РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

LOGICAL INVESTIGATIONS

Vol. 9

MOSCOW «NAUKA» 2002

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 9

МОСКВА «НАУКА» 2002

УДК 16
ББК 87.4
Л69

Логические исследования. Вып. 9. – М.: Наука, 2002. – 319 с.
ISBN 5-02-013231-4

В девятом выпуске "Логических исследований" опубликованы статьи, в которых изложены новые результаты, полученные в различных областях современной логики. Особое внимание уделено неклассическим логикам, таким, как базисная логика, модальная логика, паранепротиворечивая логика и силлогистика.

Для логиков, философов, математиков.

Logical Investigations. Vol. 9. – M.: Nuaka, 2002. – 319 p.
ISBN 5-02-013231-4

The 9th issue of "Logical Investigations" contains papers where new results from different fields of contemporary logic are presented. The topic of greater importance in this issue are non-classical logics, like basic logic, modal logic, paraconsistent logic, syllogistics, et cetera.

For logicians, philosophers and mathematicians.

ТП-2002-II-13

ISBN 5-02-013231-4

А.М.Анисов

ЛОГИКА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВО ВРЕМЕНИ*

Abstract. *This paper establishes the relation that holds between the temporal past and future and the emergence of uncertainty. This uncertainty involved in argument naturally leads to non-classical logic. A paradox hereby conceived consists in that the logic of uncertainty may be presented as a fragment of classical logic, which is demonstrated in what follows.*

В классической логике *высказываниями* называют предложения, которые оцениваются либо как истинные, либо как ложные, но не то и другое одновременно. Даже если для конкретного высказывания ни один из людей не в состоянии доказательно обосновать его истинность или ложность, высказывание считается *объективно* имеющим одну, и ровно одну, из указанных истинностных характеристик. Например, знаменитая гипотеза Ферма в настоящее время является таким высказыванием. Но остается надежда, что ответ на вопрос об истинности или ложности данного высказывания может быть получен в будущем. И, хотя у нас нет и быть не может (согласно одной из ограничительных теорем К.Геделя) эффективного метода перечисления арифметических истин, каждое арифметическое высказывание считается наделенным одним из двух истинностных значений безотносительно к тому, умеет или нет познающий субъект это значение установить.

Сказанное касается не только арифметики и даже не только математики, а относится к любым предметным областям вообще. Классическая логика распространяет *принцип бивалентности* на любой универсум рассуждений: всякое высказывание, о чем бы оно ни было, является либо истинным, либо ложным, но не тем и другим сразу. Если же некоторое предложение, по виду напоминающее высказывание, не имеет одной из двух возможных истинностных характеристик, то это не высказывание, а бессмысленное выражение.

Такой подход, развиваемый классической логикой, влечет определенные представления о реальности. Извинимся за невольный каламбур: высказав это утверждение, далее следовало бы сказать, что данные определенные представления основываются на идее тотальной определенности всего сущего. Но так оно и есть.

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 01-03-00300.

Классическая логика принимает фундаментальную онтологическую предпосылку об определенности реальности любого рода. Не потому реальность определенна, что высказывания о ней всегда либо истинны, либо ложны, а, наоборот, высказывания всегда либо истинны, либо ложны потому, что реальность полностью определенна. Если возникают проблемы с определенностью высказываний, то ответственность за это возлагается не на описываемую ими предметную область, а на эти высказывания. Предложение «Сократ сидит» лишь по виду высказывание. Оно не истинно и не ложно, ибо иногда Сократ сидит, а иногда нет. В полностью определенном универсуме классической логики необходимо указать момент (или интервал) времени, в который происходит описываемое событие: «Сократ сидит в момент времени *t*». А это уже матрица для получения высказываний, истинных для одних конкретных моментов времени и ложное для других. Теперь высказывание типа «Сократ сидит 1 мая 399 г. до н.э. в 8 часов 5 минут 16 секунд» навечно либо истинно, либо ложно, даже если никто ни сейчас, ни когда-либо в будущем не сможет надежно установить его истинность или ложность.

Мы с легкостью смиряемся с идеей определенности событий прошлого. Другое дело, что предикаты событий могут требовать уточнения. В рассматриваемом случае слово «сидит» двусмысленно: Сократ в мае 399 г. до н.э. находился в тюрьме («сидел», так сказать), но мог в некоторый момент этого интервала времени сидеть или не сидеть в смысле занятой им позы. Но двусмысленности всегда можно устранить. А уж если при этом указано еще точное время и место свершения события, то последние сомнения в его определенности отпадают. Таково господствующее мнение.

