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

⁴ Исходная импликация исчисления **FL4** в [4] обозначается как $\rightarrow$.

$\frac{\Gamma \rightarrow -A, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, (A \text{ Imp } B)}$	$\frac{-A, \Gamma \rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{ (A \text{ Imp } B), \Gamma \rightarrow \Delta}$
$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, \quad \Gamma \rightarrow \Delta, -B}{\Gamma \rightarrow \Delta, -(A \text{ Imp } B)}$	$\frac{ A, -B, \Gamma \rightarrow \Delta}{-(A \text{ Imp } B), \Gamma \rightarrow \Delta}$

Отметим, что среди подлогик логики с операторами истинности и ложности **FL4** имеются подструктурные логики. Таковой является трехзначная подлогика **FL3N**, которая, будучи функционально эквивалентной трехзначной логике Лукасевича, является логикой без сокращения.

В заключение отметим, что имеется значительное сходство и параллели в подходах и формулировках комбинированного исчисления **ОСМ** В.А.Смирнова с логикой с операторами истинности и ложности **FL4**, подобно тому, как это имеет место в отношении логик истины фон Вригта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика (конспект лекции) // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М., 1989.
2. *Вригт Г.Х. фон.* Логика истины // Вригт Г.Х. Логико-философские исследования. М., 1986.
3. *Павлов С.А.* Исчисление предикатов истинности и ложности // Логический анализ естественных языков. 2-ой Советско-Финский коллоквиум по логике. М., 1979.
4. *Павлов С.А.* Логика ложности FL4 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. 1993. М., 1994.
5. *Смирнов В.А.* Утверждение и предикация. Комбинированные исчисления высказываний и событий // Нестандартные семантики неклассических логик. М., 1986.
6. *Смирнов В.А.* Комбинированные исчисления предложений и событий и логика истины фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. IV Советско-финский коллоквиум. М., 1989.
7. *Wright G.H. von.* Truth, negation and contradiction // Synthese. V. 66, N1. 1986.

ПОГРУЖЕНИЕ ИНТУИЦИОНИСТСКОГО ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЕГО ПОЗИТИВНЫЙ ФРАГМЕНТ*

Abstract. *A translation from the calculus Int which is axiomatisation of the intuitionistic propositional logic to the calculus Int^+ which is axiomatisation of the positive fragment of Int is constructed.*

Языки L и L^+ – пропозициональные языки над алфавитом $P \cup \{\&, \vee, \supset, f,), (\}$ и алфавитом $P \cup \{\&, \vee, \supset,), (\}$, соответственно. Здесь P есть счетно-бесконечное множество $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ всех пропозициональных переменных языков L и L^+ , $\&, \vee, \supset$, – двухместные логические связки языков L и L^+ , f – нольместная логическая связка языка L , $)$, и $($ – технические символы (скобки) языков L и L^+ . Формулы языка L (L -формулы) и формулы языка L^+ (L^+ -формулы) строятся стандартно, принимается соглашение об опускании внешних скобок в L -формулах и в L^+ -формулах. Очевидно, что всякая L^+ -формула является L -формулой, а всякая L -формула, не содержащая вхождений f , является L^+ -формулой.

Исчисления Int и Int^+ – исчисления гильбертовского типа над языками L и L^+ , соответственно. Для всяких L -формул A, B и C нижеследующие L -формулы а) – л) являются аксиомами исчисления Int :

- a) $A \supset (B \supset A)$
- b) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- c) $A \supset (B \supset A \& B)$
- d) $(A \& B) \supset A$
- e) $(A \& B) \supset B$
- f) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$
- g) $A \supset (A \vee B)$
- k) $B \supset (A \vee B)$
- l) $f \supset A$.

Никакие другие L -формулы не являются аксиомами исчисления Int .

* Работа выполнена при поддержке грантов РГНФ № 99-03-19706 и РФФИ № 00-06-80037.

Все аксиомы исчисления Int , ни одна из которых не содержит вхождений f , являются аксиомами исчисления Int^+ . Никакие другие Int^+ -формулы не являются аксиомами исчисления Int^+ . Правило $\alpha, \alpha \supset \beta / \beta$, где α и β – переменные по L -формулам (соответственно, переменные по L^+ -формулам) есть единственное правило исчисления Int (соответственно, исчисления Int^+) и называется правилом отделения исчисления Int (соответственно, правилом отделения исчисления Int^+). Доказательство в исчислении Int (Int -доказательства) и доказательства в исчислении Int^+ (Int^+ -доказательства) строятся стандартно, длина Int -доказательства и длина Int^+ -доказательства определяются обычно (наименьшая длина этих доказательств равна 1). Для всякой L -формулы (L^+ -формулы) A запись $\text{Int} \vdash A$ (соответственно, $\text{Int}^+ \vdash A$) означает, что существует Int -доказательство (соответственно, Int^+ -доказательство) L -формулы (соответственно, L^+ -формулы) A .

Определим сдвиг Сд как такое отображение множества всех L -формул в это множество, что выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}\text{Сд}(f) &= f, \\ \text{Сд}(p_i) &= p_{i+1} \text{ (где } i \in \{1, 2, 3, \dots\}), \\ \text{Сд}(A \supset B) &= \text{Сд}(A) \supset \text{Сд}(B), \\ \text{Сд}(A \& B) &= \text{Сд}(A) \& \text{Сд}(B), \\ \text{Сд}(A \vee B) &= \text{Сд}(A) \vee \text{Сд}(B).\end{aligned}$$

Для всякой L -формулы A посредством $\text{Prop}(A)$ обозначим множество всех входящих в A пропозициональных переменных языка L . Определим отображение $\&$ множества всех непустых подмножеств множества всех пропозициональных переменных языка L^+ во множество всех L^+ -формул следующим образом:

- 1) $\&(\{A\}) = A$, если A есть пропозициональная переменная языка L^+ ,
- 2) $\&(K) = (\&(K - \{p_j\}) \& p_j)$ если K есть более чем одноэлементное множество пропозициональных переменных языка L^+ , $p_j \in K$ и $j > i$ для всякой пропозициональной переменной p_i языка L^+ , принадлежащей множеству $K - \{p_j\}$

Посредством $\langle B/C \rangle [A]$, где A , и C – L -формулы, а B есть пропозициональная переменная языка L или f , обозначим результат подстановки C вместо B в A . Ясно, что если A , B и C – L -формулы, то $\langle B/C \rangle [A]$ есть L -формула, а если A – L -формула и C – L^+ -формула, то $\langle f/C \rangle [A]$ есть L^+ -формула.

Теорема 1 (о погружении исчисления Int в исчисление Int^+).

Для всякой L -формулы A верно следующее: $\text{Int} \vdash A$ тогда и только тогда, когда $\text{Int}^+ \vdash \langle f/\&(\text{Prop}(\text{Сд}(A)) \cup \{p_1\}) \rangle [\text{Сд}(A)]$

В доказательстве этой теоремы использованы следующие четыре леммы.

Лемма 1. Для всяких L-формулы A и B и всякой пропозициональной переменной p_i языка L верно следующее: если $\text{Int} \vdash A$, то $\text{Int} \vdash \langle p_i / B \rangle [A]$.

Лемма 1 доказана возвратной индукцией по длине Int-доказательства L-формулы A.

Лемма 2. Для всякой L-формулы A верно следующее: $\text{Int} \vdash A$ тогда и только тогда, когда $\text{Int} \vdash \text{Сд}(A)$.

Лемма 2 доказана на основе леммы 1.

Лемма 3. Для всякой L-формулы A и всякого конечного множества M пропозициональных переменных языка L верно следующее: если $\text{Int} \vdash A$, то $\text{Int}^+ \vdash \langle f / \&(\text{Prop}(A) \cup \{p_i\} \cup M) \rangle [A]$.

Лемма 3 доказана возвратной индукцией по длине Int-доказательства L-формулы A, при этом использована следующая подлемма.

Подлемма. Для всякой L^+ -формулы A и всякого конечного множества M пропозициональных переменных языка L^+ верно следующее: $\text{Int}^+ \vdash \&(\text{Prop}(A) \cup M) \supset A$.

Эта подлемма доказана возвратной индукцией по построению L^+ -формулы A.

Лемма 4. Для всякой L-формулы A и всякого конечного множества M пропозициональных переменных языка L верно следующее:

$$\text{Int} \vdash \langle p_i / f \rangle [\langle f / \&(\text{Prop}(\text{Сд}(A)) \cup \{p_i\} \cup M) \rangle [\text{Сд}(A)]] \supset \text{Сд}(A)$$

$$\text{и} \\ \text{Int} \vdash \text{Сд}(A) \supset \langle p_i / f \rangle [\langle f / \&(\text{Prop}(\text{Сд}(A)) \cup \{p_i\} \cup M) \rangle [\text{Сд}(A)]] .$$

Лемма 4 доказана возвратной индукцией по построению L-формулы A.

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать следующие утверждения У1 и У2.

У1. Для всякой L-формулы A верно следующее: если $\text{Int} \vdash A$, то $\text{Int}^+ \vdash \langle f / \&(\text{Prop}(\text{Сд}(A)) \cup \{p_i\}) \rangle [\text{Сд}(A)]$.

У2. Для всякой L-формулы A верно следующее: если $\text{Int}^+ \vdash \langle f / \&(\text{Prop}(\text{Сд}(A)) \cup \{p_i\}) \rangle [\text{Сд}(A)]$, то $\text{Int} \vdash A$.

Доказательство утверждения У1.

Допустим, что (1) $\text{Int} \vdash A$. Тогда, используя лемму 1, получаем, что (2) $\text{Int} \vdash \text{Сд}(A)$. Из (2) и леммы 3 (полагая, что M пусто) получаем, что $\text{Int}^+ \vdash \langle f / \&(\text{Prop}(\text{Сд}(A)) \cup \{p_i\}) \rangle [\text{Сд}(A)]$.

Утверждение У1 доказано.

Доказательство утверждения У2.

Допустим, что (1) $\text{Int}^+ \vdash \langle f/\&(\text{Prop}(\text{Сд}(A)) \cup \{p_1\}) \rangle [\text{Сд}(A)]$.

Из (1) согласно данным выше определениям исчислений Int и Int^+ получаем, что (2) $\text{Int} \vdash \langle f/\&(\text{Prop}(\text{Сд}(A)) \cup \{p_1\}) \rangle [\text{Сд}(A)]$.

Из (2) и леммы 1 получаем, что (3) $\text{Int} \vdash \langle p_1 /f \rangle [\langle f/\&(\text{Prop}(\text{Сд}(A)) \cup \{p_1\}) \cup M \rangle [\text{Сд}(A)]]$.

Из (3) и леммы 4 (полагая, что M пусто) по определению Int -доказательства получаем, что (4) $\text{Int} \vdash \text{Сд}(A)$. Из (4) и леммы 2 получаем, что $\text{Int} \vdash A$.

Утверждение У2 доказано.

Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1, легко доказать, что исчисление Int^+ является позитивным фрагментом исчисления Int в смысле следующей теоремы.

Теорема 2. Для всякой L^+ -формулы A верно следующее: $\text{Int}^+ \vdash A$ тогда и только тогда, когда $\text{Int} \vdash A$.

Для доказательства этой теоремы достаточно доказать следующие утверждения У3 и У4.

У3. Для всякой L^+ -формулы A верно следующее: если $\text{Int}^+ \vdash A$, то $\text{Int} \vdash A$.

У4. Для всякой L^+ -формулы A верно следующее: если $\text{Int} \vdash A$, то $\text{Int}^+ \vdash A$.

Справедливость утверждения У3 очевидна в силу определений исчислений Int и Int^+ .

Доказательство утверждения У4 предваряют леммы 5 и 6.

Лемма 5. Для всяких L^+ -формул A и B и всякой пропозициональной переменной p_i языка L^+ верно следующее: если $\text{Int}^+ \vdash A$, то $\text{Int}^+ \vdash \langle p_i/B \rangle [A]$.

Лемма 5 доказана возвратной индукцией по длине Int^+ -доказательства L^+ -формулы A .

Лемма 6. Для всякой L^+ -формулы A верно следующее: $\text{Int}^+ \vdash A$ тогда и только тогда, когда $\text{Int}^+ \vdash \text{Сд}(A)$.

Лемма 6 доказана на основе леммы 5.

Доказательство утверждения У4.

Допустим, что (1) A есть L^+ -формула и (2) $\text{Int} \vdash A$. Из (2) и теоремы 1 получаем, что (3) $\text{Int}^+ \vdash \langle f/\&(\text{Prop}(\text{Сд}(A)) \cup \{p_1\}) \rangle [\text{Сд}(A)]$.

Из (1) получаем, что (4) f не входит в A . Из (4) по определению оператора Сд получаем, что (5) f не входит в $\text{Сд}(A)$. Из (5) по определению оператора $\langle \quad \rangle$ получаем, что (6)

$\langle f/\&(\text{Prop}(\text{Сд}(A)) \cup \{p_1\}) \rangle [\text{Сд}(A)]$ есть $\text{Сд}(A)$. Из (3) и (6) получаем, что (7) $\text{Int}^+ \vdash \text{Сд}(A)$. Из (7) и леммы 6 получаем, что $\text{Int}^+ \vdash A$.

Утверждение У4 доказано.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

Драгалин А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.

М.Н.Рыбаков

ПЕРЕЧИСЛИМОСТЬ МОДАЛЬНЫХ ПРЕДИКАТНЫХ ЛОГИК И УСЛОВИЯ ОБРЫВА ВОЗРАСТАЮЩИХ ЦЕПЕЙ*

Abstract. *The question about recursive enumerability of modal predicate logics defined by non first-order definable classes of Kripke frames is considered. It is proved that logics of classes of frames without infinite ascending chains are not recursively enumerable.*

Известно, что большинство стандартных пропозициональных логик разрешимы [3], т.е. для каждой такой логики существует эффективная процедура, которая по всякой формуле дает ответ на вопрос о том, верно ли, что эта формула принадлежит данной логике. Неразрешимых пропозициональных логик, возникших по некоторым естественным причинам, известно не так уж и много; к таковым относятся, например, релевантные логики [5]. В предикатном случае ситуация резко меняется — даже классическая логика предикатов неразрешима, хотя и является перечислимой, т.е. существует эффективное перечисление всех ее теорем. Как следствие, неразрешимы и все модальные предикатные логики, содержащие классическую логику предикатов в качестве своего безмодального фрагмента. Более того, из результатов С. Крипке [1] следует, что в большинстве случаев для неразрешимости модальной предикатной логики достаточно, чтобы ее язык содержал всего лишь две одноместные предикатные буквы, в то время как классическая логика одноместных предикатов разрешима. Логика одноместных предикатов тесно связана с силлогистикой Аристотеля, и упомянутое наблюдение С. Крипке отчасти оправдывает трудности, возникающие при введении в силлогистику модальностей.

Заметим, что все логики, которые могут быть заданы в виде исчислений (т.е. в виде дедуктивной системы с рекурсивно перечислимым, например, конечным, набором аксиом и правил вывода), являются перечислимыми, т.е. для каждой такой логики существует эффективная процедура, выписывающая последовательно все ее теоремы. Действительно, имея конечную (или даже рекурсивно перечислимую) аксиоматику, мы можем последова-

* Работа выполнена при поддержке Фонда Минобразования РФ, грант № Е00–1.0–175.

тельно перебирать все выводы, в результате чего рано или поздно доберемся до всякой формулы, которая выводима в данном исчислении.

Вполне естественным представляется определять логики не синтаксически – в виде исчислений, а семантически, т.е. как множества формул, верных с точки зрения некоторой семантики. Так, например, классическую логику предикатов **QCI** можно определить как множество тождественно истинных формул, минимальную нормальную модальную предикатную логику **QK** – как множество формул, верных во всех шкалах Крипке, интуиционистскую пропозициональную логику **Int** – как множество формул, верных во всех интуиционистских моделях Крипке, и т.д. Нас будут интересовать логики (в первую очередь, модальные предикатные), которые определяются именно семантически.

В [2] показано, что если модальная предикатная логика задается как множество формул, значимых в классе шкал Крипке, отношение достижимости в которых описывается первопорядковой формулой, то она погружается в классическую логику предикатов. Это, в частности, влечет, что такая логика является перечислимой.

Сохранится ли перечислимость, если рассматривать модальные предикатные логики, определенные классами шкал Крипке, отношение достижимости в которых не описывается ни одной формулой первого порядка? В пропозициональном случае к логикам, классы шкал которых не описываются первопорядковыми формулами, относятся, например, логика Геделя–Леба **GL**, логика Гжегорчика **Grz**, логика Маккинси **KM** и другие. Все эти логики конечно аксиоматизируемы, финитно аппроксимируемы и разрешимы [3]. Закономерен вопрос о том, какова алгоритмическая сложность модальных предикатных логик классов шкал **GL**, **Grz**, **KM** и других подобных логик.

Вопрос о перечислимости логик классов шкал, не определенных первопорядково, мотивирован отчасти еще и тем, что в математике довольно часто приходится говорить о вполне естественных свойствах, которые невозможно описать средствами языка первого порядка.

Так, например, одним из свойств, которым обладают стандартные модальные пропозициональные логики, является финитная аппроксимируемость: логика *L* называется финитно аппроксимируемой, если она полна относительно некоторого класса конечных шкал Крипке. Заметим, что свойство конечности не описывается никакой формулой первого порядка. Тем не менее, финитная аппроксимируемость играет важную роль в модальных

и других неклассических логиках. Так, например, известно [3], что если пропозициональная логика L финитно аппроксимируема и конечно аксиоматизируема, то она разрешима.

При переходе от пропозиционального языка к предикатному свойство конечности моделей даже в классическом случае приводит к «отрицательным» результатам, связанным с возможностью эффективного описания логик таких моделей. Сначала заметим, что требование конечности моделей предикатного языка возникает вполне естественно: поскольку в жизни мы сталкиваемся лишь с конечным числом предметов, то разумно рассматривать логики моделей с конечными предметными областями. Оказывается, что классическая предикатная логика конечных областей QCI_{fin} в силу известной теоремы Трахтенброта не только не разрешима, но даже не является перечислимой (правда, теорема Трахтенброта не распространяется на логику одноместных предикатов). Соответственно, неперечислимы и модальные логики конечных областей.

Помимо конечности есть и другие естественные условия, которые нельзя записать с помощью первопорядковых формул. К ним относится, например, часто используемая в различных областях математики операция транзитивного (иногда рефлексивно-транзитивного) замыкания бинарных отношений. Так, в теории графов эта операция используется при описании путей из одних вершин графа в другие, в *computer science* она связана с заикливанием программ и т.д. В [6] показано, что модальная предикатная логика шкал Крипке, язык которой содержит две модальности – соответствующую отношению достижимости между мирами и соответствующую рефлексивно-транзитивному замыканию этого отношения – является неперечислимой. Опять вполне естественное, но не определимое первопорядково условие, накладываемое на семантику, приводит к неперечислимости множества верных с точки зрения этой семантики формул.

Мы рассмотрим еще одно условие – условие обрыва возрастающих цепей. В шкалах Крипке оно возникает, когда речь идет о реляционной семантике логик доказуемости, например, таких, как пропозициональные логики **GL** или **Grz**. Напомним определения этих логик. Пусть **CI** – классическая логика высказываний. Для множеств модальных пропозициональных формул Σ_1 и Σ_2 через $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ обозначим наименьшее множество, содержащее $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ и замкнутое относительно правила *modus ponens*, правила подстановки и правила Геделя. Вместо $\Sigma \oplus \{\varphi\}$ будем писать $\Sigma \oplus \varphi$. Тогда

$$\mathbf{GL} = \mathbf{Cl} \oplus \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q) \oplus \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p;$$

$$\mathbf{Grz} = \mathbf{Cl} \oplus \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q) \oplus \Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p,$$

где p и q — пропозициональные переменные. Каждую из этих логик можно определить как множество формул, значимых в некотором классе шкал Крипке, для которых помимо прочих (первопорядково определимых) условий выполнено и условие обрыва возрастающих цепей (см. [3]). Мы рассмотрим предикатные варианты этих логик, т.е. когда модальный язык обогащен предикатными буквами и кванторами по предметным переменным.

Перейдем к точным определениям. Обозначим через $\mathcal{ML}$ модальный предикатный язык, содержащий счетное число индивидуальных переменных, счетное число n -местных предикатных букв для всякого натурального n , логические связки $\wedge, \vee, \rightarrow, \perp, \Box$, кванторы всеобщности по индивидуальным переменным, скобки и запятую. Формулы в этом языке строятся обычным образом. В дальнейшем при записи $\mathcal{ML}$ -формул мы будем использовать и другие связки и кванторы, определяя их как обычные сокращения основных, а именно: $\neg\varphi = \varphi \rightarrow \perp$, $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$, $\exists x \varphi = \neg \forall x \neg \varphi$, $\Diamond \varphi = \neg \Box \neg \varphi$, $\Box^+ \varphi = \varphi \wedge \Box \varphi$.

Шкалой Крипке будем называть пару $F = \langle W, R \rangle$, где W — непустое множество, а R — бинарное отношение на W . Элементы множества W будем называть мирами, а отношение R — отношением достижимости. Модель Крипке представляет собой четверку $M = \langle W, R, D, I \rangle$, где $\langle W, R \rangle$ — шкала, D — функция, сопоставляющая каждому миру $w \in W$ непустое множество $D(w)$, называемое предметной областью этого мира, причем если $w_1 R w_2$, то $D(w_1) \subseteq D(w_2)$, I — интерпретация предикатных букв в мирах множества W , т.е. функция, сопоставляющая каждой n -местной предикатной букве P и каждому миру w некоторое n -местное отношение $I(P, w)$ на множестве $D(w)$.

Пусть α — интерпретация предметных переменных в модели M , т.е. функция, сопоставляющая каждой предметной переменной x языка $\mathcal{ML}$ некоторый элемент $\alpha(x) \in \bigcup \{D(w) : w \in W\}$. Определим отношение значимости $\mathcal{ML}$ -формул в мирах модели M при интерпретации α , при этом если формула φ значима в мире w модели M при интерпретации α , то будем писать $(M, w) \models \varphi[\alpha]$:

$$(M, w) \not\models \perp[\alpha] \quad \text{всегда};$$

$$(M, w) \models P(x_1, \dots, x_n)[\alpha] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{если} \\ \alpha(x_1) \in D(w), \dots, \alpha(x_n) \in D(w), \quad \text{то} \\ \langle \alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n) \rangle \in I(P, w); \end{array}$$

$$\begin{aligned}
(M, w) \models \varphi \wedge \psi [\alpha] &\Rightarrow (M, w) \models \varphi[\alpha] \text{ и } (M, w) \models \psi[\alpha]; \\
(M, w) \models \varphi \vee \psi [\alpha] &\Rightarrow (M, w) \models \varphi[\alpha] \text{ или } (M, w) \models \psi[\alpha]; \\
(M, w) \models \varphi \rightarrow \psi [\alpha] &\Rightarrow (M, w) \models \varphi[\alpha] \text{ или } (M, w) \models \psi[\alpha]; \\
(M, w) \models \forall x \varphi[\alpha] &\Rightarrow (M, w) \models \varphi[\beta] \text{ для всякой интерпретации } \beta, \text{ совпадающей с } \alpha \text{ на всех переменных, кроме, быть может, } x; \\
(M, w) \models \Box \varphi[\alpha] &\Rightarrow (M, w') \models \varphi[\alpha] \text{ для всякого мира } w' \text{ такого, что } wRw'.
\end{aligned}$$

Если $x_1, \dots, x_n$ — список всех свободных переменных формулы φ , $\alpha(x_1) = a_1, \dots, \alpha(x_n) = a_n$ и $a_1, \dots, a_n \in D(w)$, то вместо обозначения $(M, w) \models \varphi[\alpha]$ будем использовать обозначение $(M, w) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. Формулу φ считаем значимой в мире w модели M , если она значима в этом мире при всякой интерпретации α такой, что $\alpha(x) \in D(w)$ для всякой свободной переменной x формулы φ . Говорим, что формула φ значима в модели M , если она значима в каждом мире этой модели; говорим, что φ значима в шкале F , если φ значима во всякой модели, определенной на этой шкале.

Пусть C — класс шкал Крипке, отношение достижимости в которых иррефлексивно, транзитивно и удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, т.е. никакая шкала $F = \langle W, R \rangle$ класса C не содержит бесконечных цепей вида $w_1 R w_2 R w_3 R \dots$. Обозначим через $\mathbf{QGL}^{sem}$ логику класса C , т.е. множество $\mathcal{ML}$ -формул, значимых во всех шкалах из C . В пропозициональном случае логикой класса C является логика Геделя–Леба $\mathbf{GL}$. Сразу отметим, что в приведенных ниже рассуждениях вместо класса C можно рассматривать некоторые естественные его подклассы; так, например, можно ограничивать ширину шкал и рассматривать подклассы C , состоящие из шкал ширины 1, ширины 2, ширины 3 и т.д. В этом смысле наименьшим естественным подклассом класса C является класс шкал ширины 1, состоящий из всех линейных шкал класса C . В пропозициональном случае этот класс определяет логику $\mathbf{GLLin}$, которая дедуктивно может быть задана добавлением к аксиоматике $\mathbf{GL}$ аксиомы линейности:

$$\mathbf{GLLin} = \mathbf{GL} \oplus \Box(\Box^+ p \rightarrow q) \vee \Box(\Box^+ q \rightarrow p).$$

Модальную предикатную логику линейных шкал класса C обозначим через $\mathbf{QGLLin}^{sem}$.

Рассмотрим класс C^* , состоящий из шкал Крипке, отношение достижимости в которых рефлексивно, транзитивно, антисимметрично и удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей:

шкалы не должны содержать бесконечно возрастающих цепей, состоящих из различных точек. Модальную предикатную логику класса C^* обозначим через $\mathbf{QGrz}^{sem}$. В пропозициональном случае класс C^* определяет логику Гжегорчика $\mathbf{Grz}$. Через $\mathbf{QS4.3Grz}^{sem}$ обозначим модальную предикатную логику класса всех линейных шкал из C^* . В пропозициональном случае класс линейных шкал C^* определяет логику

$$\mathbf{S4.3Grz} = \mathbf{Grz} \oplus \Box(\Box p \rightarrow \Box q) \vee \Box(\Box q \rightarrow \Box p).$$

Наша цель состоит в том, чтобы доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Логики $\mathbf{QGL}^{sem}$, $\mathbf{QGLLin}^{sem}$, $\mathbf{QGrz}^{sem}$, $\mathbf{QS4.3Grz}^{sem}$ неперечислимы.*

Для доказательства неперечислимости этих логик достаточно погрузить в каждую из них некоторое неперечислимое множество. В качестве такого множества возьмем классическую логику конечных областей $\mathbf{QCI}_{fin}$. Будем считать, что формулы этой логики строятся в языке $\mathcal{L}$, который отличается от определенного выше языка $\mathcal{ML}$ лишь тем, что не содержит символа $\Box$, т.е. $\mathcal{L}$ – это обычный язык логики предикатов.

Мы построим погружение логики $\mathbf{QCI}_{fin}$ в логику $\mathbf{QGL}^{sem}$, т.е. опишем эффективно вычислимую функцию f , сопоставляющую каждой $\mathcal{L}$ -формуле φ некоторую $\mathcal{ML}$ -формулу $f(\varphi)$ и удовлетворяющую следующему условию:

$$\varphi \in \mathbf{QCI}_{fin} \Leftrightarrow f(\varphi) \in \mathbf{QGL}^{sem}.$$

Эта же функция будет заодно погружением $\mathbf{QCI}_{fin}$ и в логику $\mathbf{QGLLin}^{sem}$. Небольшая модификация функции f позволяет обосновать справедливость теоремы 1 и для других двух логик, но эту часть доказательства мы опускаем, поскольку оно не содержит принципиально новой идеи, но требует некоторых дополнительных технических выкладок.

Для дальнейших рассуждений зафиксируем некоторую произвольную замкнутую $\mathcal{L}$ -формулу φ .

Первое, что нам нужно сделать, – это научиться описывать условие конечности предметных областей. Как отмечалось выше, условие конечности не является первопорядково определимым. Но в логике $\mathbf{QGL}^{sem}$ имеется в некотором виде и непервопорядковое условие – условие обрыва возрастающих цепей, которому удовлетворяют все шкалы этой логики. Воспользуемся этим условием, чтобы описать подходящим образом конечность предметных областей.

Пусть E – некоторая бинарная предикатная буква языка $\mathcal{ML}$, не входящая в φ . Обозначим

$$Eq = \Box^+ [\forall x E(x,x) \wedge \forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow E(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (E(x,y) \wedge E(y,z) \rightarrow E(x,z))]$$

и ниже вместо $E(x,y)$ будем писать $x \approx y$. Выполнимость в некотором мире w формулы Eq означает, что предметные области мира w и достижимых из w миров разбиваются на классы эквивалентности по отношению $\approx$. Запишем некоторые условия, выполнение которых будет означать, что эти классы упорядочены так же, как упорядочены натуральные числа с помощью отношения «меньше». Пусть Q – унарная, а G и S – бинарные предикатные буквы, не входящие в формулу φ . Смысл, который мы хотим вложить в буквы G и S , следующий:

$$\begin{aligned} G(x,y) &\Leftrightarrow \text{«}x \text{ меньше } y\text{»}; \\ S(x,y) &\Leftrightarrow \text{«}y \text{ следует за } x\text{»}. \end{aligned}$$

Буква Q понадобится нам для того, чтобы «помечать» миры индивидами; считаем, что мир w модели $M = \langle W, R, D, I \rangle$ «помечен» индивидом $a \in W$, если $(M, w) \models Q[a]$. То, какую роль будут играть эти «метки», станет ясно чуть ниже.

Опишем условие бесконечности предметной области:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y G(x,y) \wedge \forall x \forall y \forall z (G(x,y) \wedge G(y,z) \rightarrow G(x,z)) \wedge \\ \wedge \forall x \forall y (G(x,y) \rightarrow \neg G(y,x)). \end{aligned} \quad (1)$$

Запишем условие линейной упорядоченности классов эквивалентности по G :

$$\Box^+ \forall x \forall y [\neg(x \approx y) \leftrightarrow (G(x,y) \vee G(y,x))]. \quad (2)$$

Выполнение следующего условия будет гарантировать, что отношение G между всякими двумя индивидами сохраняется в последующих мирах:

$$\Box^+ \forall x \forall y [(G(x,y) \rightarrow \Box G(x,y)) \wedge (\neg G(x,y) \rightarrow \Box \neg G(x,y))]. \quad (3)$$

Опишем S :

$$\Box^+ \forall x \forall y [S(x,y) \leftrightarrow (G(x,y) \wedge \forall z \neg(G(x,z) \wedge G(z,y)))]. \quad (4)$$

Следующая формула означает существование «нуля», который будет определять наименьший по G класс эквивалентности:

$$\exists x \Box^+ \forall y \neg S(y,x). \quad (5)$$

Очередное условие, которое нам понадобится, состоит в том, что для всякого элемента существует непосредственно следующий за ним по G и для всякого элемента, отличного от наименьшего по G , существует его непосредственный предшественник по G :

$$\Box^+ \forall x \exists y S(x, y) \wedge \Box^+ \forall x (\exists y G(y, x) \rightarrow \exists y S(y, x)). \quad (6)$$

Выполнение формул (1)–(6) означает, что классы эквивалентности по отношению $\approx$ оказываются линейно упорядоченными с помощью G , причем это упорядочение очень похоже на упорядочение натуральных чисел по отношению «меньше» с той лишь разницей, что получившееся упорядочение пока может содержать бесконечно убывающие цепочки. Этот недостаток можно исправить с помощью Q и того факта, что шкалы класса C не содержат бесконечно возрастающих цепей.

Запишем условие, состоящее в том, каждый мир, достижимый из данного, оказался «помечен» некоторым индивидом:

$$\Box \exists x Q(x). \quad (7)$$

Пусть, кроме того, «метка» для каждого мира единственна с точностью до эквивалентности; соответствующее условие выглядит так:

$$\Box \forall x \forall y [(Q(x) \wedge Q(y) \rightarrow x \approx y) \wedge (x \approx y \wedge Q(x) \rightarrow Q(y))]. \quad (8)$$

Следующее условие будет гарантировать, что «метки» не повторяются два раза в одной цепочке миров:

$$\Box \forall x (Q(x) \rightarrow \Box \neg Q(x)). \quad (9)$$

Теперь согласуем порядок следования «меток» с порядком G . Для этого запишем такое условие:

$$\Box \forall x \forall y [Q(x) \rightarrow (\Diamond Q(y) \leftrightarrow G(y, x))]. \quad (10)$$

Наконец, потребуем, чтобы каждый индивид данного мира являлся «меткой» для некоторого мира, достижимого из данного. Этого можно достичь с помощью следующей формулы:

$$\forall x \Diamond Q(x). \quad (11)$$

Обозначим через A конъюнкцию формул (1)–(11). Нетрудно видеть, что конъюнктивные члены (7)–(11) этой формулы обеспечивают отсутствие бесконечно убывающих по G цепей в линейном упорядочении классов эквивалентности по $\approx$, полученном благодаря конъюнктивным членам (1)–(6). Действительно, пусть $\langle W, R \rangle \in C$. Тогда наличие бесконечно убывающей по G цепочки индивидов $\dots G a_3 G a_2 G a_1$ в предметной области мира w модели $M = \langle W, R, D, I \rangle$, в котором выполняется A , означало бы достижи-

мость из w бесконечно возрастающей цепочки миров $w R w_1 R w_2 R w_3 R \dots$, где $w_k \models Q[a_k]$. А последнего не может быть в силу определения класса C .

Итак, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Если формула $Eq \wedge A$ выполнима в мире w модели $M = \langle W, R, D, \Gamma \rangle$, определенной на шкале класса C , то множество $D(w)$ разбивается с помощью $\approx$ на линейно упорядоченное с помощью G семейство классов эквивалентности, изоморфное множеству натуральных чисел с отношением «меньше».

Нам важно то, что множество получающихся за счет выполнения формулы A классов эквивалентности обладает следующим свойством: число классов эквивалентности, предшествующее по G некоторому фиксированному классу, конечно. Вот, по сути, и конечные области.

Пусть x – индивидуальная переменная, не встречающаяся в φ . Заменяем в φ каждую подформулу вида $\forall y \psi$ на подформулу вида $\forall y (G(y, x) \vee y \approx x \rightarrow \psi)$ и получившуюся формулу обозначим через $\varphi^*(x)$. Рассмотрим формулу $\forall x \varphi^*(x)$. Легко понять, что если предметная область некоторого мира разбита на одноэлементные классы эквивалентности так, как того требует выполнение формулы A , то справедливость в этом мире условия, записанного в виде формулы $\forall x \varphi^*(x)$ означает, что формула φ верна во всякой конечной классической модели.

Осталось добавить условие, выполнение которого позволяло бы считать указанные классы одноэлементными. Пусть элементы каждого из таких классов будут неразличимы для формулы $\forall x \varphi^*(x)$. Для этого достаточно описать тот факт, что каждая предикатная буква, входящая в φ , удовлетворяет аксиомам равенства, где вместо равенства используется символ $\approx$. Обозначим через $Ax(\varphi)$ универсальное замыкание конъюнкции всех таких аксиом и положим

$$f(\varphi) = Eq \wedge A \wedge Ax(\varphi) \rightarrow \forall x \varphi^*(x).$$

Предложение 2. Для всякой $\mathcal{L}$ -формулы φ справедлива следующая эквивалентность:

$$\varphi \in \mathbf{QCI}_{fin} \Leftrightarrow f(\varphi) \in \mathbf{QGL}^{sem}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \notin \mathbf{QCI}_{fin}$. Тогда φ опровергается в некоторой классической модели с конечной предметной областью. Можем считать, что предметная область этой модели состоит из натуральных чисел от 0 до n . Рассмотрим шкалу $F = \langle W, R \rangle$, где $W = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, а R – отношение «больше» на $\mathbb{N}$, доопределенное на W следующим образом: $\omega R n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что в F

нет бесконечно возрастающих цепей, поэтому $F \in C$. Определим на F модель $M = \langle W, R, D, I \rangle$ следующим образом. Для всякого $w \in W$ положим $D(w) = \mathbb{N}$, а интерпретацию I зададим так, чтобы для всяких $m, n \in \mathbb{N}$ и $w \in W$ были выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} (M, w) \models m \approx n & \Leftrightarrow m = n; \\ (M, w) \models R[m, n] & \Leftrightarrow m < n; \\ (M, w) \models S[m, n] & \Leftrightarrow n = m + 1; \\ (M, w) \models Q[n] & \Leftrightarrow w = n, \end{aligned}$$

кроме того, предикатные буквы, входящие в φ , в мире ω на элементах $0, \dots, n$ проинтерпретируем точно так же, как они были проинтерпретированы в модели, опровергающей формулу φ . В остальном модель M произвольна. Не составляет труда проверить, что $(M, \omega) \models Eq \wedge A \wedge Ax(\varphi)$ и $(M, \omega) \not\models \varphi^*[n]$. Следовательно, $(M, \omega) \not\models f(\varphi)$, т.е. $f(\varphi) \notin \mathbf{QGL}^{sem}$.

Пусть теперь формула $Eq \wedge A \wedge Ax(\varphi) \rightarrow \forall x \varphi^*(x)$ опровергается в мире w некоторой модели $M = \langle W, R, D, I \rangle$, определенной на шкале класса C . Покажем, что в этом случае формула φ опровергается в некоторой классической модели с конечной предметной областью.

Так как в w справедливы формулы Eq и A , то в силу сформулированного выше предложения множество $D(w)$ разбивается с помощью $\approx$ на линейно упорядоченное с помощью G семейство классов эквивалентности, изоморфное множеству натуральных чисел с отношением «меньше». Выберем из каждого класса по одному элементу, получим последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ такую, что для всякого натурального числа k выполняется отношение $(M, w) \models S[a_k, a_{k+1}]$. Пусть P — m -местная предикатная буква, входящая в φ . Поскольку $(M, w) \models Ax(\varphi)$, то

$$(M, w) \models P[a_{i_1}, \dots, a_{i_m}] \leftrightarrow P[b_{i_1}, \dots, b_{i_m}],$$

где $(M, w) \models a_n \approx b_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$.

Поскольку в мире w модели M опровергается формула $\forall x \varphi^*(x)$, то $(M, w) \not\models \varphi^*[c]$ для некоторого $c \in D(w)$. Ясно, что $(M, w) \models c \approx a_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и что в этом случае $(M, w) \not\models \varphi^*[a_n]$. Пусть $U = \{a_0, \dots, a_n\}$ и пусть I_U — ограничение интерпретации I на область U . Пара $\langle U, I_U \rangle$ в этом случае является классической моделью безмодального фрагмента языка $\mathcal{ML}$. Индукцией по построению подформулы $\psi(y_1, \dots, y_k)$ формулы φ несложно доказать, что для любых $b_0, \dots, b_n$ таких, что для всякого $i \in \{0, \dots, n\}$ справедливо отношение $(M, w) \models a_i \approx b_i$, имеет место эквивалентность

$$(M, w) \models \psi^*[a_n, b_{i_1}, \dots, b_{i_k}] \Leftrightarrow \langle U, I_U \rangle \models \psi[a_{i_1}, \dots, a_{i_k}],$$

где $\psi^*(x)$ получается из ψ с помощью того же преобразования, с помощью которого $\varphi^*(x)$ получается из φ . В частности, получаем, что $\langle U, I_U \rangle \not\models \varphi$, а в силу конечности множества U заключаем, что $\varphi \notin \mathbf{QCI}_{fin}$. $\square$

Из предложения 2 теоремы Трахтенброта о неперечислимости логики $\mathbf{QCI}_{fin}$ вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Логика $\mathbf{QGL}^{sem}$ неперечислима.*

Если проанализировать доказательство предложения 2, то можно сделать вывод о том, что аналогичное утверждение будет справедливо, если вместо логики всего класса $\mathcal{C}$ рассматривать логику некоторого его подкласса $\mathcal{C}'$, содержащего хотя бы одну шкалу с бесконечно убывающей цепочкой миров, достижимой из некоторого мира, или шкалу со сколь угодно длинными конечными цепями миров, достижимыми из некоторого мира. То же касается и логик аналогично устроенных подклассов класса $\mathcal{C}^*$.

Зафиксируем произвольный класс $\mathcal{C}'$ такого вида. Обозначим через $L(\mathcal{C}')$ логику класса $\mathcal{C}'$, т.е. множество $\mathcal{ML}$ -формул, значимых во всех шкалах этого класса.

Замечание 1. *Логика $L(\mathcal{C}')$ неперечислима.*

Теперь обратимся к утверждению теоремы 1. Принимая во внимание тот факт, что логика $\mathbf{QCI}$ является перечислимой, заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Логики $\mathbf{QGL}^{sem}$, $\mathbf{QGLLin}^{sem}$, $\mathbf{QGrz}^{sem}$, $\mathbf{QS4.3Grz}^{sem}$ не сводятся рекурсивно к $\mathbf{QCI}$.*

Отметим, что справедливо также и следующее обобщение следствия 2.

Замечание 2. *Логика $L(\mathcal{C}')$ не сводится рекурсивно к $\mathbf{QCI}$.*

Рассмотрим модальные предикатные логики, которые являются предикатными вариантами логик $\mathbf{GL}$, $\mathbf{GLLin}$, $\mathbf{Grz}$, $\mathbf{S4.3Grz}$, но определяются не семантически, а аксиоматически. Введем следующее обозначение: для множеств $\mathcal{ML}$ -формул Σ_1 и Σ_2 через $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ обозначим наименьшее множество формул, содержащее $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ и замкнутое относительно правила *modus ponens*, правила подстановки, правила обобщения и правила Геделя. Будем считать, что язык логик $\mathbf{GL}$, $\mathbf{GLLin}$, $\mathbf{Grz}$, $\mathbf{S4.3Grz}$ является пропозициональным фрагментом языка $\mathcal{ML}$. Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{QGL} &= \mathbf{QCI} \oplus \mathbf{GL}; & \mathbf{QGLLin} &= \mathbf{QCI} \oplus \mathbf{GLLin}; \\ \mathbf{QGrz} &= \mathbf{QCI} \oplus \mathbf{Grz}; & \mathbf{QS4.3Grz} &= \mathbf{QCI} \oplus \mathbf{S4.3Grz}. \end{aligned}$$

Заметим, что если все теоремы логики **QGL** значимы в некоторой шкале Крипке F , то отношение достижимости в этой шкале иррефлексивно, транзитивно и удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, т.е. $F \in C$. С другой стороны, ясно, что если $F \in C$, то в F значимы все формулы логики **QGL**. Таким образом, класс шкал логики **QGL** совпадает с C . Рассуждая аналогичным образом, нетрудно понять, что класс шкал логики **QGLLin** совпадает со множеством всех линейных шкал класса C , класс шкал логики **QGrz** — с классом C^* , а класс шкал логики **QS4.3Grz** — со множеством всех линейных шкал класса C^* . Поскольку логики **QGL**, **QGLLin**, **QGrz**, **QS4.3Grz** перечислимы, то в силу сделанного наблюдения, касающегося классов шкал этих логик, а также в силу теоремы 1, получаем, что эти логики не полны по Крипке.

Следствие 3. *Логика **QGL**, **QGLLin**, **QGrz**, **QS4.3Grz** не полны по Крипке.*

Вообще говоря, справедливо и следующее, более общее, утверждение, касающееся неполноты по Крипке целых классов модальных предикатных логик.

Замечание 3. *Пусть рекурсивно аксиоматизируемая логика L такова, что $\mathbf{QGL} \subseteq L \subseteq \mathbf{QGLLin}$ или $\mathbf{QGrz} \subseteq L \subseteq \mathbf{QS4.3Grz}$. Тогда L не полна по Крипке.*

Неполнота по Крипке предикатного варианта логики Геделя–Леба ранее была доказана в [4], где подробно обсуждаются это и некоторые другие свойства логики **QGL**.

Отметим, что в некоторых случаях рассматривают шкалы Крипке с постоянными областями, т.е. при определении семантики Крипке ограничиваются такими моделями на шкалах, в которых индивидуальные области всех миров модели совпадают. В этом случае теорема 1 все равно останется справедливой — логики соответствующих классов шкал опять оказываются перечислимыми. Условие постоянства предметных областей описывается формулой $\mathbf{BF} = \forall x \Box P(x) \rightarrow \Box \forall x P(x)$: при фиксированной функции D эта формула справедлива в каждой модели Крипке $M = \langle W, R, D, I \rangle$, определенной на шкале $F = \langle W, R \rangle$, ровно в том случае, когда для всяких миров w_1 и w_2 таких, что $w_1 R w_2$, выполняется условие $D(w_1) = D(w_2)$. Принимая во внимание сказанное, можно, в частности, обосновать следующее утверждение: логики **QGL** $\oplus$ **BF**, **QGLLin** $\oplus$ **BF**, **QGrz** $\oplus$ **BF**, **QS4.3Grz** $\oplus$ **BF** не полны по Крипке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крипке С. Неразрешимость одноместного модального исчисления предикатов // Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 1974. С. 247–253.
2. Рыбаков М.Н., Чагров А.В. Стандартные переводы неклассических формул и относительная разрешимость логик // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М., 2000. Вып. XIV. С. 81–98.
3. Chagrov A., Zakharyashev M. Modal Logic. Oxford University Press, 1997.
4. Montagna F. The Predicate Modal Logic of Provability // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1984. Vol. 25. N 2. P. 179–189.
5. Urquhart A. The Undecidability of Entailment and Relevant Implication // The Journal of Symbolic Logic. 1984. Vol. 49. N 4. P. 1059–1073.
6. Wolter F., Zakharyashev M. Decidable Fragments of First-Order Modal Logics // The Journal of Symbolic Logic. To appear.

К ВОПРОСУ О ПРИРОДЕ ВРЕМЕНИ*

Abstract. *Kant's claim that time is the form of inner sense is well-known. The following question is discussed: what is (if is) the form of time?*

В известном кантовском смысле, время – одно из условий возможности (априорная форма) *опыта*. Но имеет ли смысл говорить об условиях возможности *времени*?

Предлагается некоторая аргументация в пользу положительного ответа на этот вопрос.

1. Объявленный вопрос невозможно должным образом конкретизировать и пояснить, если предварительно не указать некоторые исходные установки, в рамках которых предполагается вести дальнейшее обсуждение.

Согласно Дж. Уитроу, «сугубо фундаментальная по отношению к нам природа времени очевидна, как только мы осознаем, что наши суждения о времени и событиях во времени сами существуют ‘во’ времени, тогда как наши суждения о пространстве, по видимому, не относятся в каком-либо ясном смысле к месту в пространстве» [1, с. 11]. Эти слова подсказывают идею, что не следует путать две вещи – время *внешнее* и время *внутреннее*. Внутреннее время *осознаётся*, тогда как внешнее время – *течёт*, *длится*, или, лучше сказать, *оккупируется* тем или иным актом осознания. Если я сейчас осознаю, что я живу более 63 лет (внутреннее время), это совсем не значит, что само это осознание длится вот уже более 63 лет (внешнее время). Или, если мне понадобилась секунда (внешнее время), чтобы сообразить, какова сумма чисел 2 и 3, то это не значит, что соответствующее равенство $2 + 3 = 5$ само оккупировало эту секунду – оно вообще *вне* (внутреннего или внешнего) времени. Иными словами, внешнее время – это характеристика *всякого акта* осознания, тогда как внутреннее время – это всегда часть *подходящего* осознаваемого *содержания*. Следует также заметить, что применительно к времени разграничение *внешнее* – *внутреннее* не совпадает с разграничением *физическое*–*психологическое*.

Первая исходная установка состоит в том, чтобы впредь иметь дело *только* с внутренним временем, так как всё равно всякий

* Работа поддержана РГНФ.

осмысленный разговор о внешнем времени *автоматически* делает его (внешнее время) некоей разновидностью внутреннего.

Вторая исходная установка – считать, что всякое осознаваемое содержание, чем бы оно ни было, всегда можно представить в виде конечной модели конечной сигнатуры, т.е. в виде некоторой конечной совокупности предметов внимания и конечной совокупности осознаваемых связей между ними.

2. Говоря, что пространство и время – условия возможности опыта, Кант очевидным образом подразумевает, что ещё одно условие возможности опыта – это чувственность (способность ощущать). Во всём остальном терминология Канта здесь не вполне однозначна. Поэтому кантовское частное заявление, что время – одно из условий возможности опыта, можно уточнять по-разному. Вот одно из простейших (в рамках указанных исходных установок) возможных уточнений.

Пусть L – язык первого порядка (с равенством) в сигнатуре σ , содержащей один одноместный предикатный символ S и один двуместный предикатный символ P . Пусть m – класс всех моделей языка L . Для всякой модели $M \in m$ обозначим через U_M носитель M , через S_M – денотат в M для S , через P_M – денотат в M для P . Пусть k – подкласс класса m такой, что $k = \{K \mid K \in m, U_K$ – произвольное конечное множество объектов внимания, S_K – одноместное отношение на U_K , осознаваемое как «иметь хотя бы одно чувственно воспринимаемое качество», P_K – двуместное отношение на U_K , осознаваемое как «не более поздний, чем» $\}$. Класс k назовём классом *чувственно-темпоральных содержаний сознания в сигнатуре σ* .

Обозначим через $Th(k)$ и назовём *элементарной теорией* класса k множество всех предложений сигнатуры σ , выполнимых на k . Если для всякого множества A предложений языка L обозначать через $m(A)$ класс всех моделей этого множества, то, очевидно, $k \subset m(Th(k))$. Иными словами, класс чувственно-темпоральных содержаний сознания в сигнатуре σ не аксиоматизируем. Тем не менее, его элементарная теория является, разумеется, аксиоматической системой. Более того, интуитивно (интроспективно) выглядит оправданным предположить, что она – конечно аксиоматизируема, причём её аксиоматика – следующие три предложения:

- (1) $\forall xy (Sx \ \& \ Sy \rightarrow xPy \vee yPx)$;
- (2) $\forall xyz (xPy \ \& \ yPz \rightarrow xPz)$;
- (3) $\forall xy (xPy \rightarrow Sy)$.

Таким образом, предполагается, что $Th(k) = T$, где T – множество всех предложений (в сигнатуре σ), выводимых в первопорядковой логике из аксиом (1), (2), (3).

Первая аксиома говорит, что любые «чувственные» объекты внимания всегда темпорально сравнимы.

Вторая аксиома говорит, что темпоральное отношение «не более поздний, чем» всегда транзитивно¹.

Третья аксиома говорит, что для любых двух объектов внимания x и y в любом чувственно-темпоральном содержании, если объект внимания x находится в отношении «не более поздний, чем» с объектом y , то y – «чувственный» объект. Заметим, что благодаря этой аксиоме можно говорить о направленности времени (направленности P в рамках теории T)².

Теперь можно придать некоторый точный смысл кантовскому утверждению, что время – условие возможности опыта.

Пусть запись $T \vdash (p)$ ($\text{не } T \vdash (p)$) говорит, что предложение p языка L содержится (не содержится) в T , или, что эквивалентно, p выводимо (не выводимо) по правилам классической первопоряд-

¹ Читатель, вероятно, спросит, почему не указаны аксиомы, говорящие о рефлексивности и антисимметричности отношения «не более поздний, чем», и почему вместо аксиомы (3) не указана более сильная аксиома $\forall xy (xPy \rightarrow Sx \ \& \ Sy)$. Ответ прост: рефлексивность, антисимметричность и такая аксиома выполняются не всегда.