Мало кто задумывается, что уточнения пространственно-временных характеристик событий прошлого могут вести к недопустимому переходу от заведомо истинных высказываний к весьма проблематичным суждениям. Утверждения «Заратустра основал зороастризм в VI в. до н.э.» и «Заратустра основал зороастризм в XVI в. до н.э.» не могут быть вместе истинными, но каждое принимается каким-либо специалистом. Следовательно, от практически несомненного «Заратустра основал зороастризм» приходим к определенным во времени, но сомнительным утверждениям, поскольку «расхождения в датировке, достигающие у современных исследователей тысячи лет и более, отражают и подчеркивают то обстоятельство, что в дошедших до нас источниках нет надежных конкретных данных для определения времени жизни Заратуштры» [9. С. 289]. Вряд ли нужно настаивать, что затруднения подобного рода в высшей степени характерны для исторического познания, занимающегося изучением универсума прошлого.

Сомнения в определенности будущего возникали и возникают гораздо чаще. Еще основатель логики Аристотель столкнулся с проблемой истинностной оценки высказываний о случайных будущих событиях. В подтверждение сказанного обратимся к знаменитому фрагменту из трактата Аристотеля «Об истолковании» – главе 9, в которой обсуждается проблема эпистемологического статуса высказываний о будущих случайных событиях [5]. Этот небольшой аристотелевский текст вызвал появление несоизмеримо большого числа статей и даже книг, посвященных анализу содержащихся в нем идей. (См., напр., [11]. Здесь же можно найти библиографию по рассматриваемому вопросу.) В чем причина такого интереса к фрагменту? Скорее всего, в том, что эти идеи совершенно не вписываются в господствующую логическую парадигму, основанную на статической концепции времени, в которой время по сути полностью определенно и неизменно во всех его частях [1]. Аристотель же, вне всяких сомнений, был сторонником динамической концепции, утверждающей, в частности, нефиксированность (и потому неопределенность) будущего [1. С. 36-37].

Отсюда фундаментальное различие, проведенное Аристотелем между высказываниями о прошлом и настоящем, с одной стороны, и будущим – с другой: «Итак, относительно того, что́ есть и что́ стало, утверждение или отрицание необходимо должно быть истинным или ложным... Однако не так обстоит дело с единичным и с тем, что́ будет» [5, 18a28-33]. Единичное случайное событие, если оно уже совершилось, позволяет формулировать о нем либо истинные, либо ложные высказывания. Если же оно относится к несуществующему будущему, ему только еще предстоит произойти или не произойти. Поэтому в момент настоящего высказывание о том, произошло ли будущее случайное событие или нет, еще *не стало* истинным или ложным, «ибо с тем, что́ не есть, но может быть и не быть, дело обстоит не так, как с тем, что́ есть» [5, 19b2-4]. В качестве примера такого события Аристотель разбирает завтрашнее морское сражение. Необходимо лишь то, что оно будет или не будет, но не то, что оно необходимо будет или необходимо не будет [5, 19a30-33]. Высказывания «Завтра произойдет морское сражение» и «Завтра морское сражение не произойдет» пока не истинны и не ложны, или, как говорит Аристотель о суждениях такого типа, «не немедля» истинны или ложны [5, 19a38].

Речь идет именно о случайных будущих событиях, поскольку высказывания о том, что совершается по необходимости, будут истинны или ложны независимо от момента их произнесения или написания. В результате центр тяжести падает не на разделение темпоральных высказываний на датированные (и потому якобы определенные во времени) и не содержащие даты, а на разделение их на определенные во времени и неопределенные во времени. Определенные во времени высказывания, согласно Аристотелю, описывают либо то, что стало, либо то, что вообще не знает становления. Если морское сражение случайно состоялось, то высказывания о нем будут истинны или ложны на все оставшиеся времена. Еще лучше, когда положение дел не может быть иным, когда оно воплощает в себе необходимость. Примером необходимо истинного высказывания является закон исключенного третьего. Каким бы ни было событие, оно в каждый момент времени либо существует, либо не существует, либо будет, либо нет, ибо «все необходимо есть или не есть, а также будет или не будет» [5, 19a28]. То есть закон исключенного третьего действует независимо от типа событий, о которых высказываются. Дизъюнкция «Завтра произойдет морское сражение или Завтра морское сражение не произойдет» истинна несмотря на то, что входящие в нее суждения пока не истинны и не ложны. Что касается суждений о не ставшем, о подверженном изменению существовании, то подобные суждения вообще не допускают приписывания определенного истинностного значения из альтернативы «истина – ложь». В таком случае получает объяснение настойчивое стремление ряда античных мыслителей найти неподверженное всеразрушающему потоку времени стабильное бытие, относительно которого можно сказать либо что оно было или есть, либо что оно было, есть и будет.

Анализируя аристотелевскую проблему, выдающийся польский логик Я.Лукасевич пришел к идее третьего истинностного значения. Ни одно из противоречащих друг другу высказываний о завтрашнем сражении сегодня не истинно и не ложно. Эти высказывания лишь впоследствии обретут привычные значения истины или лжи [14].

Бурно развивающиеся в наше время исследования в области многозначных логик не касаются проблемы прошлых случайных событий. Точнее говоря, тут вообще не усматривают проблемы. Действительно, если каждое высказывание об актуальном событии либо истинно, либо ложно, и если прошлое неизменно, то при переходе в прошлое и во все более далекое прошлое эти высказывания сохранят свой истинностный статус. Например, если 15 мая 1591 года было истинно высказывание «Царевич Дмитрий убит», то оно будет (в силу неизменности прошлого) истинным и 15 мая 2002 года и во все последующие времена. Установить истинностную характеристику данного высказывания легче, конечно, по горячим следам. Сейчас это сделать труднее ввиду отдаленности события. Но, коль скоро истинностная характеристика со временем не изменилась, трудности преодолимы, по крайней мере, в принципе.

Так или примерно так рассуждают сторонники тезиса о неизменности прошлого. Но на практике историки часто говорят о невозможности верификации или фальсификации определенных высказываний о прошлом. Могут возразить, что точно так же зачастую невозможно установить истинностные значения высказываний об актуальных событиях, происходящих в отдаленных от нас областях Вселенной. Это возражение бьет мимо цели, так как с точки зрения современной физики вследствие конечной скорости распространения взаимодействий последствия этих событий могут быть обнаружены лишь в будущем. В этом смысле события, которые мы наблюдали бы, если бы мгновенно перенеслись в какую-нибудь другую звездную систему, реально могут себя обнаружить для познающего субъекта только как прошлые события. Так что пространственно удаленные события на самом деле познаются как события прошлого, поэтому перед нами встают те же самые проблемы объяснения особенностей ретроспективного познания.

Правда, сказанное выше не следует возводить в абсолют, как это сделал Ю.Б.Молчанов, утверждая, что все познаваемые нами события – это «события прошлого, которые произошли на столько раньше, сколько времени требуется тому или иному сигналу, чтобы преодолеть расстояние от места их свершения до моих рецепторов и моего мозга» [15. С. 125]. Ошибочность этого рассуждения в том, что настоящее в реальной познавательной практике длится. Так, никому и в голову не придет считать себя старше своего отражения в зеркале, историк не будет называть настоящим промежуток времени в 1 секунду, настоящее расположение материков для геолога длится годами и так далее. Прошлое начинается за рамками интервала настоящего, имеющего различную продолжительность для разных областей реальности (в зависимости от характерной скорости изменения наполняющих время событий).

Возвращаясь к основной линии изложения, отметим, что факт невозможности установления истинностных значений некоторых осмысленных высказываний о прошлом при том условии, что эти же высказывания легко верифицируемы или фальсифицируемы в случае актуально происходящих событий (представим, например, что мы наблюдаем за царевичем Дмитрием в течение суток 15 мая 1591 г. и затем верифицируем высказывание о причине его смерти), свидетельствует об особом статусе прошлого в сравнении с настоящим. Реальность прошлого – это не то же самое, что реальность актуального настоящего. Это реальности разных видов, различающиеся способом существования.

К пониманию этого подходил Я.Лукасевич, утверждая, что «и к прошлому мы должны относиться точно так же, как и к будущему». Даже «всевидящий разум» о некоторых событиях прошлого не мог бы утверждать, «что они были, но лишь, что они были возможны» [14. С. 205]. Сказанное означает, что *для описания прошлого (как и будущего) нам недостаточно традиционных истинностных характеристик*. Вряд ли в самой действительности остались следы угличских событий полутысячелетней давности, которые позволили бы нам или нашим потомкам разрешить загадку смерти царевича. Слишком фрагментарны эти следы. По сути, след события всегда фрагментарен и неполно характеризует событие, его оставившее. Но историческая реальность – это реальность совокупности следов. Обязательно найдутся такие свойства событий, которые будут отсутствовать в совокупности соответствующих следов. «Отсутствовать» в смысле невозможности обоснованно утверждать ни то, что эти свойства были, ни то, что их не было. Поэтому некоторые осмысленные высказывания о существовавшем в прошлом объекте неизбежно будут иметь третье, неопределенное истинностное значение.

Так, химические методы в ряде случаев позволяют установить, что содержание ядовитых веществ в останках людей в несколько раз выше нормы. Например, в волосах Наполеона обнаружили повышенное содержание мышьяка и сурьмы. Однако это не позволяет сделать однозначный вывод о том, что превышение нормы произошло вследствие отравления бывшего императора злоумышленниками. При отсутствии в самой реальности других значимых следов версия об отравлении Наполеона останется недоказанной [12]. В этом случае высказывание «Наполеон был отравлен» получает неопределенную истинностную оценку.