Рефлексивность не выполняется в том, например, случае, если в осознаваемом содержании находится такой объект внимания, как *истинность* (понимаемая платонистски) равенства $2+3 = 5$. Ибо утверждать, что эта истинность не более поздняя, чем она сама, значило бы утверждать бессмысленность: платонистская истинность вообще *вневременной* объект.

А если, скажем, в осознаваемом содержании находятся два таких объекта внимания, как вспышка (при включении ёлочной гирлянды) зелёной лампочки и вспышка рядом расположенной красной лампочки, то не выполняется антисимметричность. Эти два события происходят не позже друг друга, но, тем не менее, они – *различные* объекты внимания.

Иллюзия, что отношение «не более поздний, чем» является частичным или даже линейным *порядком*, вызывается безотчётной привычкой рассматривать это отношение только на таких идеализированных объектах внимания, как «мгновения».

Условие $\forall xy (xPy \rightarrow Sx \ \& \ Sy)$ не выполняется тогда, например, когда в осознаваемом содержании находятся такие специфические объекты внимания, как *я* и моя вчерашняя мигрень *b*. Ибо в том-то и состоит их специфика (на поверхностный взгляд, парадоксальная), что для них справедливо утверждение: $yPb \ \& \ \neg Sy \ \& \ Sb$, которое является контрпримером для этого условия.

² Пусть V – произвольная первопорядковая аксиоматическая система в языке, содержащем среди своих сигнатурных символов двуместный предикатный символ R . Говорят, что R *направлен в рамках* V , если V не остаётся неизменной при замене сразу во всех предложениях системы V каждого вхождения тройки символов xRy на вхождение тройки символов yRx , и наоборот.

ковой логики из аксиом (1), (2), (3). В начале раздела упомянуто, что Кант понятие опыта тесно увязывает с понятием чувственности. Учитывая это обстоятельство, условимся говорить, что *возможность опыта безусловна*, если и только если $T \vdash (\exists x Sx)$ или $T \vdash (\exists x \neg Sx)$.

Как легко видеть, на самом деле не $T \vdash (\exists x Sx)$ и не $T \vdash (\exists x \neg Sx)$. Стало быть, вывод: возможность опыта *не* безусловна. Что, по-видимому, не расходится с соответствующими текстами Канта.

Далее, всякое предложение q языка L назовём *условием возможности опыта*, если: не $T \vdash (\exists x Sx)$; не $T \vdash (\exists x \neg Sx)$; $T \vdash (\exists x Sx \rightarrow q)$; q не содержит символа S ; q не является ни тавтологией, ни противоречием. Кроме того, для всякого условия возможности опыта q мы говорим, что *оно* – *время*, если q содержит вхождения предикатного символа P , и эти вхождения существенны.

Основываясь на этих определениях, легко *доказать*, что предложение $\exists x y xPy$ – условие возможности опыта, и оно – время.

3. Если согласиться с тем, что приведённые рассуждения являются приемлемым уточнением кантовского направления мысли, то тогда в этом же русле находится следующая дуальная аргументация.

Условимся говорить, что *возможность времени безусловна*, если и только если $T \vdash (\exists x y xPy)$ или $T \vdash (\exists x y \neg xPy)$. Тогда очевидно, что возможность времени *не* безусловна.

Далее, всякое предложение q языка L будем называть *условием возможности времени* тогда, когда: возможность времени не безусловна; $T \vdash (\exists x y xPy \rightarrow q)$; q не содержит символа P ; q не является ни тавтологией, ни противоречием. Кроме того, для всякого условия возможности времени q мы говорим, что *оно* – *опыт*, если q содержит вхождения предикатного символа S , и эти вхождения существенны.

Основываясь на этих определениях, легко *доказать*, что предложение $\exists x Sx$ – условие возможности времени, и оно – опыт.

ЛИТЕРАТУРА

Уиттроу Дж. Естественная философия времени. М.: Прогресс, 1964.

ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЙ: ДВА ПОДХОДА

Abstract. *It is defines such the notion of the normalised standard inference from hypothesis that the deduction theorem in general form being relevant for every arbitrary calculus, including the empty one. This is reached without any change the notions of inference. The deduction theorem itself consist conditions of its adaptation.*

1. Логический вывод и теорема дедукции

В общем случае теорема дедукции – это метатеоретическое утверждение о формальной логической теории T , в соответствии с которым существование в T логического вывода формулы B из называемых гипотезами формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ (символически: $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$) означает, что в T существует (возможно, при некоторых ограничениях) также вывод $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$, где « $\rightarrow$ » фигурирующая в языке T импликация. Обычно теорема дедукции формулируется как утверждение о правомерности перехода от верного в теории утверждения вида $\Gamma, A \vdash B$ к верному в этой же теории утверждению $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Эта теорема без всяких ограничений имеет силу для исчислений классической логики и вообще для любых пропозициональных исчислений, в которых доказуемы два логических принципа: закон утверждения консеквента $A \rightarrow B \rightarrow A$ и так называемый закон самодистрибутивности импликации

$$(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C.$$

Причем в таких исчислениях теорема дедукции может применяться к утверждению $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$ снова и снова, вплоть до получения утверждения

$$\vdash A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow B.$$

В естественных рассуждениях теореме дедукции соответствует известный и часто применяемый способ обоснования истинности условных высказываний вида “Если A , то B ”. Такое высказывание считается истинным, когда удастся установить выводимость предложения B из предложения A и некоторой совокупности предложений Γ , истинность которых предполагается установленной. По существу здесь неявно используется переход от верного в некоторой не обязательно фиксированной теории $\Gamma, A \vdash B$, где Γ состоит

из утверждений, считающихся истинными, к $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ и далее к $A \rightarrow B$. Ясно поэтому, что логическая теория, описывающая тот или иной вид импликации (следования, условной связи), должна в том или ином смысле удовлетворять теореме дедукции.

Для неклассических, например, для релевантных исчислений, в которых закон утверждения консеквента не принимается, нахождение подходящей формулировки теоремы дедукции является уже определенной проблемой.

Известно, что многие утверждения о выводимостях могут быть сформулированы (и доказаны) без ссылок на фиксированную логику. Для этого достаточно опираться лишь на само определение вывода. Вместе с тем такое определение может быть различным. От этого, естественно, будут различными и классы приемлемых утверждений о выводимости вида $\Gamma \vdash B$, а также классы правил, позволяющих переход от одних утверждений такого типа к другим. К последним относится и теорема дедукции, позволяющая переход от $\Gamma, A \vdash B$ к $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Если, скажем, определение вывода запрещает фиктивное использование гипотез, делая неправомерным переход от $\Gamma \vdash B$ к $\Gamma, A \vdash B$, то в число приемлемых утверждений о выводимости, получаемых с помощью теоремы дедукции, не попадут (при еще некоторых очевидных ограничениях) такие характеризуемые обычно как парадоксальные утверждения, как:

$$\vdash A \rightarrow .B \rightarrow A \text{ и } \vdash A \rightarrow .\neg A \rightarrow B.$$

Определение вывода и принимаемая формулировка теоремы дедукции (а формулировки последней также могут быть различными при одинаковом определении вывода) задают различные классы утверждений о выводимости. В этой ситуации теорема дедукции, сохраняя название, выступает в качестве не обычной метатеоремы исчисления, фиксирующей, что при существовании вывода $\Gamma, A \vdash B$ в исчислении может быть построен вывод $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, но в качестве правила построения вывода, разрешающего переходить от первого из указанных выводов ко второму. Поэтому правильнее было бы в этих случаях говорить не о теореме, а о принципе дедукции. С другой стороны, употребляемое название сразу делает ясным, о чем идет речь, а контекст показывает, имеем ли мы дело с теоремой или же с правилом.

2. Два подхода к адаптации теоремы дедукции к конкретным исчислениям

Пусть при некотором определении вывода из гипотез для абстрактной логической теории T оказывается, что в этой теории имеет

силу $\Gamma, A \vdash B$, но не является верным $\Gamma \vdash A \rightarrow B$. Иными словами, теорема дедукции впрямую без некоторых дополнительных условий, ограничений и оговорок силы не имеет. Имеются два принципиальных пути, на которых можно достичь условия, при котором $\Gamma, A \vdash B$ гарантирует верность $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Грубо говоря, один наиболее часто используемых путей состоит в том, чтобы так изменить понятие вывода в T , чтобы $\Gamma, A \vdash B$ оказывалось в T верным только при гарантированной верности в T утверждения $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Другой путь связан с изменением условий применимости теоремы дедукции. В этом втором случае для верности теоремы дедукции нужна не только справедливость в T утверждения $\Gamma, A \vdash B$, но и выполнение при выводе B из Γ и A некоторых дополнительных условий, например, зависимости B от A .

Этот подход находит свое идеологическое и содержательное обоснование в том, что существует некоторое независимое от логической теории и используемое в практике повседневных рассуждений понимание вывода из гипотез, которое разрешает использовать гипотезы, их конъюнкции и правило *MP* для получения выводов, опираясь или даже не опираясь на какие-либо дополнительные логические средства. Это понимание вывода эксплицируется приводимым ниже определением вывода, которое мы называем стандартным.

Другое обоснование связано с тем, что изменения в понятии вывода, связанные с потребностью сформулировать теорему дедукции для той или иной неклассической системы, а такие изменения всегда направлены в сторону ограничений на стандартный вывод, не должны сужать класса тех следствий из гипотез, которые могут быть получены в рамках той же системы в соответствии со стандартным пониманием вывода.

Аргументировать такую позицию довольно просто. Уже в рамках пустой теории стандартное определение вывода дает возможность получать широкий класс следствий из гипотез. Ясно, что было бы странно, вооружившись некоторой логической теорией, получать после этого следствий меньше, чем это можно делать в ее отсутствии. Кроме того, теорема дедукции по самому своему смыслу позволяет получать только те утверждения о выводимости, которые могут быть получены и без нее. Непонятно зачем нужно было бы использовать такую теорему, если для ее формулировки пришлось бы сократить класс приемлемых до этого утверждений о выводимости.

D1. *Стандартным логическим выводом* высказывания (формулы) B из гипотез $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ ($n \geq 0$) в теории (исчислении) T

называется конечная последовательность высказываний (формул) $B_1, \dots, B_m$, ($m \geq 1$) такая, что последний член последовательности B_m совпадает с B , и для всякого B_i ($1 \leq i \leq m$) выполняется одно из следующих условий: (а) B_i есть одна из посылок из Γ ; или (б) B_i есть теорема теории (исчисления) T ; или (в) B_i получается из двух предшествующих членов последовательности по правилу MP (*modus ponens*); или (г) B_i представляет собой конъюнкцию двух предшествующих членов последовательности (по правилу адъюнкции: RA).

Сделанная в определении ссылка не на аксиомы, а на теоремы теории позволяет ограничиться только двумя правилами вывода – MP и правилом адъюнкции, не используя, в частности, правила подстановки и вообще никаких правил вывода от посылок Δ к C , для которых в теории не имеет силы $\Delta \rightarrow C$. Это позволяет нам не заботиться о том, какого рода могут быть сделаны расширения пропозициональных исчислений, для которых определяется вывод и формулируется теорема дедукции.

3. Нормализованный вывод

Под нормализованным выводом, строгое определение которого дается ниже, будем понимать вывод B из Γ , обеспечивающий тот же класс следствий из Γ , что и стандартный вывод, но запрещающий фиктивное использование гипотез и удовлетворяющий некоторым ограничениям на применение правила MP , которое определяется как нормализованное.

D2. Будем говорить, что *использование правила MP* в последовательности вывода $B_1, \dots, B_m$ формулы B из гипотез Γ в теории T является *нормализованным*, если и только если для каждого члена последовательности B_i ($i \leq m$), полученного из двух предшествующих членов последовательности B_k и B_l по правилу MP , выполнены следующие условия:

- (а) если B_k – большая посылка MP , т.е. имеет вид $B_l \rightarrow B_i$, то она предшествует в последовательности вывода меньшей посылке B_l ;
- (б) между членами последовательности вывода B_l и B_i (т.е. между меньшей посылкой и заключением MP) не находится никакой другой член последовательности B_k ($1 \leq k \leq i$), если только B_k не получается по MP с той же малой посылкой B_l ;
- (с) меньшая посылка B_l не зависит ни от какой из гипотез, которая предшествует большей посылке $B_l \rightarrow B_i$.

Вся суть ограничений заключается, конечно, в условии (а), требующем упорядоченности посылок MP . Нарушение требования (а) без нарушения (с) возможно только в случае, когда предшест-

вующая большей меньшей посылка является теоремой. Условие (b) вводится, чтобы блокировать возможность обойти некоторым образом смысл требования (a), выполнив его чисто формально.

Как это может быть сделано, мы можем увидеть из следующих примеров:

№ 1

1. $A \rightarrow A$ (теор.)
2. A (гипот.)
3. $A \rightarrow B$ (гипот.)
4. A (1, 2, MP)
5. B (3, 4, MP)

№ 2

1. $A \rightarrow C$ (гипот.)
2. A (гипот.)
3. $C \rightarrow C \vee B$ (теор.)
4. C (1, 2, MP)
5. $C \vee B$ (3, 4, MP)

Использование MP в обоих приведенных выводах, хотя оно и удовлетворяет условию (a), не является нормализованным. И в том, и в другом случаях шаг (4) после шага (3) приводит к нарушению (b). Оба этих вывода нарушают, очевидно, и (c). На (5) шагу MP применено к посылкам, только меньшая из которых зависит от гипотез, предшествующих большей посылке. Условие (b) может быть нарушено и без нарушения (c). Таким нарушением будет, в частности, запись сначала одной пары посылок MP , потом другой независимой от них, а затем запись результатов применения MP к той и другой. Не является нарушением (b) включение между меньшей посылкой и заключением результата MP при той же меньшей посылке. Большие посылки могут быть различными, но возможна и одна и та же большая посылка, так что повторение одного следствия применения MP возможно. Другое дело, что оба повторяющихся члена должны быть в дальнейшем использованы в выводе. Таким образом, не нарушающим требование (b) будут, например, следующие выводы:

№ 3

1. $A \rightarrow A$ (теор.)
2. $A \rightarrow B$ (гипот.)
3. A (гипот.)
4. A (1, 2, MP)
5. B (3, 4, MP)
6. AB (4, 5, RA)

№ 4

1. $CC \rightarrow B$ (гипот.)
2. $A \rightarrow C$ (гипот.)
3. A (гипот.)
4. C (1, 2, MP)
5. C (1, 2, MP)
6. CC (3, 4, RA)
7. B (1, 6, MP)

Примеры выводов, которые удовлетворяют условию (b), но не (c).

№ 5

1. $C \rightarrow A \rightarrow B$ (зупом.)
2. $C \rightarrow A$ (зупом.)
3. C (зупом.)
4. $A \rightarrow B$ (1, 3, MP)
5. A (2, 3, MP)
6. B (4, 5, MP)

№ 6

1. $A \rightarrow B \rightarrow A$ (зупом.)
2. $A \rightarrow B$ (зупом.)
3. A (1, 2, MP)
4. B (2, 3, MP)

Вывод № 5 нарушает требование (с), так как шаг (6) делается, когда малая посылка A (5) зависит от гипотез, предшествующих большей посылке $A \rightarrow B$ (4).

Вывод №6 также не удовлетворяет условию (с), так как малая посылка MP (шаг (3)) зависит от шага (1), предшествующего большей посылке.

Нам потребуется еще одно предварительное определение.

D3. Будем говорить, что член B_i последовательности вывода $B_1, \dots, B_m$ зависит от члена последовательности B_k исключительно в случаях: (1) B_i совпадает с B_k , т.е. каждый член последовательности зависит от себя самого, или (2) B_k является одним из членов последовательности, из которых B_i получено по одному из правил вывода, или (3) B_i зависит от B_j , и B_j зависит от B_k (отношение зависимости *транзитивно*).

Установить, от каких членов последовательности $B_1, \dots, B_m$ зависит тот или иной ее член B_i , очевидно можно в результате следующей простой процедуры. Сначала отмечаются те шаги вывода, на основании которых B_i получено непосредственно. Если таковые имеются (а они могут отсутствовать, когда B_i включено в последовательность как теорема или посылка и зависит только от себя самого), то отмечаются последовательно, пока процедура не закончится, шаги, на основании которых получены уже отмеченные члены последовательности. B_i зависит только от тех членов последовательности, которые окажутся отмеченными.

Введем центральное для всех дальнейших рассуждений понятие *нормализованного вывода*.

D4. Нормализованным логическим выводом высказывания (формулы) B из посылок (гипотез) $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ ($n \geq 0$) в теории (исчислении) T называется конечная последовательность высказываний (формул) $B_1, \dots, B_m$, ($m \geq 1$), которая является *стандартным* выводом $\Gamma \vdash B$ в силу D1 и удовлетворяет следующим двум условиям:

(1) Правило *MP* (*modus ponens*) используется только в *нормализованном* виде (определение D2).

(2) Формула B_m *зависит* от каждого члена последовательности $B_1, \dots, B_m$ (определение D3).

Определение D4 несмотря на его отличия от D1 не изменяет класса следствий, получаемых из тех же гипотез. Условие (2) не может ограничить числа следствий, которые можно получать в соответствии с D1, так как запрещает лишь явное включение в последовательность тех формул, без которых при получении следствий можно обойтись. Не ограничивает класса возможных следствий и условие (1). Действительно, пусть мы имеем вывод в смысле D1. И пусть последовательность вывода имеет вид $B_1, \dots, B_m$. Допустим, что в выводе имеет место ненормализованное использование *MP*. Посылки, к которым было применено правило, обозначим как $B_l \rightarrow B_i$ и B_l . Соответственно, заключением будет B_i .

Начнем с требования нормализованности *MP*, которое обозначено как (b). Обратимся, если таковые имеются, к первому в выводе нарушению (b). При таком нарушении между меньшей посылкой B_l и заключением B_i стоят одна или несколько формул последовательности $B_{k1}, \dots, B_{km}$, каждая из которых получена на иных основаниях, чем применение *MP*, меньшей посылкой которого является B_l . Нормализованность применения *MP* относительно (b) достигается за счет перестановки всех перечисленных формул $B_{k1}, \dots, B_{km}$ в том же порядке сразу вслед за B_l . После этого осуществляются необходимые изменения в анализе (в нумерации шагов вывода, в записи оснований для каждого шага). После этих преобразований последовательность останется выводом в смысле D1.

После устранения в выводе всех нарушений условия (b) переходим к требованию (a). Если (a) нарушено без нарушения (c), то меньшая посылка B_l представляет собой в этом случае теорему. Чтобы устранить ненормализованность, надо поставить эту же теорему после большей посылки $B_l \rightarrow B_i$ перед заключением B_i . Шаг B_l , если он теперь не нужен в выводе, устранить. Осуществить необходимые изменения в анализе.

Теперь рассматриваем нарушения, связанные с требованием (c). Если такие нарушения есть, обратимся к первому из них. Пусть B_l зависит от некоторой гипотезы (или гипотез), которые предшествуют $B_l \rightarrow B_i$.

Выпишем все те члены последовательности, от которых зависит B_l , в порядке их вхождения, кончая самой малой посылкой B_l . Получившийся в результате такой процедуры список формул включим в старую последовательность на место малой посылки,

если она была ниже большей, и включим сразу после большей в противном случае¹. В преобразованной последовательности удалим те повторяющиеся члены, устранение которых не влечет нарушения нормализации, и осуществим необходимые изменения в анализе. Поступим аналогичным образом со всеми другими нарушающими (с) ненормализованными применениями *MP*. В результате получим нормализованный вывод с теми же гипотезами и заключением, что и исходный вывод.

Указав процедуру нормализации выводов, мы фактически доказали следующую универсальную для любого исчисления метатеорему:

MT1. В любой теории *T* классы следствий из данных гипотез, получаемые в силу D1, а также в силу D4, в точности совпадают.

Это удовлетворяющее MT1 требование формулировалось как условие определения нормализованного логического вывода. Различие между D1 и D4 состоит в том, что не всякая конечная последовательность $B_1, \dots, B_m$, которая является выводом *B* из *Γ* в смысле D1, является нормализованным выводом *B* из *Γ* в смысле D4. При этом всякий нормализованный вывод является выводом в соответствии с D1, и всякий вывод *B* из *Γ* в смысле D1 может быть нормализован.

D5. Пусть последовательность $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы *B* из гипотез *Γ* в некоторой теории *T*. И пусть $A_1, \dots, A_n$ есть все те члены последовательности, не обязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве гипотез из числа *Γ*. И, наконец, пусть Γ_o – список тех посылок из *Γ*, которые не использовались в выводе вообще. Мы имеем, таким образом, два списка посылок Γ_o и $A_1, \dots, A_n$, которые в своей совокупности исчерпывают весь список *Γ* и где Γ_o может быть пустым. Выражение $\Gamma_o, \downarrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ будем называть *нормализованной записью* утверждения $\Gamma \vdash B$ для нормализованного вывода *B* из *Γ*, имеющего вид $B_1, \dots, B_m$. Запись $\downarrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ указывает на то, что существует нормализованный вывод такой, что все обозначенные гипотезы входят в последовательность этого нормализованного вывода. Наконец, обычная запись (без стрелки) $A_1, \dots, A_n \vdash B$ говорит только о том, что из указанных посылок можно вывести *B*, но она не утверждает, что запись вывода нормализована.

Заметим, что число различных нормализованных выводов *B* из гипотез *Γ* в теории *T* может быть достаточно большим. Вместе с

¹ Сама малая посылка B_i в этом случае остается пока на месте. Можно ли будет ее вычеркнуть, зависит от того, не повлечет ли такое вычеркивание несоответствий с определением нормализованного вывода и вывода вообще.

тем каждому нормализованному выводу соответствует всегда только одна (с точностью до порядка посылок в Γ_o) нормализованная запись этого вывода.

Принятое определение нормализованного вывода и ниже сформулированная на его основе теорема дедукции изначально релятивизированы относительно исчислений. В том смысле, что при одинаковых по форме формулировках они имеют различный смысл в зависимости от того, каким является исчисление, фигурирующее в определениях как некая абстрактная теория T .

Д6. Будем называть далее DT -теориями такие замкнутые относительно правила MP и правила подстановки логические системы, где имеют силу четыре следующих принципа:

- (1) $A \rightarrow A$ (закон рефлексивности)
- (2) $A \rightarrow B \rightarrow .C \rightarrow A \rightarrow .C \rightarrow B$ (закон слабой транзитивности)
- (3) $(A \rightarrow B) \rightarrow B$, где A – теорема T (принцип утверждения следствия теоремы).
- (4) $AB \rightarrow C \rightarrow .A \rightarrow .B \rightarrow C$ (закон экспортации).

Имеет силу следующая теорема:

MT2. (Теорема дедукции для DT -теорий). Если последовательность $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой DT -теории T , и $\{\Gamma_o\}, \downarrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения $\Gamma \vdash B$, то в T имеет силу всякое утверждение:

$$\{\Gamma_o\}, \downarrow A_1, \dots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow \dots \rightarrow .A_n \rightarrow B \quad (1 \leq i \leq n).$$

Я опускаю здесь доказательства теорем. Аналогичного рода теоремы доказаны в [1], и их доказательства легко могут быть адаптированы для теорем, здесь приводимых.

4. Формулировки теоремы дедукции для исчислений, не являющихся DT -теориями

Четыре определяющих DT -теории принципа выбраны, естественно, не случайно. Трем первым в любой теории, включая пустую, соответствуют верные по $D4$ утверждения вида: $\downarrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ такие, что применение к ним теоремы (принципа) дедукции позволило бы эти самые принципы получить. Четвертый принцип можно доказать в любой теории, где действуют законы удаления конъюнкции $AB \rightarrow A$ и $AB \rightarrow B$.

Если перед нами стоит теперь задача отыскать подходящую формулировку теоремы дедукции для теории, в которой нет

одного из принципов (1)–(4), у нас всегда есть в распоряжении две возможности.

Можно поступить так, как мы сделаем это ниже, и просто запретить применение теоремы дедукции к гипотезе, после появления которой в выводе использовалось правило адъюнкции.

Но можно запретить использовать в выводе правило адъюнкции к формулам, зависимым от гипотез. Тогда в формулировке теоремы дедукции введение соответствующего ограничения лишается смысла, ибо выводов, под него подпадающих, просто не окажется. Таким образом, первый, т.е. принятый здесь подход, легко трансформировать для каждой логической системы во второй.

В рамках конкретных примеров сказанное можно проиллюстрировать следующим образом. При первом подходе в любой релевантной системе, где не имеет силы закон экспортации, мы при верности $A, B \vdash AB$ не можем в силу оговоренного ограничения получить $\downarrow A, B \vdash AB$, но только $A, B \downarrow \vdash AB$. Иначе говоря, можем вывести из гипотез их конъюнкцию, но не можем воспользоваться теоремой дедукции, так как указанную конъюнкцию нельзя получить без использования правила адъюнкции, что блокирует обе гипотезы для дедукции.

При втором подходе мы вынуждены будем признать неверным уже сам вывод $A, B \vdash AB$. Если же мы не принимаем вообще никакой фиксированной логики, имея, так сказать, пустую теорию или теорию, в которой есть только правило *MP*, то в ней при этом втором подходе, будучи последовательным, нельзя было бы считать верным ни $A \rightarrow B, A \vdash B$, ни даже $A \vdash A$. Что выглядело бы довольно-таки странным. Таким образом, уверенность в преимуществе первого подхода, исключающего изменение класса следствий, не кажется безосновательной.

Неприменимость теоремы (принципа) дедукции к утверждению $\Gamma, A \vdash B$ не должна быть аргументом против принятия этого утверждения как верного, так как такая неприменимость может быть следствием определенной трактовки импликации. Вполне возможно, что $\Gamma, A \vdash B$ не позволяет считать верным $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ для необходимой релевантной импликации, но позволяет считать таковым как $\Gamma \vdash A \supset B$, так даже и $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ для обычной условной связки. Ясно, что все три эти импликации могут фигурировать в языке одной теории, так что $\Gamma, A \vdash B$ во всех случаях пришлось бы считать верным несмотря на то, что теорема дедукции имеет силу только для одной из этих импликаций.

Вместе с тем подход, при котором меняется класс верных утверждений о выводимостях, по-видимому, может оказаться плодотворным, когда на базе теоремы дедукции и вводимого опреде-

ления вывода задаются смысл и взаимоотношения логических связок, кванторов, модальностей и т.п. некоторого нового языка. Возможно, это укажет на некоторые основания и перспективы для построения формализующей этот новый язык теории [3].

Мы показали как можно переформулировать теорему дедукции для систем, в которых не имеет силы один из четырех характеристических для *DT-теорий* принципов (1)–(4), а именно закон экспортации. Заметим вместе с тем, что запрет применять принцип дедукции к гипотезе, после появления которой в последовательности нормализованного вывода использовалось правило адъюнкции, не делает теорему дедукции неверной для исчислений, где закон экспортации доказуем. Дело в том, что именно он (этот закон), будучи включен в последовательность вывода, и позволяет в этом случае обойтись без использования правила адъюнкции.

Продemonстрируем теперь, как можно сформулировать теорему дедукции для исчислений, в которых выделенные нами принципы присутствуют или же отсутствуют в любых сочетаниях. Наша теорема дедукции будет, таким образом, верной для любого произвольно избранного исчисления от пустого до тривиального.

Пусть последовательность $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод в смысле *D4* формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T . Будем говорить, что формула последовательности, находящаяся на шаге B_i и являющаяся гипотезой, *блокирована для дедукции*, если и только если имеет место по крайней мере одно из следующих *блокирующих условий*:

(bl1) B_i является первой по счету гипотезой, входящей в последовательность, и не использована в выводе в качестве меньшей посылки;

(bl2) после шага B_i в выводе к зависящим от гипотез формулам было применено правило адъюнкции *RA*;

(bl3) после шага B_i имеет место заключение по *MP* при том, что в качестве малой посылки выступает теорема теории, а в качестве большей – зависящая от гипотез формула;

(bl4) после шага B_i имеет место заключение по *MP*, в качестве малой посылки которого выступает зависящая от гипотез формула A , а большей посылкой служит член последовательности, предшествующий всем тем гипотезам, от которых зависит A .

Пусть последовательность $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T . Выделим в этой последовательности шаг B_k , на котором находится гипотеза с наименьшим индексом, которая не блокирована для дедукции. Пусть теперь $A_1, \dots, A_n$ есть все те члены последовательности, не

обязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве гипотез, начиная с шага B_k включительно.

Пусть далее Γ_b – список всех тех (блокированных) гипотез из Γ , которые были использованы в выводе до шага B_k . И, наконец, пусть Γ_o – список тех посылок из Γ , которые не использовались в выводе вообще.

Мы имеем, таким образом, три списка гипотез Γ_b, Γ_o и $A_1, \dots, A_n$, которые в своей совокупности исчерпывают весь список Γ и каждый из которых в конкретном случае может быть пустым.

Выражение $\{\Gamma_o\}, \Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ будем называть *нормализованной записью* утверждения $\Gamma \vdash B$ для нормализованного вывода B из Γ , имеющего вид $B_1, \dots, B_m$. Список Γ_o будем опускать. Запись $\downarrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ в отличие от записи $\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ говорит о пустоте Γ_b и, значит, о том, что ни одна из посылок не блокирована для вывода. В свою очередь, запись $\Gamma_b, \uparrow \vdash B$ говорит, что все использованные в выводе гипотезы (при данном построении вывода) блокированы для дедукции. Наконец, обычные записи $\Gamma_b, A_1, \dots, A_n \vdash B$ и $A_1, \dots, A_n \vdash B$ говорят о том, что из указанных гипотез можно вывести B , но не утверждается, что запись вывода нормализована.

Заметим еще раз, что число различных нормализованных выводов B из гипотез Γ в теории T может быть достаточно большим. Иными словами, одно и то же заключение из данных гипотез может быть получено различными путями. Вместе с тем каждому нормализованному выводу соответствует всегда только одна (с точностью до порядка посылок в Γ_b и Γ_o) нормализованная запись.

Теорема дедукции выглядит следующим образом:

МТЗ. (*Универсальная теорема дедукции*²). Если последовательность $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T , и $\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_n \vdash B$ ($n \geq 1$) есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения $\Gamma \vdash B$, то в T имеет силу утверждение:

² Стоит во избежание недоразумений повторить, что речь идет об исчислениях, замкнутых относительно *МР*. Универсальность обеспечивается в определенной мере тем, что в D1 и в D2 фигурируют ссылки на теоремы T , а не на аксиомы, так как в последнем случае, ограничиваясь в выводе указанными правилами, мы утратили бы возможность говорить об исчислениях, в которых исходными правилами вывода являются какие-нибудь отличные от стандартных. Мы можем, например, представить себе исчисление с правилом вывода, разрешающим переход от $A \rightarrow B$ к $C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$ при отсутствии в исчислении самого принципа транзитивности $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$. Нам нет необходимости включать ссылки на такого рода правила в определение вывода, так как мы всегда можем использовать сразу нужную теорему.

$$\Gamma_b, \uparrow A_1, \dots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B \quad (1 \leq i \leq n).$$

Рассмотрим некоторые характерные особенности *MT3*. В частности, какова роль принятых нами блокирующих ограничений.

Первое блокирующее ограничение, по существу, имеет смысл только для тех теорий, в которых отсутствует закон рефлексивности. В этом случае вывод, состоящий из одного шага

$$1. B \text{ (гипот)}$$

не дает возможности воспользоваться теоремой дедукции. Если же в *T* верно $\vdash B \rightarrow B$, то такую возможность открывает вывод:

$$1. B \rightarrow B \text{ (теорема)} \quad 2. B \text{ (гипот.)} \quad 3. B \text{ (1, 2, MP).}$$

Ясно поэтому, что в случае пустоты теории утверждение вида

$$\uparrow A_1 \vdash A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$$

является заведомо неверным. В пустой теории могут быть верными исключительно выражения вида:

$$A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B, \uparrow A_1, \dots, A_n \vdash B$$

и те, которые получаются из них по теореме дедукции вплоть до утверждения

$$A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B \vdash A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B.$$

Так что можно было бы сказать, что в пустой теории первая в выводе посылка всегда блокирована для вывода. Отказ от блокирующего условия (bl1) делает теорему дедукции верной только для тех теорий, которые содержат принцип рефлексивности. Наличие последнего, естественно, не исключает, что первая в последовательности вывода гипотеза может быть блокирована по иным основаниям.

Блокирующее ограничение (bl2), связанное с правилом адъюнкции *RA*, уже было нами рассмотрено. Оно запрещало применять теорему дедукции к гипотезам нормализованного вывода, если после их появления в последовательности вывода использовалось *RA*. Надо сказать, что именно такое запрещение, связанное, как это ясно, с ориентацией на релевантную логику, где не имеет силы закон экспортации, позволяющий переходить от $AB \rightarrow C$ к $A \rightarrow B \rightarrow C$, привело к идее блокирующих ограничений вообще.

Обратимся к блокирующему ограничению (bl3). Оно исключает применение принципа дедукции к гипотезе вида $A_T \rightarrow C$, где *A* теорема теории, в которой осуществляется вывод, если *C* появляется в выводе на основании этой гипотезы в качестве большей посылки *MP*. Таким образом, в теории, в которой для теоремы A_T

не имеет силы принцип $(A_T \rightarrow C) \rightarrow C$, не будет верным утверждение:

$$\uparrow(A_T \rightarrow C) \vdash C.$$

В теории, в которой $(A_T \rightarrow C) \rightarrow C$ есть теорема, ограничение (3) силы не имеет, так как его можно обойти, получая C за счет использования этой теоремы и посылки $(A_T \rightarrow C)$. Таким образом, при отказе от ограничения (bl3) теорема дедукции верна для всех тех теорий, где верна указанная теорема.

Блокирующее ограничение (bl4) имеет смысл для теорий, в которых нет слабого принципа транзитивности:

$$A \rightarrow B \rightarrow . C \rightarrow A \rightarrow . C \rightarrow B.$$

Обратимся к выводу:

- | | |
|-------------------------------|----------------------|
| 1. $A \rightarrow B$ (гипот.) | 4. A (2, 3, MP) |
| 2. $C \rightarrow A$ (гипот.) | 5. B (1, 4, MP) |
| 3. C (гипот.) | |

Нормализованной записью этого вывода будет:

$$A \rightarrow B, C \rightarrow A, C \uparrow \vdash B.$$

Мы не можем поставить стрелку " $\uparrow$ " ни перед одной из гипотез, так как уже последняя из них C в силу (bl4) блокирована для дедукции, поскольку в выводе после нее стоит формула A , являющаяся малой посылкой MP , а большей его посылкой является формула $A \rightarrow B$, которая предшествует гипотезам $C \rightarrow A$ и C , от которых только и зависит малая посылка. То же самое происходит и в том случае, когда на месте шага (1) стоит некоторая теорема теории. Пусть, например, B имеет вид $A \vee B$, и $A \rightarrow A \vee B$ есть теорема. Тогда нормализованной записью вывода будет:

$C \rightarrow A, C \vdash A \vee B$, и утверждение $\uparrow C \rightarrow A, C \vdash A \vee B$ по-прежнему будет неверным.

Ограничение (bl4), таким образом блокирует возможность преобразовать утверждение вида $\Gamma, \downarrow A \vdash B$ в утверждение $\Gamma, \downarrow C \rightarrow A, C \vdash B$, если в теории нет указанного закона транзитивности. В более общем смысле (bl4) делает невозможным переход от $\Gamma, A \vdash B$ и $\Delta \vdash A$ к $\Gamma, \Delta \vdash B$. Иначе говоря, это ограничение не позволяет включать в последовательность вывода вместо гипотезы некоторый самостоятельный ее вывод.

Совокупность ограничений, блокирующих применение принципа дедукции, приводит к тому, что МТЗ, в отличие от МТ2, сформулированной для DT -теорий, становится универсальной теоремой дедукции, так как позволяет в результате ее применения получать только те утверждения вида $\vdash B$, которым соответствуют теоремы той теории, в которой осуществляется вывод. В пустой

теории список таких утверждений будет пуст. Напомним, что в пустой теории всегда будет верным всякое утверждение вида (и только такого вида):

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B, \uparrow A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B \ (n \geq 0).$$

MT4. (*Теорема адекватности*). Утверждение $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ верно во всякой теории T , если и только если существует нормализованная последовательность G вывода B из посылок Γ и A , которой соответствует нормализованное утверждение $\Gamma, \uparrow A \vdash B$.

5. Постановка проблемы

Заслуживает внимания вопрос о классах разбиений универсума пропозициональных исчислений и, следовательно, о некоторого рода их классификации в зависимости от принимаемой формулировки теоремы дедукции. Из вышеизложенного видно, что при нормализованном выводе и названных условиях, блокирующих теорему дедукции, число таких классов будет заведомо конечным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоренко Е.А. Универсальная теорема дедукции // Логические исследования. Вып. 7. М.: Наука, 2000.
2. Смирнов В.А. Формальный вывод и логические исчисления // М.: Наука, 1972.
3. Buchsbaum A., Pequeno T. A general treatment for the deduction theorem in open calculi // Logique et Analyse, 157, 1997.
4. Сидоренко Е.А. Релевантная логика (предпосылки, исчисления, семантика) // М.: ИФ РАН, 2000.

Д.П.Скворцов

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ДЛЯ СЕМАНТИКИ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОГО ФРАГМЕНТА ОДНОЙ СИСТЕМЫ АККЕРМАНА¹

Abstract. *W. Ackermann [1,2] constructed a logical system with unrestricted comprehension principle. Here the propositional fragment of this logical system is considered. This logic is a weakening of the classical logic based on an informal interpretation of the implication as derivability in an unspecified deductive system. A Kripke-style semantics for this propositional logic is proposed and completeness theorem is proved.*

В.Аккерман [1, 2] построил непротиворечивую логическую систему с неограниченным принципом свертывания (то есть со схемой аксиом $y \in \hat{x} \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)$, где $\varphi(x)$ – произвольная формула, а $\hat{x} \varphi(x)$ – соответствующий ей терм-“абстракт”). Она базируется на определенном ослаблении классической логики, устраняющем известные теоретико-множественные парадоксы. При этом основная специфика аксиом из [1] проявляется уже на уровне пропозиционального фрагмента системы – поэтому именно его рассмотрением (в форме, равносильной исчислению A'' из [3]) мы здесь и ограничимся. Аккерман в [1] поясняет выбор своих аксиом некоторыми интуитивными соображениями, основанными на понимании импликации ($\varphi \rightarrow \psi$) как выводимости ψ из φ в некоторой до конца не уточняемой формальной системе. При этом решающим является принципиальное различие формулы φ (понимаемой как “истинность” φ) и $\Delta\varphi = (T \rightarrow \varphi)$, понимаемой как “доказуемость” φ (то есть выводимость из “истины” T). Однако, поскольку мотивация в [1] ограничена уровнем “наводящих соображений”, возможен вопрос, нельзя ли добавить какие-то новые аксиомы, не нарушая приемлемости с той же эвристической точки зрения.

Не претендуя на то, чтобы ответить здесь на этот вопрос (связанный с возможной трактовкой философских идей и соображений, лежащих в основе построенной Аккерманом системы), предложим некоторую семантику для рассматриваемого пропозиционального фрагмента и установим теорему о полноте. Эта семан-

¹ Эта статья была написана почти 20 лет назад, но в силу стечения обстоятельств осталась неопубликованной. Возможно, сейчас публикация ее уместна хотя бы из исторических соображений: как раз исполнилось 50 лет логической системе Аккермана [1,2], которой она посвящена.

тика была приведена в короткой заметке [5], где указана также возможная ее содержательная интерпретация (в стиле Крипке [4]). Тем не менее, чтобы не отсылать читателя к давней и, видимо, труднодоступной публикации, повторим здесь эту мотивировку обсуждаемой семантики. Кроме того, в ходе доказательства полноты будет также построен некоторый секвенциальный вариант (без сечения) рассматриваемой пропозициональной системы.

Отметим, что предлагаемая семантика может быть легко распространена с пропозиционального фрагмента на полную систему Аккермана из [1] с неограниченным принципом свертывания. Необходимые построения приведены в тезисах [6]. К сожалению, осталось неясным, способна ли описанная там конструкция пролить свет на истоки непротиворечивости системы Аккермана: например, само доказательство полноты (в стиле построения канонической модели), намеченное в [6], существенно опирается на непротиворечивость системы, доказанную в [1]. Кстати, в свое время, например, А.Г. Драгалин высказывал предположение, что в системе Аккермана закодирована в замаскированном виде некоторая оставшаяся неясной логическая система без сокращения. Описываемая здесь семантика (и секвенциальная версия пропозиционального фрагмента) оставляет этот аспект в стороне и вряд ли помогает выявить природу этой гипотетической логики, якобы таящейся в недрах непротиворечивой системы из [1].

1. Пропозициональные формулы строятся из переменных $p, q, r, \dots$, константы T ("истина") и связок $\&, \vee, \rightarrow, \neg$. Сокращения: $(\phi \leftrightarrow \psi) = (\phi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \phi)$, $\Delta\phi = (T \rightarrow \phi)$, $\Delta^0\phi = \phi$, $\Delta^{m+1}\phi = \Delta(\Delta^m\phi)$ для $m \geq 0$ и $\perp = \neg T$.

Рассмотрим исчисление A со следующими аксиомами и правилами вывода (сравн. A'' в [3]):

- | | |
|--|--|
| A1: $\Delta\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi \& \psi)$; | A2: $\Delta(\phi \vee \psi) \rightarrow \Delta\phi \vee \Delta\psi$; |
| A3: $\phi \& \psi \rightarrow \phi$; $\phi \& \psi \rightarrow \psi$; | A4: $\phi \rightarrow \phi \vee \psi$; $\psi \rightarrow \phi \vee \psi$; |
| A5: $\phi \& (\psi \vee \eta) \rightarrow \psi \vee (\phi \& \eta)$; | A6: $(\phi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \eta) \rightarrow (\phi \rightarrow \eta)$; |
| A7: $(\phi \rightarrow \psi) \& (\phi \rightarrow \eta) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi \& \eta)$; | |
| A8: $(\phi \rightarrow \eta) \& (\psi \rightarrow \eta) \rightarrow (\phi \vee \psi \rightarrow \eta)$; | A9: $\phi \& \neg\phi \rightarrow \psi$; |
| A10: $\neg(\phi \& \psi) \leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$; $\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\phi \& \neg\psi$; | |
| A11: $\neg(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (T \rightarrow \phi) \& (\psi \rightarrow \neg T)$; | A12: $\neg\neg\phi \leftrightarrow \phi$; |
| A0: $\Delta\phi \rightarrow \phi$; | |

modus ponens: $(\phi, \phi \rightarrow \psi / \psi)$; Δ -правило: $(\phi / \Delta\phi)$.

Пусть A^- есть результат отбрасывания аксиомы A0. Будем писать $A^{(-)}$ в утверждениях, справедливых для обеих систем: A и A^- .

Формулу назовем *приведенной*, если она содержит $\neg$ только в составе подформулы вида $\neg p$ и $\perp = \neg T$ (на "атомах"). По всякой формуле ϕ легко, пользуясь аксиомами A10-12, построить такую приведенную ϕ' , что $A^- \vdash (\phi \leftrightarrow \phi')$ (так наз. *приведенная форма* для ϕ). Для приведенных формул (точнее, для приведенной η) имеет место принцип замены эквивалентности в форме:

$$A^{(-)} \vdash (\phi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow A^{(-)} \vdash (\eta[\phi] \leftrightarrow \eta[\psi]),$$

где $\eta[\psi]$ получена из $\eta[\phi]$ заменой произвольного фиксированного вхождения, не находящегося под $\neg$ (сравн. [3])².

Назовем Δ^- -шкалой частично упорядоченное множество $(F, \leq)$ с унарной операцией Δ на F , где:

$$(a) \quad u \leq v \Rightarrow \Delta(u) \leq \Delta(v); \quad (b) \quad \forall u \exists v (\Delta(v) \leq u);$$

это есть Δ -шкала, если $(c) \quad \forall u (\Delta\Delta(u) \leq \Delta(u))$.

Модель Φ на Δ^- -шкале есть функция, сопоставляющая каждой переменной p пару непересекающихся множеств $\Phi_{\pm}(p) \subseteq F$, замкнутых вверх по $\leq$ (то есть $\forall u \in \Phi_{\pm}(p) \forall v \geq u [v \in \Phi_{\pm}(p)]$). При этом каждой формуле η и каждому u из F сопоставим истинностное значение $u \models \eta$ ("вынуждение" в модели Φ) так:

$$u \models p \Leftrightarrow (u \in \Phi_+(p)); \quad u \models \neg p \Leftrightarrow (u \in \Phi_-(p)); \quad u \models \neg\neg\phi \Leftrightarrow u \models \phi;$$

$$u \models (\phi \& \psi) \Leftrightarrow (u \models \phi) \& (u \models \psi); \quad u \models (\phi \vee \psi) \Leftrightarrow (u \models \phi) \vee (u \models \psi);$$

$$u \models \neg(\phi \& \psi) \Leftrightarrow (u \models \neg\phi) \vee (u \models \neg\psi); \quad u \models \neg(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow (u \models \neg\phi) \& (u \models \neg\psi);$$

$$u \models (\phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \forall v \geq u (\Delta(v) \models \phi \Rightarrow \Delta(v) \models \psi);$$

$$u \models \neg(\phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\Delta(u) \models \phi) \& \forall v \geq u (\Delta(v) \not\models \psi); \quad u \models T; \quad u \not\models \perp.$$

Формула η *истинна* в модели Φ ($\Phi \models \eta$), если $\forall u \in F (u \models \eta)$, и $A^{(-)}$ -*истинна*, если истинна во всех моделях на $\Delta^{(-)}$ -шкалах.

Лемма 1 (корректность).

$$A^{(-)} \vdash \eta \Rightarrow \eta \text{ является } A^{(-)}\text{-истинной.}$$

Доказательство проводится несложной индукцией по выводу, с использованием следующих свойств вынуждения:

$$(1) \quad u \models \Delta\phi \Leftrightarrow \Delta(u) \models \phi; \quad (2) \quad u \leq v, u \models \eta \Rightarrow v \models \eta;$$

$$(3) \quad u \models \neg\eta \Rightarrow u \not\models \eta \quad (\text{индукция по } \eta).$$

Дальнейшее содержание работы состоит в доказательстве обратного утверждения, то есть *теоремы о полноте* для исчислений A и A^- . Однако прежде, чем перейти к этому доказательству, приведем некоторую содержательную трактовку введенных определений, описанную в [5].

Подобно [4], точки и шкалы F понимаются как возможные миры (или, если угодно, моменты ветвящегося времени), а модель Φ задает распределение истинности формул в возможных мирах

² Для неприведенной η этот принцип, вообще говоря, неверен: известно (см. [1]), что $A \vdash (\phi \leftrightarrow \psi)$ не влечет $A \vdash (\neg\phi \leftrightarrow \neg\psi)$.

(“состояние дел” в мире u). Отношение ($u \leq v$) означает “достижимость” v из u (отвечающую тому, что все факты, верные в мире u , остаются верны при переходе в мир v). Наконец, мир $\Delta(u)$ понимаем как “совокупность сведений, известных (установленных, доказанных) в мире u ”. При этом никакой связи $\Delta(u)$ с реальным состоянием дел в мире u не предполагаем — за исключением того, что в случае Δ -шкал (шкал для логики $\mathbf{A}$) для миров вида $u = \Delta(v)$ (“миров наших знаний”) постулируется $\Delta(u) \leq u$ (то есть все, известное в таких “правильных” мирах, в действительности имеет место). Условие (a) в определении Δ^- -шкалы означает “сохранение знаний со временем” (то есть при переходе вверх по отношению достижимости), а условие (b) — что реальный смысл имеют только миры вида $\Delta(v)$ (“миры знаний”) и их возможные расширения. Теперь определение истинности для $\&$ и $\vee$ подобно [4] (то есть по существу классично), а истинность $(\phi \rightarrow \psi)$ в мире u понимается как утверждение, что в любом расширении $v \geq u$ “доказуемость” ϕ влечет “доказуемость” ψ (в соответствии с тем, что $v \models \Delta\phi \Leftrightarrow \Delta(v) \models \phi$). Таким образом, импликация понимается скорее не как “выводимость” ψ из ϕ , а как допустимость правила вывода (ϕ / ψ) . Самостоятельное определение истинности $\neg r$, не сводимое к истинности r , отвечает тому, что $\neg\phi$ в [1] понимается как “ложность” ϕ , в отличие от “недоказуемости” или “противоречивости” ϕ (в соответствии с чем формулы вроде $\neg r \Leftrightarrow (r \rightarrow \perp)$ и подобные явные определения $\neg r$ через r в $\mathbf{A}$ оказываются неверны). Тем самым отрицание в системе Аккермана напоминает скорее сильное отрицание в конструктивной логике (в смысле Нельсона—Воробьева [7]).

2. Таблица $\tau = (p; \sigma)$ есть пара конечных множеств приведенных формул. Таблица *противоречива*, если

$$(p \cap \sigma \neq \emptyset) \vee \exists r (r \in p, \neg r \in p) \vee (\perp \in p) \vee (T \in \sigma).$$

Таблица $\mathbf{A}^-$ -полна, если:

- (a) $(\Delta^m(\phi \& \psi) \in p) \Rightarrow ((\Delta^m \phi) \in p) \& ((\Delta^m \psi) \in p);$
 $(\Delta^m(\phi \& \psi) \in \sigma) \Rightarrow ((\Delta^m \phi) \in \sigma) \vee ((\Delta^m \psi) \in \sigma);$
- (b) $(\Delta^m(\phi \vee \psi) \in p) \Rightarrow ((\Delta^m \phi) \in p) \vee ((\Delta^m \psi) \in p);$
 $(\Delta^m(\phi \vee \psi) \in \sigma) \Rightarrow ((\Delta^m \phi) \in \sigma) \& ((\Delta^m \psi) \in \sigma);$
- (c) $(\Delta^m(\phi \rightarrow \psi) \in p) \Rightarrow ((\Delta^{m+1} \phi) \in \sigma) \vee ((\Delta^{m+1} \psi) \in p)$

(здесь и далее: m — произвольное натуральное число, $m \geq 0$), и $\mathbf{A}$ -полна, если кроме того: d) $((\Delta\phi) \in p) \Rightarrow (\phi \in p)$.

Таблица $\tau' = (p'; \sigma')$ есть *расширение* для $\tau = (p; \sigma)$ (обозначаем: $\tau \subseteq \tau'$), если $(p \subseteq p') \& (\sigma \subseteq \sigma')$. Для всякой таблицы τ существует конечное число минимальных $\mathbf{A}^{(-)}$ -полных расширений, называемых $\mathbf{A}^{(-)}$ -пополнениями τ . Введем также предпорядочение таблиц: $(p; \sigma) \leq (p'; \sigma')$, если $(p \subseteq p')$. Δ -образ для таблицы $\tau = (p; \sigma)$ есть

$\Delta(\tau) = (\{\phi \mid (\Delta\phi) \in \rho\}; \{\psi \mid (\Delta\psi) \in \sigma\})$. Ясно, что операция Δ сохраняет $A^{(-)}$ -полноту, а для A -полной τ имеем: $\Delta(\tau) \leq \tau$.

Пусть J — конечное поддерево универсального потока, то есть множество кортежей натуральных чисел, где $x \leq y \in J \Rightarrow x \in J$ (здесь $(x \leq y) \Leftrightarrow (\exists z)(x * z = y)$, а $*$ — операция сочленения кортежей); положим $\underline{J} = \{x \in J \mid \exists y \neq x (x \leq y \in J)\}$ (множество неконцевых элементов J). *Альтернанс* (альтернативное множество таблиц, сравн. [4]) X на J есть функция, сопоставляющая каждому x из J таблицу $X^x = (\rho^x; \sigma^x)$, причем $(x \leq y \Rightarrow X^x \leq X^y)$. Альтернанс X *противоречив*, если содержит противоречивую таблицу. Альтернанс X $A^{(-)}$ -*предполон*, если все его таблицы $A^{(-)}$ -полны, и $A^{(-)}$ -*полон*, если:

- (1) все X^x для $x \in \underline{J}$ $A^{(-)}$ -полны;
- (2) X^x для $x \notin \underline{J}$ удовлетворяют условиям (а), (b), (с) для $m=0$;
- (3) если $(\phi \rightarrow \psi) \in \sigma^x$ для $x \in J$, где $\phi \neq T$,
то $(\rho^x \cup \{\Delta\phi\}; \{\Delta\psi\}) \subseteq X^y$ для некоторого $y \geq x$.

По всякому $A^{(-)}$ -предполному альтернансу X_0 на J_0 легко построить такой $A^{(-)}$ -полный X на J (вообще говоря, не один), что $\underline{J} = J_0$ и $X^x = X_0^x$ для $x \in J_0$ (так наз. $A^{(-)}$ -*продолжение* для X_0): достаточно заметить, что для $A^{(-)}$ -полной $(\rho; \sigma)$ расширение $(\rho \cup \{\Delta\phi\}; \{\Delta\psi\})$ по условию (с) с $m=0$ добавляет только формулы вида $\Delta\eta$, то есть не нарушает условия (3).

$A^{(-)}$ -*цепь* альтернансов есть последовательность $(X_n : n \geq 0)$, где X_n есть $A^{(-)}$ -полный альтернанс на J_n , причем $\underline{J}_0 = \{\Lambda\}$ (где Λ — пустой кортеж) и $\forall n \geq 0 [(J_n = \underline{J}_{n+1}) \& \forall x \in J_n (\Delta(X_n^x) \subseteq X_{n+1}^x)]$, а в A -случае кроме того:

$$X_{n+1}^x \leq X_n^x \text{ при } x \in \underline{J}_n. \quad (\omega)$$

Скажем, что цепь *противоречива*, если она содержит противоречивый альтернанс X_n .

3. Лемма 2. Если $(X_n : n \geq 0)$ — непротиворечивая $A^{(-)}$ -цепь альтернансов, то таблица $X_0^\Lambda = (\rho; \sigma)$ имеет контрмодель на некоторой $\Delta^{(-)}$ -шкале F (то есть такую модель Φ на F , что

$$\exists u \in F [\forall \phi \in \rho (\Delta(u) \models \phi) \& \forall \psi \in \sigma (\Delta(u) \not\models \psi)]).$$

Доказательство наметим сперва для A^- -случая. Положим

$$F = \{a, b\} \cup \{(n, x) \mid n \geq 0, x \in J_n\}, \text{ где}$$

$$(u < v) \Leftrightarrow (u = a \& v \neq a) \vee \exists n \geq 0 (u = (n, x), v = (n, y), x \leq y, x \neq y),$$

$$\Delta(a) = a, \Delta(b) = (0, \Lambda), \Delta(n, x) = (n+1, x) \text{ для } x \in J_n = \underline{J}_{n+1}.$$

Легко проверить, что это есть Δ^- -шкала.

$$\text{Положим } \Phi_+(p) = \{(n, x) \mid p \in \rho_n^x\}, \Phi_-(p) = \{(n, x) \mid (\neg p) \in \rho_n^x\}.$$

Докажем (индукцией по η), что в полученной модели выполнено:

$$\eta \in \rho_n^x \Rightarrow (n, x) \models \eta; \quad \eta \in \sigma_n^x \Rightarrow (n, x) \not\models \eta. \quad (*)$$

Случаи $\eta = p, \neg p, T, \perp$ обеспечены по построению (ввиду непротиворечивости X_n), а случаи $\eta = (\phi \& \psi), (\phi \vee \psi)$ — ввиду (а),

(b) с $m=0$. Пусть $\eta = (\phi \rightarrow \psi) \in \rho_n^x$ и $x \leq y \in J_n$, т.е. $X_n^x \leq X_n^y$, и значит, $\eta \in \rho_n^y$. Тогда, ввиду A^- -полноты X_n , по условию (с) (с $m=0$) имеем: $((\Delta\psi) \in \rho_n^y) \vee ((\Delta\phi) \in \sigma_n^y)$, т.е. $(\psi \in \rho_{n+1}^y) \vee (\phi \in \sigma_{n+1}^y)$, и по предположению индукции, выполнено: $\Delta(n,y) = (n+1,y) \models \phi \Rightarrow \Delta(n,y) \models \psi$, ч.т.д. Пусть $\eta = (\phi \rightarrow \psi) \in \sigma_n^x$, где $\phi \neq \top$. Ввиду условия (3) A^- -полноты X_n имеем $((\Delta\phi) \in \rho_n^y) \& ((\Delta\psi) \in \sigma_n^y)$ для некоторого $y \geq x$, т.е. $\Delta(n,y) = (n+1,y) \models \phi$ и $\Delta(n,y) \not\models \psi$, а значит, $(n,x) \not\models \eta$. Наконец, если $\phi = \top$, т.е. $\eta = \Delta\psi \in \sigma_n^x$, то $\psi \in \sigma_{n+1}^x$, т.е. $\Delta(n,x) = (n+1,x) \not\models \psi$, и $(n,x) \not\models \eta$, ч.т.д.

В A -случае в качестве $(u \leq v)$ следует взять наименьшее отношение частичного порядка на F , удовлетворяющее условиям:

i) a — наименьший элемент F ; b — максимальный элемент F , не сравнимый ни с одним элементом вида (n,x) ;

ii) если $x \leq y$, то $(n,x) \leq (n,y)$;

iii) если $x \in J_n$, то $(n+1,x) \leq (n,x)$.

При этом F превращается в Δ -шкалу, поскольку имеем: $\Delta\Delta(a) = \Delta(a) = a$, $\Delta\Delta(b) = (1,\Delta) \leq (0,\Delta) = \Delta(b)$ (ввиду iii, так как $\Delta \in J_0$) и $\Delta\Delta(n,x) = (n+2,x) \leq (n+1,x) = \Delta(n,x)$ (так как $J_n = J_{n+1}$).

Теперь условие (ω) обеспечивает, что $X_n^x \leq X_m^y$ при $(n,x) \leq (m,y)$, ввиду чего доказательство (*) сохраняется дословно, и в качестве искомого u в определении контрмодели полагаем $u = b \in F$.

4. Секвенцией $(\Gamma \Rightarrow \Theta)$ (где Γ — антецедент, Θ — сукцедент секвенции) назовем упорядоченную пару конечных множеств формул³. Запись Γ, ϕ обозначает множество $\Gamma \cup \{\phi\}$ (то есть в частности: Γ, ϕ равно Γ , если $\phi \in \Gamma$).

Рассмотрим исчисление секвенций G^- с аксиомами вида $(\Gamma, p \Rightarrow \Theta, p)$, $(\Gamma, \neg p \Rightarrow \Theta, \neg p)$, $(\Gamma, \Delta^m p, \Delta^m \neg p \Rightarrow \Theta)$, $(\Gamma \Rightarrow \Theta, \top)$, $(\Gamma, \Delta^m \perp \Rightarrow \Theta)$ и следующими правилами вывода (везде $m \geq 0$):

$$(\&_1): \frac{(\Gamma, \Delta^m \phi, \Delta^m \psi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma, \Delta^m (\phi \& \psi) \Rightarrow \Theta)} ; \quad (\&_2): \frac{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m \phi); (\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m \psi)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m (\phi \& \psi))} ;$$

$$(\neg \&_1): \frac{(\Gamma, \Delta^m \neg \phi \Rightarrow \Theta); (\Gamma, \Delta^m \neg \psi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma, \Delta^m \neg (\phi \& \psi) \Rightarrow \Theta)} ; \quad (\neg \&_2): \frac{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m \neg \phi, \Delta^m \neg \psi)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m \neg (\phi \& \psi))} ;$$

$$(\vee_1): \frac{(\Gamma, \Delta^m \phi \Rightarrow \Theta); (\Gamma, \Delta^m \psi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma, \Delta^m (\phi \vee \psi) \Rightarrow \Theta)} ; \quad (\vee_2): \frac{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m \phi, \Delta^m \psi)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m (\phi \vee \psi))} ;$$

³ Переход от конечных множеств к упорядоченным наборам (как это обычно принято для секвенций) легко обеспечить добавлением структурных правил типа перестановки и сокращения, однако нам это не потребуется и вдаваться в подобные детали не будем.

$$\begin{aligned}
(\neg\vee_1): & \frac{(\Gamma, \Delta^m \neg\varphi, \Delta^m \neg\psi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma, \Delta^m \neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \Theta)} ; & (\neg\vee_2): & \frac{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m \neg\varphi): (\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m \neg\psi)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m \neg(\varphi \vee \psi))} ; \\
(\rightarrow_1): & \frac{(\Gamma, \Delta^m(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \Theta, \Delta^{m+1}\varphi): (\Gamma, \Delta^{m+1}\psi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma, \Delta^m(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \Theta)}^4 ; \\
(\rightarrow_2): & \frac{(\{\varphi_i: i \in E\}, \varphi \Rightarrow \{\psi_j: j \notin E\}, \psi): \text{по всем } E \subseteq \{1, \dots, m\}}{(\Gamma, (\psi_1 \rightarrow \varphi_1), \dots, (\psi_m \rightarrow \varphi_m) \Rightarrow \Theta, (\varphi \rightarrow \psi))} ; \\
(\neg\rightarrow_1): & \frac{(\Gamma, \Delta^{m+1}\varphi, \Delta^m(\psi \rightarrow \perp) \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma, \Delta^m \neg(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \Theta)} ; & (\neg\rightarrow_1): & \frac{(\Gamma, \Delta^m \varphi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma, \Delta^m \neg\neg\varphi \Rightarrow \Theta)} ; \\
(\neg\rightarrow_2): & \frac{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^{m+1}\varphi): (\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m(\psi \rightarrow \perp))}{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m \neg(\varphi \rightarrow \psi))} ; & (\neg\rightarrow_2): & \frac{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m \varphi)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \Delta^m \neg\neg\varphi)} ; \\
\text{а также } \mathbf{G} = \mathbf{G}^- + (\mathbf{T}): & \frac{(\Gamma, \Delta\varphi, \varphi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma, \Delta\varphi \Rightarrow \Theta)} .
\end{aligned}$$

Ясно, что если $\mathbf{G}^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \Theta)$, то $\mathbf{G}^{(-)} \vdash (\Gamma \cup \Gamma' \Rightarrow \Theta \cup \Theta')$ (ослабление). Легко показать, что $\mathbf{G}^- \vdash (\Gamma, \eta \Rightarrow \Theta, \eta)$ для всякой формулы η (индукцией по η : шаг для $\eta = (\varphi \rightarrow \psi)$ обеспечен правилом $(\rightarrow_2)$: $\frac{(\varphi \Rightarrow \varphi, \psi): (\psi, \varphi \Rightarrow \psi)}{(\Gamma, (\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \Theta, (\varphi \rightarrow \psi))}$).

Далее, если $\mathbf{G}^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \Theta)$, то $\mathbf{G}^{(-)} \vdash (\Delta(\Gamma) \Rightarrow \Delta(\Theta))$, где $\Delta(\Gamma) = \{\Delta\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$, $\Delta(\Theta) = \{\Delta\psi \mid \psi \in \Theta\}$.

Действительно, $(\Delta\varphi_1, \dots, \Delta\varphi_m \Rightarrow \Delta\psi)$ вытекает из $(\varphi_1, \dots, \varphi_m \Rightarrow \psi)$ по правилу $(\rightarrow_2)$ (все посылки правила с $E \neq \{1, \dots, m\}$ являются аксиомами вида $(\Gamma' \Rightarrow \Theta', \mathbf{T})$). Теперь общий случай доказывается индукцией по выводу: все правила вывода, кроме $(\rightarrow_2)$, выдерживают “навешивание Δ ”, а $(\rightarrow_2)$ имеет по существу единственную формулу в сукцеденте, то есть обеспечивается предыдущим рассуждением.

Наконец, заметив, что любая таблица (в смысле п.2) является по существу частным случаем секвенции (а именно, секвенцией, состоящей из приведенных формул), докажем следующую лемму:

Лемма 3. Если все $\mathbf{A}^{(-)}$ -пополнения таблицы $\tau = (\rho; \sigma)$ доказуемы в исчислении $\mathbf{G}^{(-)}$, то и сама τ доказуема в $\mathbf{G}^{(-)}$.

Для доказательства достаточно убедиться, что таблицу можно пополнить согласно условиям (a), (b), (c), (d) из п.2 с сохранением недоказуемости в $\mathbf{G}^{(-)}$. Эти условия в точности соответствуют правилам вывода $(\&_1)$, $(\&_2)$, $(\vee_1)$, $(\vee_2)$, $(\rightarrow_1)$ и $(\mathbf{T})$ системы $\mathbf{G}^{(-)}$, так что если одно или оба возможных пополнения дока-

⁴ В правиле $(\rightarrow_1)$ достаточно предполагать, что $\varphi \neq \mathbf{T}$, так как иначе $\Delta^m(\varphi \rightarrow \psi) = \Delta^{m+1}\psi$.

зуемы в $G^{(-)}$, то по соответствующему правилу доказуема и исходная секвенция.

5. Лемма 4. Если таблица τ_0 недоказуема в $G^{(-)}$, то существует непротиворечивая $A^{(-)}$ -цепь альтернансов $(X_n : n \geq 0)$, для которой $\tau_0 \subseteq X_0^\wedge$.

Доказательство. Будем строить искомую цепь $(X_n : n \geq 0)$ индукцией по n , причем так, чтобы все таблицы X_n^x при $x \in \underline{J}_n$ были недоказуемы в $G^{(-)}$, а при $x \in (J_n \setminus \underline{J}_n)$ были недоказуемы таблицы $\Delta(X_n^x)$.

Основание индукции: $n=0$. В качестве X_0^x для $x=\Lambda$ возьмем (по лемме 3) недоказуемое $A^{(-)}$ -пополнение $\tau=(\rho;\sigma)$ для τ_0 , и займемся обеспечением условия (3) из п.2. Пусть $(\varphi \rightarrow \psi) \in \sigma$, где $\varphi \neq T$, и пусть $(\psi_1 \rightarrow \varphi_1), \dots, (\psi_m \rightarrow \varphi_m)$ есть список всех импликаций, входящих в ρ . Поскольку $G^{(-)} \not\vdash \tau$, ввиду правила $(\rightarrow_2)$ имеем такое $E = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq E_m = \{1, \dots, m\}$, что

$$G^{(-)} \not\vdash (\{\varphi_i : i \in E\}, \varphi \Rightarrow \{\psi_j : j \notin E\}, \psi). \quad (**)$$

Включим в $(J_0 \setminus \underline{J}_0)$ кортеж $y \geq x$ и положим

$$X_0^y = (\rho \cup \{\Delta\varphi_i : i \in E\} \cup \{\Delta\varphi\}; \{\Delta\psi_j : j \notin E\} \cup \{\Delta\psi\}).$$

Из $A^{(-)}$ -полноты X_0^x вытекает, что X_0^y удовлетворяет условиям (a), (b), (c) из п.2 с $m=0$. Теперь убедимся, что $\Delta(X_0^y) = (\{\varphi_i : i \in E\} \cup \{\varphi\}; \{\psi_j : j \notin E\} \cup \{\psi\})$ (и значит, недоказуема). Действительно, если $(\Delta\eta) \in \rho$, то $\Delta\eta = (\psi_i \rightarrow \varphi_i)$ для некоторого $i \in E_m$, и если бы $i \in (E_m \setminus E)$, то $\psi_i = T$ входила бы в сукцедент недоказуемой секвенции (**), что невозможно.

Индукционный шаг к $(n+1)$. При $x \in \underline{J}_n$ положим таблицу $X_{n+1}^x = \Delta(X_n^x)$ (ее недоказуемость вытекает из недоказуемости X_n^x , см. в п.4). А при $x \in (J_n \setminus \underline{J}_n)$ в качестве X_{n+1}^x возьмем (по лемме 3) недоказуемое $A^{(-)}$ -пополнение таблицы $\Delta(X_n^x)$ (которая недоказуема по предположению индукции). При этом мы получаем $A^{(-)}$ -предполный альтернанс $\underline{X}_{n+1}$ на J_n (условие $X_{n+1}^x \leq X_{n+1}^y$ при $x \leq y$ оказывается выполнено, поскольку для $y \geq x \in \underline{J}_n$ имеем: $X_{n+1}^y \supseteq \Delta(X_n^y) \supseteq \Delta(X_n^x) = X_{n+1}^x$). В A -случае обеспечено также условие (ω) из п.2, поскольку $X_{n+1}^x = \Delta(X_n^x) \leq X_n^x$ для $x \in \underline{J}_n$. Теперь продолжение $\underline{X}_{n+1}$ до $A^{(-)}$ -полного альтернанса X_{n+1} на J_{n+1} (с $\underline{J}_{n+1} = \underline{J}_n$) строится подобно уже рассмотренному при $n=0$.

Наконец, убедимся, что все таблицы X_n^x полученной цепи непротиворечивы. При $x \in \underline{J}_n$ это выполнено, поскольку противоречивые таблицы доказуемы в G^- . Пусть теперь $x \in (J_n \setminus \underline{J}_n)$, то есть, по построению,

$$X_n^x = (\rho \cup \{\Delta\varphi_i : i \in E\} \cup \{\Delta\varphi\}; \{\Delta\psi_j : j \notin E\} \cup \{\Delta\psi\}),$$

где $(\rho;\sigma)$ и $\Delta(X_n^x)$ обе непротиворечивы (так как недоказуемы), откуда следует непротиворечивость X_n^x . Лемма доказана.

Замечание. Поскольку максимум логических длин формул, входящих в таблицу $\Delta(\tau)$, меньше, чем в τ , а $A^{(-)}$ -пополнение не увеличивает этого максимума, то в описанном построении длины формул, входящих в X_n , строго убывают с ростом n . Отсюда следует, что все таблицы X_n^* , начиная с некоторого n_0 , оказываются пустыми. Если теперь к полученной цепи $(X_n : n \geq 0)$ применить конструкцию из доказательства леммы 2, то шкала F может быть выбрана конечной: достаточно отбросить все точки вида (n, x) при $n > n_0$ и положить $\Delta(n_0, x) = (n_0, x)$ (поскольку проверка условия $(*)$ при $n = n_0$ уже вырождается в тривиальность).

6. Лемма 5. Если $G^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \theta)$, то $A^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \theta)^*$, где формульный образ секвенции есть

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_m)^* = (\varphi_1 \& \dots \& \varphi_n \rightarrow \psi_1 \vee \dots \vee \psi_m)$$

(как обычно, пустая конъюнкция — T , а пустая дизъюнкция — $\perp$).

Доказательство: индукция по выводу в $G^{(-)}$. Рассмотрение всех аксиом и правил, кроме $(\rightarrow_1)$ и $(\rightarrow_2)$, достаточно тривиально (в A^- выводимы формулы $\varphi \rightarrow \varphi$, $\varphi \& \varphi \leftrightarrow \varphi$, $\varphi \vee \varphi \leftrightarrow \varphi$, $\varphi \rightarrow T$, $\perp \rightarrow \varphi$, $\Delta^m(\varphi \& \psi) \leftrightarrow (\Delta^m \varphi) \& (\Delta^m \psi)$, $\Delta^m(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Delta^m \varphi) \vee (\Delta^m \psi)$, $\Delta^m \perp \leftrightarrow \perp$, правила $\frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi}$, $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\Delta^m \varphi \rightarrow \Delta^m \psi}$ и т.п.).

Для $(\rightarrow_1)$ достаточно убедиться в выводимости правила

$$\frac{\eta \& \Delta^m(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \zeta \vee \Delta^m(\Delta \varphi); \quad \eta \& \Delta^m(\Delta \psi) \rightarrow \zeta}{\eta \& \Delta^m(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \zeta}.$$

Из левой посылки по дистрибутивности вытекает

$$\eta \& \Delta^m(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \zeta \vee [\eta \& \Delta^m(T \rightarrow \varphi) \& \Delta^m(\varphi \rightarrow \psi)],$$

где $\Delta^m(T \rightarrow \varphi) \& \Delta^m(\varphi \rightarrow \psi)$ влечет $\Delta^m(T \rightarrow \psi)$, а правая посылка обеспечивает $[\eta \& \Delta^m(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \zeta \vee \zeta]$, что и требовалось.

Наконец, рассмотрим правило $(\rightarrow_2)$ при $\Gamma = \Theta = \emptyset$ (общий случай немедленно следует из этого). Примем посылки

$$\zeta_E = [\varphi \& \bigwedge_{i \in E} \varphi_i \rightarrow \psi \vee \bigvee_{j \notin E} \psi_j] \text{ для всех } E \subseteq E_m = \{1, \dots, m\}$$

и обозначим

$$\eta = \bigwedge_{E \subseteq E_m} \eta_E, \quad \text{где} \quad \eta_E = [\varphi \& \bigwedge_{i \in E} \varphi_i \rightarrow \psi \vee \bigvee_{j \notin E} \varphi_j].$$

Так как ζ_E влечет $[\bigwedge_i (\psi_i \rightarrow \varphi_i) \rightarrow \eta_E]$, ввиду выводимости правила

$$\frac{\omega \rightarrow (\varepsilon \rightarrow \delta \vee \psi_j)}{\omega \& (\psi_i \rightarrow \varphi_i) \rightarrow (\varepsilon \rightarrow \delta \vee \varphi_i)},$$

то достаточно доказать в A^- формулу $[\eta \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)]$. Для этого положим

$$\xi_k = [\psi \vee \bigvee_{|E|=k} (\varphi \& \bigwedge_{i \in E} \varphi_i)], \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Легко убедиться в выводимости $[\eta \rightarrow (\xi_k \rightarrow \xi_{k+1})]$ при всех $k < m$. Поэтому из доказуемой $[\eta \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi_0)] = [\eta \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi \vee (\varphi \& T))]$ выводим формулу

$$[\eta \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi_m)] = [\eta \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi \vee (\varphi \& \bigwedge_i \varphi_i))].$$

Теперь, заметив, что $\eta_{Em} = (\varphi \& \bigwedge_i \varphi_i \rightarrow \psi)$, получим

$$[\eta \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi \vee (\varphi \& \bigwedge_i \varphi_i)) \& (\psi \vee (\varphi \& \bigwedge_i \varphi_i) \rightarrow \psi)],$$

после чего транзитивность импликации (аксиома А6) завершает доказательство.

Следствие. Если $A^{(-)} \vdash \neg \neg \eta$, то $G^{(-)} \vdash \neg \neg (\Rightarrow \eta)$.

Действительно, формульный образ $(\Rightarrow \eta)^* = (T \rightarrow \eta)$ влечет η по modus ponens, поскольку $A^{(-)} \vdash T$.

7. Теорема 1 (о полноте).

$A^{(-)} \vdash \eta \Leftrightarrow \eta$ является $A^{(-)}$ -истинной.

Доказательство. Пусть $A^{(-)} \vdash \neg \neg \eta$, где формулу η (ввиду п.1) достаточно считать приведенной. По следствию из леммы 5, таблица (секвенция) $(\emptyset; \{\eta\})$ недоказуема в $G^{(-)}$, то есть (ввиду лемм 4 и 2) имеет контрмодель Φ на $\Delta^{(-)}$ -шкале F , и значит, формула η не является $A^{(-)}$ -истинной. Обратная импликация обеспечена леммой 1.

Замечание. Ввиду замечания к лемме 4, шкала F может быть выбрана конечной, то есть всякая формула, недоказуемая в $A^{(-)}$, отвергается на конечной $\Delta^{(-)}$ -шкале. Это обеспечивает разрешимость⁵ исчислений A и A^- — а точнее, даже примитивно рекурсивную разрешимость (поскольку фигурирующее в замечании число n_0 здесь не превосходит логической длины формулы η , а ветвления в деревьях J_n оцениваются сверху числом подформул в η).

Теорема 2 (о равносильности).

$G^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \Theta) \Leftrightarrow A^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \Theta)^*$.

Доказательство в одну сторону содержится в лемме 5, в обратную сторону для таблиц (секвенций из приведенных формул) вытекает из лемм 4 и 2, поскольку в контрмодели Φ для $(\Gamma; \Theta)$ отвергается формула $(\Gamma \Rightarrow \Theta)^*$. Общий случай обеспечивается следующей леммой:

Лемма 6. 1) $G^{(-)} \vdash (\Gamma, \eta' \Rightarrow \Theta) \Rightarrow G^{(-)} \vdash (\Gamma, \eta \Rightarrow \Theta)$,
2) $G^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \Theta, \eta') \Rightarrow G^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \Theta, \eta)$,

⁵ Надежда на разрешимость пропозиционального исчисления A'' (совпадающего с нашим A) была выражена (без доказательства) в [3].

где η' — приведенная форма для η (см. п.1).

Доказательство (индукция по сложности η). “Атомарный” случай $\eta = \Delta^m \phi$, где $\phi = T, \perp, p, \neg p$, тривиален (при этом $\eta' = \eta$). При $\eta = \Delta^m(\phi \rightarrow \psi)$, $\eta' = \Delta^m(\phi' \rightarrow \psi')$ (где ϕ и ϕ' отличны от T) применяем индукцию по выводу: во всех случаях замена η' на η (или ϕ' на ϕ и ψ' на ψ) возможна в посылках за счет сокращения вывода или сложности заменяемой формулы. Случаи $\eta = \Delta^m(\phi \& \psi)$ и $\eta = \Delta^m(\phi \vee \psi)$ (то есть $\eta' = \Delta^m(\phi' \& \psi')$, $\Delta^m(\phi' \vee \psi')$) разбираются аналогично; необходимо только учесть, что при $m > 0$ формула η' может быть введена не только по соответствующему правилу ($\&_i$) или ($\vee_i$), но и по правилу ($\rightarrow_2$). При $\eta = \Delta^m \neg(\phi \& \psi)$, $\Delta^m \neg(\phi \vee \psi)$, $\Delta^m \neg(\phi \rightarrow \psi)$, когда $\eta' = \Delta^m((\neg \phi)' \vee (\neg \psi)')$, $\Delta^m((\neg \phi)' \& (\neg \psi)')$, $\Delta^m(\Delta \phi' \& (\psi' \rightarrow \perp))$, применяем, опять-таки, индукцию по выводу. Если при этом формула η' введена правилом ($\vee_i$) или ($\&_i$), то η вводится правилом ($\neg \&_i$), ($\neg \vee_i$), ($\neg \rightarrow_i$) соответственно. Наконец, при $\eta = \Delta^m \neg \neg \phi$, $\eta' = \Delta^m \phi'$, работает предположение индукции (для $\Delta^m \phi$) и правило ($\neg \neg_i$).

Замечание. Вместо доказательства леммы 6 можно естественным образом обобщить табличную конструкцию из п.2 так, чтобы распространить леммы 2 и 4 на случай произвольных секвенций, содержащих неприведенные формулы. Такая модификация не требует сколько-нибудь существенного изменения рассуждений, и обеспечивает иное, более прямое доказательство теоремы 2.

Из теоремы 2 вытекает:

Следствие 1. $A^{(-)} \vdash \eta \Leftrightarrow G^{(-)} \vdash (\Rightarrow \eta)$

(сравн. со следствием леммы 5).

Следствие 2. В системе $G^{(-)}$ допустимо правило сечения:

$$\frac{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \phi); (\Gamma, \phi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta)}.$$

Доказательство при переходе к формульным образам тривиально; прямое доказательство допустимости сечения, не опирающееся на табличную конструкцию из п.2, автору неизвестно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ackermann W. Widerspruchsfreier Aufbau der Logik, I. Typenfreies System ohne tertium non datur // Journ. Symb. Logic. 1950. V. 15. № 1. P. 33-57.
2. Ackermann W. Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik (erweitertes System) // Math. Zeitschr. 1952. Bd. 55. H.3. S. 364-384.

3. *Harrop R.* An investigation of the propositional calculus used in particular system of logic // *Proc. Cambridge Philos. Society.* 1954. V. 50. № 4. P. 495-512.
4. *Kripke S.A.* Semantical analysis of intuitionistic logic, I // *Formal Systems and Recursive Functions. Proc. 8th logic colloq., Oxford, July 1963.* Amsterdam, 1965. P. 92-130.
5. *Скворцов Д.П.* О семантике пропозиционального фрагмента системы Аккермана // *Автоматы, алгоритмы, языки.* Калинин, 1982. С.130-132.
6. *Skvortsov D.P.* A semantics for a consistent type-free system of Ackermann // In: *Logic, methodology and philosophy of science (abstracts of papers of soviet scientists submitted to the Soviet National Organization Committee for the VII International Congress of logic, methodology and philosophy of science. Austria, Salzburg, 11-16 July 1983. Moscow, 1983.* P. 38-41.
7. *Воробьев Н.Н.* Конструктивное исчисление высказываний с сильным отрицанием // *ДАН СССР.* 1952. Т. 85. № 3. С. 465-468.

Е.Д.Смирнова

О ЗАГАДКЕ КОНТЕКСТОВ МНЕНИЯ^{*} ПОДХОД К СЕМАНТИКЕ ИНТЕНСИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Abstract. *A non-standard approach to semantics of intensional systems is developed. The semantics for intensional system IPL (Intensional Predicate Logic) is constructed. The peculiarities of IPL: (1) any expression including intensional predicates and operators has an intension as well as an extension; (2) intensional contexts differ from extensional mainly by ascription of specific values to intensional predicates (operators) and, what is more important, by a way of their combination with arguments; (3) an intension of any complex extensional expression is a function of intensions of its compounds; (4) an extension of any complex intensional expression is a function of functor's extension and intensions of its arguments; (5) unlike Montague's method, this approach allows to construct an intensional logic as first-order system.*

Logical aspect of analysis of intensional contexts is important for us. A key to the puzzle of these contexts can be found just there not in behavior of proper names. The core idea of this approach is that semantical analysis of intensional contexts presupposes, first of all, identification of peculiarities of their logical structure.

Proposed approach discovers peculiarities of semantics of intensional contexts. It gives the key for comprehension Kripke's "puzzle of belief contexts".

С особенностями интенциональных контекстов столкнулись Г.Фреге, Б.Рассел В.Куайн, Р.Карнап. Их особенности обсуждали А.Смальян, Я.Хинтика, Т.Парсонс, А.Черч и многие другие. Но именно как загадку вопрос ставит С.Крипке в статье "A puzzle about belief" [2]. "В настоящей статье речь пойдет об одной загадке, связанной с употреблением в языке собственных имен и контекстов мнения (belief)... Загадка, о которой пойдет речь, является действительной загадкой, и как следствие этого любая попытка объяснить, что представляет собой мнение, должна в конце концов неизбежно с ней столкнуться". "Как философская загадка она имеет самостоятельную ценность, и я даже думаю, что ее фундаментальное значение для решения проблемы мнения важнее значения тех предпосылок, которые ее породили. В действительности... проблема эта затрагивает не только те предложения, в которых контексты мнения выражены именами, но и значительно

^{*} Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 00-03-00320.

более широкий класс предложений мнения» [2, 194].

Фактически речь идет о широком классе интенциональных контекстов, которые отличаются прежде всего наличием особых интенциональных предикатных знаков (выражений) и интенциональных операторов (типа “верит, что...”, “знает, что...”, “полагает, что...” и т.д.).

Крипке отмечает: «Подобно тому, как всякой теории истинности приходится сталкиваться с парадоксом лжеца, так и всякая теория контекстов мнения и имен собственных непременно должна столкнуться с этой загадкой... загадка представляет проблему для любой схемы (решения. – Е.С.) – Куайна или чьей-то еще, – то есть всех тех, кто пытается иметь дело с “логикой мнения” на разных уровнях анализа» [2, 236].

Отметим, что, как правило, анализ и решение проблемы интенциональных контекстов связывают с трактовкой и семантической интерпретацией собственных имен (десигнативных выражений), их смысла и значения, с принципом предметности и, соответственно, с принципом взаимозаменяемости кодесигнативных выражений. Именно с этих позиций рассматривается известная антиномия отношения именованности и предлагаются ее решения.

Если собственные имена трактовать как жесткие десигнаторы, как это делает С.Крипке, то в любых возможных “мирах”, при любых обстоятельствах, имя привязано к своему объекту *самим способом введения имен* (они “ярлыки”). Как бы мы ни называли объект, высказывание с этим именем говорит об этом объекте (принцип предметности); замена одного имени объекта другим его именем (“Наполеон”, “Бонапарт”, напр.) не меняет дела – речь идет о том же объекте, как бы он ни был назван. С невозможностью замены таких имен в контекстах мнения как с загадкой (этих контекстов) сталкивается С.Крипке.

В случае жестких десигнаторов нет речи о *способе* указания на объект. Объекту в разных условиях (“мирах”) могут приписываться разные предикаты – он может быть или не быть философом, написать или не написать Веверлея и т.д., но это тот же объект. С нашей точки зрения, в трактовке имен как жестких десигнаторов С.Крипке зеркально следует концепции подлинных собственных имен (*proper name*) Б.Рассела.

При любых подходах – не только в случае жестких десигнаторов, но и у Фреге, Рассела, Карнапа и др. – нарушение принципа взаимозаменяемости связывают именно с трактовкой заменяемых десигнативных выражений¹. При этом в центре рассмотрения –

¹ См., напр., решения антиномии отношения именованности [1, гл. III, § 32].

принцип предметности. Если верен этот принцип, замена одного имени объекта a на другое его имя b в любом предложении не может изменить истинностное значение предложения. В этом загадка контекстов мнения и вообще интенциональных контекстов. Действует ли в этих контекстах принцип предметности и, соответственно, о каких объектах говорят эти контексты?

Г.Фреге, решая проблему, стремится сохранить принцип предметности, но с его точки зрения, в косвенном контексте меняется денотат имени. Денотатом имени a в косвенном контексте становится смысл этого имени в его прямом употреблении, косвенный контекст как бы говорит о смысле имени a , т.е. о способе указания на объект, об информации об объекте. Соответственно, происходит умножение смыслов, см., напр., [1, гл. III, § 39]. Но не только это. Стал ли именно смысл имени a денотатом этого имени в косвенном контексте? Для этого требуется специальное имя.

Г.Фреге верно заметил зависимость истинностного значения интенционального высказывания от *смысла* имени (в его интенциональном вхождении), т.е. от способа указания на денотат. Но это не значит, что высказывание стало утверждением о смысле.

Б.Рассел идет по пути пересмотра концепции десигнативных выражений. Принципиальную роль для него играет способ задания референта – способ данности нам объекта *в самой познавательной деятельности*. Отсюда одни сингулярные термы являются подлинными собственными именами, десигнативными выражениями, другие – лишь “способ речи”, они не именуют объекты. Вопрос по-прежнему фактически упирается в принцип предметности. Если объект *дан*, является объектом непосредственного рассмотрения, возможно введение подлинных собственных имен (Сократ, Париж и т.п.). Такого рода имена связаны со своими объектами правилами обозначения. Аспект смысла исчезает, но жесткая десигнация остается. В случае подлинных собственных имен (a и b) тождества вида $a = b$ (Наполеон = Бонапарт, Туллий = Цицерон) превращаются в аналитические, типа $a = a$. По крайней мере, мы можем устанавливать их истинность на основании семантических правил. Для такого рода имен действует принцип предметности.

Другое дело, если объекты нам не даны в “опыте”, мы сами их задаем, описываем. Они могут существовать, а могут не существовать – как нынешний король Франции или круглый квадрат. Относящиеся к ним выражения не являются обозначающими, они – неполные символы. Таковыми являются, например, определенные дескрипции. Соответственно, совершенно по-иному трактуется *логическая структура* предложений с такого рода знаками. Когда мы в пропозициональную форму вида $B(x)$ подставляем дескрип-

цию $(\iota x)A(x)$, полученное выражение $B((\iota x)A(x))$ – лишь “способ речи”, а не утверждение о соответствующем объекте. Логическая структура такого рода утверждений совершенно иная. Вводятся они с помощью контекстуальных определений (и репрезентируют фактически конъюнкцию трех утверждений), где справа, в определяющей части, нет дескриптивных имен, они элиминируются из контекста с помощью контекстуального определения. Сказанное относится и к тождествам вида $a = (\iota x)A(x)$ (В.Скотт – автор Веверлея) или $(\iota x)A(x) = (\iota x)B(x)$ (Утренняя Звезда суть Вечерняя Звезда), эти тождества, соответственно, не являются тавтологиями (аналитически истинными), как в случае подлинных собственных имен. Вопрос о взаимозаменяемости усложняется.

В случае референциального употребления дескрипций последние могут *выполнять роль* собственных имен – выполняются условия непустоты и единственности. Разграничение подлинных собственных имен и дескрипций решает целый ряд проблем, с которыми сталкивается теория именования. (Например, неограниченное умножение сущностей в духе Мейнонга: золотые горы, круглые квадраты и т.д.) Но ни в случае референциального употребления дескрипций, ни даже в случае подлинных собственных имен замена в интенциональных контекстах не гарантирована. С этим как с загадкой такого рода контекстов и столкнулся в дальнейшем С.Крипке.

Еще одна линия решения проблемы – усиление условий тождества заменяемых дескриптивных выражений (тождество интенционалов, интенциональный изоморфизм, синонимия). Особо интересен метод экстенционала и интенционала, опирающийся на семантику возможных миров. Но и он не проясняет “загадки” belief-контекстов.

Во-первых, понятие интенционала не охватывает понятие смысла выражения, не может рассматриваться как его экспликат. Возможно, поэтому замена десигнативных выражений, имеющих тот же интенционал, не проходит в пропозициональных установках и belief-контекстах. Но не только поэтому.

Интенционал “сохраняет” референт имени по мирам (обстоятельствам), он и вводится как функция $f: W \rightarrow U$, сопоставляющая миру значение (экстенционал) сингулярного терма в этом мире. Таким образом, интенционал выполняет функцию указания на объект имени, но *релятивизирует это указание относительно миров*. В этом плане он выполняет функцию смысла имени, но не через способ указания на объект, не через информацию об объекте, как у Г.Фреге.

Соответственно, мы не можем говорить о тождестве выраже-

ний по смыслу, если тождество вида $a = b$ (или $p \equiv q$) является логически (или необходимо) истинным. Замена в этих случаях проходит в *модальных* контекстах, поскольку сохраняется тождество денотатов (экстенсионалов) выражений a и b во всех выделенных мирах W . Если бы выражения “число планет” и “9” имели бы один и тот же *интенционал* (как выражения “9” и “3²”), замена проходила бы в известном примере В.Куайна. Регулярность, сохранение значения по мирам – вот что дает интенционал, и этого достаточно в семантиках возможных миров для модальных контекстов.

Но в случае контекстов мнения или пропозициональных установок этого недостаточно – включается субъект установки и важна его роль. Обстоятельства (“миры”) должны согласовываться с “мирами” его знания, веры и т.д. Но принцип выделения таких миров не ясен.

Тогда в случае имен, трактуемых как жесткие дескрипторы, субъект должен знать *семантические правила* системы, правила введения десигнативных выражений (то же самое в случае выражений, имеющих один и тот же интенционал.) Допустим, во всех мирах a и b обозначают один и тот же объект “объективно”, в силу семантических правил, но субъект контекста не имеет этой информации, для него замена не проходит. Вот в чем, с нашей точки зрения, суть объяснения загадки С.Крипке в случае его концепции имен как жестких десигнаторов.

Особо остановимся на идеях В.Куайна. Они связаны с принципиальной несовместимостью квантификации и модальности (и вообще интенционального аспекта языка). Куайн заведомо ограничивает метод отношения именно только *экстенциональными* контекстами, соответственно, принцип взаимозаменяемости не применим к интенциональным вхождениям имен. Сказанное относится не только к belief-контекстам, но и к модальным. Вопрос опять-таки связан с принципом предметности и его трактовкой. К какого рода сущностям ведет квантифицированный модальный язык?

Квантификация в модальных (и вообще *интенциональных*) контекстах ведет к антиномиям потому, что квантификация связана с референциальным аспектом языка, с его “онтологией” (критерий Куайна), а модальные, интенциональные операторы предполагают интенциональный аспект языка. Квантификация в модальных контекстах предполагает принятие особой “*интенциональной онтологии*”, введение в качестве значений (квантифицируемых) переменных особых “интенциональных объектов”, вместо индивидов, напр. – индивидных концептов. Такая “онтология” для

Куайна неприемлема. Согласно Куайну, логический предикат тождества “=” в такого рода контекстах “должен был бы уступить место предикату экстенциональной эквивалентности индивидных концептов” [1, 288]. Проблема, или “загадка”, интенциональных контекстов связана при таком подходе с вопросом принимаемой онтологии языка, с “несостыковкой” его референциального и интенционального аспектов. И эта проблема принципиальна и существенна: к принятию какого рода сущностей обязывает нас интенциональный язык? Вопрос этот мы рассмотрим ниже.

Введение понятия интенционала играет решающую роль, как было показано, в анализе неэкстенциональных контекстов, в которых *проходит замена L-эквивалентных выражений*. Возникает вопрос, какова роль этого понятия в существенно интенциональных контекстах, в которых *не действует* этот принцип замены L-эквивалентных выражений. Такого рода контексты отличаются, как отмечалось, наличием особых интенциональных предикатных выражений (знаков) и операторов. Естественно, особую роль приобретает семантическая интерпретация такого рода знаков, методы выявления их смысла и значения. Можно ли приписывать им значения в изоляции, какого рода сущности могут им тогда сопоставляться? Или же они выступают как определенного типа синкатегорематические знаки; смыслом, значением наделяются не они сами, а контексты определенного вида, их содержащие? Каков тогда способ интерпретации такого рода контекстов и каким образом в них смысл сложного зависит от смысла составляющих? Все эти вопросы касаются *принципиальных особенностей* интенциональных контекстов, и уже это говорит об определенных существенных отличиях их семантик.

Ниже мы развиваем собственную концепцию анализа интенциональных контекстов, в которой разрабатываются идеи семантик возможных миров. В отличие от подходов Г.Монтегю и Д.Скотта помимо особой трактовки интенциональных операторов существенную роль играет *способ установления интенционалов выражений, включающих эти операторы*. Именно таким путем выявляется принципиальное отличие интенциональных контекстов от экстенциональных.

Предлагается нестандартный подход к анализу интенциональных контекстов. Суть его в анализе *логической структуры* этих контекстов. *Именно в этом, а не в трактовке собственных имен* (сингулярных термов) видим мы ключ к “загадке” интенциональных контекстов. Соответственно, ведущую роль в нашем анализе играют конструирующие операции.

Строится семантика интенциональной первопорядковой логи-

ки – ИПЛ. Ее особенностью является, во-первых, то, что: 1. Каждому осмысленному выражению языка сопоставляются как экстенционал, так и интенционал, и при этом не вводятся особые обозначения для интенционалов. 2. Семантика строится таким образом, что интенциональным предикатным знакам и операторам также сопоставляются как интенционал, так и экстенционал и при этом *отличные от интенционалов и экстенционалов обычных предикатных и операторных знаков*. Таким образом, интенциональные языки отличаются наличием двух типов предикатных знаков и операторов, и при этом разного типа предикатным знакам (аналогично – операторам) приписываются разного типа интенционалы и разного типа экстенционалы.

Однако принципиальное отличие предлагаемой семантики состоит не в выделении двух типов предикатных и операторных знаков, а в выявлении существенно *иного способа связи интенциональных функторов с их аргументами*; разрабатывается идея *двух семантически различных способов приложения функторов к аргументам*.

Язык системы строится на базе теории семантических категорий, но расширяется понятие индекса категории:

1. n и s суть индексы категорий (n – категория сингулярных термов, s – категория предложений);

2. Если α и β — индексы категорий, то α/β и $\alpha//\beta$ – индексы категорий.

Выражения категорий типа α/β – экстенциональные, а $\alpha//\beta$ – интенциональные. Важен *способ интерпретации* этих двух типов категорий.

Под модельной структурой имеется в виду последовательность $\langle K, N, U, I, \Psi \rangle$, где K – непустое множество миров, N – множество нормальных миров ($N \subseteq K$), U – непустая индивидуальная область возможного мира H , I – функция интерпретации:

1. Если P есть предикатное выражение категории s/n , то $I(P)$ есть объект типа $(2^U)^K$.

2. Если Q есть выражение категории $s//n$, то $I(Q)$ есть объект категории $(2^{(U^K)})^K$. Аналогично для многоместных предикатов.

3. Если M есть выражение категории $s//s$, например модальный оператор, то ему приписывается – $(2^{(2^K)})^K$.

Преимущество предлагаемого способа интерпретации состоит в том, что каждому *интенциональному знаку* (в отличие от подходов Д.Скотта и Р.Монтегю) приписывается *как экстенционал, так*

и интенционал.

Однако не достаточно одного разграничения способов интерпретации экстенциональных и интенциональных функторов (операторов) и особой интерпретации интенциональных. Мы принимаем (и это существенно!) *два способа сочленения функторов с аргументами*: экстенциональные и интенциональные функторы сочленяются со своими аргументами *разными* способами.

Синтаксически два способа сочленения можно представить как $P(a)$, если P – экстенциональный знак, и $Q[a]$, если Q – интенциональный функтор. В этих случаях на семантическом уровне вычисления экстенционалов и интенционалов сложных выражений различны. Для экстенциональных контекстов:

(I) способ установления интенционала $(A^B)^K \times B^K \Rightarrow A^K$; так, $(2^U)^K \times U^K \Rightarrow 2^K$, где 2^K (пропозициональный концепт) – интенционал $P(a)$. Интенционал сложного экстенционального выражения есть функция интенционалов составляющих.

(I') $A^B \times B \Rightarrow A$ – способ установления экстенционала.

Для интенциональных контекстов схема иная:

(II) $(A^{(B^K)})^K * B^K \Rightarrow A^K$; так, $(2^{(U^K)})^K * U^K \Rightarrow 2^K$, где 2^K –

интенционал $Q[a]$.

(II') $A^{(B^K)} * B^K \Rightarrow A$ – способ установления экстенционала: $2^{(U^K)} * U^K \Rightarrow 2$, где $2 = \{1, 0\}$.

Экстенционал сложного интенционального выражения является функцией экстенционала функтора и интенционала аргументного выражения.

Таким образом, дело не просто в “усилении” условий тождества взаимозаменяемых выражений в интенциональных контекстах, а в учете способа связи составляющих в них. Способ связи составляющих в случае установления экстенционалов и в случае установления интенционалов в экстенциональных контекстах, как видно из схем, тот же. Только установление интенционала релятивизируется к мирам K . Не так обстоит дело в интенциональных контекстах – опять же, как видно из схем.

Поскольку при данном подходе имеются две операции приложения функторов к аргументам, естественно ввести две операции абстракции λxA и δxA . Они позволяют получать выражения категорий s/n и $s//n$, соответственно. Если A – формула, имеется по крайней мере одно экстенциональное вхождение x в A и не имеется ни одного интенционального вхождения x в A , то $\lambda xA(x)$ есть выражение категории s/n . Другими словами, мы можем образовать экстенциональный предикат по формуле, в которую x входит экс-

тенсионально, но не входит интенционально. Другой тип абстракции – δ -абстракция по x , предикат может быть образован по любой формуле, в которую входит x : если A – формула и x входит в A , то $\delta x A(x)$ есть выражение категории $s//n$. Приписываемые условия абстракций позволяют каждому экстенциональному предикату сопоставить интенциональный предикат, но не наоборот. $\lambda x A(x)$ – результат абстракции по экстенциональному вхождению, $\lambda x A(x)$ – детерминирует класс индивидов, удовлетворяющих условию A , $\delta x A(x)$ – класс индивидных концептов, удовлетворяющих условию A . Если в A переменная входит интенционально, то с помощью A можно – при предложенной интерпретации – охарактеризовать класс индивидных концептов, но не класс индивидов. Соответственно принимаемым операциям абстракции и введенным понятиям экстенционала и интенционала (обычных и интенциональных знаков) можно ввести четыре предиката универсальности (четыре вида операций генерализации).

$\Lambda.(\lambda x A)$ истинно в H , если U_H включается в экстенционал (в мире H) $\lambda x A$;

$\Lambda(\lambda x A)$ истинно в H , если U включается в экстенционал (в мире H) $\lambda x A$;

$\forall(\sigma x A)$ истинно в H , если U^K включается в экстенционал (в мире H) $\sigma x A$;

$\forall.(\sigma x A)$ истинно в H , если $(U_H)^K$ включается в экстенционал (в мире H) $\sigma x A$.

Одновременной индукцией определим понятие интенционала формулы и индивидного выражения относительно приписывания φ значений свободным переменным (символически: $\text{Int}(A, \varphi)$) и понятие экстенционала индивидного выражения, формулы и предикатного выражения в мире H относительно приписывания φ значений свободным переменным:

1. $\text{Int}(x, \varphi) = \varphi(x)$;
2. $\text{Ext}_H(x, \varphi) = \varphi(x)(H)$;
3. $\text{Ext}_H(R, \varphi) = I_H(R)$;
4. $\text{Ext}_H(R(..., \lfloor x \rfloor, ..., x_j, ...), \varphi) = t \Leftrightarrow \langle ..., \varphi(x), ..., \varphi(x_j)(H) ... \rangle \in \text{Ext}_H(R, \varphi)$;
5. Если A -формула, то $\text{Int}(A, \varphi) = \{H \mid \text{Ext}_H(A, \varphi) = t\}$;
в другой форме $\text{Ext}_H(A, \varphi) = t \Leftrightarrow H \in \text{Int}(A, \varphi)$;
6. $\text{Int}(A \& B, \varphi) = \text{Int}(A, \varphi) \cap \text{Int}(B, \varphi)$;
7. $\text{Int}(\neg A, \varphi) = K - \text{Int}(A, \varphi)$;
8. $\text{Int}(\mathbf{S}_i A, \varphi) = \{H \mid \text{Int}(A, \varphi) \in \Theta_i(H)\}$;
9. $\text{Int}(x=y, \varphi) = \{H \mid \varphi(x)(H) = \varphi(y)(H)\}$;
10. $\text{Ext}_H(\lambda x A, \varphi) = \{m \in U \mid \forall \varphi' (m = \varphi'(x)(H) \wedge \varphi' \mathbf{J} \varphi \Rightarrow H \in \text{Int}(A, \varphi'))\}$;

11. $\text{Ext}_H(\sigma x A, \varphi) = \{w \in U^K \mid \forall \varphi' (w = \varphi'(x) \wedge \varphi' R \varphi \Rightarrow H \in \text{Int}(A, \varphi'))\};$
12. $\text{Ext}_H(\Lambda(\lambda x A), \varphi) = t \Leftrightarrow U \subseteq \text{Ext}_H(\lambda x A, \varphi) \Leftrightarrow \forall \varphi' (\varphi' J \varphi \Rightarrow H \in \text{Int}(A, \varphi'));$
13. $\text{Ext}_H(\Lambda.(\lambda x A), \varphi) = t \Leftrightarrow U_H \subseteq \text{Ext}_H(\lambda x A, \varphi);$
14. $\text{Ext}_H(\forall(\sigma x A), \varphi) = t \Leftrightarrow U^K \subseteq \text{Ext}_H(\sigma x A, \varphi);$
15. $\text{Ext}_H((\lambda x A)(y), \varphi) = t \Leftrightarrow \text{Ext}_H(y, \varphi) \in \text{Ext}_H(\lambda x A, \varphi);$
16. $\text{Ext}_H((\sigma x A)[y], \varphi) = t \Leftrightarrow \text{Int}_H(y, \varphi) \in \text{Ext}_H(\sigma x A, \varphi).$

Θ – функция, сопоставляющая каждому интенциональному оператору соответствующий объект.