Следует различать *онтологическую* и *гносеологическую* неопределенность, когда мы говорим о третьем истинностном значении. Так, с определенностью можно утверждать, что среди теорем, которые ученые считают доказанными в настоящее время, имеются ложные высказывания. Но принятие данного утверждения в качестве истинного не специфицирует ни одной теоремы, ошибочно относимой к доказанным истинам. Про любую теорему t мы можем либо утверждать, что она доказана, либо указать, что некоторые ученые считают ее доказанной, либо сослаться на то, что никому не удалось показать ее ошибочность. В любом случае, если $t \in T$, где T – класс всех теорем, принятых в настоящее время в качестве доказанных, то не обязательно мы будем настаивать на несомненной истинности t. А вдруг ошибочность t просто не заметили, или эта ошибочность проистекает из нетривиальных соображений? Представим себе, что ошибочное приписывание значения «истинно» теореме $t \in T$ карается смертью. Не окажется ли в этом случае список истинных теорем слишком коротким? Я, пожалуй, рискну на этих условиях утверждать, что в арифметике Пеано $2 \times 2 = 4$, что $A \to A$ доказуемо в классическом исчислении высказываний и т.п. Но вряд ли я решусь утверждать, что для раскраски любой карты достаточно четырех цветов или что арифметика Пеано непротиворечива. А вдруг четырех цветов недостаточно, а вдруг арифметика противоречива – не расставаться же из-за этого с жизнью!

С другой стороны, для любой теоремы $t \in T$ не подходит и характеристика «ложно», поскольку, по определению, T составляют лишь такие утверждения, про которые думают, что они истинны. В этих условиях для каждого $t \in T$ неизбежно либо принятие утверждения, что t истинна, либо утверждения, что t неопределенна (т. е. может оказаться истинной, но может быть и ложной, хотя последнее менее вероятно в общем случае). Ясно, что принятие теоремы, на истинности которой мы не настаиваем категорически, имеет гносеологический характер. Если завтра для некоторой теоремы $t \in T$ будет показано, что t ложно, то это не потому, что t сегодня была истинной, а завтра стала ложной. Утверждение t и сегодня было ложным, но мы этого не знали. Но данное незнание действительно имело место, так что (за вычетом тех, кто лишился жизни за принятие t в качестве истины) правы были эксперты, приписавшие утверждению t неопределенное истинностное значение. Таким образом, в приведенном примере мы имели дело с гносеологической неопределенностью.

С иным положением дел сталкивается исследователь прошлого и будущего. В момент «теперь» онтологически уже не существует части прошлой жизни и онтологически еще не существует будущей истории во всех ее деталях. Если истинность или ложность утверждения теоремы остается неизменной в веках, то для событий, зависящих от времени, дело обстоит противоположным образом. Не думаете ли вы, что в эпоху существования динозавров уже существовала объективная возможность появления этих строк? Равным образом, не думаете ли вы, что любой из существовавших динозавров оставил в самой реальности неизгладимый след? – Нет, возникновение этих строк, а также читающих их, было творческим актом Вселенной, отнюдь не заложенным в ней от начала времен. Точно так же неизбежно с течением времени исчезнет наша эпоха, оставив в лучшем случае какие-либо следы. Но что-то из нашей жизни исчезнет без следа. В отношении таких процессов возникновения и исчезновения во времени имеет место онтологическая неопределенность.

Традиционные истинностные значения 1 (истина) или 0 (ложь) высказывания А выражаются в языке посредством утверждения либо А, либо ¬А. Соответственно, в языке должна иметься возможность выражать неопределенность, которую обозначим знаком 1/0. Введем для этого новую унарную логическую связку «н»: нА будем читать как «неопределенно А», «А не определено» и т.п. Теперь в случае $\|A\| = 1$ утверждаем А, в случае $\|A\| = 0$ утверждаем ¬А, и в случае $\|A\| = 1/0$ утверждаем нА (здесь $\|...\|$ – функция истинностной оценки высказываний).

В согласии с аристотелевским подходом к неопределенности будем считать, что закон исключенного третьего по-прежнему действует и формула $A \vee \neg A$ истинна при любом А, но теперь из $A \vee \neg A$ уже не следует, что либо $\|A\| = 1$, либо $\|\neg A\| = 1$ (или что либо $\|A\| = 0$, либо $\|\neg A\| = 0$), поскольку не исключено, что $\|A\| = 1/0$ и $\|\neg A\| = 1/0$. С интуитивной точки зрения, неопределенность высказывания А влечет неопределенность его отрицания ¬А, и наоборот. Поэтому примем также, что нА ↔ н¬А, т. е. А не определено тогда и только тогда, когда ¬А не определено. Если же высказывание А определенно, то по-прежнему из двух противоречащих высказываний А и ¬А одно является истинным, а другое ложным. Например, суждение «Клеопатра – женщина» определенно истинно, и, значит, его отрицание ложно, тогда как суждение «Клеопатра – красавица» может вызвать споры, во избежание которых этому суждению припишем неопределенное истинностное значение, откуда его отрицание также неопределенно.