Введенные понятия экстенционала и интенционала отвечают двум способам приложения функторов к аргументам. Отметим, что в интенциональных контекстах следует различать экстенциональные и интенциональные вхождения аргументных выражений [4, гл. IV, с. 161—163].

При наличии операторов абстракции кванторы естественно рассматривать как одноместные второпорядковые предикаты. (При этом эти предикаты будут экстенциональными, то есть типа $s/(s//n)$ или $s/(s/n)$). Выражения с кванторами вводятся как сокращения для такого рода предикатов:

$$\begin{aligned}\Lambda x A &\Leftarrow \Lambda(\lambda x A), \\ \forall x A &\Leftarrow \forall(\sigma x A), \\ \Lambda.x A &\Leftarrow \Lambda.(\lambda x A).\end{aligned}$$

При такой трактовке кванторов вряд ли следует считать, что квантификация в интенциональных контекстах ведет к принятию особой “интенциональной онтологии” – во всяком случае в смысле критерия Куайна.

При подходе Монтегю интенциональная логика может быть самое меньшее второпорядковой. У Монтегю собственно интенциональные предикаты не являются атомарными, они вводятся с помощью экстенциональных предикатов и интенциональных операторов. Принятие двух способов приложения функторов к аргументам и двух операций абстракции позволяет вводить интенциональные предикаты без обращения к интенциональным операторам. К тому же интенциональные предикаты могут входить в словарь атомарных предикатов.

Принцип замены равного равным вида $b = c \supset A(b) \equiv A(c)$ проходит в рассматриваемой системе ИПЛ, а принцип $b = c \supset A[b] \equiv A[c]$ не общезначим.

Предлагаемый подход вскрывает особенности семантики интенциональных контекстов и разъясняет истоки нарушения принципа взаимозаменяемости. Он также дает ключ к пониманию крипкевской “загадки контекстов мнения” [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карнап Р.* Значение и необходимость. М.: Иностранная литература, 1959.
2. *Крикке С.* Загадка контекстов мнения // Новое в зарубежной лингвистике. Вып. XVIII. М., 1986. С. 194—242.
3. *Quine W.V.O.* Reference and Modality // Reference and Modality / Ed. L.Linsky. Oxford, 1979.
4. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. М.: Росспэн, 1996.

Б.БОЛЬЦАНО КАК ПРЕДШЕСТВЕННИК КОНСТРУКТИВИЗМА. II

Развивая идею первенства прямых доказательств над косвенными (непрямыми) в научных текстах, Больцано посвящает этому вопросу несколько мест в своем главном логическом сочинении “Наукоучение. Опыт обстоятельного, большей частью нового изложения логики с постоянным вниманием к прежним авторам” (WL)¹. Весьма интересными в этом отношении являются рассуждения, приводимые им в § 530 последнего (четвертого) тома, где он говорит о способах перестройки не прямых доказательств в прямые. В не прямом доказательстве, отмечает Больцано, мы требуем от наших читателей лишь того, чтобы они сделали вывод об истинности доказываемого предложения ***M*** на том основании, что мы из его отрицания, то есть из предложения ***не-M*** либо непосредственно, либо в соединении с другими известными предложениями ***B, C, D, ...***, которые сами читатели считают истинными, вывели следствие ***не-A***, которое они признают за ложное. Тем самым мы желаем, чтобы читатели сделали следующее самостоятельное заключение: “Если бы ***M*** было ложно, то ***не-M*** было бы истинно и истинным также было бы и ***не-A***. Но поскольку ***не-A*** ложно, то ложно ***не-M***, а следовательно, истинным оказывается ***M***”. Доказательства, в которых используется подобный способ рассуждения он и называет непрямыми, опосредованными или апагогическими, а также доказательством через приведение к абсурду. Все другие доказательства он считает прямыми, непосредственными или демонстративными.

Степень уверенности, создаваемая апагогическим доказательством, зависит, по мнению Больцано, исключительно от того, с какой степенью уверенности принимают за истинные два своих предположения о том, что ложным является предложение ***не-M*** и что ложным же является предложение ***не-A***. По сути дела все сводится к тому, с какой степенью достоверности доказана главная гипотетическая посылка: “Если бы ***не-M*** было истинно, то истинным было бы и ***не-A***?. Если усматривать цель апагогических доказательств лишь в убеждении читателей, то в принципе они могут употребляться в учебниках отдельных наук. Вместе с тем к подоб-

¹ Bolzano B. Wissenschaftslehre. 4 Bände. Sulzbach, 1837.

ным доказательствам Больцано предъявляет серьезные претензии: ведь если из предложения *не-М*, которое считается ложным, с помощью сплошь истинных предложений *В, С, D, ...* должно выводиться ложное предложение *не-А*, то по сравнению с этим из полнотой истинной совокупности предложений *В, С, D, ...* и *А* точно так же может логически следовать истинное доказываемое предложение *М*. А отсюда, как считает Больцано, тотчас же можно заключить, что вместо того, чтобы прямо из предложений *В, С, D, ...* и *А* выводить *М*, читателям предлагается окольный путь: сначала из предложений *В, С, D, ...* и *не-М* выводят предложение *не-А*, а затем из явной ложности последнего заключают, что и среди предложений *В, С, D, ...* и *не-М* также имеется какое-то одно ложное предложение. Но поскольку все *В, С, D, ...* являются здесь заведомо истинными, то принимается решение о том, что ложным является предложение *не-М*, а тем самым само предложение *М* оказывается истинным. В результате Больцано приходит к выводу, что предложения, на которые опирается апагогическое доказательство, никогда не могут рассматриваться в качестве объективного основания доказываемой истины и не должны использоваться в “строго научных изложениях”.

Но *любое* апагогическое доказательство, с точки зрения Больцано, можно путем несложных изменений преобразовать так, что это позволит избавиться от неприятности использования в нем ложных предпосылок. Для этого прежде всего Больцано предлагает в качестве апагога рассматривать только такие предложения, предикат которых (“предикатное представление”) является отрицательным. Предложение, используемое в качестве предпосылки в апагогическом доказательстве, имеет, согласно Больцано, следующую форму:

Каждое *А* есть *не-В* (1)²

При проведении апагогического доказательства, как отмечает Больцано, рассматривают контрдикторную противоположность доказываемого положения или предложение о том, что имеется некоторое *А*, которое одновременно есть *В*, или собственно предложение:

Представление об *А*, которое есть *В*,
имеет предметность (не пусто. – *Б. Ф.*) (2)

Далее в доказательстве указывается, что принятие (2) противоречит уже доказанной ранее истине:

Каждое *R* есть *S* (3)

Иначе говоря, из (2) выводимо предложение:

² Что равнозначно в логике Больцано отрицанию предложения “Каждое *А* есть *В*”.

Представление об R , которое
не есть S , имеет предметность (4)

Это заключение получается, по мнению Больцано, не иначе, как из соединения принятого за истинное предложения (2) с полностью истинными и

ранее доказанными тремя предложениями формы:

Представление X имеет предметность (5)

Каждое X есть R

Каждое X есть $не-S$ (6)

Чтобы установить, что представление R , которое не является никаким S , имеет предметность (существует или не пусто, - Б.Ф.) нет иного способа, как предъявить предмет, который бы являлся предметом обоих, то есть как R , так и $не-S$. Такой предмет, считает Больцано, можно обнаружить не иначе, как указав на исключительно его обозначающее представление X и доказав, во-первых, что этому представлению соответствует действительный предмет, то есть что это представление имеет предметность (5) – и, во-вторых, что относящийся к представлению X предмет является одновременно предметом как R , так и $не-S$ (6). Хотя здесь, как считает Больцано, могут возразить, что для этого уже достаточно противоречия с (4), которое возникает, если одно из предложений (6) рассматривать как частное, а не общее суждение. Однако, отмечает он, и в этом случае выражение “каждый X ” не означает обязательно, что область представления X охватывает *больше* предметов.

Если теперь три предложения (5) и (6) должны быть дедуцируемы из (2), то представление, предметность которого предусмотрена в (2), должно находиться в отношении *охватывания* (§ 108, WL. – Б.Ф.) к представлению X , то есть последнее должно быть равнозначно, либо шире, чем представление, о котором идет речь в (2). Так как очевидно, согласно Больцано, что из предметности одного представления можно сразу заключить о предметности равнозначного ему или “более широкого” (более общего. – Б.Ф.) представления, а не “более узкого” (частного. – Б.Ф.), то при более детальном анализе его составных частей представление X принимает вид:

Некоторое A' , которое есть B' , (7)

где A' и B' – пара “более широких”, образуемых из A и B представлений, “за счет отбрасывания их известных составных частей”.

После сделанных предположений легко, как считает Больцано, можно показать, как любое апагогическое доказательство

преобразуется в такое, где можно обойтись без использования ложных предпосылок вообще.

Поскольку имеется истина (3), говорящая о том, что каждое R есть S , то предложения (5) и (6) наверняка не являются все три истинными. Следовательно, либо первое из них ложно, то есть представление X является беспредметным (пустым, - Б.Ф.), либо, если X предметно, то ложно одно из двух предложений (6). Но последнее возможно всякий раз лишь вследствие отбрасывания известных, объединенных в представлении (7) признаков, что позволяет образовывать пару представлений X' и X'' , которые оба обладают предметностью и делают два предложения:

Каждое X' есть R ,

Каждое X'' есть *не- S* (8)

оба истинными. Больцано предполагает, что истинность этих предложений может устанавливаться за счет использования тех же самых предпосылок, которые использовались при доказательстве истинности предложений (5) и (6). Поскольку из признаков, которые делают беспредметным или самопротиворечивым (также пустым. – Б.Ф.) представление X и которые отсутствуют в представлениях X' и X'' , невозможно получить никакого значительного следствия, которое необходимо для доказательства истинности этих предложений.

Если удастся доказать истинность пары (8), то, считает Больцано, дело преобразования апагогического доказательства можно считать полностью завершенным, так как объединение их с истиной (3) оправдывает тотчас же заключение о том, что X' и X'' являются парой *взаимоисключающих* (§ 105, WL. – Б.Ф.) представлений. Последнее означает, что представление о нечто, которое было бы одновременно и X' и X'' , а следовательно, о “более узком” (более конкретном. – Б.Ф.) представлении A , которое одновременно есть B , является беспредметным. Но из этой истины, по мнению Больцано, как только становится известным, что представление A само по себе не является беспредметным, тот же час образуется доказываемая истина:

Каждое A есть *не- B* .

В качестве примера преобразования непрямого доказательства в прямое Больцано рассматривает доказательство Евклида о том, что в каждом треугольнике acb против большего угла $a > b$ лежит большая сторона $cb > ca$ (Ев. I, 19). Доказательство Евклида в изложении Больцано выглядит следующим образом. Если бы было неверно, что $cb > ca$, то должно быть либо $cb = ca$, либо $cb < ca$. Но если $cb = ca$, то (согласно Ев. I, 5) противостоящие сторонам треугольника acb углы должны быть равны, то есть $a = b$, что про-

тиворечит сделанному предположению. А если $cb < ca$, то (согласно Ев. I, 18) между противостоящими им углами имело бы место отношение: $a < b$, что также противоречит сделанному предположению. Следовательно, остается принять, что $cb > ca$. Приведенное доказательство, замечает Больцано, включает в себя два апагогических в виде следующих предложений:

В треугольнике acb , в котором $a > b$, $cb ? ca$.

В треугольнике acb , в котором $a > b$, неверно что $cb < ca$.

Больцано считает достаточным продемонстрировать в WL преобразование апагогического доказательства лишь для первого предложения, оставляя возможность осуществить подобное же для второго предложения самим читателям.

Если, согласно Больцано, мы сравним подлежащее доказательству предложение:

В треугольнике acb , в котором $a > b$, $cb ? ca$ [1]

с предложением формы (1) предшествующего разъяснения о способе преобразования апагогических доказательств, то обнаружим следующее. Представлению A в данном случае будет соответствовать представление о треугольнике acb , в котором $a > b$. Под представлением B будет подразумеваться в этом случае представление о треугольнике acb , в котором $cb = ca$, а ложным предположением, используемым в апагогическом доказательстве, будет предложение:

Представление о треугольнике acb , в котором $a > b$, и одновременно $cb = ca$ имеет предметность [2]

Подобное предположение скрытым образом, как считает Больцано, используется и в доказательстве самим Евклидом в виде гипотетического утверждения: если бы в треугольнике acb $cb = ca$, то $a = b$. Предложение формы (3) здесь звучит так:

В каждом треугольнике acb , в котором $cb = ca$, также и $a = b$ [3]

Следовательно, под представлением R здесь предполагается представление о треугольнике acb , в котором $cb = ca$. А под представлением S подразумевается представление о треугольнике acb , в котором $a = b$. Предложение формы (4) звучит здесь так:

Представление о треугольнике acb , в котором $cb = ca$, но $a ? b$ имеет предметность. [4]

Это предложение получается в виде заключения из предложения [2] без привлечения дополнительных предложений, а лишь, как считает Больцано, за счет замены “узкого” представления “некоторый треугольник acb , в котором $a > b$ и $cb = ca$ ” на более “широкое” – “некоторый треугольник acb , в котором $a ? b$ и $cb = ca$ ”.

Последнее представление соответствует по существу представлению X из (7), имеющему форму: A' , которое есть B' . В данном конкретном случае представление B' оказывается одинаковым с представлением B (и с R), а представления A' образуется за счет расширения объема представления A , поскольку вместо признака $a > b$ используется более “широкий” (обобщенный. – Б.Ф.) признак $a ? b$. Предложения формы (5) и (6) звучат здесь соответственно:

Представление о треугольнике acb ,
в котором $cb = ca$, но $a ? b$ имеет предметность. [5]

Треугольник acb , в котором $cb = ca$,
но $a ? b$ имеет признак $a = b$;
Треугольник acb , в котором $cb = ca$, [6]
но $a ? b$ имеет признак $cb ? ca$

Чтобы избавиться от апагогической формы доказательства, в соответствии с приведенными ранее объяснениями необходимо, согласно Больцано, из представления X или из нечего, которое есть одновременно как A , так и B , отбросить известную составную часть в виде пары “более широких” представлений X' и $X?$, доказав тем самым, что они образуют два истинных предложения формы (8). Здесь тот же час обнаруживается:

Треугольник acb , в котором $cb = ca$, [7]
имеет признак $a = b$;

Треугольник acb , в котором $a ? b$, [8]
имеет признак $ca ? cb$

Доказательство предложений [7] и [8] нетрудно осуществить. Первое, как отмечает Больцано, является положением “Элементов” Евклида (Ев. I, 5), а второе получается как контрапозиция первого. При этом обнаруживается, что в данном конкретном доказательстве не нужны оба предложения, чтобы получалось заключение:

Представление о треугольнике acb , в котором
 $a ? b$ и $ca = cb$, является беспредметным.

Отсюда легко образуется подлежащее доказательству предложение:

“Представление о треугольнике acb , в котором
 $a > b$, но $ca = cb$ является беспредметным”.

Или

Треугольник acb , в котором $a > b$, имеет признак $ca ? cb$.

Больцано предлагает следующее краткое звучание всего доказательства: “треугольник acb , в котором $ca = cb$, имеет признак $a = b$. Следовательно, треугольник acb , в котором $a ? b$, имеет

признак $ca ? cb$. Вследствие этого треугольник acb , в котором $a > b$, имеет признак $ca ? cb$ ”.

Итак, предлагаемый Больцано метод преобразования апагогического доказательства позволяет избежать употребления ложных предложений в основаниях доказательства и, по мнению Больцано, опираться лишь на такие, которые “проще” первых, поскольку не содержат в своем составе беспредметных субъектных представлений (суждение с пустым или беспредметным субъектом является в логике Больцано заведомо ложным. – *Б.Ф.*). В обычной практике рассуждений подобные предложения, как считает Больцано, появляются в основном в следующем гипотетическом виде: “Если нечто, которое имеет свойство $\alpha, \beta, \gamma \dots$ имело бы свойство μ , то оно имело бы и свойство $non.\gamma?$, где $non.\gamma$ и γ обозначают противоречащие друг другу свойства. В подобном предложении из субъектного представления предпосылки признак γ можно отбросить и данное упрощение не усложнит ни доказательство самого гипотетического утверждения, ни выведение из него различных заключений. Поэтому, как считает Больцано, апагогический способ доказательства не должен никогда использоваться там, “где требуется ясное осознание оснований (может быть даже субъективных), на которые опирается доказываемая истина”.

ПРЕДИКАТЫ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ДЛЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

В [1] А.Г.Драгалин предложил метод получения одних моделей типа реализуемости для интуиционистской арифметики из других. Мы предлагаем аналогичный метод для теории множеств с интуиционистской логикой ZFIDC (точная формулировка может быть найдена в [2]). Как и в [2], мы считаем, что ZFIDC содержит термы, вводимые по аксиоме выделения. Предикат T , определенный на множестве предложений теории ZFIDC, назовем предикатом типа реализуемости (r -предикатом), если 1) ZFIDC выводимо $\varphi \Rightarrow T\varphi$; 2) $T\varphi, T(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow T\psi$ для любых предложений φ и ψ . Самый простой пример r -предиката: $T\varphi \Leftrightarrow \text{ZFIDC} \text{ выводимо } \varphi$. Первая операция, дающая новые r -предикаты, такова: если $\{ T_i \}$ – семейство r -предикатов, то новый предикат, $T = \Pi_i T_i$, т.е. $T\varphi \Leftrightarrow \forall i T_i\varphi$. Опишем теперь вторую операцию. Пусть Λ – высказывание и T – r -предикат. Пусть A – предикат, заданный на множестве замкнутых атомарных формул ZFIDC. Допустим, что:

- 1) $\Lambda \Rightarrow A\varphi \Rightarrow T\varphi$ для всех замкнутых атомарных формул ZFIDC
- 2) $\Lambda \Rightarrow T\varphi$
- 3) если φ -атомарная истинная замкнутая формула, то $A\varphi$
- 4) если φ -атомарная замкнутая ложная формула и $A\varphi$, то Λ
- 5) предикат A экзистенциален на множестве атомарных формул, т.е. $\forall q [A(q \in t) \Leftrightarrow A(q \in r)] \wedge A(r \in p) \Rightarrow A(t \in p)$
- 6) для всякой формулы $\varphi(x)$ с одной свободной переменной и для всякого терма t найдется другой терм q такой, что $\forall r [A(r \in q) \Leftrightarrow A(r \in t) \wedge T\varphi(r)]$.

Определим теперь новый предикат $S(\Lambda, A, T)$ на множестве предложений ZFI индукцией по построению формулы φ :

- 1) $S\varphi \Leftrightarrow A\varphi$ для атомарной замкнутой формулы φ
- 2) $S(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow S\varphi \wedge S\psi$
- 3) $S(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow S\varphi \vee S\psi$
- 4) $S(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (S\varphi \Rightarrow S\psi) \wedge T(\varphi \rightarrow \psi)$
- 5) $S(\forall x \varphi(x)) \Leftrightarrow \forall t. S\varphi(t) \wedge T(\forall x \varphi(x))$
- 6) $S(\exists x \varphi(x)) \Leftrightarrow \exists t. S\varphi(t)$
- 7) $S(\perp) = \Lambda$

Утверждения:

1. $S\varphi \Rightarrow T\varphi$
2. $S(\perp \rightarrow \varphi)$
3. ZFIDC выводимо $\varphi \Rightarrow S\varphi$
4. S есть $\mathbf{r}$ -предикат.

В [3] мы применили вторую операцию при построении модели для доказательства допустимости правила Маркова в ZFIDC.

Дадим неформальный комментарий применимости изложенного метода и его метаматематический анализ, сделав это по сравнению с аналогичным исследованием в [1]. В качестве примера там дается доказательство выводимости в НА так называемого принципа P.

Операция S, изложенная выше, позволяет получить (для арифметики НА, конечно) некоторые известные реализуемости, например, штрих Акцела, штрих-реализуемость Клини (последняя используется для доказательства такого замечательного факта, как выполнимость в интуиционистской арифметике свойства нумерической экзистенциальности). Однако наиболее важным с точки зрения метаматематических исследований является тот факт, что указанная операция позволяет объединять модели Крипке для арифметики (полученные с помощью операции Сморинского, [4]) в новую модель Крипке. Для арифметики это соображение показывает, что все метаматематические результаты, полученные с помощью операции Сморинского, могут быть получены и с помощью изложенной выше операции S (эта операция для арифметики отличается от изложенной выше отсутствием пунктов 5 и 6 в первом определении). Использование этой операции для арифметики позволяет часто провести рассуждения как с классической, так и с интуиционистской точек зрения, тогда как применение операции Сморинского требует теоретико-множественного рассмотрения и использования закона исключенного третьего. Некоторые авторы предпринимали попытки интуиционистского рассмотрения операции Сморинского, однако в этих работах были существенные пробелы и, кроме того, использовались специфически интуиционистские методы рассуждения (например, принцип непрерывности Брауэра или теорема о веере), которые являются неприемлемыми с классической точки зрения.

Что касается теории множеств с интуиционистской логикой, то одно из приложений можно, как указано выше, найти в [3] (приложение появилось не позднее общего результата, изложенного здесь). Что касается моделей Крипке (конечно, применяемых для теории множеств), то все сказанное выше остается верным и для

них, однако конкретных приложений пока не сделано ввиду громоздкости технических конструкций. Однако с точки зрения метаматематических трудностей доказательства построения моделей указанного типа и здесь не требуется никаких рассуждений, не укладывающихся в рамки теории множеств с интуиционистской логикой с принципом двойного дополнения множеств (в метаматематике этот принцип мы не используем нигде, кроме как для доказательства выполнимости его самого и поэтому он может быть опущен, т.к. классические математики его не признают и тем самым, опуская этот принцип, мы рассуждаем уже внутри нейтральной теории).

В заключение кратко осветим вопрос о доказательстве приведенных выше утверждений. Основная трудность – построение универсума, в котором предикат A оказался бы экстенциональным. Здесь, конечно, необходима ссылка на работу Майхилла [2], в которой был построен универсум термов с целью доказательства ряда свойств теории ZFI, и который автору удалось сильно модифицировать для построения ряда новых моделей для неклассической теории множеств. Остальная часть доказательства хотя и достаточно технична, но не является трудной (основной момент – кванторы по множественным переменным). Доказательство проводится сначала индукцией по построению, а затем по выводу формулы. Ниже мы приводим построение универсума Δ и метод получения нового r -предиката S из данного r -предиката T .

Пусть Λ – метаутверждение, T – r -предикат для теории множеств с термами ZFIDC, причем для атомарных предложений $\Lambda \Rightarrow T\phi$. Упомянутый выше предикат A будет получаться, как правило, ограничением T на атомарные предложения и поэтому в построении не участвует. Скажем, что два расщепленных терма $C_{\phi, x} = t$ и $C_{\psi, y} = q$ ($q^+ = Y$; $q^- = C_{\psi}$; см [2]) на уровне $\alpha \in On$ являются эквивалентными, $q \approx t$, если $\forall r (r \in q^+ \vee \Lambda \Leftrightarrow r \in t^+ \vee \Lambda)$, а сам терм t является экстенциональным на том же уровне, если $q \approx r \wedge r \in t^+ \Rightarrow q \in t^+$, причем $q \in t^+ \Rightarrow T(q \in t)$, а предикат T так распространяется на расщепленные термы: $T(q \in t) \Leftrightarrow T(q^- \in t^-)$. Так строится уровень $\Delta_{\alpha+1}$ из меньших уровней. Для предельного ординала $\Delta_{\alpha} = \bigcup \{\Delta_{\beta} \mid \beta < \alpha\}$ и, наконец, $\Delta = \bigcup \{\Delta_{\alpha} \mid \alpha \in On\}$, где On -класс ординалов. Предикат $S(\Lambda, T)$ определяется теперь так: $S(t \in q) \Leftrightarrow t \in q^+ \vee \Lambda$; дальнейшее определение S было дано ранее.

ЛЕММА 1. $S\phi \Rightarrow T\phi$ (легкая индукция по построению ϕ).

ЛЕММА 2. $\Lambda = S \perp \Rightarrow S\phi$ (выполнимость логической аксиомы $\perp \Rightarrow \phi$).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА: ZFIDC выводимо предложение $\phi \Rightarrow S\phi$.

СЛЕДСТВИЕ. $S(\Lambda, T)$ есть τ -предикат.

Не проводя доказательства во всех деталях, рассмотрим выполнимость аксиомы экстенциональности и схемы выделения. В первом случае необходимо показать, что для произвольных термов p, q, t верно $p \approx q \wedge (q \in t^+ \vee \Lambda) \Rightarrow p \in t^+ \vee \Lambda$. Это доказывается разбором случаев с учетом $\Lambda \Rightarrow S\phi$ (напомним, что $\Lambda \Rightarrow T\phi$ для атомарных ϕ и что $\Lambda \Rightarrow T\perp$). В случае аксиомы выделения берем константу-терм C_ϕ ту, для которой выводимо $\forall y (y \in C_\phi \Leftrightarrow \phi(y))$, а в качестве второй компоненты берем $X = \{q \in \Delta \mid S\phi(q)\}$. Теперь $t = C_{\phi, X}$ и схема выделения проверяется без труда, однако необходимо доказать экстенциональность множества X , что использует индукцию по построению формулы ϕ . Однако в отличие от [2] и [3], необходимо наложить дополнительное требование на предикат T : если $t \approx q \wedge T\phi(q)$, то $T\phi(t)$. Для ряда конкретных предикатов T это требование удастся доказать без дополнительных требований, однако в общем случае это сделать не удалось. Рассматривая доказательство схемы подстановки, отметим, что внешним образом используется также схема подстановки. Остается еще проверить выполнимость схемы ε -индукции, аксиомы бесконечности и аксиомы двойного дополнения множеств (аксиомы DC), но это делается по аналогии с [3]. Здесь необходимо отметить, что внешним образом нигде не использовались никакие специальные принципы, кроме DC, а также полный закон исключенного третьего. Таким образом, сохраняется нейтральность доказательства.

Операция получения нового S позволяет также получить все метаматематические результаты, в которых участвует операция Сморинского. Пусть M_i – семейство моделей Крипке для ZFI. Определим модель $M = (\Sigma_i M_i)'$ (операция Сморинского): остов M есть прямая сумма логических остовов M_i , с добавлением нового наибольшего элемента a (моменты из разных M_i – несравнимы). Предметная область a определяется стандартно и теперь M – также модель ZFI.

Теперь поступаем так: $T_i\phi \Leftrightarrow x_i \models \phi$ (x_i – модели M_i) и $S = S(\perp, A, \Pi_i T_i)$, где $A\phi = \phi$ – истинна в стандартной модели (ϕ – атомарное предложение). Тогда $S\phi = a \models \phi$.

Отметим следующее: все приведенные здесь результаты касаются только односортной теории множеств и здесь в качестве приложения можно получить результат из [2] (хотя модель, предложенная в [2], отличается от нашей). Если $T\phi \Leftrightarrow ZFIDC$ выводимо ϕ , то результат Д.Майхилла получается так: пусть ZFIDC выводимо $\exists x\phi(x)$, тогда $S(\exists x\phi(x))$, а теперь найдется терм t такой, что $S\phi(t)$ и, следовательно, $T\phi(t)$, т.е. $ZFIDC \models \phi(t)$ (мы сейчас не различаем t и t' , так как в соответствующих теориях они выводимы

одновременно). Свойство дизъюнктивности для теории ZFIDC доказывается аналогично с использованием того же предиката T . Все остальные результаты, связанные с использованием моделей типа реализуемости и имеющие место для интуиционистской арифметики HA , также могут быть «подняты» на уровень теории множеств, однако технически проще рассматривать теорию множеств с двумя сортами переменных и с интуиционистской арифметикой на первом уровне (см. [3]; в этом случае предикат A , определенный на атомарных арифметических формулах (см. выше), может быть использован так же, как в [1]). Берем в этом случае $A\psi \Leftrightarrow \psi$ истинно в стандартной модели теории множеств $\forall \Lambda$ и $T \Leftrightarrow A$, но уже для всех формул, где $\Lambda \Leftrightarrow \exists n (ZFIDC \models \varphi(n, x))$, где x – набор только переменных по множествам. Пусть $S = S(\Lambda, T, T)$. Нам достаточно показать, что $S \perp$ при условии, что $ZFI2DC \vdash \forall n (\varphi(n, x) \vee \neg \varphi(n, x)) \wedge \neg \forall n \neg \varphi(n, x)$. В силу выводимости второго члена конъюнкции $S \vdash \forall n \neg \varphi(n, x)$, т.е. достаточно показать $S \vdash \neg \varphi(n, x)$ или $\forall n S \vdash \neg \varphi(n, x)$. Если ZFI2DC выводимо отрицание $\varphi(n, x)$, выполняется $S \vdash \neg \varphi(n, x)$ и выполняется требуемое заключение $S \perp \Leftrightarrow \Lambda \Leftrightarrow \exists n (ZFIDC \text{ выводимо } \varphi(n, x))$. Если же выводимо $\varphi(n, x)$, то $S \perp$ по смыслу. Итак, $S \perp$ верно всегда, т.е. в ZFI2DC выводимо $\varphi(n, x)$ для некоторого натурального числа n при фиксированных параметрах x . Заметим, что $S\varphi$ выполняется для всякой формулы нашего языка, т.е. отношение S – тривиально, однако наше доказательство допустимости сильного правила Маркова с параметрами только по множествам отнюдь не является тривиальным.

Рассмотрим еще некоторые интересные приложения полученной выше ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ и ЛЕММ 1 И 2. Хорошо известно (см. [1]), что принцип P не является выводимым в интуиционистской арифметике, однако (см. пункт б) ниже) совместим с последней при добавленном тезисе Черча (но не принципе Маркова, даже слабом). Аналогичные результаты можно получить и на уровне теории множеств ZFI2DC (и перенести их затем на односортную теорию множеств ZFIDC). Здесь мы докажем допустимость принципа P без параметров по натуральным числам, но с параметрами по множествам в ZFI2DC. УТВЕРЖДЕНИЕ: если в ZFI2DC выводимо $\neg \varphi \rightarrow \exists y \psi(y)$, то в ZFI2DC выводимо для некоторого натурального n $\neg \varphi \rightarrow \psi(n)$. В качестве Λ возьмем метапредложение «ZFIDC выводит $\neg \neg \varphi$ » и пусть $T\psi \Leftrightarrow ZFI2DC \text{ выводимо } \neg \varphi \rightarrow \psi$, а в качестве A -предиката берем T , ограниченный на атомарные формулы (здесь φ – фиксированное предложение языка теории множеств). Полагаем теперь $S = S(\Lambda, A, T)$. Нетрудно видеть, что T – r -предикат (если выводимо

$\neg\varphi \rightarrow \psi$ и если выводимо $\neg\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \eta)$, то, конечно, выводимо $\neg\varphi \rightarrow \eta$). Теперь предположим, что выводима формула $\neg\varphi \rightarrow \exists y\psi(y)$. В силу ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ $S(\neg\varphi \rightarrow \exists y\psi(y))$. Нетрудно также видеть, что выполняется $S(\neg\varphi)$ (так как $S\varphi \Rightarrow S\perp$ и $T(\neg\varphi) \Leftrightarrow$ выводимо $\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$; если $S\varphi$, то $T\varphi$ и выводимо $\neg\varphi \rightarrow \varphi$, а это противоречие, следовательно $S\perp$). Следовательно, $S(\exists y\psi(y))$, т.е. $S\psi(n)$ для некоторого натурального n , а тогда $T\psi(n)$, т.е. «ZFI2DC выводимо $\neg\varphi \rightarrow \psi(n)$ » для некоторого n , что и требовалось доказать.

В качестве другого интересного приложения рассмотрим следующий результат для ZFI2DC: если формула $\varphi(n, x)$ с параметрами по множествам (но без параметров по натуральным числам) разрешима, т.е. имеет место выводимость формулы $\forall n(\varphi(n, x) \vee \neg\varphi(n, x))$, и если в ZFI2DC выводимо $\neg\neg\exists n\varphi(n, x) \rightarrow \exists n\varphi(n, x)$, то в ZFI2DC выводимо $\exists n\varphi(n, x)$ или выводимо $\forall n\neg\varphi(n, x)$ (далее мы не пишем параметры x , входящие в формулу). Сделаем одно замечание, связанное со спецификой односортной теории ZFIDC: если в ней выводимо $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x))$, то в ней выводимо $\forall x\varphi(x)$ или выводимо $\forall x\psi(x)$; конечно, в арифметике НА такой результат невозможен. Доказательство: в качестве Λ берем такое утверждение «ZFI2DC выводимо $\forall n\neg\varphi(n)$ и полагаем $T\psi \Leftrightarrow$ ZFI2DC выводимо $\exists n\varphi(n) \rightarrow \psi$ (как обычно, φ – фиксированная формула с одной свободной переменной по натуральным числам). Теперь определяем $S = S(\Lambda, T, T)$. Легко видеть, что верно $S(\neg\neg\exists n\varphi(n))$ (это доказывается по аналогии с доказательством $S(\neg\varphi)$ в предыдущем приложении). Теперь, если $S(\neg\exists n\varphi(n))$, то в ZFI2DC выводимо $\forall n\neg\varphi(n)$ (это доказывается так: $S(\neg\exists n\varphi(n)) \Rightarrow T(\neg\exists n\varphi(n)) \Rightarrow$ ZFI2DC выводимо $\exists n\varphi(n) \rightarrow \neg\exists n\varphi(n)$, т.е. не может быть выводимо $\exists n\varphi(n)$ (так как мы, конечно, предполагаем, что наша теория непротиворечива), а тогда ZFI2DC выводимо $\forall n\neg\varphi(n)$). Так как $S(\neg\neg\exists n\varphi(n))$ и так как ZFI2DC выводимо $\neg\neg\exists n\varphi(n) \rightarrow \exists n\varphi(n)$, то мы получаем $S(\exists n\varphi(n))$, и найдется такой n , что $S(\varphi(n))$. Теперь делаем разбор случаев: если ZFI2DC выводимо $\varphi(n)$, то в ZFI2DC выводимо и $\exists n\varphi(n)$, а если в ZFI2DC выводимо $\neg\varphi(n)$, то, в силу ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ, $S(\neg\varphi(n))$ и, следовательно, $S(\varphi(n)) \Rightarrow S\perp$, но так как имеет место $S(\varphi(n))$, то получаем $S\perp$, и, таким образом, в ZFI2DC выводимо $\forall n\neg\varphi(n)$. Наше УТВЕРЖДЕНИЕ полностью доказано.

Сформулируем также без доказательства два утверждения, которые можно «поднять» на уровень теории множеств ZFI2DC:

а) можно построить формулу $\varphi(n)$ с одним параметром по натуральным числам такую, что в ZFI2DC нельзя вывести

$\exists n \varphi(n) \rightarrow \exists n (\varphi(n) \wedge \forall m (m < n \rightarrow \neg \varphi(m)))$ (принцип существования наименьшего числа с данным свойством);

б) можно найти предложение φ и формулу $\psi(y)$ с единственным натуральным параметром такие, что в ZFU2DC не выводится $(\neg \varphi \rightarrow \exists y \psi(y)) \rightarrow \exists y (\neg \varphi \rightarrow \psi(y))$ (упоминавшийся выше принцип P).

ЛИТЕРАТУРА

1. Драгалин А.Г. Новые виды реализуемости и правило Маркова // ДАН СССР, 1980.- т.251, № 3.- С.534-537
2. Myhill J. Some properties of intuitionistic Zermelo-Fraenkel set theory // Lecture Notes in Mathematics. 1973. V. 337. P.206-231.
3. Khakhnian V. The Markov's Rule is admissible in the Set Theory with Intuitionistic Logic // Lecture Notes in Computer Science, 1997. V. 1289. P. 163-167.
4. Smorynski C.A. Application of Kripke models // Lecture Notes in Mathematics. 1973. V. 344. P. 324-391.

А.В. Чагров

К ВОПРОСУ ОБ ОБРАТНОЙ МАТЕМАТИКЕ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКИ*

Abstract. *The problem of eliminability of Axiom of Choice from the metatheory of propositional modal logics is discussed. Using of the language of modal formulas is proposed. Three examples of applications of this language are given: the Blok's theorem on the degree of incompleteness; a logic without immediate predecessors; the finite axiomatizability of tabular logics.*

В настоящее время исследования по модальной логике находятся на этапе развития математических средств изучения семейств модальных логик в виде многообразий алгебр и близких к ним многообразий логических матриц, реляционной семантики (семантики обобщенных шкал) и их приложений к исследованию разнообразных свойств как самих логик, так и их совокупностей (решеток). Обращает на себя внимание большая неэффективность используемых средств: практически все они обосновываются в предположении аксиомы выбора. Для получения результатов о довольно финитно формулируемых объектах, каковыми являются пропозициональные модальные системы, используются столь нефинитные методы. В каких случаях такое использование неизбежно? Оказывается, из доказательств многих результатов модальной логики аксиому выбора можно элиминировать. Это относится к теореме Блока о степени неполноты нормальной модальной логики, построению логик без непосредственных предшественников, конечным аксиоматизациям табличных логик и некоторым другим.

При подготовке книги [4] авторам в полной мере пришлось убедиться в справедливости слов Владимира Александровича Смирнова, сказанных им во вступительной статье к [1]: «При построении семантик как для классической логики, так и для неклассических логических систем используются понятия и методы теории множеств, алгебры и других разделов логики и математики. Но использование достаточно богатых технических средств не должно скрывать логической и философской сути изучаемых проблем. Разработка модальных и интенциональных логик

* В основу статьи положен текст одноименного доклада автора на «Смирновских чтениях» 1999 г. Окончательный текст подготовлен при поддержке гранта РГНФ 99-03-19706 и гранта РФФИ 00-06-80037.

ориентирована по преимуществу на проблемы философского характера. Поэтому нередко рассматриваемый раздел логики называют философской логикой».

В настоящее время модальная логика стала весьма развитым разделом математической логики, подчеркнем, что именно *математической*. Это вовсе, конечно, не означает, что не происходило или не происходит ее развитие как раздела философской логики. Впрочем, не хотелось бы считать обсуждаемый раздел логики лишь как раздел, обслуживающий философию; хорошо известно, что модальная логика находит многочисленные приложения и в исследованиях, изначально не направленных на философское осмысление логических проблем определенного рода: в теоретическом программировании, исследованиях по искусственному интеллекту и пр. Не будем углубляться в проблему очерчивания области таких приложений, поскольку рассматриваемые ниже аспекты модальной логики важны для *любых* приложений, а философская логика, хоть и «одна из ...», несомненно стоит в ряду первой. Имеется в виду, что современная модальная логика является, кроме прочего, и самостоятельным предприятием, производительные силы которого не всегда направлены на удовлетворение «внешних запросов»: решение проблем философского или иного содержательного характера. Многие направления исследований имеют столь характерный для продвинутых разделов математики самодостаточный вид, когда и постановка задач, и их решение, часто технически весьма изощренное, происходят в отрыве от изначального содержательного истолкования изучаемых понятий. Поэтому разумно задаваться вопросом об интерпретации получаемых математических результатов. Так вот, одним из не всегда отчетливо понимаемых препятствий к этому может служить именно применяемый математический аппарат. Насколько он адекватен решаемым проблемам? Не привносит ли он в решения содержательных проблем со своей спецификой, исходящей из методологических, философских воззрений постановщиков, аспекты, чуждые этим воззрениям? Не пытаюсь ответить на эти вопросы в каждом конкретном случае, взглянем на них *отстраненно*: где в модальных исследованиях используются «слишком сильные» средства, и насколько они влияют на получаемые результаты. Для понимания этого полезно взглянуть на ход развития или, лучше сказать, чтобы не быть жестко связанным хронологией, сделать методологические «срезы» развития модальной логики.

Если проследить, хотя бы вкратце, историю развития современной модальной логики, можно заметить, что она может быть

грубо разделена на три этапа или уровня, отчасти налагающихся друг на друга, и более того, деление на этапы является скорее идейно-методологическим, а не хронологическим; к примеру, некоторые выходящие сегодня работы по модальной логике можно по их направленности, сознательно используемой технике смело отнести к первому этапу, несмотря на то, что в этих работах явно или неявно участвует весь предыдущий опыт. Отметим (без претензий на какое-либо подобие полноты описания картины) некоторые моменты, в определенной степени характеризующие эти этапы или, если угодно, уровни. Еще раз обратим внимание на нехронологичность этапов: по времени друг за другом (в какой-то мере) расположены лишь их начала, о каждом из них нельзя сказать, что он закончился¹. Грубость описания отчасти может быть оправдана тем, что мы не даем точных ссылок, указывая иногда лишь фамилии исследователей; точную же информацию можно найти, например, в [2], [1], [4] и др. источниках.

Первый этап

Это этап формулировки разнообразных модальных систем с исследованием вопросов их взаимоотношений, проводившимся, как правило, с помощью построения выводов аксиом одних систем в других системах и доказательства невозможности таких выводов с использованием специально подбираемых конечных матриц с небольшим, не превосходящим большей частью восьми, числом элементов. Этот этап по существу соответствует деятельности К.И.Льюиса и довольно точно отражен в книге Р. Фейса «Модальная логика» [2]; см. именно часть, принадлежащую самому Р. Фейсу. Обращает на себя внимание стремление вводить новые модальные логические системы весьма осторожно, всесторонне содержательно проанализировав применяемые для построения систем новые аксиомы. В это время адекватная точно сформулированная семантика модальных систем отсутствует, точные постановки задач, требующих точных математических решений немногочисленны. Помимо создания некоторого естественного спектра логических систем и выявления их взаимоотношений имеются несколько крупных реальных достижений, полученных с помощью

¹ Как не добавить к списку К. Пруткова — «Три дела, однажды начавши, трудно кончить...» — и указываемые далее этапы развития модальной логики. Впрочем, здесь же следует не преминуть добавить и многое другое, например: этапы процесса математизации всякого знания по И.А. Акчуруну (см.: *Акчурин И.А. Место математики в системе наук // Вопросы философии. 1967. № 1*). Аналогии здесь вполне уместны, параллели с нашими этапами очевидны.

математического взгляда на эти системы и, несомненно, очень полезных для содержательного понимания некоторых существенных черт модальной логики.

Первоначально свои модальные системы К.И.Льюис формулировал, используя язык классической пропозициональной логики лишь на стадии определений исходных понятий, и взаимоотношения его систем с классической логикой были затушеваны. Впрочем, системы К.И.Льюиса самоценны и их введение несомненно является важнейшим достижением. Однако к этому примыкает еще одно важнейшее наблюдение: в начале 30-х годов XX века² К.Гедель ввел, как оказалось, одну из систем К.И.Льюиса – систему **S4**, выделив в ней классическую часть, т.е. модальная система получается из *классической* с помощью а) обогащения языка классической логики модальными операторами, б) добавлением к аксиомам и правилам вывода классической логики аксиом и правил вывода, описывающим желаемые свойства модальных операторов. Заметим, что нашим соотечественником И.Е.Орловым в конце 20-х годов метод Геделя был предвосхищен: описываемым образом им была аксиоматизирована система, близкая к **S4**. Таким образом, классическая логика является не противовесом модальной, а той базой, на которой естественно строятся (покоятся?!) модальные системы. Впрочем, этого, по-видимому, следовало ожидать, памятуя о модальной силлогистике Аристотеля, которую он начинал исследовать, лишь основательно разработав немодальную.

Помимо различных точных формулировок модальных систем, что хотя и важно само по себе, но является, конечно, отправной точкой для *точных* (читай: *математических*) модальных исследований, на этом этапе сразу же нашлись их применения. Первой «древней» проблемой модальной логики, решение которой требовало математически точной постановки и которое действительно было получено математическими средствами, была проблема итерированных модальностей. Оказалось (В.Парри), что точно сформулировав принимаемые модальные принципы, мы можем точно выяснить, в каких случаях модальности, полученные из «элементарных» модальностей *необходимо* и *возможно* их взаимодействием («возможно, что необходимо, что ...» и т.п.), совпадают, т.е. сводятся друг к другу, а также полностью описать совокупности несводимых модальностей.

² Далее везде слова «XX века» при указании временных периодов будут опускаться.

Еще одним модальным достижением можно считать обнаруженное почти сразу после введения льюисовских систем модальное истолкование изначально немодальных логических феноменов – идея погружения интуиционистской логики в модальную (И.Е.Орлов, К.Гедель).

Несмотря на эти два явно «положительных» момента, связанных с математическим разъяснением модальной логики, в какой-то степени могущих вызвать энтузиазм логиков, пытавшихся математическими средствами решать философские проблемы модальной логики, было обнаружено, что математическое содержание далеко не столь тривиально, как можно было бы надеяться: практически все представляющие интерес модальные системы не являются табличными, т.е. конечно-значными (К.Гедель, Дж.Дугунджи).

Второй этап

На этом этапе происходит построение точной семантики исследуемых модальных систем вначале в виде семантики алгебр (А.Тарский, Дж.Маккинси), затем в виде семантики Крипке (С.Крипке). Развитие модельной техники позволяет на этом этапе успешно решать задачи, ставшие стандартными: о финитной аппроксимируемости, разрешимости, полноте (по Крипке) модальных систем. Достаточно представительно достижения этого этапа продемонстрированы в [1] и в приложениях в [2].

Одним из основных технических моментов в исследованиях этого этапа оказывается конструкция Линденбаума в разных формах: в форме построения алгебр Линденбаума в случае обоснования алгебраической полноты, в форме обоснования существования максимальных непротиворечивых множеств формул при доказательствах полноты по Крипке с помощью канонической модели. Справедливости ради следует отметить, что первые результаты о полноте по Крипке были получены без использования столь неэффективных рассуждений. Техника, использованная в работах самого С.Крипке, отличалась заметным стремлением к финитности применяемых средств, она в общем-то близка к генценовским методам. Однако довольно быстро произошел переход к технике канонических моделей, которая и стала наиболее применяемой.

Помимо многочисленных «положительных» результатов, соответствующих представлениям об изучаемых системах – пропозициональный уровень, естественность свойств для естественным образом выбранных для изучения модальных систем, возникли и оказавшиеся первоначально неожиданными контрпримеры ко многим свойствам: (конечно-аксиоматизируемые) логики, которые

не финитно аппроксимируемы, неполны по Крипке, не являются разрешимыми и др. При этом для контрпримеров использовались специально для этого построенные логики. Их введение не оправдывалось ничем иным, кроме вопроса: а может ли логика (не) обладать таким-то и таким-то свойством. Любопытно отметить, что самый первый пример неполной по Крипке (временной, т.е. модальной с двумя сопряженными модальностями) логики в своем обосновании весьма существенно использовал аксиому выбора (см. работу С.К. Томасона в [1]), причем не видны пути возможной ее элиминации из доказательства.

Третий этап

Последний этап — переход от отдельных модальных систем, сформулированных либо для формализации содержательных представлений о модальностях, либо для предоставления контрпримеров для указания ограничений в использовании имеющегося математического инструментария, к классам (решеткам) логик, переход от (порой весьма технически сложного) решения единичных вопросов о наличии или отсутствии того или иного свойства у модальной системы к созданию методов, подчиняющих себе для решения обширные совокупности логик. Типичной формулировкой результатов является форма: «Если аксиомы логики обладают таким-то свойством, то логика обладает эдаким свойством». То есть интересы смещаются от конкретных систем к произвольным; вместо вопросов вроде «обладает ли данная система данным свойством», «каковы соотношения между данными системами» и даже «существует ли система с данным свойством», «существует ли система, расположенная строго между данными системами» и т.п. на первый план выдвигаются вопросы о структуре решетки логик *в целом*, об описании (по возможности полном) *совокупностей логик*, обладающих интересующим нас свойством. Столь общо ставимые задачи потребовали введения и соответствующего мощного математического аппарата, адекватного, во-первых, по общности (т.е. семантика шкал Крипке в своем изначальном виде заведомо не годится), а во-вторых, удобного и наглядного в применении (тем самым семантика алгебр не является этим аппаратом).

Начало 70-х ознаменовалось не только обнаружением многочисленных «отрицательных» примеров слабости имеющихся на то время семантических конструкций, но и введением некоторых типов семантик, вполне соответствующих только что сформулированной задаче.

Справедливости ради заметим, что еще ранее, в 60-е и даже отчасти в 50-е, использовался адекватный семантический аппарат исследования пропозициональных (в дальнейшем и более высокого порядка) логик — теория многообразий алгебр. (Напомним, что совокупность алгебр называется многообразием, если она состоит из *всех* алгебр, в которых истинны тождества из некоторой фиксированной совокупности. Так, к примеру, все булевы алгебры образуют многообразие.) Исторически это использование было подготовлено интенсивными исследованиями эквациональных логик в 50-х.

Отличие семантики многообразий алгебр от семантики алгебр состоит в предоставлении в последнем случае возможности изучения именно совокупностей логик в их взаимоотношениях: соответствие «логика $L \Leftrightarrow$ совокупность алгебр, в которых истинны все формулы из L » является дуальным изоморфизмом решетки логик и решетки многообразий соответствующих алгебр (считаем рассматриваемый класс логик фиксированным). Это позволяет изучать решетки многообразий алгебр вместо решетки логик, используя разработанную в недрах алгебры технику.

Обнаружение реляционной семантики (семантики обобщенных шкал) (Д.Макинсон, С.К.Томасон), подготовленное еще теоремой М.Стоуна о представлении дистрибутивных решеток и многочисленными ее обобщениями (Г.Биркгоф, Б.Йонссон–А.Тарский), позволило ввести в указанное соответствие ту оправданную содержательно компоненту, которая отличает семантику Крипке от семантики алгебр: возможные миры (Г.Лейбниц) с отношением достижимости между ними (С.Крипке). В результате мы получаем соответствие «логика $L \Leftrightarrow$ совокупность обобщенных шкал, в которых истинны все формулы из L », обладающее достоинствами семантики многообразий алгебр (в частности, соответствие также является дуальным изоморфизмом решеток) и возможностью использования наглядного представления семантических конструкций. Заметим, что здесь вместо обобщенных шкал можно использовать и их специальные варианты: рафинированные обобщенные шкалы, дифференцированные обобщенные шкалы, дескриптивные шкалы. Мы не будем в этом тексте вдаваться в эти детали, хотя такие замены порой дают значительные технические преимущества при доказательствах многих результатов.

Не вдаваясь здесь в подробности достижений третьего этапа, отошлем читателя за информацией, например, к [4]. Отчасти ниже мы некоторых из них коснемся. А сейчас обратимся к вопросу

Что есть модальная логика?

Надо сказать, что указанное соответствие между логиками и классами обобщенных шкал, ввиду того, что оно устанавливается с теоремы Стоуна о представлении, заново ставит перед исследователем один из важнейших методологических вопросов: *что есть модальная логика?* Вопрос, казалось бы, если и не праздный, то, во всяком случае, не имеющий прямого отношения к математике. Однако именно точность соответствия между логиками и совокупностями семантических конструкций позволяет утверждать эквивалентность следующих двух видов ответов на него:

- *модальной логикой является всякая совокупность модальных формул, содержащая некоторую минимальную совокупность, (например, это минимальная нормальная модальная логика **K**) и замкнутая относительно некоторого разумного набора правил вывода (в который обязательно входит правило подстановки и правило *modus ponens*, но по договоренности может быть, например, и правило Геделя³);*

- *модальной логикой является всякая совокупность модальных формул, истинных в некотором классе обобщенных шкал.*

Надо сказать, что эти два подхода к определению модальных логик имеют свои исторические корни. Совсем уж грубо, но отчасти верно будет приписать Аристотелю первый подход, а Лейбницу – второй. Как уже отмечено, подходы эквивалентны, а потому выбор одного из них – дело вкуса и/или технического предпочтения⁴. Однако так ли это? А что будет, если отказаться от некоторых не столь уж очевидных математических принципов, лежащих в основе обоснования этой эквивалентности: аксиомы выбора или даже ее используемых в данной ситуации слабых вариантов?