В работах [2], [3], [4, гл.9] нами была предложена и исследована формальная семантика для языка логики предикатов первого порядка, пополненного оператором неопределенности «н». В построенной семантической теории неопределенности, которая была названа *н-семантикой*, неопределенность задается набором возможных миров вида $<U,\{F_i\}\ i \in J>$ (где U – единый для всех миров непустой универсум, F_i – функция интерпретации, а J – множество индексов числом не менее двух), попарно отличающихся интерпретацией хотя бы одного предикатного символа. То есть при $i \neq j$ найдется такой предикат P, что $F_i(P) \neq F_j(P)$. При этом для любой индивидной константы c принимается $F_i(c) = F_j(c)$. Иными словами, имена индивидов считаются *твердыми десигнаторами* (имеющими одинаковый денотат во всех возможных мирах), а ответственность за неопределенность возлагается на *мягкие десигнаторы* – предикаты (которые могут иметь разные денотаты в разных мирах). Отношение достижимости на мирах отсутствует. Под неопределенностью высказывания в самом общем плане понимается ситуация, в которой высказывание истинно в одних мирах и ложно в других. Эта простая семантическая идея привела к неожиданным следствиям. Множество общезначимых формул н-семантики оказалось рекурсивно перечислимым, однако было доказано, что понятие естественным образом заданного логического следования в ней не формализуемо, а теорема компактности не верна.

Два последних свойства (а также некоторые другие особенности н-семантики) нежелательны. Они излишне усложняют формальные семантические характеристики неопределенности, тогда как с содержательных позиций все относительно просто: есть *определенные* высказывания, истинные во всех мирах или ложные во всех мирах, и есть *неопределенные* высказывания, истинные в одних мирах и ложные в других. Законы классической логики истинны во всех возможных мирах, а противоречия ложны во всех мирах. Поэтому, в частности, $A \vee \neg A$ – определенное высказывание (и при том истинное), и $\neg(A \vee \neg A)$ – также определенное высказывание (но ложное).

Стало быть, высказывания $A \vee \neg A$ и $\neg(A \vee \neg A)$ остаются определенными независимо от того, является ли исходное высказывание A определенным или неопределенным. Эта, восходящая к Аристотелю, позиция для нас принципиальна. Но именно она заставляет говорить о простоте семантической идеи неопределенности в относительном смысле. Ведь при таком подходе истинностное значение сложного выражения не является, в общем случае, функцией от истинностных значений его частей. И тут ничего не поделаешь. Что приписать дизъюнкции $A \vee B$, если $\|A\| = 1/0$ и $\|B\| = 1/0$? Максимум? – Тогда $\|A \vee B\| = 1/0$. Но если B есть $\neg A$? – Тогда $\|A \vee B\| = 1$. Аналогичные трудности возникают в отношении конъюнкции, импликации и эквивалентности – для них тоже не существует адекватных трехзначных таблиц. Например, рассмотрим высказывание $A \leftrightarrow B$. Пусть $\|A\| = 1/0$ и $\|B\| = 1/0$. Но не спешите приписывать $\|A \leftrightarrow B\| = 1$. Если B есть $\neg A$, то $\|A \leftrightarrow \neg A\| = 0$, поскольку $A \leftrightarrow \neg A$ противоречиво и, значит, $A \leftrightarrow \neg A$ ложно во всех мирах. Если же истинностное значение A совпадает с истинностным значением B в мире α, но не совпадает в мире β, то $A \leftrightarrow B$ истинно в α и ложно в β. Отсюда $\|A \leftrightarrow B\| = 1/0$. И т.п. Однако это так только для бинарных логических связок. Унарные логические связки «$\neg$» и «н» составляют исключение, поскольку определяются следующей таблицей.

A	$\neg$A	нA
1	0	0
1/0	1/0	1
0	1	0

Действительно, если высказывание A истинно (ложно) во всех мирах, то его отрицание будет ложным (истинным) также во всех мирах. В любом случае A и $\neg$A определенны, поэтому приписывание им неопределенности ложно. Если же A истинно в мире α и ложно в мире β, т.е. если $\|A\| = 1/0$, то, конечно, высказывание «A неопределенно», т.е. высказывание нA, будет истинным. После того как высказывание нA получило истинностную оценку, оказывается, что оно стало либо ложным, либо истинным, т.е. превратилось в определенное высказывание. Поэтому, в соответствии с таблицей, любое высказывание вида ннA окажется ложным, так что формула $\neg$ннA является первым примером специфического логического закона $\models \neg$ннA, связанного с оператором неопределенности «н».

В целом можно сказать, что вместо принципа бивалентности нами принимается семантический *принцип тривалентности*, согласно которому любое высказывание либо истинно, либо ложно, либо неопределенно. Четвертого не дано. Однако принцип тривалентности здесь не ведет к отбрасыванию закона исключенного третьего (A $\vee$ $\neg$A) и принятию вместо него закона исключенного четвертого в форме (A $\vee$ $\neg$A $\vee$ нA). Разумеется, последняя формула является законом, т.е. $\models$ (A $\vee$ $\neg$A $\vee$ нA), но, тем не менее, законом остается и первая формула, т.е. $\models$ (A $\vee$ $\neg$A). Зато формулы (A $\vee$ нA) и ($\neg$A $\vee$ нA) законами не являются. Тут отсутствует какая-либо непоследовательность в рассуждениях. Все дело в том, как добываются истинностные значения. А они получаются в зависимости от положения дел в возможных мирах. При нашем подходе возможные миры существуют не наряду с действительным миром, а в совокупности его составляют. Действительный мир распадается на возможные миры потому, что ему объективно присуща неопределенность. Точнее говоря, возможные миры в нашем смысле совпадают друг с другом в определенной части реального мира, и различаются лишь в отношении его неопределенной части. Она потому и неопределенна, что в реальности ее нельзя свести к чему-то одному. Законы классической логики описывают определенную часть реальности, поэтому они сохраняются в любом возможном мире. Что же касается неопределенностей, то у них свои законы, которые должны ужиться с законами классики.