Последний вопрос совершенно не исследован. Связано это с определенной традицией. Дело в том, что совокупности логик в целом исследуются большей частью математиками, а это типичная

³ В данном рассмотрении мы будем придерживаться именно этой договоренности. Это делается лишь для краткости. Если правило Геделя не постулировать, то ситуация с рассматриваемыми вопросами практически та же. Меняется (расширяется) лишь класс семантических конструкций: следует рассматривать матрицы вместо алгебр, в шкалах следует выделять так называемые действительные миры и т.д.

⁴ Последний аргумент оказался столь весомым, что во многих математических работах по модальной логике почти не встречаются сами модальные формулы (из которых состоят модальные логики!), а речь в них, хотя и идет о модальных логиках, ведется в терминах семантических конструкций того или иного вида, операций над ними и т.п.

ситуация практически в любой математической дисциплине: создан математический объект исследования, поставлены конкретные математические задачи об этом объекте, о содержательных его истоках в целях «чистоты» исследования лучше забыть, «абстрагироваться». Конечно, это приводит порой к замечательным результатам, но иногда и задает некоторую ограниченность исследований. В качестве примера укажем на то, что в большинстве математических работ по модальной логике изучаются *нормальные* логики, поскольку для них есть удобный математический аппарат – алгебры, многообразия алгебр, для изучения которых можно использовать разработанные в универсальной алгебре мощные средства. В то же время для значительной части интересных модальных логик, имеющих содержательное обоснование, правило Геделя не постулируется. В 80-е годы было обнаружено, что и для таких логик можно развить подходящий математический аппарат, обобщающий в известном смысле только что упомянутый. Есть надежда, что и исследования, основанные на отказе от использования дуальных изоморфизмов решеток логик и решеток, скажем, классов (многообразий) обобщенных шкал, приведут к любопытным результатам. По крайней мере, в этом случае может оказаться, что модальных логик *больше*, чем классов обобщенных шкал. Говоря точнее, ясно, что всякий класс обобщенных шкал определяет некоторую логику, но *a priori* вполне может существовать логика без такого определяющего класса.

Остановимся в этом обсуждении, приняв для дальнейшего обсуждения все упомянутые выше дуальные изоморфизмы как данность и, тем самым, приняв оба возможных ответа на вопрос «Что есть модальная логика?» как равносильные.

Постановка проблемы

Обращает на себя внимание существенное повышение неэффективности используемых математических средств, математического языка при переходе от одного этапа к следующему. Например, первоначальные доказательства полноты по Крипке носили вполне финитный характер, являясь семантико-табличными построениями, но уже совсем скоро (в работе Д.Макинсона, см. статью Г.Минца в [2]) для таких доказательств были предложены «упрощенные» конструкции, которые теперь известны под названием канонических моделей и в основе которых лежит лемма Линденбаума, и теперь канонические модели оказались наиболее используемым средством доказательств полноты и решения близких задач. Сказанное вовсе не означает, что метод канонических

моделей следует считать «плохим». На определенном этапе исследования он дает и технические преимущества в поиске направлений, по которым это исследование разумно вести, и основу для дальнейшего развития достигнутого как в смысле расширения области достижений, так и в плане углубленного изучения возможностей эффективизации достижений.

Однако во многих случаях, если не в большинстве, можно видеть некритическое использование математического аппарата, при котором достигаемая цель видится более ценной, нежели вопросы, относящиеся к основаниям средств, при этом применяемых.

Особенно сказанное относится к третьему этапу. Он характеризуется весьма свободным использованием средств теории моделей, алгебры и родственных разделов математики. Эта свобода не позволяет со всей отчетливостью (без глубокого анализа, во всяком случае) проследить за теми предположениями, которые оказываются в итоге лежащими в основе тех или иных результатов о модальных логиках. Здесь имеется в виду прежде всего теоретико-множественная аксиома выбора, ее варианты и разнообразные эквиваленты (лемма Линденбаума, в частности).

Например, аксиома выбора лежит в основе теории многообразий алгебр и близких к ним многообразий логических матриц. Да и один из «китов, на которых покоится» модальная логика теория двойственности просто немыслима без теоремы Стоуна о представлении дистрибутивных решеток, которая доказывается с существенным использованием аксиомы выбора. Впрочем, два других «кита» — теория полноты и теория соответствия (correspondence theory) — также используют массу результатов из теории моделей, доказываемых в предположении аксиомы выбора.

Нет никакой необходимости предъявлять какие-либо новые критические оценки самой аксиомы выбора, принятой на вооружение если и не всеми, то большинством ныне работающих математиков. Однако не может не вызывать удивления ситуация, когда для получения результатов о довольно финитно формулируемых объектах, каковыми являются пропозициональные модальные системы, используются столь нефинитные методы. Разумен вопрос: в каких случаях такое использование неизбежно? Его можно уточнить в двух формах:

- *жесткой*: из каких результатов модальной логики следуют те или иные варианты аксиомы выбора и других сильных предположений такого рода (континуум-гипотезы и пр.);

• *мягкой*: какие из результатов модальной логики можно доказывать финитными средствами, а также, в каких именно случаях какие именно варианты нефинитных средств используются.

Собственно именно жесткая форма вопроса и есть вопрос об обратной математике модальной логики. *Без его решения, на мой взгляд, невозможна адекватная философская оценка математических результатов о модальных логиках, хотя изначально модальная логика является областью логико-философских исследований и потому такая оценка необходима.* Однако, насколько мне известно, серьезная работа в этом направлении пока не проводилась, да и в данной работе пойдет речь о мягкой форме вопроса.

Что является адекватным языком исследователя модальных логик?

Обратимся к соответствию «логика $L \Leftrightarrow$ совокупность семантических конструкций, в которых истинны все формулы из L ». Здесь семантические конструкции понимаются достаточно широко, то есть это могут быть и алгебры (матрицы), и обобщенные шкалы, и др. объекты, образующие тотальный класс, т.е. когда всякая рассматриваемая логика полна относительно конструкций из этого класса.

Значительная часть вопросов, касающихся логик, может быть сформулирована в терминах принадлежности-непринадлежности логикам формул (или формул определенного вида, как, например, вопрос о противоречивости есть вопрос принадлежности формулы, выражающей «ложь»), что в свою очередь можно переформулировать в терминах совпадения-несовпадения логик (скажем, одна из них получается из другой добавлением интересующей нас формулы или совокупности формул). Другими словами, интерес представляет изучение поведения логик в их совокупности, выраженного в терминах включения и/или близких к ним решеточных терминах. Ясно, что *абсолютно адекватным* языком описания этого поведения и является язык, в котором включение (формул в логики, логик в логики) является основной элементарной составляющей. Но этот язык в силу своей абсолютной адекватности и абсолютно бесполезен: мы не слишком далеко уйдем от исходной проблемы в ее изучении, если о принадлежности формулы логике будем говорить лишь в терминах принадлежности этой формулы этой логике.

Переходя по выбранному нами соответствию к классам семантических структур, мы обогащаем язык исследователя средствами, позволяющими обсуждать эти семантические структуры. То, что

это может быть совершенно иной язык, ничем не напоминающий наш исходный язык логик и формул, можно проиллюстрировать на самом соответствии. Сравните применяемые определения (нормальной модальной) логики и многообразия (модальных) алгебр:

- нормальной модальной логикой является всякая совокупность модальных формул, включающая в себя минимальную нормальную модальную логику K и замкнутую относительно правил вывода: подстановка, *modus ponens* и правило Геделя;

- многообразием модальных алгебр является всякая непустая совокупность модальных алгебр, замкнутая относительно образования гомоморфных образов, прямых произведений и подалгебр.

Остановимся в нашем обсуждении, чтобы упомянуть еще один вопрос, являющийся в определенном смысле вариантом уже сформулированного:

Что является адекватным языком исследователя классов семантических структур, определяющих модальные логики?

Здесь под языком подразумевается больше понятийный аппарат, нежели средства обсуждения с его применением.

Разумеется, если мы изменим класс семантических структур, то изменится и язык, на котором можно обсуждать их свойства. Так, в случае обобщенных шкал используются понятия порождения подшкал, редукции (p -морфизмы), дизъюнктивные объединения шкал и др. В некоторых случаях удачным техническим средством является так называемая *лемма Йонссона*, первоначально использовавшаяся в теории многообразий универсальных алгебр. Уточним ее формулировку. Для читателей, не знакомых с предметом, поясним, что подпрямо неразложимые алгебры – алгебраический аналог реляционных моделей (моделей Крипке) с корнем, т.е. миром (точкой), из которого достигим любой другой мир модели за конечное число шагов; HC – класс всех гомоморфных образов алгебр из совокупности C ; SC – класс всех подалгебр алгебр из совокупности C ; $P_C C$ – класс всех ультрапроизведений алгебр из совокупности C . «Смысл» рассмотрения этих сущностей состоит в том, что во всяком многообразии всю «ответственность» за его свойства, устройство его членов несут подпрямо неразложимые алгебры, при этом взятие гомоморфных образов алгебры и ее подалгебр (в реляционной семантике, семантике Крипке этим операциям в определенном смысле соответствуют операции p -морфизма (редукции в терминах [4]) и порождения подмоделей) новой информации в алгебры не добавляют.

Лемма Йонссона (для модальных алгебр). Пусть A — *подпрямой неразложимой модальной алгебры*, $A \in \text{Var}C$. Тогда $A \in \text{HSP}_U C$.

Таким образом, все новое при порождении многообразия из данного класса алгебр появляется (точнее сказать, проявляется) только с помощью операции ультрапроизведения. Можно ли эти новые качества контролировать? Да! И в этом состоит достоинство леммы Йонссона. Как известно, ультрапроизведения сохраняют свойства, выражаемые формулами первого порядка (в сигнатуре модальных алгебр в данном случае). В результате появляется возможность «управлять» свойствами алгебр интересующего многообразия, заранее занося в порождающую совокупность алгебры с интересующими нас свойствами, записывая их на языке первого порядка в сигнатуре модальных алгебр.

Однако этот путь имеет два (по крайней мере) недостатка.

Первый — методологический. Какие бы свойства мы ни изучали по отношению к модальным логикам, мы заранее вынуждаем себя использовать аксиому выбора, необходимую для успешной работы оператора взятия ультрапроизведений.

Второй недостаток относится к более практическому аспекту исследований. Во многих случаях предпочтительнее использовать в исследованиях не алгебры, а иные семантические структуры. В этом случае приходится либо модифицировать лемму Йонссона (как в случае семантики обобщенных шкал), либо вообще от нее отказываться (как в случае окрестностной семантики).

В целях ликвидации обоих недостатков можно пойти по пути использования другого языка для «управления» семантическими структурами. Вопрос: какого? Ответ на него является столь же простым, как и ожидаемым: язык самих модальных формул!

Конечно, это не совсем точный ответ, поскольку, скажем, для ответа на вопрос о языке для исследования семантических структур и их классов надо вспомнить, что в таких исследованиях используются некоторые внешние по отношению к модальной логике понятия, в частности, уже упоминавшиеся: подалгебры, гомоморфизмы, прямые произведения и др., а также их реляционно-семантические аналоги: редукции (p -морфизмы), порождение подшкал и пр. Насколько удачен подбор этого понятийного аппарата? Вопрос не праздный, если вспомнить, что его источником является универсальная алгебра, изучающая «сразу все», без учета, вообще говоря, специфики алгебраических объектов, приспособленных к исследованию модальных логик.

И действительно, в некоторых случаях оказывается весьма полезным рассматривать нечто иное. Здесь имеется в виду описание устройства всех контрмоделей данной модальной формулы с

помощью таких понятий, как подмодель (подшкала), конфинальная подмодель (подшкала), закрытая область. Этот аппарат, известный как аппарат канонических формул (формул!), оказывается адекватным для случая, когда рассматриваются расширения модальной логики **K4**. Подробности его построения и применения можно найти, помимо [4], в содержательно богатом авторском очерке идей и полученных результатов [7]. Единственным «недостатком» этого аппарата является то, что он применим только в указанном (или близких к нему) классе логик и не распространим, скажем, на случай всех нормальных модальных логик, хотя фрагментарно его конструкции применимы в очень широких пределах.

Теперь обратимся к примерам непосредственного использования языка модальных формул.

Пример А. Теорема Блока

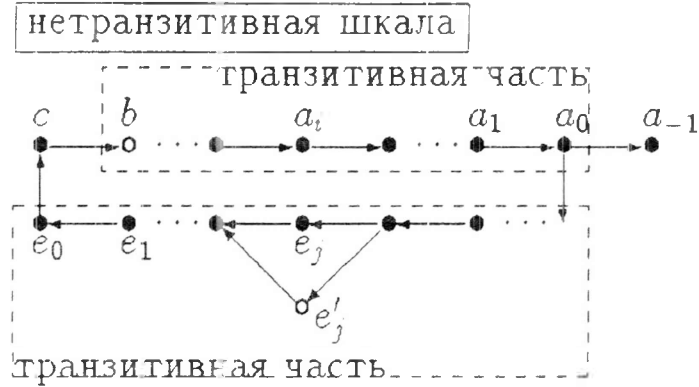
Одним из замечательных достижений 70-х явилось полное (!) описание ситуации с так называемой степенью неполноты нормальных модальных логик. Напомним, что степенью неполноты логики L является мощность множества логик, имеющих в точности те же шкалы Крипке, что и L . Ясно, что, например, логика **K**, противоречивая логика имеют степень неполноты 1, а всякая неполная по Крипке логика имеет степень неполноты не менее 2. Теорема Блока, о которой здесь идет речь, утверждает, что *всякая нормальная модальная логика имеет степень неполноты либо 1, либо континуум*. При этом имеется точная характеристика логик этих двух классов, которую мы здесь опустим в соответствии с нашими целями; эта характеристика и модернизация оригинального доказательства теоремы Блока в соответствии с излагаемыми здесь идеями изложены в [4].

По теореме Блока получается, к примеру, что степень неполноты логики $\mathbf{D} = \mathbf{K} \oplus \neg\Box\perp$ равна 1, в то время как для логики $\mathbf{K} \oplus \Box\perp$ (логики одной иррефлексивной точки⁵ как шкалы Крипке; будем далее изображать эту точку и шкалу из этой точки символом $\bullet$) она континуальна. Вот этот последний факт и будет нашей первой иллюстрацией.

Мы собираемся предъявить континуальное семейство логик L_I , при $I \subseteq \omega - \{0\}$, единственной корневой шкалой Крипке которых является шкала, состоящая из одной иррефлексивной точки $\bullet$. Напомним, что шкала называется корневой, если в ней есть точка,

⁵ В соответствии с терминологией [4] точкой здесь называется то, что в семантике Крипке принято называть миром.

из которой любая другая точка достижима за какое-нибудь число шагов по отношению достижимости; очевидно, что всякая полная по Крипке логика определяется своими корневыми шкалами.



Определим L_I как логику обобщенной шкалы $F_I = \langle W_I, R_I, P_I \rangle$, шкала Крипке $\langle W_I, R_I \rangle$ которой изображена на рисунке. Здесь подшкалы, обведенные пунктирной линией, транзитивны, из a_0 достижимы все точки e_i и e'_j при $i < \omega, j \in I$, точки e'_i принадлежат W_I в точности для $i \in I$, семейство P_I состоит из множеств вида $X \cup Y$, т.ч. X — конечное или коконечное (т.е. дополнение которого конечно) подмножество $\{a_1, c, e_i, e'_j : i < \omega, j \in I\}$, а Y либо является конечным подмножеством $\{a_i : i < \omega\}$, либо имеет вид $\{b\} \cup Y'$, где Y' — коконечное подмножество $\{a_i : i < \omega\}$. Рутинную проверку того, что это действительно обобщенная подшкала — т.е. того, что P_I обладает необходимыми свойствами — опустим.

Заметим, что все точки F_I , за исключением b , характеризуются формулами без переменных. Например:

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &= \Box \perp, \quad \alpha_0 = \Diamond \Box \perp, \\ \alpha_{i+1} &= \Diamond \alpha_i \wedge \neg \Diamond^2 \alpha_i, \quad \gamma = \Diamond^2 \alpha_0 \wedge \neg \Diamond \alpha_0, \\ \varepsilon_0 &= \Diamond \gamma, \quad \varepsilon_{i+1} = \Diamond \varepsilon_i \wedge \neg \Diamond^2 \varepsilon_i, \quad \varepsilon'_{i+1} = \Diamond \varepsilon_i \wedge \neg \Diamond^+ \varepsilon_{i+1}, \end{aligned}$$

(α_i истинна только в a_i , γ — в c , ε_i — в e_i , ε'_j — в e'_j). По указанным свойствам этих формул получается, что если I отлично от J и $i \in I - J$, то ε'_i находится в разности $L_J - L_I$, т.е. эти логики различны, а значит, логик вида L_I столько, сколько имеется множеств $I \subseteq \omega - \{0\}$, т.е. континуум.

Покажем теперь, что если F — корневая шкала Крипке логики L_I , то F есть $\bullet$. Это легко получить с помощью леммы Йонссона, но мы поступим иначе (и тоже легко!), непосредственно используя язык модальных формул.

Итак, предположим противное: пусть F — корневая шкала Крипке логики L_I , а из ее корня u достижима по крайней мере одна точка. Поскольку $\alpha_{-1} \vee \alpha_0 \vee \Diamond \alpha_0 \vee \Diamond^2 \alpha_0 \vee \Diamond^3 \alpha_0 \in L_I$, одна из формул α_{-1} , α_0 , $\Diamond \alpha_0$, $\Diamond^2 \alpha_0$, $\Diamond^3 \alpha_0$ должна быть истинна в u (при любой

оценке, в силу отсутствия в формуле переменных), причем это ввиду выбора F (точнее, из-за того, что из u достижимо хоть что-то) не может быть α_1 , а потому в F имеется точка, в которой формула α_0 истинна. Используя тот факт, что $\alpha_0 \rightarrow \Diamond^2 \gamma \in L_I$, получаем точку x , в которой истинна γ . Заметим теперь, что

$$\gamma \rightarrow \Box(\Box_0(\Box_0 p \rightarrow p) \rightarrow p) \in L_I,$$

где $\Box_0 \varphi = \Box(\Diamond \alpha_0 \rightarrow \varphi)$. (Здесь используется то, что каждое множество $X \in P_I$ в случае $b \in X$ содержит некоторую точку a_i при $i > 0$.) Значит, при любой оценке в F в точке x истинна формула $\Box(\Box_0(\Box_0 p \rightarrow p) \rightarrow p)$. По определению γ имеется y , достижимый из x , в котором истинна формула $\Diamond \alpha_0$ и, кроме того, формула $\Box_0(\Box_0 p \rightarrow p) \rightarrow p$. Определим оценку V в F , положив $V(p) = \{z : yRz\}$, т.е. переменная p истинна в точности в точках, достижимых из y . Тогда в y истинна формула $\Box_0(\Box_0 p \rightarrow p)$, а значит и p и потому по выбору оценки точка y должна быть достижима из себя, т.е. рефлексивна. Теперь определим другую оценку V' , $V'(p) = \{z : yRz\} - \{y\}$, т.е. полагаем, что переменная p истинна в точности в точках, достижимых из y и отличных от y . Ввиду рефлексивности y мы вновь получаем, что в y истинна формула $\Box_0(\Box_0 p \rightarrow p)$, а значит и p , что противоречит выбору оценки. Таким образом, мы допустили неверное.

В результате мы установили, что $\bullet$ – единственная корневая шкала Крипке всякой логики L_I , а логик этих континуум.

Подведем некоторые итоги. Было представлено довольно краткое (с учетом выполнения некоторых рутинных упражнений вроде проверки истинности некоторых формул в изображенной выше шкале), прямое (т.е. без использования каких-либо сложных алгебраических фактов, требующих в свою очередь развития определенного аппарата) доказательство интересующего нас факта. Но помимо этого данный вариант доказательства открывает пути для некоторых обобщений, невозможных при оригинальном доказательстве. Имеется в виду вариант теоремы Блока по отношению к окрестностной семантике вместо семантики Крипке: как было установлено в [5] с помощью некоторой нетривиальной модификации указанных построений, для всякой нормальной модальной логики ее степень неполноты по Крипке и степень окрестностной неполноты совпадают. Это весьма неожиданный факт, если учесть, что окрестностная семантика по «силе» находится строго между алгебраической семантикой и семантикой Крипке; кроме того, окрестностная семантика имеет существенно второпорядковый характер, а посему обобщения леммы Йонссона здесь невозможны.

Пример Б. Логика без непосредственных предшественников

Любопытной задачей в описании решеток логик была в свое время задача нахождения в этих решетках интервалов, в которых больший конец не имеет непосредственных предшественников. Эта задача помимо ответа на вопрос о возможном устройстве решеток логик имела и иное значение: если потребовать, чтобы меньший конец был конечно-аксиоматизируемой логикой, то больший не будет иметь независимой аксиоматизации. Надо сказать, что вопрос о том, всякая ли модальная логика имеет независимую аксиоматизацию, стоял с тех пор, как было обнаружено, что не все модальные логики конечно-аксиоматизируемы. Первая часть задачи (т.е. без учета указанного дополнительного требования на меньший конец интервала) была решена В. Блоком в работе начала 80-х с помощью применения варианта леммы Йонссона, пригодного для применения к реляционной семантике, однако меньший конец (как, впрочем, и больший) построенного им интервала описывался семантически, причем в описании использовано множество квадратов натуральных чисел, что вызывает сомнение в возможности его конечной аксиоматизации (расстояния между соседними квадратами растут довольно быстро). С помощью техники модально-формульного описания «поведения» реляционной семантики М.В. Захарьящеву совместно с автором данных строк удалось в середине 90-х решить задачу полностью. Более того, оказалось, что логики без независимых аксиоматизаций существуют не только среди нормальных модальных логик, но и среди суперинтуиционистских, а кроме того, обнаружено много сопутствующих эффектов, например: *существует независимо аксиоматизируемое нормальное расширение S4, суперинтуиционистский фрагмент которого независимо аксиоматизируемым не является*. Что касается нормальных модальных логик, то в [8] найден весьма изящный, более простой, чем наш, пример логики без независимых аксиоматизаций. Приведем его. Это второй (правый) конец интервала $[L_1; L_2]$, где

$$L_1 = \mathbf{K4} \oplus \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p \oplus \Box \neg(\Diamond(\Box p \wedge p \wedge \neg q) \wedge \Diamond(\Box q \wedge q \wedge \neg p)) \oplus \\ \oplus \bigcap_{0 \leq i \leq 3} \Diamond p_i \rightarrow \bigcup_{0 \leq i \neq j \leq 3} (\Diamond p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j)) \oplus \\ \oplus \Diamond(\Box p \wedge p \wedge \neg q) \wedge \Diamond(\Box q \wedge q \wedge \neg p) \rightarrow \Diamond \Diamond(p \wedge p \wedge \neg q),$$

$$L_2 = L_1 \oplus \{ \neg(\Diamond(\Box^{n+1} \perp \wedge \Diamond^n \neg \perp \wedge p) \wedge \Diamond(\Box^{n+1} \perp \wedge \Diamond^n \neg \perp \wedge \neg p)) : n \geq 0 \}.$$

Поясним «смысл» аксиом логик L_1 и L_2 . Аксиомы L_1 , последовательно, «означают» в корневых шкалах: транзитивность и отсут-

ствие бесконечных цепей вида $x_1Rx_2Rx_3\dots$, всякая подшкала, отличная от самой шкалы, линейна, в шкале нет трех попарно несравнимых точек и, наконец, если из корня достижимы две несравнимые точки, то достижима точка, из которой достижима одна из этих точек. Несложно доказать, что L_1 полна относительно шкалы, состоящей из двух бесконечных несравнимых транзитивных, иррефлексивных цепей вида $\dots x_3Rx_2Rx_1$, которые достижимы из общего корня. Аксиомы L_2 , добавленные к L_1 , «означают» в корневых шкалах единственность точек, из которых достижимы лишь конечные цепи. Шкала, относительно которой полна L_2 , получится из описанной шкалы для L_1 , если добавить к ней сверху (т.е. считать достижимой их всех уже имеющихся точек) еще одну бесконечную транзитивную, иррефлексивную цепь вида $\dots x_3Rx_2Rx_1$. (Несложно доказать, что из аксиоматики L_2 можно выбросить любое конечное подмножество аксиом, добавляемых к L_1 ; их можно будет вывести из оставшихся.) Справедливости ради следует отметить, что при обосновании свойств интервала существенно используется последняя аксиома L_1 , которая, в частности, гарантирует в соответствии с известным результатом К. Файна полноту по Крипке всех расширений L_1 , а этот результат (полнота по Крипке всех нормальных модальных логик конечной ширины) в своем доказательстве использует аксиому выбора и неизвестно, насколько существенно. Впрочем, пример Б рассмотрен здесь с целью показать, что явное модально-формульное описание семантических конструкций позволяет довольно просто установить весьма тонкие результаты.

Пример В. Аксиоматизации табличных логик

Одной из естественных особенностей модальных логик является тот факт, что каждая семантически простая логика – табличная или, что то же самое, задаваемая одной конечной шкалой Крипке – является и синтаксически (точнее сказать, дедуктивно) простой: *всякая табличная логика имеет конечную аксиоматизацию*. Этот факт очень просто следует из весьма общего алгебраического результата К.А.Бейкера: всякая конечная алгебра с дистрибутивной решеткой конгруенций имеет конечный базис тождеств или, другими словами, *имеет конечно-аксиоматизируемую эквациональную теорию*. В свою очередь, результат К.А.Бейкера основывается на существенном использовании леммы Йонссона. Таким образом, мы оказываемся в «двойном капкане»: прежде всего, для изучения конечной (!) шкалы Крипке используется

аппарат, основанный на неограниченном применении аксиомы выбора, а кроме того, для получения самой конечной аксиоматизации и/или установления ее свойств необходимо вникать в детали доказательства теоремы К.А. Бейкера, которое проводится для алгебр общего вида.

Однако можно вполне обойтись и существенно более скромными средствами, дающими практически все, что можно установить об аксиоматизациях табличных модальных логик. Введем формулы

$$\alpha_n = \neg(\varphi_1 \wedge \Diamond(\varphi_2 \wedge \Diamond(\varphi_3 \wedge \dots \wedge \Diamond\varphi_n)\dots))$$

$$\beta_n = \bigwedge_{0 \leq m \leq n-1} \neg \Diamond^m(\Diamond\varphi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond\varphi_n),$$

где $\varphi_i = p_1 \wedge \dots \wedge p_{i-1} \wedge \neg p_i \wedge p_{i+1} \wedge \dots \wedge p_n$, при $1 \leq i \leq n$. В [4] доказывается, в частности, что: *логика, расширяющая К (с постулированием или без постулирования правил Геделя), таблична тогда и только тогда, когда для некоторого s ей принадлежит формула $\alpha_s \wedge \beta_s$; имеется эффективно вычислимая функция $f(s)$, такая, что все шкалы с корнем, в которых истинна формула $\alpha_s \wedge \beta_s$, имеют не более $f(s)$ точек.* Заметим, что доказательство настолько простое (в [4] оно занимает менее страницы), что может считаться упражнением; внутри этого доказательства используются канонические модели, но и их легко сделать финитно описываемыми, введя в рассмотрение совокупность модальных языков с конечными множествами пропозициональных переменных.

Пусть теперь L — табличная нормальная модальная логика. В соответствии с отмеченным фактом L является расширением логики $K \oplus \alpha_s \wedge \beta_s$ при некотором s . Этот же факт (второй пункт) обеспечивает нам, что *всякая табличная логика имеет конечное множество расширений и все они табличны, причем их шкалы имеют размер не более размера, определяемого функцией $f(s)$.* Все это дает нам существование неуплотняемой цепи нормальных логик $K \oplus \alpha_s \wedge \beta_s = L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_{k-1} \subset k = L$, т.е. при $1 \leq l \leq k-1$ других нормальных модальных логик, находящихся строго между логиками L_l и L_{l+1} , нет. Остается заметить, что если L' конечно-аксиоматизируема, $L' \subset L''$ и строго между L' и L'' логик нет, то L'' тоже конечно-аксиоматизируема (к аксиоматизации L' нужно и/или достаточно добавить любую формулу из разности $L'' - L'$). Некоторое более скрупулезное рассмотрение дает и алгоритм построения аксиоматизации табличной логики по описанию задающей ее шкалы.

Любопытно заметить, что для исследований совокупности табличных логик во многих случаях достаточно рассмотрения не их

аксиоматизаций, а факта наличия в каждой из них какой-нибудь из формул вида $\alpha_s \wedge \beta_s$. Именно так автором были получены результаты об алгоритмических проблемах, связанных с табличностью. Например, оказалось, что *алгоритмически неразрешима проблема табличности произвольной нормальной модальной логики; для всякой **непротиворечивой** табличной нормальной модальной логики L алгоритмически неразрешима проблема, является ли данная система аксиом (дополнительных к **К**) аксиоматизацией L* . И это лишь небольшая выборка из списка результатов, получаемых с помощью формул $\alpha_s \wedge \beta_s$.

Как видно, интересующие нас в приведенных примерах факты с использованием специфики модально-формульного описания свойств шкал получены буквально «на пальцах» и не требуют ничего, выходящего за очерченные нами рамки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Семантика модальных и интенциональных логик. М.: Прогресс, 1981. 424 с.
2. Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 1974. 520 с.
3. Baker K.A. Finite equational bases for finite algebras in a congruence distributive equational class // *Advances in Mathematics*. 1977. V. 24. pp. 207–243.
4. Chagrov A. , Zakharyashev M. *Modal Logic*. Oxford University Press, 1997. 605 p.
5. Chagrova L. On the degree of neighborhood incompleteness of normal modal logics // M. Kracht, M. de Rijke, H. Wansing, and M. Zakharyashev, eds. *Advances in Modal Logic*, volume 1. Stanford, CSLI Publications. 1998. P. 63–72.
6. Kracht M. *Tools and Techniques in Modal Logic* // *Habilitationsschrift*. Berlin, II. Mathematisches Institut. 1997.
7. Zakharyashev M. Canonical formulas for modal and superintuitionistic logics: A short outline // M. de Rijke (ed.). *Advances in Intensional Logic*. Kluwer Academic Publishers. 1997. P. 195–248.

СЛАБАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ – РЕСТИТУЦИЯ

Abstract. *The purpose of this paper is a restitution of a longstanding notion of weak-transitivity and a modal system, which may be identified with the set of formulas valid in all weak-transitive Kripke models. The modal system has a finite models property and can be axiomatized quite simple: it is the smallest normal logic to contain all instances of the formula $p \& \Box p \rightarrow \Box \Box p$. The modal system is an especially interesting as the logic of all topological spaces provided that the limit-operation, a fundamental topological notion, is treated as the diamond modality.*

Как известно, адекватная семантика модальной системы $K4$ определяется в терминах фреймов Крипке (X, R) с транзитивным отношением достижимости R . Вспомним, что почти полстолетия тому назад понятие транзитивности было предметом любопытной дискуссии в среде логиков (с участием Артура Прайора), материалы которой нашли отражение в печати и прореферированы Алонзо Черчем (см.[1]); приведу цитату из заключительной части этого реферата: “This is continuation of the discussion initiated in the XXIV 185(1,2). In spite of disagreements on this way, the polemic ends with all parties agreeing that notion of weak-transitivity of a relation R , characterized by $x \neq z \& xRy \& yRz \Rightarrow xRz$ must be distinguished from that of strong-transitivity, characterized by $xRy \& yRz \Rightarrow xRz$ ”. Мне кажется, что понятие слабой транзитивности точнее отражает значение слов «транзитивность» и «транзит» нашего обыденного языка; скажем, перелет из пункта x в пункт y и обратно (т.е. случай, когда $x=z$!) мы, пожалуй, не назвали бы транзитным. Так или иначе, достигнутый консенсус позволяет нам, наряду с «обычной» транзитивностью, пользоваться и слабой транзитивностью (= weak-transitivity); более того, мы отметим некоторые достоинства слабой транзитивности и покажем, что фреймы Крипке (X, R) со слабо-транзитивным отношением достижимости R характеризуют модальную систему (назовем ее $wK4$) с крайне простой аксиоматикой, которая

- .) является промежуточной между K и $K4$,
- .) финитно аппроксимируема и разрешима,
- .) обладает своеобразными расширениями, “минующими” систему $K4$, и, наконец,
- .) совпадает с модальной логикой топологических пространств, когда модальность $\Diamond$ выражает фундаментальную операцию топо-

логии, сопоставляющую множеству – его предельные точки! Хочется надеется, что предпринятая нами реституция слабой транзитивности и вместе с ней соответствующей модальной системы окажется не бесполезной.

Слабая транзитивность

Итак, пользуясь терминологией членов дискуссии, будем говорить, что бинарное отношение R *слабо транзитивно*, если из xRy и yRz мы заключаем, что xRz лишь в случае, когда $x \neq z$.

Пусть R – произвольное отношение на множестве X ; определим (подобно Бертрону Расселу) *отношение родства* (=ancestral) R^* .

Определение 1. $xR^*y \Leftrightarrow (xRy \text{ или } (x \neq y \text{ и существует путь } \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y \rangle (n > 0), \text{ ведущий из } x \text{ в } y, \text{ т.е. } xRx_1Rx_2 \dots x_nRy.$

Замечание. Путь $\langle x_1, x_2, \dots, x_n, y \rangle$ из x в y назовем

- (a) *безвозвратным*, если при любом i ($i \leq n$) $x \neq x_i$ и
- (b) *бесповторным*, если для любых i и j , из $i \neq j$ следует $x_i \neq x_j$.

Допустим, что при некотором $i \leq n$, $x = x_i$; поскольку “отрезок” $\langle x_{i+1}, \dots, x_n, y \rangle$ исходного пути также образует путь из x в y , то итерация такой процедуры “урезания” даст нам, в конце концов, безвозвратный путь из x в y . Допустим теперь, что $x_i = x_j$ при $i \neq j$ ($i < j$), т.е. существуют повторы; заметим, что после удаления последовательности $\langle x_{i+1}, \dots, x_j \rangle$ из исходного пути мы получим более “короткий” путь из x в y и, следовательно, повторение такой процедуры приведет к бесповторному пути. Таким образом, мы могли бы ограничиться в Определении 1 безвозвратными и бесповторными путями.

Лемма 1. Для любого отношения R , отношение родства R^* слабо транзитивно и $R \subseteq R^*$.

Доказательство. Включение $R \subseteq R^*$ следует непосредственно из определения; покажем слабую транзитивность отношения R^* .

Пусть $x \neq z$, xR^*y и yR^*z ; заметим, что если $x=y$ или $y=z$, то доказывать нечего; будем считать, что $x \neq y$ и $y \neq z$. Условия xR^*y и yR^*z порождают четыре случая: (1) xRy и yRz ; поскольку $x \neq z$ и последовательность $\langle y, z \rangle$ образует путь из x в z , то xR^*z . (2) xRy и ложно yRz ; тогда, так как $y \neq z$, то существует путь из y в z ; условие xRy позволяет присоединить y к началу и получить путь из x в z . (3) xRy ложно, но yRz ; так как $x \neq y$, то существует путь из x в y ; условие yRz , позволяет “присоединить” z к концу и получить путь из x в z . (4) оба условия xRy , yRz ложны; так как $x \neq y$ и $y \neq z$, то

имеются два пути: из x в y и из y в z . Ясно, что сочленение этих путей дает путь из x в z .

Лемма 2. Пусть $R \subseteq S$ и отношение S слабо транзитивно; тогда $R^* \subseteq S$.

Доказательство. Пусть xR^*y ; возможны два случая; если xRy , то, поскольку $R \subseteq S$, получаем xSy ; если xRy ложно, то существует путь $\langle x_1, x_2, \dots, x_n, y \rangle$ из x в y и, как мы заметили ранее, можно считать этот путь безвозвратным, т.е. $x \neq x_i$ при любом $i \leq n$. Покажем, что xSx_i при любом $i \leq n$ индукцией по i .

(1) $i=1$; так как xRx_1 и $R \subseteq S$, то xSx_1 ; (2) по индуктивному допущению имеем xSx_{i-1} ; из $x_{i-1}Rx_i$ получаем $x_{i-1}Sx_i$; так как $x \neq x_i$, то слабая транзитивность отношения S позволяет заключить xSx_i ; в частности, при $i=n$, получаем xSx_n и, так как x_nRy , то x_nSy ; из слабой транзитивности S имеем xSy .

Следствие 3. Для любого отношения R , отношение родства R^* является наименьшим, слабо транзитивным отношением, содержащим R .

Таким образом, как и в обычном, транзитивном случае, мы вправе называть R^* слабо транзитивным замыканием отношения R .

Лемма 4. Пусть бинарное отношение R симметрично; тогда его слабо транзитивное замыкание R^* также симметрично.

Доказательство. Пусть xR^*y ; тогда, если xRy , то из симметрии R имеем yRx и, следовательно, yR^*x ; если xRy ложно, то из xR^*y следует существование пути из x в y ; и, учитывая симметричность отношения R , “инверсия” того же пути дает нам yR^*x .

Пример. Пусть X – произвольное множество с по крайней мере двумя элементами и R – отношение “неравенства”, т.е. $xRy \Leftrightarrow x \neq y$. Легко увидеть, что R слабо транзитивно (и даже симметрично), но не транзитивно.

Модальная система $wK4$

Пусть K известная базисная нормальная модальная система с единственной аксиомной схемой $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ и с обычными правилами вывода, включая правило “боксирования” $p / \Box p$.

Определение 5. Модальная система $wK4$ получается из K постулированием в качестве дополнительной аксиомы формулы

$$(w) \quad (p \wedge \Box p) \rightarrow \Box \Box p,$$

т.е. $wK4 = K + (w)$.

Заметим здесь же, что в терминах оператора $\Diamond$ эту аксиому можно записать в виде

$$(w') \diamond \diamond p \rightarrow (p \vee \diamond p).$$

Легко заметить, что формула (w) доказуема в системе $K4 = K + \Box p \rightarrow \Box \Box p$ и, следовательно, система $wK4$ является промежуточной между K и $K4$.

Утверждение 6. Пусть (X, R) произвольный фрейм Крипке, т.е. R произвольное бинарное отношение на X . Следующие условия равносильны:

1. Фрейм (X, R) является $wK4$ -фреймом, т.е. аксиома (w) – общезначима в нем;
2. Отношение R слабо транзитивно.

Доказательство. Пусть во фрейме (X, R) общезначима формула (w') , иными словами, пусть для любого $A \subseteq X$ справедливо включение $ddA - A \subseteq dA$, где $dA = R^{-1}(A) = \{x \in X: \exists y(xRy \ \& \ y \in A)\}$; следовательно, имеем, когда $A = \{z\}$ – синглетон, $(*) dd(\{z\} - \{z\} \subseteq d(\{z\})$. Допустим, что $x \neq z$, xRy и yRz ; тогда $x \in R^{-1} R^{-1}(\{z\})$, $x \neq z$ и $(*)$ дают $x \in R^{-1}(\{z\})$, т.е. xRz .

Пусть теперь R слабо транзитивно и покажем, что формула (w') общезначима в (X, R) , т.е. для любого $A \subseteq X$ справедливо включение $ddA - A \subseteq dA$. Пусть $x \in ddA$; следовательно существуют $y, z \in X$, такие, что $xRyRz$ и $z \in A$.

Если x не принадлежит A , то, ввиду $z \in A$, получаем $x \neq z$ и слабая транзитивность R влечет xRz , следовательно, $x \in dA$.

Рассмотрим канонический (дескриптивный) фрейм (X, R) модальной системы $wK4$, т.е. семейство X всех максимальных, непротиворечивых множеств формул, содержащих все теоремы системы $wK4$, со стандартно определенным отношением R , а именно: $xRy \Leftrightarrow (\Box p \in x \Rightarrow p \in y)$ для любой формулы p .

Утверждение 7. Канонический фрейм (X, R) слабо транзитивен и, следовательно, является $wK4$ -фреймом.

Доказательство. Пусть $x \neq z$, xRy и yRz ; покажем, что xRz .

Допустим, что $\Box p \in x$; из $x \neq z$ следует, что для некоторой формулы q , $q \in x$ и $q \notin z$. Ясно, что $p \vee q \in x$, так как $p \rightarrow p \vee q$ тавтология, то (в системе K) имеем $\Box(p \rightarrow p \vee q)$ и $\Box p \rightarrow \Box(p \vee q)$; так как $\Box p \in x$, то $\Box(p \vee q) \in x$; из аксиомы (w) и $(p \vee q) \wedge \Box(p \vee q) \in x$ получаем $\Box \Box(p \vee q) \in x$ и, следовательно, $\Box(p \vee q) \in y$ и $(p \vee q) \in z$; но $q \notin z$ и, следовательно, $p \in z$.

Следствие 8. Семантическая полнота системы $wK4$

Модальная система $wK4$ характеризуется классом всех слабо транзитивных фреймов Крипке.

Метод фильтрации и система wK4

В этом разделе, воспроизводя метод фильтрации, мы почти дословно следуем Сегербергу [2]. Пусть $(X', R', |=')$ – произвольная модель и Ψ множество формул, замкнутое по подформулам. Определим отношение эквивалентности E на X' :

$x E y \Leftrightarrow$ для любой формулы $p \in \Psi$ ($x |= p \Leftrightarrow y |= p$).

Пусть X – фактор-множество, т.е. $X = \{E(x) : x \in X'\}$, и $|=$ отношение форсинга на X : $E(x) |= p \Leftrightarrow p \in \Psi \ \& \ x |= ' p$.

Фактор-модель $(X, R, |=)$ называется Ψ -*фильтрацией* исходной модели, если отношение R удовлетворяет условиям:

(1) $x R' y \Rightarrow E(x) R E(y)$ и для любой формулы p

(2) $E(x) R E(y) \Rightarrow (\Box p \in \Psi \ \& \ x |= '\Box p \Rightarrow y |= ' p)$.

Известно [2], что транзитивное замыкание наименьшей Ψ -фильтрации может не быть Ψ -фильтрацией, однако (см. [2], Лемма 2), если исходная модель транзитивна, то транзитивное замыкание наименьшей Ψ -фильтрации является Ψ -фильтрацией.

Модификацию на случай слабой транзитивности выражает

Лемма 9. Если исходная модель $(X', R', |=')$ слабо транзитивна, то слабо транзитивное замыкание R^* наименьшей Ψ -фильтрации R является Ψ -фильтрацией.

Доказательство. Так как $R \subseteq R^*$, то достаточно убедиться, что отношение R^* удовлетворяет фильтрационному условию (2). Допустим, что $a R^* b$ и $a |= '\Box p$, где a, b произвольные классы эквивалентности. Если $a R b$, то существуют $x \in a$ и $y \in b$, такие, что $x R y$; так как $a |= '\Box p$ и $x \in a$, то $x |= '\Box p$ и, следовательно, $y |= ' p$. Если $a R b$ ложно, то $a \neq b$ и существует путь $\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle$ из a в b . Ради краткости, рассмотрим лишь случай $n = 1$, т.е. $a R a_1 R b$. Из $a R a_1$ следует существование $x \in a$ и $x_1 \in a_1$, такие, что $x R x_1$; из $a_1 R b$ имеем $x_1 R' y$ для некоторых $x_1' \in a_1$ и $y \in b$; из $a \neq b$ следует, что существует $q \in \Psi$, такое, что $x |= q$, но $y \not\models q$ ложно. Допустим, что $x |= '\Box p$; ясно, что $x |= p \vee q$, и так как $x |= '\Box p$, то $x |= '\Box(p \vee q)$, следовательно, $x |= (p \vee q) \wedge '\Box(p \vee q)$; так как исходная модель слабо транзитивна, то в ней верна аксиома (w) и, следовательно, $x |= (p \vee q) \wedge '\Box(p \vee q) \rightarrow '\Box '\Box(p \vee q)$.

Тогда $x |= '\Box '\Box(p \vee q)$. Так как $x R x_1$, то $x_1 |= '\Box(p \vee q)$; но $x_1 E x_1'$ и, следовательно, $x_1' |= '\Box(p \vee q)$; так как $x_1' R y$, то $y |= (p \vee q)$; из ложности $y \not\models q$; следует $y |= p$.

Следствие 10. Модальная система wK4 - финитно аппроксимируема и характеризуется конечными слабо транзитивными фреймами.

Связь $wK4$ и $S4$

Начнем с некоторых эвристических соображений. Пусть (X, R) – произвольный $S4$ -фрейм, т.е. произвольное квази упорядоченное множество, и $X_0 \subseteq X$. Определим на том же множестве X отношение R_0 следующим образом:

(1) если $x \neq y$, то $xRy \Leftrightarrow xR_0y$ и (2) $xR_0x \Leftrightarrow x \notin X_0$.

Допуская вольность речи, можно это определение перефразировать следующим образом: отношение R_0 получается из R “удалением” рефлексивных петель в точках из предписанного множества X_0 (сохраняя остальные R -связи нетронутыми). Заметим, что когда $X_0 = X$, мы получаем иррефлексивное, слабо транзитивное отношение R_0 . Отметим также, что исходный фрейм (X, R) однозначно получается из (X, R_0) , восстановлением удаленных рефлексивных петель, т.е. положив $xRy \Leftrightarrow x = y$ или xR_0y . Нетрудно убедиться, что любое слабо транзитивное отношение R_0 на множестве X получается из своего рефлексивного компаньона R удалением рефлексивных петель в подходящих точках множества X . Эти “семантические” связи между $wK4$ - и $S4$ -фреймами позволяют установить следующую простую «дедуктивную» связь системы $S4$ с $wK4$. Вспомним известное (по крайней мере в контексте доказуемой логики) “расщепляющее” преобразование $\#$ формул p , состоящее в замене каждой подформулы формулы p вида $\Box q$ на $q \wedge \Box q$. Заметим, что преобразование $\#$ аксиомы “транзитивности” $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ системы $S4$ дает нам формулу, равносильную аксиоме (w) системы $wK4$. Действительно, $\# (\Box p \rightarrow \Box \Box p) = (p \wedge \Box p \rightarrow (p \wedge \Box p \rightarrow \Box (p \wedge \Box p)))$; легко видеть, что последняя формула равносильна (в системе K) формуле (w) .

Утверждение 11. (a) $S4 \vdash p \Leftrightarrow wK4 \vdash \#(p)$

(b) $wK4$ является наименьшим нормальным расширением системы K , в которое погружаема система $S4$ преобразованием $\#$.

Топологическая семантика $wK4$

В заключительной части своей фундаментальной работы [3], посвященной алгебрам с замыканием (=алгебраической семантике модальной системы $S4$), Мак-Кинси и Тарский замечают: “Like the topological operation of closure other topological operation can also be treated in an algebraic way. This may be especially interesting in regard to those operation which are not definable in terms of closure... An especially important notion is that of the derivative of a point set...” (см. [3], p.182). Далее приведено

Определение 12. (Мак-Кинси–Тарский) Булева алгебра с оператором $(B, \wedge, \vee, \neg, d)$ называется алгеброй с деривацией, если оператор d удовлетворяет условиям: (1) $d0=0$,

(2) $d(a \vee b) = da \vee db$ и (3) $d d a \leq da$, для любых $a, b \in B$.

В современной “модальной” литературе эти алгебры именуются $K4$ -алгебрами и образуют алгебраическую семантику модальной системы $K4$, когда модальный оператор $\Diamond$ интерпретируется с помощью оператора деривации d .

Вспомним, что точка x топологического пространства X называется *предельной точкой* (или *точкой накопления*) множества A , если любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества A , отличную от x . Обозначим через dA множество всех предельных точек множества A . Вспомним, что топологическое замыкание sA множества A равно $A \cup dA$.

Учитывая эту, подразумеваемую, топологическую интерпретацию оператора d , нам представляется целесообразным несколько ослабить требования, наложенные на оператор деривации в Определении 11, а именно, заменить условие (3) на несколько более слабое (3') $dda \leq a \vee da$. Итак примем

Определение 12'. Булева алгебра с оператором $(B, \wedge, \vee, \neg, d)$ называется *алгеброй с деривацией*, если выполнены условия (1), (2) и (3').

Класс алгебр с деривацией образует алгебраическую семантику модальной системы $wK4$ (сравни условие (3') с аксиомой (w') системы $wK4$). Оправдание предложенной нами модификации основано на следующих простых наблюдениях.

Основная аксиома (и, следовательно, любая теорема) системы $wK4$ топологически общезначима. Действительно, несложно убедиться, что аксиома $(w') \Diamond \Diamond p \rightarrow (p \vee \Diamond p)$ или теоретико-множественное включение $ddA \subseteq A \cup dA$ справедливо в любом топологическом пространстве X для произвольного подмножества A . Однако характерная аксиома $K4 \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$ или соответствующее ей включение $ddA \subseteq dA$ не во всех пространствах верны: пусть, например, множество X (по крайней мере с двумя элементами) снабжено антидискретной топологией (т.е. открытыми являются только пустое множество и само пространство X). Легко проверить, что условие $ddA \subseteq dA$ ложно для любого синглтона $A = \{x\}$; действительно, в этом случае dA содержит все точки, кроме точки x : однако $x \in ddA$.

Пусть (X, R) – произвольный фрейм; обозначим через $(X, R)^+$ булеву алгебру (всех подмножеств множества X) с оператором d :

$dA = \{x \in X: \exists y (xRy \& y \in A)\}$ или, короче, $dA = R^{-1}(A)$ для любого множества A . Мы уже знаем (Утверждение 6), что алгебра $(X, R)^+$ является $wK4$ -алгеброй, если и только если (X, R) слабо транзитивный фрейм. Учитывая, что система $wK4$ финитно аппроксимируема (или, алгебраически говоря, что многообразие алгебр с деривацией порождается своими конечными алгебрами), специально выделим конечный случай.

Утверждение 13. Каждая конечная алгебра с деривацией (B, d) представима (с точностью до изоморфизма) в виде алгебры $(X, R)^+$ для подходящего слабо транзитивного фрейма (X, R) .

Пусть вновь (X, R) – произвольный слабо транзитивный фрейм и $(X, R)^+ = (B, d)$ – соответствующая алгебра с деривацией; определим (используя d) на множестве X новую операцию s , положив: $sA = A \cup dA$ для любого множества $A \subseteq X$. Легко видеть, что оператор s удовлетворяет всем аксиомам Куратовского и, следовательно, являясь оператором топологического замыкания, индуцирует на множестве X топологию; пусть для любого множества A $d'A$ множество предельных точек (в этой топологии!) множества A . Операторы d' и d не совпадают, хотя топология на X и была индуцирована оператором d ! В этом легко убедиться рассмотрев, скажем, случай, когда отношение R рефлексивно; действительно, в этих условиях $sA = dA$, так как $A \subseteq dA$, и “настоящий” оператор перехода к пределу d' не может совпадать с оператором замыкания s хотя бы потому, что $x \notin d(\{x\})$, в то время как $x \in s(\{x\})$. Справедливо простое (но ключевое) наблюдение.

Утверждение 14. Если $(X, R)^+ = (B, d)$ и R слабо транзитивно, то d является оператором предела в топологии, индуцированной оператором замыкания (порожденным d), если и только если отношение R иррефлексивно.

Доказательство. Достаточно вспомнить, что в любом топологическом пространстве X оператор предела d удовлетворяет условию: $x \in d(A) \Leftrightarrow x \in s(A - \{x\})$, из которого следует $x \notin d(\{x\})$, т.е. «иррефлексивность» оператора d .

Итак, образно говоря, возникает такая картина: на множестве X имеется семейство слабо транзитивных отношений. R_0 , рефлексивные замыкания которых совпадают (соответственно, имеется семейство операторов деривации d , дающих один и тот же оператор замыкания по схеме $sA = A \cup dA$); все эти отношения R_0 отличаются друг от друга лишь множеством X_0 своих иррефлексивных точек (эту тему мы уже затрагивали, см. выше). Один из крайних случаев, когда $X_0 = X$, т.е. “удалены” все петли, дает иррефлексив-

ное отношение, которое и соответствует “настоящему” топологическому оператору предела!

Справедливо следующее, имеющее и самостоятельное значение,

Утверждение 15. Топологии на конечном множестве X находятся в одно-однозначном соответствии с иррефлексивными, слабо транзитивными отношениями на X .

Финитная аппроксимируемость модальной системы $wK4$ говорит нам о том, что $wK4$ характеризуется конечными, слабо транзитивными фреймами (X, R) , из чего еще не следует, что для опровержимости недоказуемых формул можно ограничиться “запасом” конечных, иррефлексивных фреймов. Однако для любого слабо транзитивного фрейма (X, R) существует иррефлексивный фрейм (X', R') и сюръективное отображение $f: X \rightarrow X'$, являющееся r -морфизмом (т.е. такое, что $f R' (x) = R f(x)$). Построение фрейма (X', R') проще объяснить “на пальцах”, чем дать формальное описание. Каждую R -рефлексивную точку, т.е. каждую точку x , нарушающую иррефлексивность отношения R , заменим на две разные точки x_1 и x_2 и положим: $x_1 R' x_2$ и $x_2 R' x_1$ (таким образом, точка x заменяется на двухточечный иррефлексивный сгусток), оставив все остальные связи прежними, т.е. $xRy \Leftrightarrow xR'y$, когда $x \neq y$. Отображение f определим следующим образом: f тождественно на всех иррефлексивных точках и $f(x_1) = f(x_2) = x$. Легко убедиться, что f действительно r -морфизм; тем самым справедливо

Утверждение 16. Модальная система $wK4$ характеризуется классом конечных иррефлексивных, слабо транзитивных фреймов

Привилегированное (в топологическом отношении) положение модальной системы $wK4$ выражает

Следствие 17. Модальная система $wK4$ является логикой топологических пространств, другими словами, для любой формулы p $wK4 \vdash p \Leftrightarrow p$ - общезначима в любом топологическом пространстве.

Доказательство. Мы уже знаем, что любая, недоказуемая в $wK4$, формула p опровержима в подходящем конечном слабо транзитивном фрейме (X, R) ; из Утверждения 16 заключаем, что p опровергается в соответствующем “расщепленном” иррефлексивном фрейме (X', R') , который также конечен ввиду финитарности построения. Утверждение 15 позволяет заключить, что формула p опровержима в топологическом пространстве, соответствующем фрейму (X', R') .

А что можно сказать с топологической точки зрения о модальной системе $K4$? Вспомним аксиому отделимости T_d , введенную в работе [4] : по определению, топологическое пространство X удовлетворяет *аксиоме отделимости* T_d , если для каждой точки $x \in X$ найдутся замкнутое множество A и открытое множество B , такие, что $\{x\} = A \cap B$. Известно, что класс T_d -пространств является строго промежуточным между классами T_0 и T_1 -пространств, т.е. $T_1 \subset T_d \subset T_0$.

Утверждение 18. Модальная система $K4$ характеризуется классом T_d -пространств, т.е. формула p общезначима в любом T_d -пространстве, если и только если $K4 \vdash p$.

Об одном расширении системы $wK4$

В работе [5] К.Сегерберг аксиоматизировал модальную систему, характеризуемую фреймами (X, R) , в которых отношение достижимости R совпадает с отношением $\neq$; назовем его отношением отличимости (= dissidence relation). Сегерберг пишет ([5], p.61): «Professor Georg Henrik von Wright seems to have been the first to notice the fact, overlooked by everyone else, that “somewhere else” has an interesting logic of its own, distinct from that of the S5-operator “somewhere”».

Модальная система Сегерберга (обозначим ее KS (=Krieger Segerberg)) получается из $wK4$ постулированием формулы $p \rightarrow \Box \Diamond p$ в качестве дополнительной аксиомы.

Определение 19. Отношение R на множестве X назовем *слабой эквивалентностью*, если R слабо транзитивно и, кроме того, симметрично.

Ясно, что слабая эквивалентность, отличается от “обычной” только рефлексиями: все точки отношения эквивалентности – рефлексивны, в то время как слабая эквивалентность допускает наличие любого множества $X_0 (\subseteq X)$ иррефлексивных точек. Крайний случай, когда $X_0 = X$, т.е. когда отношение “полностью” иррефлексивно, также возможен! Фрейм (X, R) , в котором отношение R является слабой эквивалентностью, назовем *сгустком*, если для любых двух различных точек x и y $x R y$. Сгусток называется *иррефлексивным*, если все его точки иррефлексивны.

Алгебраическую семантику модальной системы KS образуют слабо монадические алгебры; булеву алгебру с оператором (B, d) назовем *слабо монадической*, если (1) (B, d) – $wK4$ -алгебра и (2) $a \wedge d \neg d a = 0$ для любого элемента $a \in B$. Многообразие wMA слабо монадических алгебр обладает рядом «приятных» черт; как

и многообразие монадических алгебр Халмоша [6], многообразие wMA локально конечно. Пусть $(B, d) = (X, R)^+$ конечная, слабо монадическая алгебра; тогда (B, d) неразложима в подпрямое произведение, если и только если (X, R) – сгусток. Каждая конечная неразложимая алгебра (B', d') вложима в неразложимую алгебру $(B, d) = (X, R)^+$, у которой (X, R) является иррефлексивным сгустком, т.е. $x R y \Leftrightarrow x \neq y$. Такие алгебры назовем *шаблонными*. Внутреннее описание шаблонных алгебр (B, d) таково: (0) $d0=0$, (1) если a – атом булевой алгебры B , то $d a = \neg a$, (2) $d a = 1$, в остальных случаях. Многообразие wMA слабо монадических алгебр порождается своими шаблонными алгебрами. Справедлива следующая усиленная версия известного результата Скросса [7]: модальная система KS наследственно финитно аппроксимируема; каждое нормальное расширение системы KS характеризуется подходящим классом сгустков; в частности, система KS характеризуется иррефлексивными сгустками, а классическая система $S5$ – рефлексивными сгустками. Система KS является наименьшим нерефлексивным “напарником” системы $S5$.

В последнее время система KS была “переоткрыта” в контексте компьютерной логики и вновь привлекла внимание логиков (см., например, работу [8] и цитированную в ней литературу).

В заключение отметим, что основные наблюдения, относящиеся к слабой транзитивности и топологической семантике модальной системы $wK4$, были получены автором в семидесятые годы минувшего столетия [9]. В тот же период в диссертационной работе В.Месхи был детально исследован класс $wK4$ -алгебр, удовлетворяющих дополнительному условию $d1 = 1$, которому в топологической семантике соответствует класс плотных в себе пространств. Совсем недавно Д.Габелая в своей магистерской работе, проведенной в Амстердамском университете, построил табличное исчисление для системы $wK4$, а также обнаружил удобный топологический эквивалент понятия r -морфизма в категории топологических пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Church A. . Journ. Symb.Logic. 25 (1960), 263-264
2. Segerberg K. Decidability of $S4.1$, Theoria, 34 (1968), 7-20
3. MacKinsey J., Tarski A., The algebra of topology, Annals of Math. 45 (1944) 141-191
4. Aull C.E., Thron W.J. , Separation axioms between T_0 and T_1 , Indag.Math. 24 (1962) 26-37

5. *Seegerberg K.*, "Somewhere else" and "some other time", In: Wright and Wrong: mini-essay in honor of G.H.von Wright, Publ. the group in logic and methodology of Real Finland, 1976, 61-64.
6. *Halmos P.*, Algebraic logic. Monadic Boolean algebras., *Composit. math.*, 12 (1955) 217-249
7. *Scroggs S.J.*, Extensions of the Lewis S5, *Journ. Symb .Logic*, 16 (1951) 112-120
8. *de Rijke M.*, The Modal logic of inequality, *Journ. Symb. Logic*, 57 (1992) 566-587
9. *Esakia L.* The Modal Logic of Topological spaces, The Georgian Acad.Sci., Preprint, 1976 (in Russian)

D.Batens¹

A UNIVERSALLY ABNORMALITY-ADAPTIVE LOGIC²

Abstract. *The present paper presents a logic that allows for the abnormal behaviour of any logical constant and for the ambiguous behaviour of any non-logical constant, but nevertheless offers an interpretation of the premises that is as normal as possible.*

1. Aim of This Paper

Although adaptive logics are strictly formal logics, they integrate several typical aspects of 'argumentation': dynamic reasoning, meaning variance (of logical as well as non-logical constants), inferential information (as opposed to omniscience), and languages that are not compounded by pre-fixed building blocks (see especially [7] and [6]). The dynamics of the proofs relates to the fact that adaptive logics do *not*, as usual non-standard logics, *invalidate* certain rules of inference, but *restrict* their applications to consequences of the premises that fulfil certain conditions.

The first adaptive logics handled inconsistent sets of premises by interpreting them as consistently as possible (see, e.g., [4] and [1]). Later adaptive logics handled other forms of logical abnormality. Still later, logical abnormality deriving from the abnormal behaviour of non-logical constants (ambiguities) was integrated. Recently, the Ghent Group discovered adaptive logics that have nothing to do with logical abnormalities (compatibility, the consistent extensions of theories, abduction, ...).

Considering abnormality-adaptive logics, one wonders whether it is possible to devise a logic that adapts to *all* forms of abnormalities. Such a system would open radically new perspectives on logic. It would allow for abnormalities of all kinds, but still presuppose (classical) normality 'unless and until proven otherwise'. In other words, it would be capable of recapturing all of Classical Logic – henceforth **CL** – while still allowing for all sorts of deviations from it. In this paper I present such a logic, **ACLØ2**.

¹ Centre for Logic and Philosophy of Science, Universiteit Gent, Belgium. Diderik.Batens@rug.ac.be.

² Research for this paper was supported by the Fund for Scientific Research - Flanders, and indirectly by the INTAS-RFBR contract 95-365. A technically and philosophically more elaborate version of this paper is available as [9].

One way of describing the situation is by saying that, in **ACLØ2**, *all* derivation is conditional. That A is derivable from Γ does not only depend on the intended meaning of the logical constants and on the intended meaning stability of the non-logical constants; it is also depends on whether the specific content of Γ does not rule out that intended meaning and that intended stability.

2. Abnormality-Adaptive Logics

The first formulation of adaptive logics (see [4] and [1]) was proof-theoretical. Later a decent adequate semantics was developed (see [2], [8], and elsewhere). Meanwhile, many inconsistency-adaptive logics have been studied (see [19], [21], [22], [15], [17], and [12]), their use to several domains of application has been shown (see [3], [7], [16], and [18]), and several other logics (some non-monotonic logics, see [5] and [15], and all consequence relations defined from the Rescher-Manor mechanism, see [12]) have been integrated. I refer to [11] for a survey.

Even if the dynamics aspects of the proofs are among the most fascinating aspects of adaptive logics, space limitations prevent me to describe them here. So, let me at least mention one central feature.

At the predicative level, adaptive logics are not only undecidable³; for most of them, there is *no positive test* for derivability. Nevertheless, there are certain *criteria* that tell us, in specific cases, that a wff derived in a proof from Γ at a stage, is finally derived from Γ ⁴.

Where such criteria cannot be applied, it still can be demonstrated that derivability at a stage offers us the *best estimate* of the final consequences of the premises – best in view of the present understanding of the premises as revealed in the proof⁵.

An abnormality-adaptive logic is defined from a *lower limit logic* (a monotonic paraconsistent logic) and an *upper limit logic* (usually **CL**) by an adaptive *strategy*. The latter determines the way in which the logic reacts to an inconsistency (or a disjunction of inconsistencies). All abnormality-adaptive logics interpret a theory 'as normally as possible' - this phrase is ambiguous and is specified by the strategy.

The semantic characterization proceeds in terms of the models from the lower limit logic (that include the models from the upper limit logic). From those models of Γ a subset is selected in view of the

³ The propositional fragments are just as decidable as that of **CL**.

⁴ While derivability at a stage is a dynamic notion, final derivability is as static as any of the usual inference relations.

⁵ Some proofs are 'smarter' than others. Yet, a proof as it stands reveals an understanding of the premises (see [6]).

strategy. The formulas true in all selected models are the adaptive consequences of Γ (those finally derivable from it).

As an example, consider the semantics for **ACLuN2**. Let L be the language of **CL**, with S, C, V, P, F and W the sets of sentential letters, individual constants, individual variables, predicative letters of rank r , and formulas and wffs respectively. In order to handle the quantifiers in a simple way, we extend L to L^+ by introducing a set of pseudo-constants O that has at least the cardinality of the largest models we want to consider. Let W^+ be the set of pseudo-wffs of L^+ and let $\sim W^+ = \{\sim A \mid A \in W^+\}$.

A model $M = \langle D, v \rangle$, in which v is an interpretation of W^+ , and hence of W , which is what we are interested in. The assignment function is defined by:

$$C1.1 \quad v : S \rightarrow \{0, 1\}$$

$$C1.2 \quad v : C \cup O \rightarrow D \text{ (where } D = \{v(\alpha) \mid \alpha \in C \cup O\})$$

$$C1.3 \quad v : P^r \rightarrow \wp(D^r) \text{ (the power set of the } r\text{-th Cartesian product of } D)$$

$$C1.4 \quad v : \sim W^+ \rightarrow \{0, 1\}$$

The valuation function v_M determined by M is defined as follows:

$$C2.1 \quad v_M : W^+ \rightarrow \{0, 1\}$$

$$C2.2 \quad \text{where } A \in S, v_M(A) = v(A); v_M(\perp) = 0$$

$$C2.3 \quad v_M(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r) = 1 \text{ iff } \langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_r) \rangle \in v(\pi^r)$$

$$C2.4 \quad v_M(\alpha = \beta) = 1 \text{ iff } v(\alpha) = v(\beta)$$

$$C2.5 \quad v_M(\sim A) = 1 \text{ iff } v_M(A) = 0 \text{ or } v(\sim A) = 1$$

$$C2.6 \quad v_M(A \supset B) = 1 \text{ iff } v_M(A) = 0 \text{ or } v_M(B) = 1$$

$$C2.7 \quad v_M(A \wedge B) = 1 \text{ iff } v_M(A) = 1 \text{ and } v_M(B) = 1$$

$$C2.8 \quad v_M(A \vee B) = 1 \text{ iff } v_M(A) = 1 \text{ or } v_M(B) = 1$$

$$C2.9 \quad v_M(A \equiv B) = 1 \text{ iff } v_M(A) = v_M(B)$$

$$C2.10 \quad v_M((\forall \alpha) A(\alpha)) = 1 \text{ iff } v_M(A(\beta)) = 1 \text{ for all } \beta \in C \cup O$$

$$C2.11 \quad v_M((\exists \alpha) A(\alpha)) = 1 \text{ iff } v_M(A(\beta)) = 1 \text{ for at least one } \beta \in C \cup O$$

Truth in a model, semantic consequence, and validity are defined as usual.

The inconsistency-adaptive logic **ACLuN2** is obtained from **CLuN** by the Minimal Abnormality Strategy. The abnormal part of a **CLuN**-model is defined as $Ab(M) =_{df} \{A \in F \mid v_M(\exists(A \wedge \sim A)) = 1\}$, where $\exists$ denotes a sequence of existential quantifiers over all variables free in A .

Definition 1 A **CLuN**-model M of Γ is a *minimally abnormal* model of Γ iff no **CLuN**-model M' of Γ is such that $Ab(M') \subset Ab(M)$.

Definition 2 $\Gamma \models_{\text{ACLuN2}} A$ iff A is true in all minimally abnormal models of Γ .

Apart from the Soundness and Strong Completeness of final derivability (see [8] for the definition) with respect to the semantics, many nice metaproperties have been proved. Proofs may be found in [8], [10], and some forthcoming papers. Some criteria for final derivability were obtained in view of tableau methods (see [13]), others in view of results of the block approach (see [6]).

The (negation-)incompleteness-adaptive logic that is the dual of **ACLuN2** is called **ACLaN2** and is obtained as follows. First we characterize **CLaN**, a logic allowing for gaps rather than gluts with respect to *negation*, by replacing in the semantics for **CLuN**:

C2.5 $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$ and $v_M(\sim A) = 1$

ACLaN2 is obtained from **CLaN** by the Minimal Abnormality Strategy, where $Ab(M) =_{df} \{A \in F \mid v_M(\exists(A \vee \sim A)) = 0\}$.

There are other logical abnormalities. Let us consider gaps with respect to conjunction, as they occur in the logic called (by the same naming convention) **CLaC**. Define $\hat{W}^+ = \{A \wedge B \mid A, B \in W^+\}$, and accommodate the **CLuN**-semantics as follows. Clause C1.4 of the **CLuN**-semantics is replaced by

C1.4 $v : \hat{W}^+ \rightarrow \{0, 1\}$

whereas C2.5 and C2.7 now become:

C2.5 $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$

C2.7 $v_M(A \wedge B) = 1$ iff $v_M(A) = v_M(B) = 1$ and $v(A \wedge B) = 1$

The adaptive logic **ACLaC2** is obtained from the lower limit logic **CLaC** by the Minimal Abnormality Strategy. We use classical conjunction (defined, e.g., as $A \Pi B =_{df} \sim(\sim A \vee \sim B)$) to define the abnormal part of a model M : $Ab(M) =_{df} \{A \wedge B \in F \mid v_M(\exists(A \Pi B \Pi \sim(A \wedge B))) = 1\}$, and adjust Definitions 1 and 2.

We may proceed similarly to allow for gluts or gaps with respect to other logical constants, and to devise a corresponding adaptive logic.

A somewhat different approach is to allow for *ambiguities* in the non-logical constants⁶. Here, the difference between the lower limit logic and the upper limit logic is obtained by a difference in *interpretation* of the premises. The upper limit logic interprets them in the usual way, but the lower limit logic interprets them by considering

⁶ The first such adaptive logic taking is presented in [20]. The subsequent presentation differs in several respects from the line followed in that paper.

each occurrence of a non-logical constant as having a different meaning. This is indicated by a different index (a superscripted number) that is attached to each such occurrence in both the premises and the purported conclusion. In preparation of Section 3, I briefly spell this out.

The language L is upgraded in the obvious way to accommodate the indexed non-logical constants. Let the result be L' . Let C' be the set of indexed individual constants. Let Γ^+ and A^+ be the results of attaching a different index to each occurrence of a non-logical constant in $\Gamma \cup \{A\}$. For example $((p \wedge \sim q) \supset \sim p)^+$ and $\sim p^+$ might be $((p^1 \wedge \sim q^1) \supset \sim p^2)$ and $\sim p^3$ respectively. The lower limit logic, **CLA**, is defined by⁷

$$\Gamma \models_{\text{CLA}} A \text{ iff } \Gamma^+ \models_{\text{CL}} A^+$$

Obviously $(p \wedge q) \not\models_{\text{CLA}} p$, as nothing warrants that $v_M(p^1) = v_M(p^2)$. However, $\sim(p^1 \equiv p^2)$ counts as an *abnormality* with respect to the normal interpretation of the premises. For C the abnormalities are of the form $\sim\alpha^i = \alpha^j$, for P they are of the form $\sim((\forall\alpha_1)\dots(\forall\alpha_r)(\pi^i \alpha_1 \dots \alpha_r \equiv \pi^j \alpha_1 \dots \alpha_r))$. Define $Ab(M)$ accordingly. By selecting the minimally abnormal models of Γ , the adaptive logic **ACLA2** interprets the premises as normally (that is, unambiguously) as possible.

It is tempting to devise logics that are adaptive with respect to several kinds of abnormalities, for example with respect to inconsistency and incompleteness, or with respect to ambiguities and gluts with respect to the universal quantifier. Two brief remarks will clarify how this is done.

A logic that allows for both gluts and gaps with respect to, for example, negation – we call this logic **CLoN** – is obtained by replacing, in the **CLuN** semantics, clause C2.5 as follows:

$$\text{C2.5 } v_M(\sim A) = v(\sim A)$$

With this clarified, the combination of any logical abnormalities is fairly obvious (and so is the definition of $Ab(M)$).

If we combine many abnormalities, the remaining classical connectives might not be functionally complete, which will hinder the definition of $Ab(M)$. As I need to consider such a case in the subsequent section, I briefly discuss the matter. Let us again consider $\{A \in F \mid v_M(\exists(A \wedge \sim A)) = 1\}$ and eliminate the " $\exists$ " and " $\wedge$ " from it. Suppose that $x_1, \dots, x_n$ are the variables that occur free in A . Let $[A]_{x_1, \dots, x_n}^{\text{ol}, \dots, \text{on}}$ be the result of systematically replacing each x_i by some $o_i \in C \cup O$. To avoid

⁷ In all subsequent examples, I only consider the case where the i -th occurrence of some non-logical constant receives index i . All other ways of indexing obviously deliver isomorphic results, as long as the choice fulfils the above convention on Γ^+ and A^+ .

clutter, I henceforth write $\mathbf{x}$ for $x_1, \dots, x_n$ and $\mathbf{o}$ for $o_1, \dots, o_n$. Remark that $v_M(\exists(A \wedge \sim A)) = 1$ iff there are $\mathbf{o}$ such that $v_M([A]_{\mathbf{o}}^0) = v_M([\sim A]_{\mathbf{o}}^0) = 1$ ⁸. Proceeding thus, we may eliminate all 'auxiliary' logical constants from the definition of $Ab(M)$.

3. The Empty Logic and Its Adaptive Extension

Here I combine all kinds of abnormalities. The lower limit logic will be called **CLØ**. We start with **CLoX**, the logic that allows both gluts and gaps with respect to all logical constants. Where $M = \langle D, v \rangle$ is a **CLoX**-model, v is defined by:

- C1.1 $v : \mathbf{S} \rightarrow \{0, 1\}$
- C1.2 $v : \mathbf{C} \cup \mathbf{O} \rightarrow D$ (where $D = \{v(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{C} \cup \mathbf{O}\}$)
- C1.3 $v : \mathbf{P}^r \rightarrow \wp(D^r)$ (the power set of the r -th Cartesian product of D)
- C1.4 $v : {}^=W^+ \rightarrow \{0, 1\}$
- C1.5 $v : {}^\sim W^+ \rightarrow \{0, 1\}$
- C1.6 $v : {}^\supset W^+ \rightarrow \{0, 1\}$
- C1.7 $v : {}^\wedge W^+ \rightarrow \{0, 1\}$
- C1.8 $v : {}^\vee W^+ \rightarrow \{0, 1\}$
- C1.9 $v : {}^\equiv W^+ \rightarrow \{0, 1\}$
- C1.10 $v : {}^\forall W^+ \rightarrow \{0, 1\}$
- C1.11 $v : {}^\exists W^+ \rightarrow \{0, 1\}$

The valuation function v_M determined by M is defined as follows:

- C2.1 $v_M : W^+ \rightarrow \{0, 1\}$
- C2.2 where $A \in \mathbf{S}$, $v_M(A) = v(A)$; $v_M(\perp) = 0$
- C2.3 $v_M(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r) = 1$ iff $\langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_r) \rangle \in v(\pi^r)$
- C2.4 $v_M(\alpha = \beta) = 1$ iff $v(\alpha = \beta)$
- C2.5 $v_M(\sim A) = v(\sim A)$
- C2.6 $v_M(A \supset B) = v(A \supset B)$
- C2.7 $v_M(A \wedge B) = v(A \wedge B)$
- C2.8 $v_M(A \vee B) = v(A \vee B)$
- C2.9 $v_M(A \equiv B) = v(A \equiv B)$
- C2.10 $v_M((\forall \alpha) A(\alpha)) = v((\forall \alpha) A(\alpha))$
- C2.11 $v_M((\exists \alpha) A(\alpha)) = v((\exists \alpha) A(\alpha))$

⁸ Obviously $[\sim A]_{\mathbf{x}}^0 = [\sim A]_{\mathbf{o}}^0$. If expressions such as $[A \supset B]_{\mathbf{x}}^0$ and $[A]_{\mathbf{x}}^0$ are used in the same clause, $\mathbf{x}$ always refers to the variables free in the longest formula.

Truth in a model, semantic consequence, and validity are defined as usual.

We now upgrade **CLoX** to **CLØ**. Let Γ^+ and $A^\dagger$ be as in Section 2.

Definition 3 $\Gamma \models_{\text{CLØ}} A$ iff $\Gamma^+ \models_{\text{CLoX}} A^\dagger$

$\Gamma \models_{\text{CLØ}} A$ iff $\perp \in \Gamma$. So, if we remove $\perp$ from L , $\Gamma \not\models_{\text{CLØ}} A$ for all Γ and A .

To formulate **ACLØ2**, obtained from **CLØ** by the Minimal Abnormality strategy, I define $Ab(M)$ as the union of the sets listed below (defined in terms of **CLoX**-models). I suppose throughout that $A, B \in F$ and that each defining clause is preceded by: for some $\mathbf{o} \in \mathbf{C}^I \cup \mathbf{O}$.

- $\{A \mid v_M([A]^\circ_x) = v_M([\sim A]^\circ_x)\}$,
- $\{ \langle A \supset B, A, B \rangle \mid v_M([A \supset B]^\circ_x) = v_M([A]^\circ_x) = 1 \text{ and } v_M([B]^\circ_x) = 0 \}$,
- $\{ \langle A \supset B, A \rangle \mid v_M([A \supset B]^\circ_x) = 0 \text{ and } v_M([A]^\circ_x) = 0 \}$,
- $\{ \langle A \supset B, B \rangle \mid v_M([A \supset B]^\circ_x) = 0 \text{ and } v_M([B]^\circ_x) = 1 \}$,
- $\{ \langle A \wedge B, A, B \rangle \mid v_M([A \wedge B]^\circ_x) = 0 \text{ and } v_M([A]^\circ_x) = v_M([B]^\circ_x) = 1 \}$,
- $\{ \langle A \wedge B, A \rangle \mid v_M([A \wedge B]^\circ_x) = 1 \text{ and } v_M([A]^\circ_x) = 0 \}$,
- $\{ \langle A \wedge B, B \rangle \mid v_M([A \wedge B]^\circ_x) = 1 \text{ and } v_M([B]^\circ_x) = 0 \}$,
- $\{ \langle A \vee B, A, B \rangle \mid v_M([A \vee B]^\circ_x) = 1 \text{ and } v_M([A]^\circ_x) = v_M([B]^\circ_x) = 0 \}$,
- $\{ \langle A \vee B, A \rangle \mid v_M([A \vee B]^\circ_x) = 0 \text{ and } v_M([A]^\circ_x) = 1 \}$,
- $\{ \langle A \vee B, B \rangle \mid v_M([A \vee B]^\circ_x) = 0 \text{ and } v_M([B]^\circ_x) = 1 \}$,
- $\{ \langle A \equiv B, A, B \rangle \mid v_M([A \equiv B]^\circ_x) \neq (v_M([A]^\circ_x) = v_M([B]^\circ_x)) \}$ ⁹,
- $\{ \langle (\forall \alpha) A(\alpha), A(\beta) \rangle \mid \beta \in \mathbf{C}^I; v_M([(\forall \alpha) A(\alpha)]^\circ_x) = 1 \text{ and } v_M([A(\beta)]^\circ_x) = 0 \}$,
- $\{ \langle (\forall \alpha) A(\alpha), A(\beta) \rangle \mid \beta \in \mathbf{O}; v_M([(\forall \alpha) A(\alpha)]^\circ_x) = 1 \text{ and } v_M([A(\gamma)]^\circ_x) = 0 \text{ for some } \gamma \in \mathbf{C}^I \cup \mathbf{O} \}$,
- $\{ \langle (\forall \alpha) A(\alpha), A(\beta) \rangle \mid \beta \in \mathbf{V}; v_M([(\forall \alpha) A(\alpha)]^\circ_x) = 0 \text{ and } v_M([A(\gamma)]^\circ_x) = 1 \text{ for all } \gamma \in \mathbf{C}^I \cup \mathbf{O} \}$,
- $\{ \langle (\exists \alpha) A(\alpha), A(\beta) \rangle \mid \beta \in \mathbf{V}; v_M([(\exists \alpha) A(\alpha)]^\circ_x) = 1 \text{ and } v_M([A(\gamma)]^\circ_x) = 0 \text{ for all } \gamma \in \mathbf{C}^I \cup \mathbf{O} \}$,
- $\{ \langle (\exists \alpha) A(\alpha), A(\beta) \rangle \mid \beta \in \mathbf{C}^I; v_M([(\exists \alpha) A(\alpha)]^\circ_x) = 0 \text{ and } v_M([A(\beta)]^\circ_x) = 1 \}$,
- $\{ \langle (\exists \alpha) A(\alpha), A(\beta) \rangle \mid \beta \in \mathbf{V}; v_M([(\exists \alpha) A(\alpha)]^\circ_x) = 0 \text{ and } v_M([A(\gamma)]^\circ_x) = 1 \text{ for some } \gamma \in \mathbf{C}^I \cup \mathbf{O} \}$,

⁹ The condition obviously abbreviates that $v_M([A \equiv B]^\circ_x)$ is 1 (respectively 0) whereas $v_M([A]^\circ_x)$ is not (respectively is) identical to $v_M([B]^\circ_x)$. Similarly for "=" below.

$\{ \langle \alpha, \beta \rangle \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C}^I; v_M(\alpha = \beta) \neq (v(\alpha) = v(\beta)) \},$
 $\{ \langle \alpha, \beta \rangle \mid \alpha \in \mathbf{C}^I; \beta \in \mathbf{V}; \text{ for some } \gamma \in \mathbf{C}^I \cup \mathbf{O}, v_M(\alpha = \gamma) \neq (v(\alpha) = v(\gamma)) \},$
 $\{ \langle \alpha, \beta \rangle \mid \alpha \in \mathbf{V}; \beta \in \mathbf{C}^I; \text{ for some } \gamma \in \mathbf{C}^I \cup \mathbf{O}, v_M(\gamma = \beta) \neq (v(\gamma) = v(\beta)) \},$
 $\{ \langle \alpha, \beta \rangle \mid \alpha, \beta \in \mathbf{V}; \text{ for some } \gamma, \delta \in \mathbf{C}^I \cup \mathbf{O}, v_M(\gamma = \delta) \neq (v(\gamma) = v(\delta)) \},$
 $\{ \langle A, i, j \rangle \mid A \in \mathbf{S} \text{ and } v_M(A^i) \neq v_M(A^j) \},$
 $\{ \langle \alpha, i, j \rangle \mid \alpha \in \mathbf{C} \text{ and } v(\alpha^i) \neq v(\alpha^j) \}, \text{ and}$
 $\{ \langle \pi, i, j \rangle \mid \pi \in \mathbf{P} \text{ and } v(\pi^i) \neq v(\pi^j) \},$

Definition 4 A **CLoX**-model M of Γ^+ is a *minimally abnormal* model of Γ^+ iff no **CLoX**-model M' of Γ^+ is such that $Ab(M') \supset Ab(M)$.

Definition 5 $\Gamma \models_{\mathbf{ACL}\emptyset 2} A$ iff A^+ is true in all minimally abnormal models of Γ^+ .

It is easily provable (compare [8]) that, if Γ has **CL**-models, then the minimally abnormal models of Γ^+ are those in which all logical constants as well as all occurrences of non-logical constants behave normally. Hence:

$\Gamma \models_{\mathbf{ACL}\emptyset 2} A$ iff $\Gamma \models_{\mathbf{CL}} A$.

If Γ has *no* **CL**-models, then (except for border cases) the minimally abnormal models of Γ^+ are a proper subset of the **CLoX**-models of Γ^+ . In this case, **ACL** $\emptyset 2$ still delivers a minimally abnormal interpretation of Γ : all **CL**-consequences of Γ , except for those that do not follow from Γ in view of the disjunctions of abnormalities that are verified by *all* **CLoX**-models of Γ^+ .

I leave it to the reader to check the following properties of **ACL** $\emptyset 2$:

$$p, \sim p \not\models_{\mathbf{ACL}\emptyset 2} q$$

$$p \wedge q, \sim p \not\models_{\mathbf{ACL}\emptyset 2} q$$

$$p \wedge \sim r, \sim p \wedge (q \supset r) \not\models_{\mathbf{ACL}\emptyset 2} \sim q$$

$$\forall x(Px \supset Qx), Pa, \sim Qa, Pb, \sim Qc \not\models_{\mathbf{ACL}\emptyset 2} Qb \wedge \sim Pc$$

Remark that $p, \sim p \not\models_{\mathbf{ACL}\emptyset 2} p$ and $p, \sim p \not\models_{\mathbf{ACL}\emptyset 2} \sim p$. Some of the minimally abnormal interpretations of the premises requires the non-logical constant (represented here by the propositional letter) p to behave ambiguously: the truth-value of p^1 is different from that of p^2 . So, the truth-value p^3 is bound to agree with that of either p^1 or p^2 . As the same reasoning applies to the other non-logical constants, one easily proves the remarkable:

Theorem 1 For all Γ , $\text{Cn}_{\mathbf{ACL}\emptyset 2}(\Gamma)$ is consistent.

4. In Conclusion

As promised, **ACLØ2** is a universally abnormality-adaptive logic. Allowing all kinds of abnormalities in the premises, it still interpretats them “as normal as possible”. The latter expression has (as always) a specific meaning. But this meaning is an interesting one: whatever is consistently derivable from the premises. As one cannot determine beforehand which abnormalities will or may occur in the theory, one cannot justify beforehand the choice of an abnormality-adaptive logic. **ACLØ2** removes this weakness.

Let me remind the reader that the aim of abnormality-adaptive logics is not offer the ‘final’ interpretation of the premises. Logical abnormalities will have to be ruled out; defective theories have to be replaced. This replacement is not a matter of logic, but it *requires* the logical analysis of the defective theory. *This* is what an adaptive logic should provide, and this is what **ACLØ2** actually does provide for a very broad set of contexts.

REFERENCES

1. *D. Batens*. Dynamic dialectical logics as a tool to deal with and partly eliminate unexpected inconsistencies. In J. Hintikka and F. Vandamme, editors, *The Logic of Discovery and the Logic of Discourse*, pages 263-271. Plenum Press, New York, 1985.
2. *D. Batens*. Dialectical dynamics within formal logics. *Logique et Analyse*, 114:161-173, 1986.
3. *D. Batens*. Static and dynamic paraconsistent logics and their use in expert systems. *CC-AI*, 3:33-50, 1986.
4. *D. Batens*. Dynamic dialectical logics. In G. Priest, R. Routley, and J. Norman, editors, *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*, pages 187-217. Philosophia Verlag, München, 1989.
5. *D. Batens*. Inconsistency-adaptive logics and the foundation of non-monotonic logics. *Logique et Analyse*, 145:57-94, 1994. Appeared 1996.
6. *D. Batens*. Blocks. The clue to dynamic aspects of logic. *Logique et Analyse*, 150-152:285-328, 1995. Appeared 1997.
7. *D. Batens*. Functioning and teachings of adaptive logics. In J. Van Benthem, F. H. Van Eemeren, R. Grootendorst, and F. Veltman, editors, *Logic and Argumentation*, pages 241-254. North-Holland, Amsterdam, 1996.
8. *D. Batens*. Inconsistency-adaptive logics. In E. Orłowska, editor, *Logic at Work. Esays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa*, pages 445-472. Physica Verlag (Springer), Heidelberg, New York, 1999.
9. *D. Batens*. Zero logic adding up to classical logic. *Logical Studies*, 2:15, 1999. (Electronic Journal: <http://www.logic.ru/LogStud/02/LS2.html>).

10. *D. Batens*. Minimally abnormal models in some adaptive logics. In print.
11. *D. Batens*. A survey of inconsistency-adaptive logics. In Batens et al. [14], pages 59-83.
12. *D. Batens*. Towards the unification of inconsistency handling mechanisms. To appear.
13. *D. Batens, J. Meheus*. Tableau methods for paraconsistent extensions of positive logic and for the adaptive logics based on them. Part 2: The predicative case. To appear.
14. *D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J. P. Van Bendegem*, editors. *Frontiers of Paraconsistent Logic*. Research Studies Press, Baldock, UK, in print.
15. *K. De Clercq*. Two new strategies for inconsistency-adaptive logics. To appear.
16. *J. Meheus*. Adaptive logic in scientific discovery: the case of Clausius. *Logique et Analyse*, 143-144:359-389, 1993. Appeared 1996.
17. *J. Meheus*. An extremely rich paraconsistent logic and the adaptive logic based on it. In Batens et al. [14].
18. *J. Meheus*. Inconsistencies in scientific discovery. Clausius's remarkable derivation of Carnot's theorem. In print.
19. *G. Priest*. Minimally inconsistent **LP**. *Studia Logica*, 50:321-331, 1991.
20. *G. Vanackere*. Ambiguity-adaptive logic. *Logique et Analyse*, 159:261-280, 1997. Appeared 1999.
21. *G. Vanackere*. **HL2**. An inconsistency-adaptive and inconsistency-resolving logic for general statements that might have exceptions. In print.
22. *G. Vanackere*. Preferences as inconsistency-resolvers: the inconsistency-adaptive logic **PRL**. To appear.

WHAT IS PROPOSITIONAL CLASSICAL LOGIC? (A Study in Universal Logic)²

Abstract. *The aim of this paper is to try to characterize classical propositional logic (CPL) with the notion of mathematical structure.*

We start by justifying this approach. We recall the importance and significance of the notion of structure in mathematics and in logic. We explain the idea of a general theory of logics based on structures, Universal Logic.

CPL is not one structure but a class of equivalent structures, CPL-structures. We survey a series of structures that can be considered as CPL-structures. The main problem is to find a notion of equivalence which permits to gather into a whole this multiplicity.

We show in particular that the modern concept of equivalence of structures, based on the notion of expansion by definition and isomorphism, is not adequate to define a satisfactory notion of equivalence that will define the class of CPL-structures. An alternative definition, postmodern equivalence, is introduced.

It appears that this tentative of characterization of the class of CPL-structures is not only relevant for Universal Logic, but also for the general theory of mathematical structures, since the case of CPL-structures shows the insufficiency of the modern concept of equivalence between structures.

Contents

1. Classical propositional logic, Universal Logic and the theory of structures
2. Modern mathematical structuralism
3. Consequence relation or operator of consequence?
4. Consequence or tautologies?
5. Or or and?
6. Postmodern mathematical structuralism
7. Logic or algebra?
8. Countable or uncountable?
9. Modernism or postmodernism?

¹ Jean-Yves Béziau, Stanford University, Centre for the Study of Language and Information, Ventura Hall, Stanford, CA, 94305-4115, USA. jyb@csl.stanford.edu.

² This work was supported by a grant of the Swiss National Science Foundation. I would like to thank Patrick Suppes for his invitation at Stanford.

1. Classical propositional logic, Universal Logic and the theory of structures

Logic is nowadays a very vast and varied field and probably there is no logician who has a global knowledge of it, from inaccessible cardinals to lambda calculus, from cylindric algebra to the hyperarithmetical hierarchy, from stability theory to quantum logic. On the other hand, there is a part of logic that every logician certainly knows, it is classical propositional logic (CPL hereafter).

So it seems that the question "What is classical propositional logic?" does not have to be asked since everybody knows of course what is CPL. But there are several ways of "knowing". In some sense everyone knows what is a cat, a number or light, mainly because one is acquainted with these things. But few people, if any, are able to give proper definitions of a cat, a number or light. To give such definitions people turn either to philosophy or science.

Maybe people think that CPL is already scientific and well defined. So they think that someone who asks "What is CPL?" can only be a helpless philosopher. But we must remember that some hundred years ago mathematicians thought that people like Frege and Russell were helpless philosophers.

To the question "What is CPL?", a bright young logician could answer: "Very easy, two-valued truth-tables are CPL, such or such Hilbert-type axiomatic system is CPL, such or such Gentzen-type proof system is CPL, such or such tableau system is CPL, Boolean algebra is CPL, all this and many more is CPL." We can reply to this bright young logician in the same way as Socrates to Theaetetus: "How generous and open-handed of you! You were asked for one thing, but you're offering several, and a variety instead of something simple" (Plato, Theaetetus, 146d).

One way to give a definition by comprehension of CPL rather than by extension, is to consider CPL as a structure. This is useful in practice: one can present the completeness theorem saying that two-valued truth-tables and a given Hilbert-type axiomatic system define the same structure. As it is known, the notion of structure has been crucial to reorganized and unified mathematics and is the cornerstone of modern mathematics³. Following the structuralist approach to mathematics, a general theory of logics has been developed under the name Universal Logic. It is a theory of logical structures in the same

³ There are a lot of interesting philosophically oriented papers by Bourbaki and his friends about the notion of mathematical structure. Most of these papers are difficult to find and not very well-known. The reader may have a look at the most famous [3]. He may also consult the historical book of Corry [6].

way as Universal Algebra is a theory of algebraic structures (see [1], [2])⁴.

But what is a logical structure? That is the question. In fact we will see in this paper that it is even difficult to answer this question for the most well-known logical structure, i.e. CPL.

The problem is that CPL does not appear as one structure but as a multiplicity of structures, CPL-structures. Then if we want to properly define CPL according to the structural approach of Universal Logic, we must find a way to unify this multiplicity into a whole, through a relation of equivalence between structures.

As it is known, a Boolean algebra can be represented as a Boolean ring or as a distributive complemented lattice. These two structures are equivalent. Boolean algebra is a class of equivalent structures, and a Boolean algebra is any member of this class. Everything is clear and there is no problem at all.

But the difficulty with CPL-structures is that the standard notion of equivalence between structures does not applied straightforwardly to it. Equivalence between structures is a fundamental notion of the general theory of structures and CPL-structures happen to challenge it. If we consider the general theory of structures as part of the foundation of mathematics (conceptual foundation by opposition to the axiomatic approach, cf [8]), we can say that Universal Logic, through the simple case of CPL, challenges the foundation of mathematics.

After presenting the standard notion of equivalence and the concepts of modern mathematical structuralism on which it is based, we present a series of different CPL-structures. The difficulty to apply the standard notion of equivalence to these structures leads us to develop an alternative notion of equivalence based on postmodern structuralism.

2. Modern mathematical structuralism

Modern mathematical structuralism has to be understood by contrast with *post-modern* mathematical structuralism that we will introduce later on, also by contrast with modern *logical* structuralism. Logical structuralism has been developed within model theory. It is

⁴ The structuralist approach in logic can be traced back to Tarski (cf [13]), it has been further developed in Poland especially by Suszko's group in the sixties and the seventies (cf. [4] [5]) and more recently by the Barcelona logic group [7]. People like Suszko and his followers tend to consider logical structures as special cases of algebraic structures. Whether this view is correct or not depends on some points which will be discussed in the present paper. Our idea is to consider Universal Logic as independent of Universal Algebra, rather than a part of it. This view was already held by Porte ([11]). His idea was that logical structures were fundamental mother structures in the sense of Bourbaki.

fundamentally dicephalous, there is on one side the *reality* of the structure, on the other side the *language* of the structure. In mathematical structuralism we will consider only the "reality" of the structure⁵. A structure is an object of the following type:

$$S = \langle S; \tau \rangle$$

S is called the *domain* of the structure, it is just a set.

τ is called the *type* of the structure, it is a sequence of relations defined on the domain (we take the concept of relation here in a very broad sense: including functions and not only relations between elements of the domain, but relations between parts of the domain, etc.)

We say that two structures have the same type iff their types have the same quantity and quality, that is to say if the lengths of the sequences are the same and if the first members of the two sequences are similar constructions (e.g. two binary relations defined on the power set of the domain), the second members also, etc. Now we will introduce several notions that will enable us to define the notion of equivalence between structures.

Definition of isomorphism

The relation of *isomorphism* is defined between structures of the same type. Two structures are isomorphic iff there is a bijection between them that preserves all the relations of the types. One may think that the notion of isomorphism is the basic notion of identity or equivalence between structures. But this notion is too strong for two reasons: one may want to identify structures of *different cardinalities* (cf. section 8) and one may also want to identify structures of *different types*.

Definition of expansion/reduct

A structure $S2 = \langle S2; \tau2 \rangle$ is an expansion of a structure $S1 = \langle S1; \tau1 \rangle$ (or $S1$ is a reduct of $S2$) iff

- they have the same domain: $S1 = S2$
- the type of $S1$ is included in the type of $S2$: $\tau1 \subseteq \tau2$

A typical example is: $\langle \mathbb{N}; +, \times, \leq \rangle$ is an expansion of $\langle \mathbb{N}; +, \leq \rangle$

Definition of definition by expansion

If the new elements of the type of $S2$ can be defined in terms of the elements of the type of $S1$, we say that $S2$ is an *expansion by definition* of $S1$.

⁵ The definitions that we present here are adaptations of definitions of logical structuralism, this adaptation is probably an original contribution that we are making here.

The difficulty here is to define definition. One can admit several kinds of definitions, and accordingly a structure is or is not expansion by definition of a given structure. Let us give a typical example. $\langle \mathbb{N}; 0, s, +, \times, \leq \rangle$, where s is the *successor function*, is an extension by definition of $\langle \mathbb{N}; 0, s \rangle$ if we consider second-order definitions (i.e. definitions involving quantification over parts of the domain of the structure), but it is not an extension by definition if we restrict ourselves to first-order definitions.

Definition of equivalence between structures

Two structures are equivalent iff they have a common (up to isomorphism) expansion by definition.

In particular if a structure is an expansion by definition of another one, they are both equivalent. The problem of which kind of definitions we will admit is therefore also fundamental here. For example, from a second-order viewpoint $\langle \mathbb{N}; 0, s, +, \times, \leq \rangle$ is equivalent to $\langle \mathbb{N}; 0, s \rangle$ but not from a first-order viewpoint.

Another important notion of mathematical structuralism is the notion of extension. It is not needed to define equivalence in the modern sense, but we will need it to define equivalence in the postmodern sense.

Definition of extension/substructure

A structure $S_2 = \langle S_2; \tau_2 \rangle$ is an *extension* of a structure $S_1 = \langle S_1; \tau_1 \rangle$ (or S_1 is a *substructure* of S_2) iff

- the domain of S_1 is included in the domain of S_2 : $S_1 \subseteq S_2$
- they have the same type
- each element of τ_1 is a restriction of the corresponding element of τ_2 to S_1

A typical example is: $\langle \mathbb{Z}; 0, s, +, \times, \leq \rangle$ is an extension of $\langle \mathbb{N}; +, \times, \leq \rangle$.

Note that in this example we use the same symbol $+$ to denote two different things (the same for $\times$ and $\leq$). As Bourbaki would say "C'est un abus de langage dont les mathématiciens sont très friands". In fact such "friandise" is exactly justified and explained by the definition of extension of structure. Mathematicians use the same symbol because although these two symbols denote two different functions, they denote functions which are intimately connected.

3. Relation of consequence or operator of consequence?

The following structure will be the structure of reference for our investigations about CPL-structures:

$$K = \langle \mathbf{F}; \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, |- \rangle$$

Elements of $\mathbf{F}$ are called *formulas*. The set $\mathbf{F}$ is freely generated from a subset $\mathbf{A}$ of *atomic formulas* with the unary function $\neg$, called negation, and three binary functions: $\wedge$, called conjunction, $\vee$, called disjunction, and $\rightarrow$, called implication. That is to say the following structure is an absolutely free algebra:

$$F = \langle \mathbf{F}; \neg, \wedge, \vee, \rightarrow \rangle$$

The structure K can therefore be represented in a simpler way as follows:

$$K = \langle \mathbf{F}; |- \rangle$$

The relation $|-$ is called *relation of consequence*. It is a relation between sets of formulas and formulas, i.e. $|- \subseteq P(\mathbf{F}) \times \mathbf{F}$.

There are thousands of structures that one may want to consider as CPL-structures. And for each one we must check if the standard notion of equivalence apply in such a way that this given structure is equivalent to K .

Let us start with an easy case. Instead of considering a *relation* of consequence $|-$ to define CPL, we can consider, as Tarski did, an *operator* of consequence Cn . It is easy to see that it is the same, that we have here two equivalent structures.

Consider the structure

$$Kn = \langle \mathbf{F}; Cn \rangle$$

where Cn is a function from $\mathbf{F}$ to $\mathbf{F}$.

It is not difficult to show that Kn and Cn are equivalent. We consider the following structure:

$$KKn = \langle \mathbf{F}; |-; Cn \rangle$$

This structure is an expansion by definition of K and of Cn . The following definition is used:

$$a \in CnT \text{ iff } T |- a$$

4. Consequence or tautologies?

Let us now turn to a more complex case. Consider the structure

$$T = \langle \mathbf{F}; \mathbf{T} \rangle$$

where $\mathbf{T}$ is the subset of $\mathbf{F}$, the set of classical *tautologies*.

We can say that the following structure

$$KT = \langle \mathbf{F}; |-; \mathbf{T} \rangle$$

is an expansion by definition of K and T using respectively the two following definitions:

$$(1) a \in \mathbf{T} \text{ iff } \emptyset |- a$$

(2) $T \vdash b$ iff there exists elements $a_1, \dots, a_n$ of T , such that $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \rightarrow b \in T$

In this sense T and K are equivalent structures.

However there is a fundamental property that distinguishes T and K . The first is decidable (in the sense that the set T is recursive) and the second is not decidable (in the sense that the relation $\vdash$ is not recursive).

At this point it is important to note that what we want to establish is a congruence relation between structures. Our notion of equivalence will be a congruence relation depending on which *superstructure* we will consider, which properties will be taken into account in this superstructure. If we think that T and K must not be considered as equivalent, then we just take a superstructure featuring decidability. Or we may take the other option.

Another way to look at the problem is to analyze the definition (2) above. If one doesn't want T and K to be equivalent, one can find a way to rule out this definition. On the other case one has to be able to justify the allowance of this definition (and therefore all similar ones) and has to be ready to accept all the consequences of such kind definition.

We consider now the structure

$$M = \langle F; \vdash_m \rangle$$

where $\vdash_m$ is a relation between sets of formulas, i.e. $\vdash_m \subseteq P(F)XP(F)$

We can say that the following structure

$$KM = \langle F; \vdash; \vdash_m \rangle$$

is an expansion by definition of K and M using respectively the two following definitions:

(1) $T \vdash_m U$ iff there exists $a \in U$ such that $T \vdash a$

(2) $T \vdash a$ iff $T \vdash_m \{a\}$

Let us also consider the structure

$$M_0 = \langle F; \vdash_{m0} \rangle$$

where $\vdash_{m0}$ is a relation between finite sets of formulas.

Structures of type M or M_0 have been considered in the literature, sometimes under the name multi-conclusion logic (cf. [12]). The problem is that people don't always made a sharp distinction between M and M_0 . But the difference between these two structures is the same as between K and T , since one is decidable and not the other. So the equivalence between them is not straightforward.