Иными словами, логика неопределенности должна быть консервативным расширением логики классической. Лишь в этом случае есть надежда, что она будет не просто еще одним добавлением к многочисленному семейству абстрактных неклассических логик, представляющих только теоретический интерес, но на самом деле будет логикой, т.е. основой для реальных рассуждений. Ведь, как известно, чаще всего даже авторы неклассических систем в действительности не рассуждают в соответствии с построенными ими же исчислениями и семантиками. Бывает забавно наблюдать, как поборник какой-нибудь неклассической логики, основанной на отбрасывании некоторых законов классики, и таким образом, не являющейся ее расширением, доказывает метатеоремы для своей «логики», пользуясь исключительно логикой классической.

Приведенные рассуждения подводят к очень важному для дальнейшего заключению. Во всех ситуациях определенность имела место тогда и только тогда, когда какое-то положение дел A было одинаковым во всех возможных мирах. Для возникновения неопределенности в отношении A требовалось наличие *двух* миров α и β таких, что A имело место в α и не имело места в β или наоборот. Что делается в других мирах, отличных от α и β, – уже не существенно в том смысле, что ситуация в них никак не способна повлиять на неопределенность A. Это наблюдение приводит к выводу, что *с логической точки зрения для описания свойств неопределенности достаточно двух возможных миров*. Третий, четвертый и последующие миры могут нести дополнительную информацию фактического характера, но ничего не добавят к логическим характеристикам определенности или неопределенности, подобно тому, как в классической логике любые дескриптивные особенности высказываний элиминируются стягиванием их всех к двум полюсам – истина и ложь. В отличие от классики, теперь в целом перед нами не два, а *три* варианта: A выполнено во всех мирах, A не выполнено во всех мирах, и A выполнено в одном мире и не выполнено в другом. Но в последнем случае достаточно опять-таки двух вариантов или двух миров для возникновения неопределенности в отношении A. Это позволяет свести рассуждения о неопределенности к двум возможным мирам, что, как можно надеяться, значительно упростит логическую теорию неопределенности без потери каких бы то ни было существенных характеристик исследуемого феномена.

Как уже говорилось, идея неопределенности была нами развита на основе неклассической логики. Тривиально ясно, что логика, содержащая третье истинностное значение и новый логический оператор «н», не может быть классической. Однако нельзя ли как-нибудь приблизить неклассическую логику неопределенности к классике таким образом, чтобы избавить ее хотя бы от части нежелательных свойств, о которых упоминалось выше? Мы предлагаем весьма радикальный вариант решения поставленной проблемы. Его суть состоит в предложении развивать логику неопределенности как бы *внутри* классической логики.

Основная идея следующая. Каждый согласится, что бывает так, что $P(c)$, но $\neg Q(c)$, т.е. индивид c обладает свойством P, но не обладает свойством Q. При этом все полностью определенно. Для возникновения неопределенности в отношении P и c, надо, чтобы в некотором мире α было $P(c)$, а в мире β – $\neg P(c)$. Тогда можно утверждать, что н$P(c)$. Однако введение этих миров сделает семантику неклассической. А что, если в качестве $\neg P(c)$ использовать $\neg Q(c)$? Обоснованно возразят, что P и Q являются *разными* предикатами. Как же можно в этих условиях утверждать н$P(c)$? Но что означает различие в предикатах – только ли различие в написании? Нет, не только. Главным является как раз не это, а то, как *определяются* предикаты. При аксиоматическом подходе, например, мы можем принять некоторые утверждения про P и Q в качестве аксиом, приняв, допустим, что $\forall x P(x)$ и $\neg\forall x Q(x)$. Тут различие между P и Q действительно очевидно и речь в самом деле идет о разных свойствах. Однако предположим, что P и Q *определяются одинаково*, т.е. всякая аксиома для P превращается в аксиому для Q посредством замены P на Q и, наоборот, всякая аксиома для Q превращается в аксиому для P посредством замены Q на P. Какие теперь есть основания утверждать, что P и Q различны? Основания эти вытекают из того, что одни и те же аксиомы можно иногда интерпретировать по-разному. Если принимаются высказывания $\forall x P(x)$ и $\forall x Q(x)$, то предикаты P и Q в рамках классики совпадут в любом универсуме при любой интерпретации. Но если в качестве аксиом принимаются формулы $\exists x P(x)$ и $\exists x Q(x)$, то интерпретации данных предикатов могут быть различны. Однако додумаем высказанную мысль до конца. *При совпадении аксиом для P и Q мы имеем право в любом случае вести речь если и не о совпадении, то, по крайней мере, о* ***сходстве*** *P и Q.* Здесь больше оснований говорить о сходстве, чем в той ситуации, когда интерпретации одного и того же предиката P в мирах α и β никак не связаны. И именно опираясь на это сходство, мы получаем полное право при наличии $P(c)$ и $\neg Q(c)$ не только утверждать, что н$P(c)$, но и (поскольку отношение сходства симметрично) утверждать н$Q(c)$.