5. Or or and?

Classical logic can be presented in a more economical way that K since implication and disjunction are definable with negation and conjunction. One could also consider classical logic as a structure with

only one connective, like the Sheffer's stroke. If we want to be generous instead of being stingy, we could on the other hand consider a richer structure than K , adding for example the bi-implication $\leftrightarrow$, etc. Generally all these ways of presenting CPL are considered as equivalent. Let us call this intuitive notion of equivalence, *language-equivalence*, and let us see if we can define language-equivalence within classical structuralism.

Consider the structures

$$K_{and} = \langle F_{and}, |-_{and} \rangle$$

$$K_{or} = \langle F_{or}, |-_{or} \rangle$$

where F_{and} and F_{or} are respectively the structures

$$\langle \mathbf{F}_{and}, \neg_{and}, \wedge_{and}, \rightarrow_{and} \rangle$$

$$\langle \mathbf{F}_{or}, \neg_{or}, \vee_{or}, \rightarrow_{or} \rangle$$

where x_{and} are the restrictions of x to $\mathbf{F}_{and}$ and x_{or} are the restrictions of x to $\mathbf{F}_{or}$.

Everybody knows that it is possible to define $\vee$ with $\neg$ and $\wedge$ in the following way:

$$a \vee b \equiv_{Def} \neg(\neg a \wedge \neg b)$$

but K is not an expansion by definition of K_{and} simply because K is not an expansion of K_{and} : they have not the same domain.

K looks like an extension of K_{and} since $\mathbf{F}_{and} \subseteq \mathbf{F}$ and $*_{and}$ are restrictions of x to $\mathbf{F}_{and}$ but K is not strictly speaking an extension of K_{and} since these two structures have not the same type: $\vee$ is not part of the type of K_{and} .

It seems that classical structuralism, based on extension, expansion and isomorphism, is not enough to analyze the relations between K and K_{and} , and more generally the language-equivalence relation. Let us turn therefore into something more sophisticated.

6. Postmodern mathematical structuralism

Following postmodernism (cf. the distinction between difference and difference), we introduce the notions of expansion, extansion and their correlates.

An *expansion* is an expansion of an extension. An *extansion* is an extension of an expansion. We define then in a natural way the notions of *expansion by definition* and *extansion by definition*. And we say that two structures are *postmodern equivalent* iff they have a common (up to isomorphism) extansion or expansion by definition.

K is an extansion by definition of K_{and} , since

$$K = \langle \mathbf{F}; \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, |- \rangle$$

is an extension of

$$\langle \mathbf{F}_{and}, \neg_{and}, \wedge_{and}, \vee_{and}, \rightarrow_{and}, |-_{and} \rangle$$

which is itself an expansion by definition of

$$K = \langle \mathbf{F}_{and}, \neg_{and}, \wedge_{and}, \rightarrow_{and}, \vdash_{and} \rangle$$

That seems fine: the two structures K and K_{and} are therefore equivalent in the postmodern sense. And the postmodern notion of equivalence also resolves the problem of all language-equivalent structures. But maybe it solves also too much problems, in the sense that it mixes bananas with tomatoes, it puts in the same equivalence class, structures that are too much different.

It is too early to claim that postmodernism structuralism will overthrow modernism structuralism, the notion of postmodern equivalence has to be investigated more systematically.

7. Logic or algebra?

Maybe there is a way to solve the problem of language-equivalence without going into postmodern structuralism, this is the algebraic way.

Given the structure K we consider the binary relation $-||-$ on F defined as follows:

$$a -||- b \text{ iff } \{a\} \vdash b \text{ and } \{b\} \vdash a$$

It is known that this relation is a congruence relation. Factorizing K with this relation we get the following structure:

$$K^a = \langle \mathbf{F}^a, \neg^a, \wedge^a, \vee^a, \rightarrow^a, \vdash^a \rangle$$

We can also factorize the structure K_{and} by the corresponding congruence relation $-||-_{and}$ and then get the following structure:

$$K^a_{and} = \langle \mathbf{F}^a_{and}, \neg^a_{and}, \wedge^a_{and}, \vee^a_{and}, \rightarrow^a_{and}, \vdash^a_{and} \rangle$$

It is easy to see that $\mathbf{F}^a = \mathbf{F}^a_{and}$ so K^a and K^a_{and} have the same domain, and K^a is an expansion by definition of K^a_{and} .

If one consider that K is equivalent to K^a and that K_{and} is equivalent to K^a_{and} then, due to the above fact, K is equivalent to K_{and} and we have solve the problem of language-equivalence.

But can we consider that a structure is equivalent to one of its factorization? Here we have a problem similar to the one of section 4. A structure and one of its factorization don't have necessary the same properties. So if we want our equivalence here to be a congruence relation, we have to consider that the properties that distinguish a structure and its factorization are not essential.

This problem is related to the question of the distinction between algebra and logic, between Universal Algebra and Universal Logic. Can we consider that CPL is not less, not more than Boolean algebra, and that all the work that has been carried out between Boole and Tarski⁶ was meaningless?

⁶ In [14], Tarski proved that we get a Boolean algebra by factorizing CPL.

At this point it is important to emphasize that the difference between CPL, as represented by K , and a Boolean algebra is not only a question of factorization. The structure K^a is not strictly speaking a Boolean algebra. The difference between K^a and a Boolean algebra is similar to the difference between K and T . In a Boolean algebra generally we consider a binary relation (identity) between objects of the domain and not between sets of objects and objects, like $|-^a$. If we consider CPL as T , then the difference between CPL and a Boolean algebra is just a question of factorization (in this case the relation of congruence has to be defined with the implication – cf. Tarski's original definition).

Nowadays most people would rather consider a logic as a structure of the type of K , than of the type of T . If we consider that CPL is better represented by K , there are two important steps from CPL to Boolean algebra: decidability and factorization. So maybe the algebraic way is not a good way to solve the language-problem equivalence.

8. Countable or uncountable?

Depending on the fact that the domain $\mathbf{F}$ of K is generated by a set of finite, countable⁷ or uncountable atomic formulas, $\mathbf{F}$ is finite, countable or uncountable.

Due to the fact that the notion of isomorphism depends on the notion of cardinality and that the notion of equivalence, whether it is modern and postmodern, depends on the notion of isomorphism, it is not possible to consider that two versions of K of different cardinalities are equivalent. This sounds reasonable for the distinction between finite and infinite, since a finite version of K differs from an infinite version in many aspects, for example the factorization of a finite version as a finite domain. But this seems artificial for the distinction within the infinite, between countable and uncountable.

The reason why is due to one important feature of the CPL that we have not discussed yet: *substitution* or *structurality* to use the terminology of the famous paper by Łoś and Suszko [9]. It is easier to explain what happens if we consider tautologies rather than a consequence relation. So let us consider the structure $T = \langle \mathbf{F}; \mathbf{T} \rangle$. Following Łoś and Suszko's structuralist approach, a substitution is any endomorphism ϵ of $\mathbf{F}$, and the substitution theorem is expressed by

For every $a \in \mathbf{T}$ and every ϵ , $\epsilon(a) \in \mathbf{T}$

Given a formula a , the *schema* of a , $sch(a)$, is the set that we get by taking all the formulas of type $\epsilon(a)$, for any endomorphism ϵ . A *schema*

⁷ We use the word countable here by opposition with finite and uncountable.

of formula A is a set of formulas such that there is a formula a and $sch(a) = A$.

The set of schemas of formulas is always countable whether the set of formulas is countable or uncountable and what is important in T are schemas of formulas due to structurality. We don't have more tautologies in the case where the cardinality domain of T is an inaccessible cardinal since tautologies are viewed as schemas of formula rather than as formulas.

9. Modernism or postmodernism?

There are many CPL-structures, and it is not easy to find a good concept of equivalence that gather them into a whole. The standard concept of equivalence seems inadequate. It can perhaps be adapted, but probably artificially, to solve the problem. At this stage we don't know if the postmodern concept of equivalence is a good one. It has to be tested in fact in the whole universe of logical structures and also outside of it, in the whole universe of mathematical structures, if we want to have a uniform theory. At least there is a problem that it doesn't solve, the question of equivalence between CPL-structures of different cardinalities.

References

1. Béziau J.-Y. 1994, "Universal logic", in Logica'94 - Proceedings of the 8th International Symposium, T.Childrens and O.Majer (eds), Czech Academy of Sciences, Prague, pp.73-93.
2. Béziau J.-Y. 1995, Recherches sur la logique universelle, PhD, Department of Mathematics, University of Paris 7, Paris.
3. Bourbaki N. 1950, "The architecture of mathematics", American Mathematical Monthly, 57, 221-232.
4. Bloom S., Brown D.J. 1973, "Classical abstract logics", Dissertationes Mathematicae, 102, pp.43-52.
5. Brown D.J., Suszko R. 1973, "Abstract logics", Dissertationes Mathematicae, 102, pp.9-41.
6. Corry L. 1996, Modern algebra and the rise of mathematical structures, Birkhäuser, Basel.
7. Font J.-M., Jansana R. 1996, A general algebraic semantics for sentential logic, Springer, Berlin.
8. Lavwere F.W., Schanuel S.M. 1997, Conceptual mathematics, CUP, Cambridge.
9. Łoś J., Suszko R. 1958, "Remarks on sentential logic", Indagationes Mathematicae, 20, pp.177-183.
10. Łukasiewicz J., Tarski A. 1930, "Untersuchungen über den Aussagenkalkül", Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, classe III, 23, pp.30-50.

11. *Porte J.* 1965, Recherches sur la théorie générale des systèmes formels et sur les systèmes déductifs, Gauthiers Villars, Paris and Nauwelaerts, Louvain.
12. *Shoesmith D.J. Smiley T.J.* 1978, Multiple-conclusion logic, CUP, Cambridge.
13. *Tarski A.* 1928, "Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques", Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, 7, pp.270-272.
14. *Tarski A.* 1935, "Grundzüge des Systemenkalküls. Erster Teil", Fundamentae Mathematicae, 25, pp.503-526.

GAMES WITH COMMON BELIEF ON PAYOFF FUNCTION

I. Introductory Remarks and Definitions

To introduce a definition of a game in normal form, we need the following concepts: the set I of players; the (pure) strategy sets S_i for each agent $i \in I$; the payoff functions $p_i(s_1, \dots, s_i)$ that assign payoffs for all $i \in I$ as determined by a possible strategy combination $(s_1, \dots, s_i)$.

Definition 1. A game Γ in normal form is a triple $(I, (S_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I})$.

A proposition P is *common knowledge* if all players know that P , and know that all players know that P , and know that all players know that all players know that P , and so on up to any degree of iteration. A proposition P is *common belief* if all players believe that P , and it is common knowledge that all players believe that P .

Consider a finite set of propositions $P = \{P_1, \dots, P_n\}$. The probability distribution μ on P is called *probabilistic common belief* if for all players, their doxastic attitude to $P_1, \dots, P_n$ is governed by μ , and this is common knowledge. Consider now a game $\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I})$, and a finite set $B = \{(p^1_i)_{i \in I}, \dots, (p^n_i)_{i \in I}\}$ such that for each $1 \leq j \leq n$ and for each $i \in I$, (p^j_i) is an (alternative) payoff function $(p^j_i)(s_1, \dots, s_i)$.

Definition 2. Given $\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I})$ and $B = \{(p^1_i)_{i \in I}, \dots, (p^n_i)_{i \in I}\}$, $\Delta = (\Gamma, \mu[B])$ is a *game with common belief on payoff function (g.c.p.b.)*, where $\mu[B]$ is a probability distribution on B .

Given a g.c.p.b. $\Delta = (\Gamma, \mu[B])$, we will call Γ *the ontological component* of Δ , and $\mu[B]$, its *doxastic component*, their intended interpretation being that (i) the players are *really* in the situation determined by $(p_i)_{i \in I}$; and (ii) their probabilistic *common belief* about what is their situation like is (represented by) $\mu[B]$.

Note that standard games in normal form constitute (or, better, correspond to) a proper subclass of all g.c.p.b.'s. To be (or: to correspond to) a standard game in normal form, a g.c.p.b., $\Delta = (\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I}), \mu[B])$, has to meet the two following conditions:

- (i) $(p_i)_{i \in I} \in B$;
- (ii) $\mu((p_i)_{i \in I}) = 1$;
for any $1 \leq j \leq n$,
 $\mu((p^j_i)_{i \in I}) = 0$ if $(p^j_i)_{i \in I} \neq (p_i)_{i \in I}$.

In theory of games with common payoff beliefs, like anywhere else in game theory, the central notion is that of a solution of the game at issue. But with g.c.p.b.'s, unlike anywhere else in game theory, at work is a distinction between the players' subjective image of the game and the game as it is in reality. The players deliberate and act upon their common beliefs about their situation; and when they have reached the outcome of their combined action, they may be surprised at the value of their payoffs, if the image they were acting upon was distorted. The solution of a g.c.p.b. is a function of the players' subjective beliefs, but the resulting payoffs are a function of both the beliefs and the actual reality.

Note that, generally speaking, the concepts involved in a definition of game solution may differ across classes of games: from maximin strategies for a two-player zero-sum game, via dominant strategy equilibrium, via iterated dominance equilibrium, to Nash equilibrium, and the many kinds of its refinement. The bulk of theory of g.c.p.b.'s may be applied to the concept of game solution as construed in terms of any of the above-listed notions. Nevertheless, for the sake of definiteness, we will presume in what follows that each time we consider a game with a unique Nash equilibrium, the concept of game solution should be understood as resulting from the notion of Nash equilibrium.

We are now in a position to construct a definition of *doxastic solution of a g.c.p.b. under doxastic certainty*:

Definition 3. Given a g.c.p.b. $\Delta = (\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I}), \mu[B])$, such that for all $(p^j_i)_{i \in I} \in B$, except one, namely: $(p^j_i)_{i \in I}$, $\mu(p^j_i) = 0$, *doxastic solution* for Δ is the solution of game $\Gamma^* = (I, (S_i)_{i \in I}, (p^j_i)_{i \in I})$.

To define the concept of doxastic solution in a general case, consider a game $\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I})$ whose payoff function maps strategy combinations to *expected payoff values*, relative to a probability distribution, rather than to just the numerical values of the payoffs. Such a game will induce a notion of a game solution exactly in the same way in which a standard (matrix) game does, - because after the expected payoff values have been calculated, the payoff function will have mapped strategy combination to numerical values, exactly in the same way in which the payoff function in a standard game does.

Definition 4: Doxastic solution of a g.c.p.b. (general case). Given a g.c.p.b. $\Delta = (\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I}), \mu[B])$, denote the numerical payoff function resulting from probability distribution $\mu[B]$, $(p(\mu[B]))_{i \in I}$. *Doxastic solution* of Δ is the solution of game $\Gamma^* = (I, (S_i)_{i \in I}, (p(\mu[B]))_{i \in I})$.

II. Comparing doxastic and ontological payoffs

Definition 5. If a g.c.p.b. $\Delta = (\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I}), \mu[B])$ has a doxastic solution $(s_1, \dots, s_I)$, *doxastic payoff combination* for Δ is the combination $(p_1(s_1, \dots, s_I), \dots, p_I(s_1, \dots, s_I))$.

Definition 6. Given a g.c.p.b. $\Delta = (\Gamma, \mu[B])$, if Γ has a solution $(s_1, \dots, s_I)$, we will call it *ontological solution* of Δ , and the combination $(p_1(s_1, \dots, s_I), \dots, p_I(s_1, \dots, s_I))$, *ontological payoff combination* for Δ .

Definition 7. A g.c.p.b. $\Delta = (\Gamma, \mu[B])$ is *doxastically negative* (*neutral*, *positive*, *incomparable*), if its doxastic payoff combination is Pareto-dominated by (respectively: coincides with, Pareto-dominates, is Pareto-incomparable with) its ontological payoff combination.

Definition 8. Given a game $\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I})$ in normal form and a set B of possible alternatives to $(p_i)_{i \in I}$, the $\langle \Gamma, B \rangle$ -class is the class of all g.c.p.b.'s of the form $\Delta = (\Gamma, \mu[B])$ with $\mu[B] \in M[B]$, where $M[B]$ is the set of all probability distributions over B .

A $\langle \Gamma, B \rangle$ -class can be usefully partitioned into four domains: (i) *negative*; (ii) *neutral*; (iii) *positive*; and (iv) *incomparability domain*, according to whether the members of a domain are doxastically negative, neutral, positive or incomparable, respectively. An intuitive significance of such a partition should be clear: we are interested in the question of what happens if the players move from their current (perhaps, distorted and/or incomplete) image of the game to its correct and complete image.

To the four domains, there correspond the four following answers in the same order:

- each player would have their solution payoff strictly increased;
- all the solution payoffs would remain the same;
- each player would have their payoff strictly diminished;
- the result would differ for different players.

III. The issue of the emptiness of the positive domain

Of course the most surprising case would be there, if we find the positive domain non-empty. On the first glance such a case seems counter-intuitive: How can it be that correct and complete knowledge of the situation can do harm to all the players? Is not knowledge always power – at least for some of them?

To give one interesting answer to the above questions, we need a definition of Pareto-suboptimality:

Definition 9. A game $\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I})$ in normal form is *Pareto-suboptimal*, if (i) Γ has a unique Nash equilibrium $(s_1, \dots, s_I)$,

and (ii) there is a combination of strategies $(s^*_1, \dots, s^*_I)$ such that for every $i \in I$, $p_i(s^*_1, \dots, s^*_I) > p_i(s_1, \dots, s_I)$.

Now it is straightforward to demonstrate the following fact:

Fact: For any Pareto-suboptimal game $\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I})$ in normal form, there exists a set B of possible alternatives to $(p_i)_{i \in I}$ such that the positive domain of $\langle \Gamma, B \rangle$ -class is not empty.

Proof: Let $B = \{(p^*_i)_{i \in I}\}$, where $(p^*_i)_{i \in I}$ is determined by the following conditions:

(I) for every $i \in I$, $p^*_i(s^*_1, \dots, s^*_I) = 1$;

(II) for every $i \in I$, $p^*_i(\pi) = 0$, where (π) is a combination of strategies other than $(s^*_1, \dots, s^*_I)$.

It is immediately obvious that, given such Γ and B , the $\langle \Gamma, B \rangle$ -class has exactly one member, and that member belongs to its positive domain.

Given the above fact, the framework of g.c.p.b.'s may be helpful for the task of investigating positive effects of shared epistemic imperfections in the context of Pareto-suboptimal interactive situations – e.g., the Prisoners' Dilemma, the problem of collective action, and the like.

J.M. Dunn¹

TERNARY RELATIONAL SEMANTICS AND BEYOND:

Programs as arguments (data) and programs as functions (programs)

1. Introduction

The purpose of this paper is to review some ideas from Dunn and Meyer (1997) and Dunn (2001) and "write them large". The first paper showed how to represent combinatory algebras using ternary frames, and the second paper showed how to do the same for relation algebras. It should be pointed out that these representations both fall under the general heading of "gaggle theory", as developed in a series of papers beginning with Dunn (1991), in which an n -ary operator is represented using an $n+1$ -placed relation. These results were presented in a somewhat mathematical fashion, although philosophical motivations were introduced as well. The present paper will focus on these philosophical motivations and clarify and extend them. In addition it will point to some future research directions in connection with Pratt's dynamic logic and Hoare's logic of programming.

2. Frege and Boole

Frege's famous dictum, expressed as a conundrum, is that "the concept horse is not a horse". This is our text for this occasion.

Frege has three theses that are relevant. These theses are to be found scattered about his three papers "Concept and Function", "Concept and Object", and "Sense and Reference"².

1. A concept is a special kind of function, taking objects as arguments and operating upon them to produce a rather unfamiliar object (a truthvalue)³. Thesis 1.

¹ School of Informatics, Indiana University, Bloomington IN 47405 (USA), dunn-@indiana.edu.

² Originally published in German in 1892-93 and translated into English in Geach and Black (1960).

³ Frege also had a distinction between two kinds of functions, which we might call, using terminology that has become current, intensional and extensional (Frege talked rather of functions and their course of values (identifying the latter with sets)). This distinction is not important for this paper and we shall ignore it.

2. A function is a very different thing than its argument, and in fact a function cannot itself ever be an argument (functions are "incomplete" whereas their arguments are "complete"). Thesis 2.

3. A definite description ('the so-and-so') refers to an object. Thesis 3.

From 3 we conclude:

4. The definite description 'the concept horse' refers to an object.

From 1 and 2 we conclude

5. A concept cannot be an object.

And so we get something very close to Frege's dictum (but not yet a conundrum):

6. The reference of the definite description 'the concept horse' is not a concept.

But the following seemingly obvious principle gives the conundrum:

7. The reference of a definite description 'the so-and-so' is the so-and-so.

For now we can conclude:

8. The reference of a definite description 'the concept horse' is the concept horse.

And using substitution of identicals, from 6 and 8, we finally obtain the conundrum:

9. The concept horse is not a concept.

Thus, the concept horse, given the argument Man of War, gives the value True, and given the argument Francis (the talking mule) it gives the value False. Frege's point is that there is a very distinct difference between referring to a function, and using it. Frege liked to talk of concepts/functions as complete (saturated) items, and of objects/arguments as incomplete (unsaturated) items.

Perhaps a more contemporary way of making the distinction is to say that when we refer to the concept horse by using the phrase "the concept horse" we are referring to a static object, and not to the function in its full dynamic nature.

Modern logicians can make this distinction using the lambda notation of Church (1941). Thus $x + 1$ is incomplete, waiting for an argument to be input to the variable x , say 2, before producing the output value $2 + 1 = 3$. Whereas $\lambda x(x + 1)$ is complete and denotes the function that applied to an argument x returns the result $x + 1$: It can have functions applied to it as an argument. For example, we can apply iteration to it so as to obtain $\lambda x(x + 2)$. Frege goes on at length to make

this by now familiar distinction, using Greek lower-case letters (he did not have the lambda notation, which importantly denotes the scope of the binding), writing things such as $\xi + 1$ to denote the successor function. Can the same item be both an object/argument and a concept (function)? Frege thought not, but thought that when we want to refer to a concept, we end up referring to a close cousin of it which he termed a "concept correlate". In this paper we show how to make sense of this idea.

In further motivating this paper, we turn to another one of the founders of modern logic, George Boole. Boole (1847) had two interpretations of what has now come to be known as Boolean algebra. The primary interpretation was that the elements of a Boolean algebra are to be thought of as propositions. The secondary interpretation was that the elements of a Boolean algebra are to be thought of as sets. Boole observed that propositions and sets obeyed the same laws, mapping conjunction into intersection, disjunction into union, and negation into relative complement. He explained this by observing that a proposition can be regarded as the set of cases in which it is true. This is the fundamental origin of the idea that a proposition can be understood as a set of possible worlds. This latter notion has been generalized to the idea that a proposition can be understood as a set of information states. These can be partial, and even inconsistent. Total, consistent information states are surrogates for possible worlds. Let us call this Insight 1. It is the basis of the Carnap-Kripke-Montague-Stalnaker-et al program of semantics. This might be called a static conception of a proposition, since propositions just "sit there" as sets of states.

More recent authors, e.g., Gärdenfors and Makinson (1988) have observed that there is also a more dynamic conception of proposition. When we add a proposition to our existing set of beliefs, it transforms these beliefs into another belief set. Let us call this Insight 2. A belief set can be conceptualized to be one gigantic proposition (the conjunction of someone's beliefs). So a proposition can be viewed as an operator on propositions. This is the dynamic conception of proposition.

Insight 1 and Insight 2 both seem to be correct. How can we reconcile them? The quick answer is that a proposition must be simultaneously an object (potential argument) and a function. But what does this mean? This is the topic which we shall explore throughout this paper.

3. Von Neumann's concept of a "stored program"

There is a certain irony in the development of the study of logic and computation which has been a hallmark of the twentieth century. Although this development has taken place in at least the first half of the century in largely the same venues and by largely the same pioneers, largely the study of logic as a foundation for mathematics has been driven by a desire to respect types, whereas formal systems developed for computation are by their very nature type defying. The first is clear from the fixation of most of mathematical logic on first-order logic, despite this a small flirtation with second-order logic, and the standard set-theories based on notions of hierarchies (Zermelo-Frankel, von Neumann-Bernays-Gödel, Morse, Kelly). And the last is clear from the fundamental notion of a "stored program" in the "von Neumann architecture". John von Neumann, in 1946 wrote a paper with Arthur W. Burks and Hermann H. Goldstine titled "Preliminary Discussion of the Logical Design of an Electronic Computing Instrument" (Burks, et al., 1963). This paper begins by discussing the four main components of a computer: the arithmetic logic unit, memory, control, and input-output human interface. In other words, the arithmetic logic unit, the control unit, and input-output. We quote from Riley (1997):

To von Neumann, the key to building a general purpose device was in its ability to store not only its data and the intermediate results of computation, but also to store the instructions, or orders, that brought about the computation. In a special purpose machine the computational procedure could be part of the hardware. In a general purpose one the instructions must be as changeable as the numbers they acted upon. Therefore, why not encode the instructions into numeric form and store instructions and data in the same memory? This frequently is viewed as the principal contribution provided by von Neumann's insight into the nature of what a computer should be.

He then defined the control organ as that which would automatically execute the coded instructions stored in memory. Interestingly he says that the orders and data can reside in the same memory "if the machine can in some fashion distinguish a number from an order" [Burks, et al., p. 35].

And yet, there is no distinction between the two in memory. The control counter (what we now usually call the program counter) contains the address of the next instruction, and that word is fetched to be executed. Whatever the control unit "believes" to be an order or to be data is treated as such. One ramification of this is that the instructions can operate upon other instructions, producing a self-modifying program. This has not been considered good form for many years, because of the implications for program debugging and the desire for reentrant code in some situations. It

is possible that new developments in artificial intelligence may bring fresh attention to the possibilities afforded by this characteristic [Bishop 1986].

While von Neumann and his co-workers deserve the credit for specifying the broad outlines of the contemporary electronic computer, there is an important presaging in the work of Turing in his proof that there could be a universal computing machine, where he used the idea of coding up the machine tables of other Turing machines in terms of numbers that could then be used as input to the universal machine.

The feature that we wish to draw attention to here is the fact that in a general purpose computer, a program can be either function or argument, depending on context. There is a similar feature in the λ -calculus of Church (1941), or the combinatory logic of Curry and Feys (1972), where an expression such as **KI**, or $(\lambda x \lambda y x)(\lambda x x)$ treats the first term as a function and the second term as an argument. Indeed one can have a term of the form MM , say **II** or $4.(\lambda x x)(\lambda x x)$, which treats the very same term M as simultaneously standing for both a function and an argument. So much for types!

The contrast during the first fifty year or so of the twentieth century between the type conscious mainstream in mathematical foundations, and the type insensitive undercurrent in the logic of computation is quite striking. It reminds one of the (likely apocryphal) stories of early aviation theorists proving the impossibility of powered flight while the Wright brothers and others were working first on models, and then on real airplanes.

4. The Routley-Meyer Semantics for Relevance Logic

We make what might seem a side trip, to discuss the so-called "Routley-Meyer semantics" for relevance logic⁴, but we shall see in the next section that it is closely related to our main journey. It is well-known that Routley and Meyer (1972, 1973) provide a "Kripke-style" semantics for relevance logic using a ternary accessibility relation R ⁵. Ignoring negation, a Routley-Meyer frame is a structure $(U, R, 0)$ with $R \subseteq U^3$ and $0 \in U$. A Routley-Meyer model adds an atomic "forcing relation" $\Vdash_0$ between states and atomic sentences $(\alpha \Vdash_0 p)$. This can be

⁴ Anderson, Belnap, and Dunn (1992) contains a good discussion of this semantics, including variants due to Urquhart and Fine discussed below.

⁵ There is an alternative "operational semantics" that we could be using. The ternary relation $R\alpha\beta\gamma$ is replaced using a binary operation on states $\alpha + \beta = \gamma$ (Urquhart) or else $\alpha + \beta \sqsubseteq \gamma$ (Fine). The first has also been used by Girard (1987) in the "phase space" semantics for linear logic. The last is more general, extending as it does to allow an underlying distributive lattice. Cf. Anderson, Belnap, and Dunn (1992) for details. Cf. also Dofšén (1992).

extended inductively to provide a "forcing relation" between states and compound sentences. Thus for relevant implication they have the following (χ, α, β range over U)⁶:

$$\chi \models \phi \rightarrow \psi \text{ iff } (\forall \alpha, \beta : R\chi\alpha\beta \ \& \ \alpha \Vdash \phi \text{ imply } \beta \Vdash \psi). \quad (1)$$

They also gave a truth condition for "fusion" (intensional conjunction):

$$\chi \models \phi \circ \psi \text{ iff } \exists \alpha, \beta (R\alpha\beta\chi \ \& \ \alpha \Vdash \phi \ \& \ \beta \Vdash \psi). \quad (2)$$

Routley and Meyer thought of U as "set ups". A "set up" is like a Carnapian state description except it can be inconsistent and/or incomplete. Routley and Meyer also thought of U as something like a set of possible worlds, but with the thought that these can be partial/and or incomplete. We shall continue to use the more neutral and trendy word "state", anticipating applications to computers.

Given the Carnap-Montague-Kripke idea of a "proposition" as a set of possible worlds, a sentence ϕ can then be taken to be interpreted as the "proposition" $\|\phi\| = \{\alpha : \alpha \Vdash \phi\}$.

Using propositions, we can rephrase the truth conditions above as:

$$\|\phi \rightarrow \psi\| = \|\phi\| \Rightarrow \|\psi\| =_{\text{def}} \{\chi : (\forall \alpha, \beta : R\chi\alpha\beta \ \& \ \alpha \in \|\phi\| \text{ imply } \beta \in \|\psi\|)\} \quad (3)$$

$$\|\phi \circ \psi\| = \|\phi\| \odot \|\psi\| =_{\text{def}} \{\chi : \exists \alpha, \beta (R\alpha\beta\chi \ \& \ \alpha \in \|\phi\| \ \& \ \beta \in \|\psi\|)\} \quad (4)$$

1. There are several things about this semantics that must be mentioned:
2. Implicit in this semantics is a relation $\alpha \sqsubseteq \beta$ (Routley and Meyer would write " $a < b$ ") which can be defined as $R0\alpha\beta$: The "Hereditary Condition" (adopted from intuitionistic logic) imposes the requirement that if $\alpha \in \|\phi\|$ and $\alpha \sqsubseteq \beta$, then $\beta \in \|\phi\|$. This in effect says that a proposition is not just any set of states, but rather one that is closed upwards under $\sqsubseteq$. It is natural to regard this as "the information order".
3. Validity is defined not by reference to arbitrary states (as in the Kripke semantics for modal logic and intuitionistic logic), but rather by reference to the "zero states". Also it is a bit of an

⁶ In the definition below Routley and Meyer make the first position the "pivot", but there is no reason why the second point cannot be the pivot. Then we get $\chi \models \psi \leftarrow \phi$ iff $(\forall \alpha, \beta : R\alpha\chi\beta \ \& \ \alpha \Vdash \phi \text{ imply } \beta \Vdash \psi)$. In previous papers I have often reversed these arrows for reasons of wanting to match a convention of residuation theory due to Pratt.

accident that Routley and Meyer pick out one such. In general terms it does not hurt to add a set of them, $Z \subseteq U$.

4. The above observations motivate our defining a (ternary) frame as a structure $F = (U, R, \sqsubseteq, Z)$, with $\sqsubseteq$ a partial-order on U subject to the condition that $\exists \zeta \in Z (R\zeta\alpha\beta)$ iff $\alpha \sqsubseteq \beta$ iff $\exists \zeta \in Z (R\alpha\zeta\beta)$ (Z -condition).
5. Validity in a frame ($\models_F \phi$) is then defined as: $\forall \alpha \in U, \forall \zeta \in Z : \zeta \Vdash \phi$. And validity in general ($\models \phi$) is defined as validity in all frames ($\forall F, \models_F \phi$).
6. Every frame gives rise to an algebra of propositions $A(F) = (\wp^\uparrow(F), \wedge, \vee, \Rightarrow, \odot, Z)$. The carrier set $\wp^\uparrow(F)$ is just the set of propositions $A \subseteq U$, i.e., subsets of U closed upwards under $\sqsubseteq$. $\wedge$ and $\vee$ are respectively intersection and union, and $\Rightarrow$ and $\odot$ are defined as above. Z is of course simply the set of zero states Z of the frame.

Remark 1. *Urquhart (1972) had a simpler idea about how to model relevant implication. His idea was to have a set U of "pieces of information" $\alpha, \beta, \chi, \dots$. Urquhart included the least (empty) piece of information $\emptyset$ used to define validity. Urquhart postulates that the pieces of information can be combined by a semi-lattice operation $\sqcup$. For this reason it is common to refer to Urquhart's approach as the "operational semantics", and to call the contrasting Routley-Meyer approach the "relational semantics". While there are problems in trying to extend Urquhart's idea to provide a semantics for the whole of the system **R** of relevant implication (conjunction is ok, but both disjunction and negation cause problems), Urquhart showed that we can model the implicational fragment **R**_→ with the following:*

$$\chi \models \phi \rightarrow \psi \text{ iff } (\forall \alpha : \alpha \Vdash \phi \text{ imply } \chi \sqcup \alpha \Vdash \psi). \quad (5)$$

Remark 2. *The essential difference between the operational and relational semantics can be put in terms of the former assuming determinism: Given the state χ and the input α there is a unique outcome $\chi(\alpha) = \chi \sqcup \alpha$. The relational semantics rather assumes that there can be many accessible outcomes $\chi(\alpha) = \{\beta : R\chi\alpha\beta\}$.*

Remark 3. *Fine (1974), independently from Routley, Meyer, and Urquhart, developed a semantics for relevant implication that in effect combined their two ideas. In place of $R\alpha\beta\gamma$ Fine writes: $\alpha^\circ\beta \leq \gamma$. We will call the Fine approach the "refined semantics" because it makes explicit the binary operation implicit in the Routley-Meyer semantics. If you look at the Routley-Meyer completeness proofs and at the*

canonical model of theories, one sees that they have an operation combining theories and also the relation of inclusion between theories.

There are many different ways to interpret these semantical ideas. Thus for example think of χ as a "proof" of $\phi \rightarrow \psi$. In terms of the operational semantics, χ determines a function taking proofs of ϕ to proofs of ψ . In the relational semantics, χ determines a relation from proofs of ϕ to proofs of ψ .

I suggested verbally (and it is referenced in the first Routley-Meyer paper) that one somehow think of $R\rho\alpha\beta$ as akin to Kripke's relative accessibility relation, but relativized one step further. Rather than saying that β is possible relative to α , we save that given ρ that β is possible relative to α . In the early 1970's, Peter Woodruff (verbally to me) suggested thinking of the ternary relation R as an indexed set of *binary* relations $\{R_\rho\}_{\rho \in U}$, where each $R_\rho = \{ \langle \alpha, \beta \rangle : R\rho\alpha\beta \}$. It is a short metaphorical step from this to the observation that one can think of each state ρ as having a dual nature, first as a state and second as determining a binary relation $R_\rho\alpha\beta$ between states α and β . This can be given the "philosophical" reading: "the pair $\langle \alpha, \beta \rangle$ *exemplifies* the relation (determined by) ρ ". Also it can be directly related to Frege's distinction between "concept" and "object". We think of ρ as the "object correlate" of the relation R_ρ . We can take the further metaphorical step of thinking of the state ρ as "static", and the relation R_ρ as "active". We are within a hair's breadth of von Neumann's concept of a stored program⁷!

5. Interlude on Indeterminism

A *theory* is simply a set of sentences closed under adjunction and (relevant) entailment. It is easy to see that theories behave well with respect to conjunction. A theory contains a conjunction iff it contains each conjunct. But once we add disjunction, theories lose respect. While a disjunction is in a theory when either disjunct is, the converse does not hold. It is standard to call a theory where the converse holds *prime*. Given two theories T and T' , it is natural to form their "fusion" $T \circ T'$. This is done by considering the set of sentences of the form $\phi \circ \phi'$ where $\phi \in T$ and $\phi' \in T'$, and closing it under adjunction and

⁷ We have therefore several reasons to regard Frege as a proto computer scientist. Skipping this anticipation of the idea of a "stored program", and passing quickly over the issues of formal logic and its relations to computer science, we get to the important fact that Frege received funding from Zeiss (told to me by Werner Stelzner). Corporate support is one of the most important marks of a computer scientist.

entailment. Even when both T and T' are prime, their fusion is unlikely to be prime. This is because of the **R**-theorem:

$$(\varphi \rightarrow \psi) \circ \varphi \rightarrow \psi.$$

In particular $\varphi \rightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ might be in T and φ might be in T' , and so $\psi_1 \vee \psi_2$ would end up in their fusion $T \cdot T'$. And yet there is no reason that either one of ψ_1 or ψ_2 should end up there⁸.

This is why when we look at the canonical model we focus on the ternary relation $R\alpha\beta\gamma$ rather than the binary operation $\alpha \bullet \beta$. In Fine's terms this is $\alpha \bullet \beta \leq \gamma$, i.e., $T \bullet T' \subseteq T''$, where T , T' , and T'' can all be prime. In the proof of the completeness theorem we build prime extensions of $T \bullet T'$ in various possible ways, and in some of these 1 is true and in others of these ψ_2 is true.

6. Interpretation

We like to give $R_p\alpha\beta$ the "technological" reading: if the machine is currently in state ρ , then if it were to enter state α , then state β is a potential outcome (the pair $\langle \alpha, \beta \rangle$ is a possible transition given ρ).

The reader may wonder why we need this ternary relation of accessibility, and not just a binary one, which is more usual. And indeed provides the framework for Pratt's dynamic logic. It might be worth investigating how to extend dynamic logic to involve the ternary accessibility relation.

It might be argued that if α is a state, then all the information that is relevant to possible transitions is contained in α alone, and so there is no reason to consider the "perspective" of ρ . Indeed, on a deterministic conception of computation, the initial state would uniquely determine all of the subsequent states. But this objection overlooks the fact that we are working with partial states. One might think of this partiality in terms of segregating parts of the machine so in considering $R_p\alpha\beta$ we think of ρ as a state in that part of the machine that stores operations, and α and β as states in that part of the machine that stores data. Or one might think in terms of concurrent computing, with ρ being the state on one processor, and α and β being states in another processor (or complexes of processors including maybe the whole system) whose operation is affected by ρ . This kind of approach leads to the idea that states are of different types, and we are here wanting a type-free system. But we think it is worth exploring typed systems as well, particularly the division between operations and data. The information in α may well be partial and the information in ρ may further restrict

⁸ Because the following is not an **R**-theorem:

$$(\varphi \rightarrow \psi_1 \vee \psi_2) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_1) \vee (\varphi \rightarrow \psi_2).$$

the states β that are accessible from α . Note that states may even be inconsistent. Think of a network where there are two machines that are supposed to be mirror sites but by some glitch they are not. Readers who are bothered by the thought of partial or inconsistent states should be reminded that states exist at the "logical", as opposed to the "physical" level. Two states of different machines can be identical even though there are hardware differences between the two machines, and of course this can also be true of the same machine at two different times.

One way to look at things is that we are somehow combining ρ and α and seeing whether this combination is contained in β : $\rho + \alpha \sqsubseteq \beta$. The simplest mode of combination would just be in effect to take their "union" $\rho \vee \alpha$. Thus thinking of a state as an assignment of the binary bits 0 or 1 to variables, a variable x_i will be assigned one of these values by $\rho \vee \alpha$ if either ρ or α assigns it that value. This is the minimal requirement on a "union". But oops! What happens if say ρ assigns x_i the value 1 and α assigns it 0? One could imagine various answers here as to what value $\rho + \alpha$ assigns. E.g., it could assign no value, it could assign an error message, it could assign some principled choice (say, when in doubt take the maximum), or, most radically but perhaps most naturally for the concept of a "union", we give up on the idea that assignments are consistent and let it assign both values. But if we require that the assignments ρ , α and β must be consistent, one of the most interesting things to do is to take the maximum. This ensures to $R\rho\alpha\beta$ $\rho \sqsubseteq \beta$ and $\alpha \sqsubseteq \beta$, which as can be seen from Dunn (1993c) gives a ternary accessibility relation which provides the basis for a semantics for intuitionistic implication.

There is a related ternary relation in Barwise (1993). Barwise uses the notation $s_1 \mapsto^c s_2$ to indicate the 3-placed relation that exists when the two "sites" s_1 and s_2 are connected by the "channel" c . In the notation of Routley and Meyer this could be expressed as Rs_1cs_2 . Channels hence determine binary relations between sites, but they need not be identified with those relations.

Barwise leaves explicitly open the idea that sometimes channels can be sites and *vice versa*. What we have in our representation of relation algebras is the totally "untyped" case where every site is a channel and *vice versa*.

7. The main idea

I wish to give here the main idea. Suppose we have a ternary frame with a set of states U , and a subset A of U . A can be thought of as a set of states, i.e., a proposition. So A is quite static. But, and this is than

main idea, it can be turned in for the set of relations determined by those states, and those relations can of course be regarded as taking states to states. So A is *at the same time* quite dynamic. Here we model the duality implicit in von Neumann's concept of a stored program, or Frege's distinction between concept and object/function and argument. One and the same thing can be both.

Given a state $\rho \in U$, $R_\rho = \{\langle \alpha, \beta \rangle : R\rho\alpha\beta\}$. By $R[A]$ let us mean the set of relations determined by A , i.e., $R[A] = \{R_\alpha : \alpha \in A\}$.

Suppose we have two such propositions A and B . We can turn A in for the set $R[A]$ of relations which it determines, and similarly we can get $R[B]$. We can then do various things with $R[A]$ and $R[B]$. Thus as one example we can take $R[A]$ and "apply" it to B :

$$R[A](B) = \{\gamma : \exists \alpha \in A, \exists \beta \in B (R_\alpha \beta \gamma)\},$$

getting all the states we can get to from B using a relation in $R[A]$; treating A as a program, B as data, and applying A to B . We shall return to this idea in the next section when we examine how to model combinatory logic.

This uses only the implicit relation character of A . But we can use the implicit relational character of both A and B ; taking the relations in $R[A]$ and the relations in $R[B]$ and forming their relative products in all possible ways. Let us recall that given two relations R and S their relative product is defined by

$$x(R \otimes S) \Leftrightarrow \exists u (xRu \ \& \ uRy).$$

So we define

$$R[A] \circ R[B] = \{R_\alpha \otimes R_\beta : \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

This is like viewing both A and B as programs, and composing A with $B : A \cdot B$. We shall return to this idea in a short while when we examine how it can be used in the representation of relation algebras.

8. Models for combinatory logic

Dunn and Meyer (1997) gives particularly simple models for combinatory logic based on the Routley-Meyer ternary semantics for the relevance logic $\mathbf{R}^9$. Various conditions have to be put on the ternary accessibility relation to get models for the logic $\mathbf{R}$. It is well-known by now that by fussing with those conditions one can get models for various logics closely related to $\mathbf{R}$.

⁹ As is spelled out in Dunn and Meyer (1997), other models for combinatory logic have been provided by various researchers, including D. Scott, G. Plotkin, and R.K. Meyer, M. Bunder and L. Powers.

We illustrate this with a simple example. The logic **R** has the "contraction axiom"

$$(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi),$$

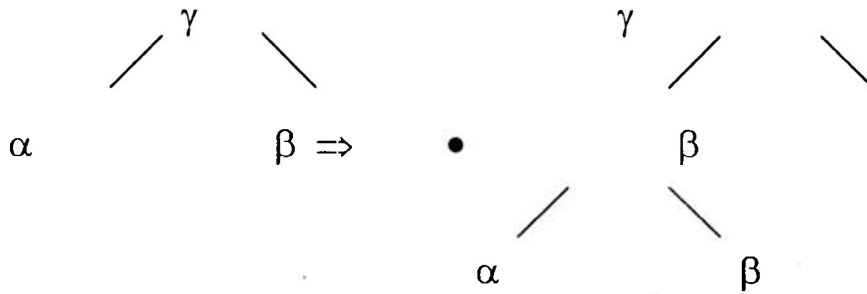
which corresponds to Gentzen's "structural rule" of contraction:

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi, \Delta \vdash \psi}{\Gamma, \varphi, \Delta \vdash \psi}.$$

This amounts to saying that $\circ$ "duplicates", i.e., $A \circ B \subseteq (A \circ B) \circ B$. On the accessibility condition we need the postulate:

$$R\alpha\beta\gamma \Rightarrow \exists\chi(R\alpha\beta\chi \ \& \ R\chi\beta\gamma).$$

In a more or less obvious diagram this becomes:



We choose to algebraize the combinators as a *combinatory poset*, i.e., as a partially-ordered groupoid $(X, \leq, \circ, C)$, where X is thought of as a set of untyped functions, $\leq$ is a partial order on X (thought of as "reducibility"), $\circ$ is a binary isotonic operator on X (thought of as "application"), and $C \leq X^{10}$. C is thought of as a set of combinators, and we shall call its members combinator elements. Each combinator element $c \in C$ is subject to some postulate of the form

$$cx_1 \dots x_m \leq \tau(x_1, \dots, x_m), \quad (6)$$

where $cx_1 \dots x_m$ are variables, $\circ$ is indicated by concatenation, the sequence $cx_1 \dots x_m$ is a left-associated sequence, i.e. is of the form $((cx_1)x_2) \dots x_m$, and $\tau(x_1, \dots, x_m)$ is a term constructed only out of the

¹⁰ Note that we use $\leq$ where Curry and Feys (1972) use $\geq$. Note also that we do assume the usual conventions of suppressing $\circ$ in favour of juxtaposition, and assuming associativity to the left.

variables $x_1, \dots, x_m$ (not necessarily all of them) and ^{c11}. $\tau(x_1, \dots, x_m)$ can be regarded as a sequence containing some or all of the variables $x_1, \dots, x_m$, with parentheses scattered through it so as to indicate binary grouping of any pattern.

As examples consider a few of the more common combinators:

$$\mathbf{i}x \leq x \quad (7)$$

$$\mathbf{k}xy \leq x$$

$$\mathbf{c}xyz \leq xzy$$

$$\mathbf{w}xy \leq xyy$$

$$\mathbf{b}xyz \leq x(yz) \quad (8)$$

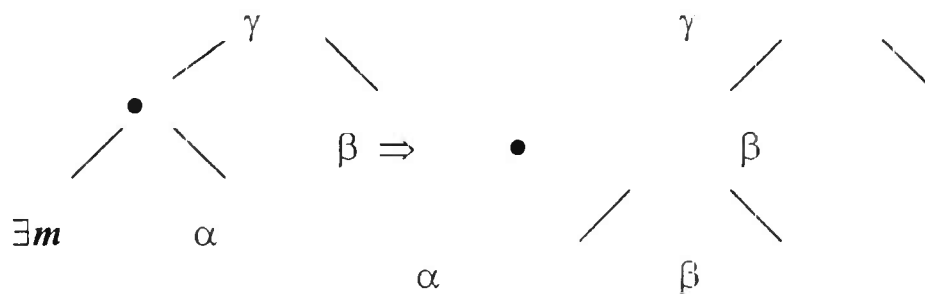
$$\mathbf{s}xyz \leq (xz)(yz)$$

The notion of a combinatory poset is similar to the notion of a "combinatorial algebra" in Barendregt (1981), except that he bases things throughout on equality rather than the inequality, and his combinators are required to be **S**, **K**.

It is well-known that contraction corresponds to the combinator **W**. Using inclusion in place of reduction, the postulate for that combinator is $\mathbf{W}AB \subseteq ABB$. If we view **W**, *A*, and *B* as sets of states, we need the following postulate:

$$\exists m \in \mathbf{W}, \exists \chi (Rm\alpha\chi \ \& \ R\chi\beta\gamma) \Rightarrow \exists \chi (R\alpha\beta\chi \ \& \ R\chi\beta\gamma)$$

The left-most terminus is "kicked out of the way" by the combinator state *m*:



¹¹ Because of the form of these laws, the combinator elements correspond to what have been called "proper" combinators (cf. Curry and Feys (1972), and which may be viewed as closed lambda terms. We do not bother with the more accurate but more awkward terminology "proper combinator poset".

Conditions can thus be put on ternary frames that force various subsets to behave like combinators¹².

Using this method it was shown in Dunn and Meyer (1997) that every combinatory algebra can be represented using an appropriate ternary frame.

9. Models for the algebra of relations

In Dunn (2001) it was shown how to represent relation algebras using a modified version of Routley-Meyer frames that are not unlike those they used to model relevance logic¹³. We will not repeat definitions here, but part of the trick was to give a carefully layered definition of relation algebras that showed the close connections to relevance logic and which matched a carefully layered definition of the appropriate Routley-Meyer frames.

We begin with the notion of *lattice-ordered monoid* $(L, \leq, \vee, \circ, e)$, where $(L, \leq, \vee)$ is a lattice and $(L, \leq, \vee, \circ, e)$ is a monoid, with $\circ$ distributing over $\vee$ from both directions. It follows that $\circ$ is isotone in each of its arguments.

We recall that a l.o.m. is said to be residuated if it had two additional binary operators $\rightarrow$ and $\leftarrow$ (called the *right* and *left residuals*) satisfying:

$$x \circ y \leq z \text{ iff } y \leq x \rightarrow z \text{ iff } x \leq z \leftarrow y. \quad (9)$$

De Morgan and Peirce observed in the last century that these structures arise naturally in the context of the algebra of relations (cf. e.g., Maddux (1991)). We think of relations in the usual way as sets of ordered pairs. Given a set X and two binary relations R and S on X , the relative product $R \circ S = \{(x, y) : \exists z((x, z) \in R \ \& \ (z, y) \in S)\}$ is an associative operation, and e is the identity relation (restricted to X). Then $R \rightarrow S = \{(x, y) : \forall z((z, x) \in R \text{ implies } (z, y) \in S)\}$ and $S \leftarrow R = \{(x, y) : \forall z((x, z) \in R \text{ implies } (y, z) \in S)\}$.

But relative product and the residuals are not the only important operations on relations. There is also the converse $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$. Given a lattice, a unary operation x^{-1} (which we shall think of as

¹² Alternatively, if one is interested not just in one-way reduction but rather equality of combinators, one can define a combinator as a set of states satisfying a given condition. For example:

$\mathbf{W} = \{m : \exists \chi(Rm\alpha\chi \ \& \ R\chi\beta\gamma) \Rightarrow \exists \chi(R\alpha\beta\chi \ \& \ R\chi\beta\gamma)\}.$

¹³ As explained in detail in Dunn (2001), it was pointed out to me by R. Maddux that this idea was foreshadowed by Lyndon, and by Jónsson and Tarski, although my treatment is more explicit and general and makes the connections to relevance logic and other substructural logics.

"conversion") is an automorphism of period two when it is a 1-1, order preserving, and of period two. i.e., $(x^{-1})^{-1} = x$.

Definition 4. A structure $(L, \wedge, \vee, \circ, \rightarrow, \leftarrow, -, ^{-1}, e)$ is a **relation algebra** iff

$$(L, \wedge, \vee, -) \text{ is a Boolean algebra,} \quad (10)$$

$$(L, \wedge, \vee, \circ, \rightarrow, \leftarrow, e) \text{ is a residuated lattice ordered monoid,} \quad (11)$$

$$x^{-1} \text{ is a lattice automorphism of period two on } (L, \wedge, \vee), \quad (12)$$

$$(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}. \quad (13)$$

$$a \rightarrow b = -(a^{-1} \circ -b), \quad b \leftarrow a = -(-b \circ a^{-1}). \quad (14)$$

The above definition derives from Tarski (1941), and can be found in Dunn (2001). This definition is presented in a way that makes it similar to the definition of a Boolean De Morgan monoid, which is the algebraic structure corresponding to the relevance logic **R** supplemented with Boolean negation in addition to its standard De Morgan negation. These structures were in effect introduced by Meyer and Routley (1973) and studied more explicitly as algebraic structures by Meyer (1979), where he explicitly introduced an operator x^* . Meyer observes that one can then define the usual De Morgan complement from the Boolean one and the $*$ operator as follows:

$$\sim x = -(x^*). \quad (15)$$

Putting $^{-1}$ in place of $*$ we get:

$$\sim x = -(x^{-1})$$

which was anticipated as a definition of a negation-like operator by Białynicki-Birula and Rasiowa (1957).