Обсуждаемое сходство можно подкрепить психологически, сделав похожими начертания сходных предикатов. Удобнее вместо Q использовать, допустим, P*. Важно подчеркнуть, что суть идеи сходства не в этом. Мы называем n-*местные атомарные предикаты* $P(x_1, ..., x_n)$ *и* $Q(x_1, ..., x_n)$ ***сходными** в теории* T, *если любая аксиома* T, *содержащая эти предикаты или один из них, остается аксиомой данной теории* T *после одновременной замены каждого вхождения* $P(x_1, ..., x_n)$ *на* $Q(x_1, ..., x_n)$ *и каждого вхождения* $Q(x_1, ..., x_n)$ *на* $P(x_1, ..., x_n)$. Аналогичным образом определяется сходство в теории T функциональных символов.

Перейдем к более детальным построениям. Пусть T – аксиоматическая теория в языке L классического исчисления предикатов первого порядка. Сопоставим каждому n-местному атомарному предикатному символу $P(x_1, ..., x_n)$ языка L n-местный атомарный предикатный символ $P^*(x_1, ..., x_n)$, а каждому n-местному функциональному символу $t(x_1, ..., x_n)$ – n-местный функциональный символ $t^*(x_1, ..., x_n)$. Индивидные константы (если они вообще имеются) оставим без изменений[1]. Получим язык L*. Теперь заменим в аксиомах теории T каждое вхождение предикатных и функциональных символов на соответствующие символы со звездочкой. Результат описанной замены для аксиомы A обозначим через A*. В итоге получим теорию T* в языке L*, содержащую в качестве аксиом только формулы вида A*.

Объединим полученные теории в одну. Получим теорию $T \cup T^*$ в языке $L \cup L^*$. Теория $T \cup T^*$ вряд ли может кого-то заинтересовать. Просто она содержит два параллельных ряда аксиом, отличающихся лишь наличием или отсутствием звездочек в их формулировках. Однако понятие формулы претерпело существенное изменение. Формулами теории $T \cup T^*$ отныне являются не только формулы языка L и формулы языка L* по отдельности, но и *смешанные* формулы, содержащие как символы без звездочек, так и символы со звездочками. Пусть A – какая-либо формула языка $L \cup L^*$. *Через* A* *обозначим результат одновременной замены в* A *каждого предикатного или функционального символа без звездочки на соответствующий символ со звездочкой, а каждого предикатного или функционального символа со звездочкой на соответствующий символ без звездочки.*

Так определенная операция * на формулах обладает следующим очевидным свойством.

Предложение 1. Любая формула A графически совпадает с A**, но ни одна формула A не совпадает с A*.

---

[1] Напомним, что имена, в отличие от предикатных и функциональных символов, считаются твердыми десигнаторами.

По аналогии с атомарными формулами, произвольные формулы A и A* также будем называть ***сходными*** в теории T ∪ T*.

Положим Lн = L ∪ L* ∪ {н}, где «н» – символ новой унарной логической связки.

Добавим к T ∪ T* важное определение. Точнее, схему определений. Для *любой* формулы A языка Lн аксиомой является следующая формула:

$$нA \leftrightarrow ((A \mathbin{\&} \neg A^*) \vee (\neg A \mathbin{\&} A^*)).$$

Содержательный смысл данного определения должен быть ясен из вышесказанного. В частности, если A – формула языка L ∪ L* (это означает, что в A нет вхождений оператора «н»), то A неопределенна тогда и только тогда, когда она выполнена в модели теории T ∪ T*, а сходная с ней формула A* не выполнена в той же модели, или, наоборот, A не выполнена, но A* выполнена.

Теорию T ∪ T* с присоединенной схемой определений $нA \leftrightarrow ((A \mathbin{\&} \neg A^*) \vee (\neg A \mathbin{\&} A^*))$ в качестве новой аксиомной схемы назовем *минимальной теорией с неопределенностью* Tн в языке Lн. Короче, минимальная Tн = T ∪ T* ∪ $\{нA \leftrightarrow ((A \mathbin{\&} \neg A^*) \vee (\neg A \mathbin{\&} A^*))\}$.