14 above does not look very pretty from a logical point of view, but it can be replaced equivalently with:

$$a \rightarrow b = \sim(\sim b \circ a), \quad b \leftarrow a = \sim(a \circ \sim b). \quad (16)$$

The only differences between a Boolean De Morgan monoid and a relation algebra is that for a De Morgan monoid we assume in addition that $\circ$ is commutative and square increasing ($x \leq x \circ x$). This last corresponds to contraction.

Next we turn to the ternary frames appropriate to representing relation algebras. We start with a plain vanilla ternary frame $F = (U, R, \sqsubseteq, Z)$ and add to it a unary map ${}^\omega$ on U into itself such that for $\chi \in U$.

$$\chi^\omega = \chi \quad (\text{period two}). \quad (17)$$

Such a map is commonly called an involution¹⁴. We also add (writing $\chi^\sim$ in place of $\chi^\cup$).

$$R\alpha\beta\gamma \text{ only if } R\beta^\sim\alpha^\sim\gamma^\sim \text{ (tagging)}. \quad (18)$$

$$R\alpha\beta\gamma \text{ iff } R\gamma^\sim\alpha\beta^\sim \text{ (antilogism)} \quad (19)$$

Let us define for $A \in P(U)^\uparrow$,

$$A^{-1} = \{\alpha^\sim : \alpha \in A\}. \quad (20)$$

By virtue of (17), this is equivalent to:

$$A^{-1} = \{\alpha : \alpha^\sim \in A\}. \quad (21)$$

This does not yet give us the class of frames appropriate for relation algebras, because we have to assure that $\circ$ is associative.

Let us begin by looking at two notational conventions of Routley and Meyer:

$$R(\alpha\beta)\gamma\delta =_{\text{def}} \exists\chi(R\alpha\beta\chi \ \& \ R\chi\gamma\delta), \quad (22)$$

$$R\alpha(\beta\gamma)\delta =_{\text{def}} \exists\chi(R\alpha\chi\delta \ \& \ R\beta\gamma\chi). \quad (23)$$

Routley and Meyer actually write " R^2 " where we write simply " R " above, but for reasons of both suggestiveness and simplicity we shall often simply let the number of terms affixed tell that there is a power.

One of the requirements on a Routley-Meyer frame is that these two compositions are equivalent:

$$R(\alpha\beta)\gamma\delta \text{ iff } R\alpha(\beta\gamma)\delta \quad (24)$$

This is precisely what is needed to assure that

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C \quad (\text{associativity})$$

In this section we shall depart from our convention of viewing the binary relation hidden inside a ternary relation as indexed by the first state. For reasons that have nothing to do with anything but making things look pretty we shall view it as indexed by the second state¹⁵. So in this section only, $R_\rho = \{(\alpha, \beta) : R\alpha\rho\beta\}$.

Let us define the composition of two "binary relations" ρ and σ :

$$\alpha(R_\rho \otimes R_\sigma)\beta \text{ iff } \exists\chi(R\alpha\rho\chi \ \& \ R\chi\sigma\beta)$$

Clearly using this definition and R -associativity, we obtain

¹⁴ Following Routley and Meyer, this involution is customarily denoted by $*$ in the relevance logic literature. Here we instead use $\sim$ because in the literature on relations $*$ is customarily used for the "ancestral".

¹⁵ This has something to do with the mathematical tendency to use infix notation for relations and prefix notation for functions.

$$\alpha(R_\rho \otimes R_\sigma)\beta \text{ iff } R(\alpha\rho)\sigma\beta \text{ iff } R\alpha(\rho\sigma)\beta, \quad (25)$$

where the right-hand sides of the last two conditions are understood using the compositional notations of Routley-Meyer. One could write (25) as

$$\alpha(R_\rho \otimes R_\sigma)\beta \text{ iff } R_{(\rho\sigma)}\alpha\beta. \quad (26)$$

but one should be clear that " $(\rho\sigma)$ " is a mere notation and does not denote an actual point.

The above expresses what one might label a "notional homomorphism". But it can be made into an actual homomorphism if we "refine" the Routley-Meyer relation into smaller bits, in effect interpreting $R\alpha\beta\gamma$ as $\alpha \bullet \beta \sqsubseteq \gamma$. We can restate ?? as:

$$R_{\rho \bullet \sigma} = R_\rho \otimes R_\sigma.$$

We can also easily see that

$$R_{\rho^*} = (R_\rho)^{-1}.$$

Proof. $\alpha R_{\rho^*} \beta$ iff $R\alpha\rho^*\beta$ (antilogism) $R\rho^*\beta\alpha^*$ iff (tagging period two) $R\beta\rho\alpha$ iff $\beta R_\rho \alpha$ iff $\alpha(R_\rho)^{-1}\beta$.

It turns out that one can show that $\lambda\rho R_\rho$ is a one-one function taking states to binary relations on states, using the Z-Condition in the definition of a frame. So we in fact have an isomorphism preserving "relative product" and "converse") between states and binary relations.

Lyndon (1950) showed that not every relational algebra can be interpreted as a set of relations, but using the observations above we can easily show that this can be done one type-level higher. Given a set of states A , let $\mathbf{R}_A = \{R_\alpha : \alpha \in A\}$. For any frame U , we have just observed that $\mathbf{R}_U$ is closed under relative product and converse and is in one-one correspondence with U . This means that we can give "point-wise" definitions: $\mathbf{R}_A \circ \mathbf{R}_B = \{(R_\alpha \otimes R_\beta) : \alpha \in A, \beta \in B\}$ and $\mathbf{R}_A^{-1} = \{R_\alpha^{-1} : \alpha \in A\}$. Note further that $\mathbf{R}_A \cap \mathbf{R}_B = \mathbf{R}_{A \cap B}$, $\mathbf{R}_{A \cup B} = \mathbf{R}_A \cup \mathbf{R}_B$, and $\mathbf{R}_{U-A} = \mathbf{R}_U - \mathbf{R}_A$.

Theorem 5. *Every relation algebra $(A, \wedge, \vee, -, \circ, ^{-1})$ is isomorphic to a set of sets of relations, with $\wedge$ interpreted as union, $\vee$ as intersection, $-$ as complement relative to a certain subset of $\wp(U \times U)$, and $\circ$ being point-wise relative product, and $^{-1}$ being point-wise converse.*

10. Glimpses Ahead: Pratt's Dynamic Logic and Hoare Logic

Proof. V. Pratt (1980) makes a distinction between states and programs and defines things such as $[p]\phi$ to mean intuitively that the

sentence ϕ is true of every *state* α that arises while the *program* p is executing.

In symbols we express this as

$$\chi \Vdash [p]\phi \text{ iff } \forall \beta (\chi R_p \alpha \Rightarrow \beta \Vdash \phi), \quad (27)$$

where $\chi R_p \alpha$ is read "the state α is accessible from state χ by running the program p ". Note that R_p is an accessibility relation indexed by the program p . Pratt assumes a non-deterministic notion of computation or else this could be replaced by the notion $p(\chi) = \alpha$.

As we have seen, any state ρ can be thought of as determining an accessibility relation R_ρ . Note this is "rho" not "pee" – we are talking about a *state* and not a *program*. Pratt's dynamic logic has accessibility relations indexed by programs. A state can be viewed as an assignment to variables (storage location) of the values 0, 1. If we focus on the substate where the program is stored we get a partial assignment. Since thus a program can be viewed as a partial state, using ρ in place of p generalizes Pratt.

Another way to go is to look at a program as not a single (partial) state but rather as a set of states (intuitively the set of states that implement the same program). This suggests we write 27 in an untyped way, replacing the single state ρ with a set of states (a proposition) B . We can then rephrase the above as:

$$\chi \Vdash [B]\phi \text{ iff } \forall \alpha, \forall \rho \in B (\chi R_\rho \alpha \Rightarrow \alpha \Vdash \phi),$$

and we can rephrase this further, replacing the proposition B with the sentence ψ that expresses it:

$$\chi \Vdash [\psi]\phi \text{ iff } \forall \alpha, \forall \rho \in |\psi| (\chi R_\rho \alpha \Rightarrow \alpha \Vdash \phi),$$

where $|\psi| = B = \{\beta : \beta \Vdash \psi\}$.

Another possible application of ternary frames is to Hoare's (1969) "Logic of Programs", but we only mention this here. It would also be nice to model action algebras (cf. Pratt (1991)).

REFERENCES

1. Anderson A.R., Belnap N.D. and Dunn J.M. et al (1992), Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, vol. 2, Princeton University Press (Princeton).
2. Barendregt H.P. (1981), The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics, North -Holland Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 103, (Amsterdam) Elsevier Science Publishers (Amsterdam).
3. Barwise J. (1993), "Constraints, Channels, and the Flow of Information", in Situation Theory and its Applications, ed. by S.Peters and D. Israel, CSLI Lecture Notes, vol. 3, University of Chicago Press (Chicago).

4. *Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H. (1957), "On the Representation of Quasi-Boolean algebras", Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, 5, 259-261.*
5. *Bishop P. (1986), Fifth Generation Computers, Ellis Horwood Limited (Chichester, England).*
6. *Boole G. (1847), Mathematical Analysis of Logic, London, 1847.*
7. *Burks A.W., Goldstine H.H. and Neumann J. von. (1963), "Preliminary Discussion of the Logical Design of an Electronic Computing Instrument", in Taub, A. H., editor, John von Neumann Collected Works, The Macmillan Co.(New York), Volume V, 34-79.*
8. *Church A. (1941), The Calculi of Lambda Conversion, Princeton University Press (Princeton).*
9. *Curry H.B. and Feys R. (1972), Combinatory Logic, vol. I, North-Holland Publishing Company (Amsterdam).*
10. *Dunn J.M. (1991), "Gaggle Theory: An Abstraction of Galois Connections and Residuation with Applications to Negation and Various Logical Operations", Logics in AI, Proceedings European Workshop JELIA 1990, ed. J. van Eijck, LNCS 478, Springer-Verlag (Berlin).*
11. *Dunn J.M. (2001), "A Representation of Relation Algebras Using Routley-Meyer Frames", forthcoming in Logic, Language, Computation: Essays in Honor of Alonzo Church, eds. C. A. Anderson and M. Zeleney, Kluwer Academic Publishers (Dordrecht).*
12. *Dunn J.M. and Meyer R.K. (1997), "Combinatory Logic and Structurally Free Logic", Journal of the Interest Group in Pure and Applied Logic, 5.*
13. *Fine K. (1974), "Models for Entailment", Journal of Philosophical Logic, 3, 347-372.*
14. *Gärdenfors P. and Makinson D. (1988), "Revision of Knowledge Systems Using Epistemic Entrenchment", in Proceedings of the Second Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge, ed.M. Vardi, Morgan Kaufmann (San Francisco), 83-95.*
15. *Geach P.T. and Black M. (1960), Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege, Basil Blackwell (Oxford).*
16. *Hoare C.A.R. (1969), "An Axiomatic Basis for Computer Programming, Communications of the ACM, 12, 576-585.*
17. *Lyndon R.C. (1950), "The Representation of Relation Algebras", Annals of Mathematics, ser. 2, 51, 707-729.*
18. *Maddux R. (1991), "The Origin of Relation Algebras in the Development and Axiomatization of the Calculus of Relations", Studia Logica, 91, 421-455.*
19. *Meyer R.K. (1979), "A Boolean Valued Semantics for R", Research Paper no. 4, Logic Group, Research School of Social Sciences, Australian National University, Canberra.*
20. *Meyer R.K. and Routley R. (1972), "Algebraic Analysis of Entailment", Logique et Analyse, n.s., 15, 407-428.*
21. *Meyer R.K. and Routley R. (1973), "Classical Relevant Logics (I)", Studia Logica, 32, 51-66.*
22. *Pratt V., "Six Lectures on Dynamic Logic", Foundations of Computer Science III, part 2, Mathematical Centre Tracts (Amsterdam), 109, 53-82.*

23. *Pratt V.* (1991), "Action Logic and Pure Induction", Logics in AI, Proceedings European Workshop JELIA 1990, ed. J. van Eijck, LNCS 478, Springer-Verlag.
24. *Riley H.N.* (1997), "The von Neumann Architecture of Computer Systems", <http://www.csupomona.edu/~hnriley/www/VonN.html>.
25. *Routley R. and Meyer R.K.* (1972), "The Semantics of Entailment, II-III", *Journal of Philosophical Logic*, 1, 53-73 and 192-208.
26. *Routley R. and Meyer R.K.* (1973), "The Semantics of Entailment I" in *Truth, Syntax and Modality*, ed. H. Leblanc, North-Holland Publishing Company (Amsterdam), pp. 199-243.
27. *Tarski A.* (1941), "On the Calculus of Relations", *The Journal of Symbolic Logic*, 6, 73-89.
28. *Urquhart A.* (1972), "Semantics for Relevant Logics", *The Journal of Symbolic Logic*, 37, 159-169.

V.L.Vasyukov

COMBINED CAUSAL LOGICS OF MINKOWSKI SPACETIME*

Abstract. *Getting started from ideas of N.A.Vasiliev and exploiting some conceptions of G.Frege, V.A.Smirnov introduced several combined calculi of sentences and events consisting of two parts: the abstract (external) logic depending on epistemological assumptions and the empirical (internal) logic depending on ontological ones. Early the author proposed to approach algebra of events as the discursive system of S. Jaśkowski (cf. [5]). One more interesting possibility would be an exploitation of an S4.2-modal algebra instead of an S5-modal algebra for discursive logic as an algebra of events. As it was shown by R.Goldblatt [4] in the Diodorean interpretation of modality where the operator of necessity $\Box$ is read as "it is now and always will be the case that" time would be modelled by the four-dimensional Minkowskian geometry that forms the basis of Einstein's special theory of relativity. In this case "event" y coming after event x just in case a signal can be seen from x to y at a speed at most that of the speed of light (i.e. y is in the causal future of x). Passing to the S4.2-modal algebra of the "histories" (subsets of events or causal paths) we thus obtain a combined calculus of sentences and histories. The same would be done in a more abstract way if we consider an algebra of the histories as a complete orthomodular lattice following to W.Cegla's approach (cf. [2]). For both formulations of combined causal logic of Minkowski spacetime a semantic of (event) bundles and semantic of possible worlds is built and some metamathematical results are obtained.*

1. Introduction

An idea of distinguishing two levels in logic goes back to N.A.Vasiliev. He distinguished two levels in logic assuming inconsistency on ontological level, but denying it on logical one. Proceeding from this idea and exploiting some conceptions of G.Frege, V.A.Smirnov introduced several combined calculi of sentences and events (cf. [9]) consisting of two parts: the abstract (external) logic depending on epistemological assumptions and the empirical (internal) logic depending on ontological ones. Both external and internal logics are subjected to change. The language of combined calculi usually includes two sorts of variables: event variables (terms) and propositional ones. If a and b are terms then $a \cup b$, $a \cap b$, $\sim a$ will be also terms (complex events) while θa , θb are the formulas along with the formulas $\theta a \vee \theta b$, $\theta a \wedge \theta b$, $\neg \theta a$. Clearly, postulating some equivalencies

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 99-03-19641.

like $\theta(a \cup b) \equiv \theta a \vee \theta b$, $\theta(a \cap b) \equiv \theta a \wedge \theta b$ etc. we arrive at different combination of algebras of events and propositional calculi in the framework of one logic.

Early the author proposed to approach algebra of events as the discursive system of S. Jaśkowski (cf. [5]) by treating algebra of events as an *S5*-modal algebra, introducing Jaśkowski's type conditional and then θ -translating it into classical sentential calculus (cf. [10]). One more interesting possibility would be an exploitation of an *S4.2*-modal algebra instead of an *S5*-modal algebra as an algebra of events. As it was shown by R. Goldblatt [4] in the Diodorean interpretation of modality where the operator of necessity $\Box$ is read as "it is now and always will be the case that" time would be modelled by the four-dimensional Minkowskian geometry that forms the basis of Einstein's special theory of relativity. In this case "event" y coming *after* event x just in case a signal can be seen from x to y at a speed *at most* that of the speed of light (so that y is in the causal future of x). The modal sentences valid in this structure are precisely the theorems of the logic *S4.2*. Passing to the *S4.2*-modal algebra of the "histories" (subsets of events or causal paths) and θ -translating those into classical sentential calculus (in a way it was done in [10] in case of *S5*-algebra) we thus obtain a combined calculus of sentences and histories.

But this is not the end of a story since the same would be done in a more abstract way. Let (X, G) be a pair where X is a non-empty set and G is a structure defined by a distinguished covering G of X by non-empty subsets. The elements $f \in G$ will be called causal paths or "histories" and let us denote by $\beta(x) = \{f \in G: x \in f\}$ the set of all paths containing x . Two points x and y are *causally related* if there is some path f containing both of them.

In [2] W. Cegla shows that in a causal space (X, G) one can introduce an orthogonality relation in the following way: given $x, y \in X$, x is orthogonal to y iff $x \neq y$ and there is no $f \in G$ such that $x \in f$ and $y \in f$ (this means that x and y are not causally related). As a consequence we are able to introduce an orthogonal complement by means of the following definition: if $A \subset X$ then $A^\perp = \{x \in X: \forall f \in \beta(x)(f \cap A = \emptyset)\}$. If we take the family $I(X, \perp) = \{A \subset X: A = A^{\perp\perp}\}$ it is well-known that $I(X, \perp)$, partially ordered by set-theoretic inclusion with the orthocomplementation $A \rightarrow A^\perp$ and $\bigvee A_i = (\bigcup A_i)^\perp$, $\bigwedge A_i = \bigcap A_i$, forms a complete ortholattice.

Moreover, we can introduce the second family of sets $L(X, \perp) = \{D^{\perp\perp}: D \text{ is an orthogonal set}\}$ where if $D \subset X$, then D is an *orthogonal set* iff $\forall x, y \in D \forall f \in \beta(x)(f \cap y = \emptyset)$. The family $L(X, \perp)$ will be an orthocomplete orthoposet. Indeed, $L(X, \perp) \subset I(X, \perp)$ but there is a case when they are identical. If D is orthogonal set of X , and $x \in X$, $x \notin D^\perp$,

$x \notin D^{\perp\perp}$ then $D^{\perp} \cap (x^{\perp\perp} \cap D^{\perp})^{\perp} \neq \emptyset$. In this case $l(X, \perp) = L(X, \perp)$ is a complete orthomodular lattice.

Both algebraic causal structures are connected with localization in non-relativistic and relativistic cases. These algebras of the “histories” (causal paths) also would be θ -translating into classical sentential calculus (in a way it was done in [10] in case of S5-algebra) and we thus again arrived at a combined calculus of sentences and histories.

In the paper a semantic of (event) bundles and semantic of possible worlds for both formulations of combined causal logic of Minkowski spacetime is proposed reflected the different treatment of the events and histories.

2. Diodorean Approach to Combined Causal Logic of Minkowski Spacetime

In a nutshell the main points of an approach to algebra of events as the discursive system of S. Jaśkowski (cf. [10]) would be posed as follows.

In his paper “Propositional Calculus for Contradictory Deductive Systems” S. Jaśkowski [5] offers a system of discursive logic by adding to S5 modal system a conditional $\rightarrow$ (often written as $\supset_d$ and called discursive implication) and defining $\alpha \rightarrow \beta$ as $\Diamond \alpha \rightarrow \beta$. The logical truths of the pure $\rightarrow$ fragment of discursive logic are the same as those of the pure $\supset$ fragment of classical logic but unlike of the latter $\models \alpha \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \beta)$ fails, since $\models_{S5} \Diamond(\Diamond \alpha \supset (\Diamond \neg \alpha \supset \beta))$ fails too.

Approaching algebra of events as S5-modal algebra one is in position to cope with contradictory character of ontological level by introducing counterpart of Jaśkowski’s type conditional in algebra of events and then θ -translating it into our sentential calculus. The only difficulty appears to be the nature of the possible event (are there some criteria for dividing events into possible and real one?) This would be obviated by means of the “making possible” modal operator

$$MP(x, y) \leftrightarrow y \in \sigma(x)$$

(*x makes possible y iff y is synthetizable from x*) [8]. The possible event ontologically means that we (i) purport possibility as the case when a relation between some event and possible event take place and (ii) identify with this relation the relation “making possible” (a kind of “maker”). Thus, in a sense, possible events are “ontologically generated” by some other events.

To explicate theorems of Jaśkowski’s discursive logic in the system of combined logic one should add the following schemes to the axiom schemata of classical sentential logic and the rule *modus ponens*:

$$\theta a \vee \theta b \equiv \theta(a \cup b)$$

$$\begin{aligned}
\neg\theta a &\equiv \theta(\sim a) \\
\theta(\diamond(a \cup b)) &\equiv \theta(\diamond a) \vee \theta(\diamond b) \\
\theta a &\supset \theta(\diamond a) \\
\theta(\diamond\diamond a) &\supset \theta a \\
\theta(\diamond a) &\supset \theta(\sim\diamond\sim\diamond a)
\end{aligned}$$

Let us hereafter $a \rightarrow b$ means $\sim\diamond a \cup b$, $a \leftrightarrow b$ means $(\sim\diamond a \cup b) \cap (\sim\diamond a \cup \diamond b)$. It easily can be seen that the first two axioms provide us with a Boolean algebra structure of the set of events and the following theses will take place:

$$\begin{aligned}
\theta a \wedge \theta b &\equiv \theta(a \cap b) \\
\theta(a \rightarrow b) &\supset (\theta a \supset \theta b) \\
\theta(a \leftrightarrow b) &\supset (\theta a \equiv \theta b)
\end{aligned}$$

There is also an operator $[-]$ in the language of this calculus JVCD of Jaskowski-Vasiliev Combined Discursive Logics such that if α is a formula then $[\alpha]$ is a sentential term and thus one may relate with an every formula the respective event ("the event, that α "). By means of such an operator JVCD-system is enriched with the axioms

$$\begin{aligned}
\theta[\alpha] &\equiv \alpha \\
\theta[\alpha \vee \beta] &\equiv \theta([\alpha] \cup [\beta]) \\
\theta[\neg\alpha] &\equiv \theta(\sim[\alpha]) \\
\alpha &\supset \theta(\sim[\alpha] \rightarrow b)
\end{aligned}$$

where b is an arbitrary event in the event algebra.

And now what should be changed if we need an S4.2-algebra of events instead of S5-algebra on ontological level? Technically it involves a passage to the following axioms:

$$\begin{aligned}
A1. \theta a \vee \theta b &\equiv \theta(a \cup b) \\
A2. \neg\theta a &\equiv \theta(\sim a) \\
B1. \theta(\diamond(a \cup b)) &\equiv \theta(\diamond a) \vee \theta(\diamond b) \\
B2. \theta a &\supset \theta(\diamond a) \\
B3. \theta(\diamond\diamond a) &\supset \theta a \\
B4. \theta(\diamond\sim\diamond\sim a) &\supset \theta(\sim\diamond\sim\diamond a)
\end{aligned}$$

Here the operator $\diamond$ means "it will (at some time) be" and thus a "synthetizability" correlates with the time ordering.

A semantic of such combined logic would be described as follows. Let a structure $\mathbf{T} = \langle T, \leq \rangle$ be a *time-frame* comprising a non-empty set T of times (moments, instants) on which $\leq$ is a reflexive and transitive ordering. The reflexivity of $\leq$ gives $\diamond$ the Diodorean 'is or will be' interpretation. The frame $\mathbf{T}$ is directed, i.e. for all $t, s \in T$ there exists a $v \in T$ with $t \leq v$ and $s \leq v$ (any two elements have an upper bound).

Pursuing Smirnov's approach events would be identified with subsets of T . Let φ be a function assigning to event variable a a subset

$\varphi(a) \subseteq T$ (the set of times at which a takes place - an event history).
The function φ will be extended in usual way:

$$\varphi(a \cap b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$$

$$\varphi(a \cup b) = \varphi(a) \cup \varphi(b)$$

$$\varphi(\sim a) = \varphi(a)'$$

$$\varphi(\Diamond a) = \{x: \exists y(y \in \varphi(a) \text{ and } x \leq y)\} \text{ (future history of event } a)$$

Here $\cap$, $\cup$, $'$ are the set-theoretic meet, join and complementation respectively.

The notion of truth would be described in a standard way:

$x \models_{\varphi} \theta a \Leftrightarrow x \in \varphi(a)$ (an event occurred, is true in time x if and only if this time belongs to event history)

$$x \models_{\varphi} \alpha \vee \beta \Leftrightarrow x \models_{\varphi} \alpha \text{ or } x \models_{\varphi} \beta$$

$$x \models_{\varphi} \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow x \models_{\varphi} \alpha \text{ and } x \models_{\varphi} \beta$$

$$x \models_{\varphi} \alpha \supset \beta \Leftrightarrow \text{not } x \models_{\varphi} \alpha \text{ or } x \models_{\varphi} \beta$$

$$x \models_{\varphi} \neg \alpha \Leftrightarrow \text{not } x \models_{\varphi} \alpha$$

$x \models_{\varphi} \theta(\Diamond a) \Leftrightarrow x \in \varphi(\Diamond a) = \{z: \exists y(y \in \varphi(a) \text{ and } z \leq y)\}$ (it is true in time x that event will be occurred if and only if this time belongs to the future history of the event)

It is easily can be seen that with a help of standard methods we obtain an adequacy of combine logic with axioms A1-A2, B1-B4 with the semantics proposed.

Most interesting for us is the following peculiarity of such semantics. R.Goldblatt in [4] shows that an every frame $\mathbf{T}^n$ determines an S4.2 modal logic where $\mathbf{T}^n$ would be described in a following way.

Let $x=(x_1, \dots, x_n)$ is an n -tuple of real numbers and $\mu(x)=x_1^2+x_2^2+\dots+x_{n-1}^2+x_n^2$. Then the frame $\mathbf{T}^n = \langle \mathbf{R}^n, \leq \rangle$ (where $\mathbf{R}^n$ is the set of all real n -tuples) will be n -dimensional apcetime ($n \geq 2$). For x and y in $\mathbf{R}^n$ we have

$$x \leq y \text{ iff } \mu(y - x) \leq 0 \quad \text{and } x_n \leq y_n$$

$$\text{iff } \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)^2 \leq (y_n - x_n)^2 \quad \text{and } x_n \leq y_n$$

Such $\mathbf{T}^n$ is, in fact, a directed partially-ordered frame and Minkowski spacetime is $\mathbf{T}^4$. In last case the intended interpretation of $x \leq y$ is that a signal can be sent from 'event' x to 'event' y at a speed at most that of the speed of light, and so y is in the 'causal' future of x (assuming a choice of coordinates that gives the speed of light as one unit of distance per unit of time). The proof is based on the existence of p -morphism (a function, preserving ordering and directedness) from $\mathbf{T}^{n+1}$ into $\mathbf{T}^n$ (i.e. the "first" coordinate to be deleted).

Thus, an S4.2 modal algebra of events we need for our combine

logic would be considered as a modal algebra $\mathbf{T}^{4+} = \langle \mathbf{M}, \cup, \cap, \text{---}, \Diamond \rangle$ where

- (i) $\mathbf{M} = \mathbf{P}(\mathbf{R}^4)$ (a set of all subsets of $\mathbf{R}^4$);
- (ii) $\cup, \cap, \text{---}$ are set-theoretical join, meet and complementation in $\mathbf{M}$;
- (iii) for $A \in \mathbf{M}$ $\Diamond A = \{x: \exists y(y \in A \text{ and } x \leq y)\}$

if we use the standard Lemmon's method of obtaining modal algebra for a frame (cf. [7]).

And the other way round, our time-frame $\mathbf{T} = \langle T, \leq \rangle$ would be from the outset identified with $\mathbf{T}^4 = \langle \mathbf{R}^4, \leq \rangle$ and the function ϕ in a natural way will assign to an event $\Diamond a$ its 'causal' path or 'causal' future history in Minkowski spacetime.

In order to establish events-formulas connections in a more transparent way (e.g. in case of descriptions of something happened) we can enrich our language with an operator $[-]$ ($[\alpha]$ means "the event, that α "). This involves an addition of the following axioms:

- C1. $\theta[\alpha] \equiv \alpha$
- C2. $\theta[\alpha \vee \beta] \equiv \theta([\alpha] \cup [\beta])$
- C3. $\theta[\neg \alpha] \equiv \theta(\sim[\alpha])$

Clearly, the function ϕ ought also to be extended for terms of $[-]$ -type:

$$\phi([\alpha]) = \{w: w \models_{\phi} \alpha\}$$

Theorem 1. *Axioms $PC+(A1-A2, B1-B4, C1-C3)$ are valid in the semantic above with the frame $\mathbf{T}^4 = \langle \mathbf{R}^4, \leq \rangle$.*

Proof is straightforward ■.

Approaching propositions and events as two different kind of entities we arrive at another semantics which is strictly algebraic exploiting a construction of algebraic bundle. In our case an algebraic bundle should be defined as a 4-tuple $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, f, g \rangle$, where $\mathbf{A} = \langle A, +, \text{---} \rangle$ (the base) is a Boolean algebra (A contains two elements at least), $\mathbf{B} = \langle B, \oplus, ', \bullet \rangle$ is an S4.2-algebra, $f: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$, $g: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ are embedding functions. Let 0, 1, $\circ$ and $\leq$ be in both algebras defined as usual. For f and g the following conditions are fulfilled:

$$\begin{aligned} f(k \oplus l) &= f(k) + f(l), \\ f(k') &= -f(k), \\ f(g(x)) &= x, \\ g(x + y) &= g(x) \oplus g(y), \\ g(\text{---} x) &= g(x)', \end{aligned}$$

where $x, y \in A$ and $k, l \in B$.

If F is a set of well-formed formulas and E is a set of events then a valuation $v: F \cup E \rightarrow A \cup B$ is defined inductively as follows:

$$\begin{aligned}
v(\alpha \vee \beta) &= v(\alpha) + v(\beta), \\
v(\neg \alpha) &= -v(\alpha) \\
(\text{where } \alpha, \beta \text{ are wff and } v(\alpha), v(\beta) \in A), \\
v(a \cup b) &= v(a) \oplus v(b), \\
v(\sim a) &= v(a)', \\
v(\Diamond a) &= \bullet v(a), \\
v(\theta a) &= f(v(a)), \\
v([\alpha]) &= g(v(\alpha)) \\
(\text{where } a, b \text{ are events and } v(a), v(b) \in B).
\end{aligned}$$

Theorem 2. *Axioms PC+(A1-A2, B1-B4, C1-C3) are valid in any algebraic bundle $\langle A, B, f, g \rangle$.*

Proof is straightforward ■.

This result is trivial enough but the following corollary shows that our algebraic bundle really would be a spacetime bundle with the fibres in $\mathbf{T}^{4+}$:

Corollary 1. *Axioms PC+(A1-A2, B1-B4, C1-C3) are valid in any algebraic bundle $\langle A, \mathbf{T}^{4+}, f, g \rangle$.*

Moreover, our bundle semantics should not be an algebraic one. We define a Kripke bundle as a 4-tuple $\langle W, E, f, g \rangle$, where W and E are ordered sets $W = \langle W, \leq \rangle$, $E = \langle E, \leq \rangle$ while $f: E \rightarrow W$, $g: W \rightarrow E$ are surjective mappings. For f and g the following conditions are fulfilled:

1. for every $x, y \in E$, $x \leq y$ implies $f(x) \leq f(y)$;
2. for every $x \in E$ and every $w \in W$, $f(x) \leq w$ implies that there exists some $y \in E$ with $x \leq y$ and $f(y) = w$.

Again, let φ be a function assigning to event variable a a subset $\varphi(a) \subseteq E$ and we extend function φ in usual way:

$$\begin{aligned}
\varphi(a \cap b) &= \varphi(a) \cap \varphi(b) \\
\varphi(a \cup b) &= \varphi(a) \cup \varphi(b) \\
\varphi(\sim a) &= \varphi(a)' \\
\varphi(\Diamond a) &= \{x: \exists y(y \in \varphi(a) \text{ and } x \leq y)\}
\end{aligned}$$

where $\cap$, $\cup$, $'$ are the set-theoretic meet, join and complementation respectively.

A relation $\models$ is said to be a valuation on a Kripke bundle $\langle W, E, f, g \rangle$ if it is a binary relation between each element $w \in W$ and each atomic formula. We extend $\models$ inductively as follows:

$$\begin{aligned}
w \models \theta a &\Leftrightarrow \varphi(a) \cap f^{-1}(w) \neq \emptyset \\
w \models \alpha \vee \beta &\Leftrightarrow w \models \alpha \text{ or } w \models \beta \\
w \models \alpha \wedge \beta &\Leftrightarrow w \models \alpha \text{ and } w \models \beta \\
w \models \alpha \supset \beta &\Leftrightarrow \text{if } w \models \alpha \text{ then } w \models \beta \\
w \models \neg \alpha &\Leftrightarrow \text{not } w \models \alpha
\end{aligned}$$

$$w \models \theta(\Diamond a) \Leftrightarrow \varphi(\Diamond a) \cap f^{-1}(w) \neq \emptyset$$

A formula α is said to be valid in a Kripke bundle $\langle W, E, f, g \rangle$ if for every valuation $\models$ on $\langle W, E, f, g \rangle$ and every $w \in W$, one has $w \models \alpha$.

From this definitions the next theorem easily follows.

Theorem 3. *Axioms $PC+(A1-A2, B1-B4, C1-C3)$ are valid in any Kripke bundle $\langle W, E, f, g \rangle$.*

Corollary 2. *Axioms $PC+(A1-A2, B1-B4, C1-C3)$ are valid in a Kripke bundle $\langle W, T^4, f, g \rangle$.*

3. Orthomodular Combined Causal Logic of Minkowski Spacetime

Now we shall consider system of combined logic with the following axioms which one should add to the axiom schemata of classical sentential logic and the rule *modus ponens*:

- C1. $\theta a \vee \theta b \equiv \theta(a \cup b)$
- C2. $\theta a \wedge \theta b \equiv \theta(a \cap b)$
- C3. $\theta(\sim a \cap a) \supset \theta b$
- C4. $\theta b \supset \theta(\sim a \cup a)$
- C5. $\theta(\sim \sim a) \equiv \theta a$
- C6. $\theta(\sim(a \cap b)) \equiv \theta(\sim a \cup \sim b)$
- C7. $\theta(\sim(a \cup b)) \equiv \theta(\sim a \cap \sim b)$
- C8. $(\theta a \supset \theta b) \supset (\theta(a \cup (\sim a \cap b))) \equiv \theta b$

One can easy come to the conclusion that C1-C7 stand for the axioms of an ortholattice while C1-C8 stand for the axioms of an orthomodular lattice (cf. [1]). Thus, a system with axioms $PC+(C1-C8)$ is a system of combined logic with an orthomodular lattice as its internal logic.

Kripkean semantics for such a logic we obtain using the notion of orthoframe and orthocomplement in and orthoframe [3, p. 432]:

Definition. An orthoframe is a relational structure $\mathbf{W} = \langle W, R \rangle$ where W is non-empty set of worlds and the accessibility relation R is a binary reflexive and symmetric relation on W . For any set of worlds $X \subseteq W$ the orthocomplement $X^\perp$, of X is defined as follows:

$$X^\perp = \{w : \forall v(v \in X \Rightarrow \text{not } Rvw)\}$$

In other words, $X^\perp$ is the set of worlds which are inaccessible to all elements of X .

Let φ be a function assigning to event variable a a subset $\varphi(a) \subseteq W$ (the set of worlds at which a takes place - an event history) and the following condition is fulfilled:

- (i) $\forall w(w \in \varphi(a) \text{ iff } \forall v(Rwv \Rightarrow v \notin \varphi(a)^\perp).$

Corollaries of such a definition are as follows [3, p.433]:

- (ii) $\forall w(w \notin \varphi(a) \Rightarrow \exists v(Rwv \text{ and } v \in \varphi(a)^\perp),$
- (iii) $\varphi(a) = \varphi(a)^{\perp\perp}.$

In order to transform orthoframe into orthomodular one we need the function φ satisfies the following condition (orthomodularity property) [3, p.437]:

- (iv) $\varphi(a) \not\subset \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a) \cap (\varphi(a) \cap \varphi(b))^\perp \neq \emptyset$

The function φ will be extended in usual way:

$$\begin{aligned}\varphi(a \cap b) &= \varphi(a) \cap \varphi(b) \\ \varphi(a \cup b) &= \varphi(a) \cup \varphi(b) \\ \varphi(\sim a) &= \varphi(a)^\perp\end{aligned}$$

The notion of truth would be now introduced in a standard way:

$$\begin{aligned}x \models_\varphi \theta a &\Leftrightarrow x \in \varphi(a) \\ x \models_\varphi \alpha \vee \beta &\Leftrightarrow x \models_\varphi \alpha \text{ or } x \models_\varphi \beta \\ x \models_\varphi \alpha \wedge \beta &\Leftrightarrow x \models_\varphi \alpha \text{ and } x \models_\varphi \beta \\ x \models_\varphi \alpha \supset \beta &\Leftrightarrow \text{not } x \models_\varphi \alpha \text{ or } x \models_\varphi \beta \\ x \models_\varphi \neg \alpha &\Leftrightarrow \text{not } x \models_\varphi \alpha\end{aligned}$$

If we enrich our language with the operator $[-]$ then we need to add the following axiom schemata to (C1-C8)-list of axioms:

$$\begin{aligned}\text{D1. } \theta[\alpha] &\equiv \alpha \\ \text{D2. } \theta[\alpha \vee \beta] &\equiv \theta([\alpha] \cup [\beta]) \\ \text{D3. } \theta[\alpha \wedge \beta] &\equiv \theta([\alpha] \cap [\beta]) \\ \text{D4. } \theta[\neg \alpha] &\equiv \theta(\sim[\alpha])\end{aligned}$$

Clearly, the function φ ought also to be extended for terms of $[-]$ -type:

$$\varphi([\alpha]) = \{w: w \models_\varphi \alpha\}$$

From this definitions the next theorem easily follows.

Theorem 3. *Axioms PC+(C1-C8,D1-D4) are valid in any Kripke realization $\langle \mathbf{W}, \models_\varphi \rangle$.*

The most interesting for us will be the case if we use W.Cegla's orthomodular lattice $L(X, \perp)$ (for which the condition $l(X, \perp) = L(X, \perp)$ is satisfied) in a role of our set of values of the function φ , i.e. when $\mathbf{W} = L(X, \perp)$. Now X can be identified with Minkowski spacetime $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ with scalar product $x * y = -x_0 y_0 + \bar{x} \bar{y}$ [2, p. 422]. Two points $x, y \in \mathbf{M}$ are orthogonal iff

$$|x_0 - y_0| \leq (1/\alpha) \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

and every maximal orthogonal set is given by the function $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$

such that

$$|g(\bar{x}) - g(\bar{y})| \leq (1/\alpha) \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

while if $\alpha = 1$ then the orthogonality relation means that x is a space or like-light to y .

An algebraic bundle now should be defined as a 4-tuple $\langle A, B, f, g \rangle$, where $A = \langle A, +, \circ, \text{---} \rangle$ (the base) is a Boolean algebra (A contains two elements at least), $B = \langle B, \oplus, \otimes, \perp \rangle$ is an orthomodular lattice, $f: B \rightarrow A$, $g: A \rightarrow B$ are embedding functions. Let 0, 1, $\circ$ and $\leq$ be in both algebras defined as usual. For f and g the following conditions are fulfilled:

$$\begin{aligned} f(k \oplus l) &= f(k) + f(l), \\ f(k \otimes l) &= f(k) \circ f(l), \\ f(k^\perp) &= \text{---} f(k), \\ f(g(x)) &= x, \\ g(x + y) &= g(x) \oplus g(y), \\ g(-x) &= g(x)^\perp, \end{aligned}$$

where $x, y \in A$ and $k, l \in B$.

If F is a set of well-formed formulas and E is a set of events then a valuation $v: F \cup E \rightarrow A \cup B$ is defined inductively as follows:

$$\begin{aligned} v(\alpha \vee \beta) &= v(\alpha) + v(\beta), \\ v(\alpha \wedge \beta) &= v(\alpha) \circ v(\beta), \\ v(\neg \alpha) &= \text{---} v(\alpha) \end{aligned}$$

(where α, β are wff and $v(\alpha), v(\beta) \in A$),

$$\begin{aligned} v(a \cup b) &= v(a) \oplus v(b), \\ v(a \cap b) &= v(a) \otimes v(b), \\ v(\sim a) &= v(a)^\perp, \\ v(\theta a) &= f(v(a)), \\ v([\alpha]) &= g(v(\alpha)) \end{aligned}$$

(where a, b are events and $v(a), v(b) \in B$).

Theorem 2. *Axioms PC+(C1-C8,D1-D4) are valid in any algebraic bundle $\langle A, B, f, g \rangle$.*

Proof is straightforward ■.

Again, this result is trivial enough but the following corollary shows that our algebraic bundle really would be (Minkowski spacetime) bundle with the fibres in $L(M, \perp)$.

Corollary 3. *Axioms PC+(C1-C8,D1-D4) are valid in any algebraic bundle $\langle A, L(M, \perp), f, g \rangle$.*

In an obvious way we can extend this result on a respective Kripke bundle.

REFERENCES

1. *Birkhoff G.* Lattice Theory, Providence, Rhode Island, 1967.
2. *Cegla W.* Causal Logic of Minkowski Space // Current Issues in Quantum Logic / S. Beltrametti and B. van Fraassen (eds.), N.Y.: Plenum, 1981, pp. 419-424.
3. *Dalla Chiara M.-L.* Quantum Logic // Handbook of Philosophical Logic / D.Gabbay and F.Guenther (eds.), vol III, Reidel, 1986, pp. 427-469.
4. *Goldblatt R.* Diodorean Modality in Minkowski Spacetime // *Studia Logica*, v.39, 1980, pp. 219-236.
5. *Jaśkowski S.* Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych // *Studia Soc. Sci. Torunensis, Sectio A, Vol. I, No. 5*, 1948. (English translation in [6]).
6. *Jaśkowski S.* Propositional Calculus for Contradictory Deductive Systems // *Studia Logica*, v.24, 1969, pp. 143-157.
7. *Lemmon E.* Algebraic Semantics for Modal Logics I. // *Journ. Symb. Log.*, 1966, vol. 31, No 1, p.46-65.
8. *Perzanowski J.* Towards Post-Tractatus Ontology // Wittgenstein - Towards Re-Evaluation / Eds. R.Haller & J.Brandl, Verlag Holder-Pichler-Tempsky, Wien, 1990, pp. 185-199.
9. *Smirnov V.A.* Internal and External Logics // *Bull. Sect. Logic*, v.17, №3/4, 1988, pp. 170-181.
10. *Vasyukov V.L.* Jaśkowski-Vasiliev Combined Discursive Logic // Forthcoming in: *Logic and Logical Philosophy*.

CONTENTS

<i>Anisov A.M.</i> Properties of Time	5
<i>Batens D.</i> A Universally Abnormality-Adaptive Logic	256
<i>Bezhanishvili M.N.</i> Wang Hao's Calculi of Partial Predicates and their Extensions that Allow Iteration of Implication	26
<i>Béziau J.-Y.</i> What is Propositional Classical Logic? (A Study in Universal Logic)	266
<i>Blinov A.L.</i> Games With Common Belief On Payoff Function	278
<i>Chagrov A.V.</i> To the Question of Reverse Mathematics of Modal Logic	224
<i>Dunn J.M.</i> Ternary relational semantics and beyond: Programs as arguments (data) and programs as functions (programs)	282
<i>Esakia L.L.</i> Weak Transitivity - Restitution	244
<i>Fedorov B.I.</i> B.Bolczano as Predecessor of Constructivism. II	210
<i>Ivlev Y.V.</i> Quasi-Matrix Logic – Basis of the Theory of Factual (Physical) Modalities	50
<i>Karpenko A.S.</i> Substructural Logics: Hilbertian Approach.....	65
<i>Khakhanian V.H.</i> Predicates of Realizability for Set Theory	217
<i>Maksimova L.L.</i> Non-Explicit Definability in Paraconsistent Extensions of Minimal Logic	72
<i>Markin V.I.</i> Intensional Semantics of Traditional Syllogistics	82
<i>Mchedlishvili L.I.</i> Calculi of Rejected Formulae for Non-Traditional Systems of Positive Syllogistics	92
<i>Nagorny N.M.</i> To the Question of Consistency of Classical Formal Arithmetics	105
<i>Nepejvoda N.N.</i> On Formalization of Non-Formalizable	129
<i>Pavlov S.A.</i> V.A.Smirnov's Combined Logics and Logic of Falsehood	144
<i>Popov V.M.</i> Embedding of Intuitionistic Propositional Calculus into its Positive Fragment	150
<i>Rybakov M.N.</i> Countability of Modal Predicate Logics and Conditions for Braking of Increasing Chains	155
<i>Samokhvalov K.F.</i> To the Question of Nature of Time	168
<i>Sidorenko E.A.</i> Deduction Theorem for Non-Classical Logics: Two Approaches	172

<i>Skvortsov D.P.</i> Completeness Theorem for Semantics of Propositional Fragment of One Ackerman's System	187
<i>Smirnova E.D.</i> On a Puzzle of Belief Contexts	199
<i>Vasyukov V.L.</i> Combined Causal Logics of Minkowski Spacetime	302
<i>Zaitsev D. V.</i> Theory of Relevant Entailment III: Combinatorial Semantics TE	38

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Анисов А.М.</i> Свойства времени	5
<i>Бежанишвили М.Н.</i> Исчисления частичных предикатов Хао Вана и их расширения, допускающие итерацию импликации	26
<i>Зайцев Д.В.</i> Теория релевантного следования III: комбина- торная семантика TE	38
<i>Ивлев Ю.В.</i> Квазиматричная логика – основа теории факти- ческих (физических) модальностей	50
<i>Карпенко А.С.</i> Подструктурные логики: гильбертовский подход ..	65
<i>Максимова Л.Л.</i> Неявная определимость в паранепротиворе- чивых расширениях минимальной логики	72
<i>Маркин В.И.</i> Интенциональная семантика традиционной сил- логистики	82
<i>Мchedlishvili Л.И.</i> Исчисления отбрасываемых формул для нетрадиционных систем позитивной силлогистики	92
<i>Нагорный Н.М.</i> К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики	105
<i>Непейвода Н.Н.</i> О формализации неформализуемого	129
<i>Павлов С.А.</i> Комбинированные логики В.А.Смирнова и логика ложности	144
<i>Попов В.М.</i> Погружение интуиционистского пропозициональ- ного исчисления в его позитивный фрагмент	150
<i>Рыбаков М.Н.</i> Перечислимость модальных предикатных логик и условия обрыва возрастающих цепей	155
<i>Самохвалов К.Ф.</i> К вопросу о природе времени	168
<i>Сидоренко Е.А.</i> Теорема дедукции для неклассических исчисле- ний: два подхода	172
<i>Скворцов Д.П.</i> Теорема о полноте для семантики пропозицио- нального фрагмента одной системы Аккермана	187
<i>Смирнова Е.Д.</i> О загадке контекстов мнения	199
<i>Федоров Б.И.</i> Б.Больцано как предшественник конструкти- визма. II	210
<i>Хаханян В.Х.</i> Предикаты реализуемости для теории множеств ...	217
<i>Чагров А.В.</i> К вопросу об обратной математике модальной логики	224

<i>Эсакиа Л.Л.</i> Слабая транзитивность - реституция	244
<i>Batens D.</i> A Universally Abnormality-Adaptive Logic	256
<i>Béziau J.-Y.</i> What is Propositional Classical Logic? (A Study in Universal Logic)	266
<i>Blinov A.L.</i> Games With Common Belief On Payoff Function	278
<i>Dunn J.M.</i> Ternary relational semantics and beyond: Programs as arguments (data) and programs as functions (programs)	282
<i>Vasyukov V.L.</i> Combined Causal Logics of Minkowski Spacetime	302

Научное издание

Логические исследования
Вып. 8

Утверждено к печати
Институтом философии РАН

Редактор
Е.А. Жукова

Художественный редактор
Т.В. Болотина

Компьютерный набор выполнен
в Институте философии РАН
Компьютерная верстка *С.А. Павлов*

ЛР № 020297 от 23.06.1997

Налоговая льгота –
общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953000 – книги, брошюры

Подписано к печати 31.10.01. Формат 60 × 90 ¹/₁₆
Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Усл.печ.л. 20,0. Усл.кр.-отт. 20,3. Уч.-изд.л. 20,3
Тип. зак. 4418

Издательство "Наука"
117997 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
Internet: www.naukaran.ru

Санкт-Петербургская типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12

АДРЕСА КНИГОТОРГОВЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ ТОРГОВОЙ ФИРМЫ "АКАДЕМКНИГА"

Магазины "Книга-почтой"

121009 Москва, Шубинский пер., 6; 241-02-52

197345 Санкт-Петербург, ул. Петрозаводская, 75; (код 812) 235-05-67

Магазины "Академкнига" с указанием отделов "Книга-почтой"

690088 Владивосток, Океанский пр-т, 140 ("Книга-почтой"); (код 4232) 5-27-91

620151 Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 137 ("Книга-почтой"); (код 3432) 55-10-03

664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 298 ("Книга-почтой"); (код 3952) 46-56-20

660049 Красноярск, ул. Сурикова, 45; (код 3912) 27-03-90

220012 Минск, проспект Ф.Скорины, 72; (код 10375-17) 232-00-52, 232-46-52

117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7; 124-55-00

117192 Москва, Мичуринский пр-т, 12; 932-74-79

103054 Москва, Цветной бульвар, 21, строение 2; 921-55-96

103624 Москва, Б. Черкасский пер., 4; 298-33-73

630091 Новосибирск, Красный пр-т, 51; (код 3832) 21-15-60

630090 Новосибирск, Морской пр-т, 22 ("Книга-почтой"); (код 3832) 35-09-22

142292 Пушкино Московской обл., МКР "В", 1 ("Книга-почтой"); (13) 3-38-60

443022 Самара, проспект Ленина, 2 ("Книга-почтой"); (код 8462) 37-10-60

191104 Санкт-Петербург, Литейный пр-т, 57; (код 812) 272-36-65

199164 Санкт-Петербург, Таможенный пер., 2; (код 812) 328-32-11

194064 Санкт-Петербург, Тихорецкий пр-т, 4; (код 812) 247-70-39

199034 Санкт-Петербург, Васильевский остров, 9-я линия, 16;
(код 812) 323-34-62

634050 Томск, Набережная р. Ушайки, 18; (код 3822) 22-60-36

450059 Уфа, ул. Р. Зорге, 10 ("Книга-почтой"); (код 3472) 24-47-74

450025 Уфа, ул. Коммунистическая, 49; (код 3472) 22-91-85

Коммерческий отдел, г. Москва

Телефон 241-03-09

E-mail: akadem.kniga@g.23.relcom.ru

Склад, телефон 291-58-87

Факс 241-94-64

*По вопросам приобретения книг
просим обращаться также
в Издательство по адресу:
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90
тел. факс (095) 334-98-59
E-mail: initsiat@naukaran.ru
Internet: www.naukaran.ru*