Интересно обсудить вопрос: относится ли предложенная конструкция к чистой логике, или она является частью прикладных построений? Уточним постановку вопроса. Пусть исходная теория T – это просто одна из аксиоматических формулировок чистого исчисления предикатов первого порядка без равенства. Нет никаких причин сомневаться, что T* тогда тоже относится к чистой логике. Но как быть в этом случае с минимальной Tн? Является ли Tн прикладной теорией (вроде арифметики или теории множеств), или ее все еще можно считать принадлежащей к чистой логике? Представляется убедительным следующий аргумент. Аксиомы прикладных теорий истинны не во всех универсумах, тогда как логические аксиомы верны при любых интерпретациях во всех непустых универсумах. Аксиомную схему $нA \leftrightarrow ((A \mathbin{\&} \neg A^*) \vee (\neg A \mathbin{\&} A^*))$ невозможно провалить по той же самой причине, по какой нельзя опровергнуть, например, сокращение $(A \mathbin{\&} B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$, добавленное к исчислению, сформулированному в языке $\{\neg, \to\}$. Так и в рассматриваемом случае. Формула $нA \leftrightarrow ((A \mathbin{\&} \neg A^*) \vee (\neg A \mathbin{\&} A^*))$ по сути является сокращением, позволяющем в более компактном виде представлять некоторые формулы. Можно, конечно, принять закон $\neg((A \mathbin{\&} B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B))$, но это будет какая-то другая, неклассическая логика. Также можно придать унарной логической связке «н» какой-то другой смысл. Но это тоже будет уже другая логика.

Придадим сказанному формальный смысл. Пусть <U, F> – структура для языка L ∪ L*. Поскольку язык L ∪ L* является языком исчисления предикатов первого порядка, функция интерпретации F предикатных, функциональных и индивидных констант из L ∪ L* на непустом универсуме U стандартна. Все, что требуется для того, чтобы сделать <U, F> структурой для языка Lн, – это определить условие выполнимости для формул вида нA. Это условие очевидно: *формула* нA ***выполнена*** *в структуре* <U, F> *при оценке v тогда и только тогда, когда в* <U, F> *при оценке v выполнена формула* ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)). Тогда верно следующее утверждение (в котором знак логического закона « $\models$ » имеет обычное классическое значение).

Предложение 2. $\models$ (нA ↔ ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*))).

Однако чисто логическая теория Тн моментально превратится в прикладную, как только мы примем аксиому о том, что *конкретная выполнимая* формула A является неопределенной. Аксиома нA для такой формулы может выполняться в одних интерпретациях и не выполняться в других, как и положено аксиомам прикладных теорий. Но в этом случае теория Тн перестанет быть минимальной.

Предложение 3. Для любой теории T теория T ∪ T* является ее консервативным расширением, а минимальная теория Тн является консервативным расширением T ∪ T* (и, значит, также T).

Как и всякую теорию, минимальную теорию Тн можно расширять, причем не обязательно формулами, содержащими оператор «н». В качестве новой аксиомы к Тн разрешается добавлять любую формулу языка Lн. Разумеется, в результате расширение уже не обязано быть консервативным. Тем не менее, каковы бы ни были теории с неопределенностью Тн, для них верны все стандартные метатеоремы о первопорядковых теориях классической логики. Иными словами, выполняется своего рода *принцип переноса*. Данный факт имеет место потому, что по сути дела теории Тн не выводят нас за рамки классической логики. В частности, каждую формулу теории Тн, содержащую оператор «н», можно заменить эквивалентной ей формулой без этого оператора, элиминировав, таким образом, оператор неопределенности «н».

Зато введение этого оператора позволяет в компактном виде сформулировать ряд неклассических идей, связанных с неопределенностью. Начнем с семантики. Будем использовать понятие выполнимости в обычном смысле с учетом расширения его на формулы вида нA, как было определено выше. Пусть A – формула языка Lн и <U, F> – структура для языка Lн. A *определенно выполнена* в структуре <U, F> при оценке v, если как A, так и A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. A *определенно не выполнена* в структуре <U, F> при оценке v, если как A, так и A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Если в классическом случае любая формула либо выполнена, либо не выполнена, то здесь появляется третья возможность. Формула A *неопределенно выполнена* в структуре <U, F> при оценке v, если либо A выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, либо A не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v.

Предложение 4. Формула нA определенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v тогда и только тогда, когда A неопределенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v.

Докажем это утверждение. Пусть нA определенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Значит, как нA, так и нA* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Согласно определению выполнимости для формул вида нA, получаем, что в структуре <U, F> при оценке v выполнена формула ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)). Дизъюнкция C ∨ D выполнена, если выполнена формула C или выполнена формула D. Допустим, (A & ¬A*) выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Тогда и A, и ¬A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Раз ¬A* выполнена, то A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, т.е. A неопределенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v, что и требовалось. Случай (¬A & A*) рассматривается аналогично.

Пусть теперь A неопределенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Тогда либо A выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, либо A не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Рассмотрим первую возможность. Так как A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, ¬A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Значит, в структуре <U, F> при оценке v выполнена конъюнкция (A & ¬A*) и, следовательно, дизъюнкция ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)), что и требовалось. Вторая возможность рассматривается аналогичным образом.

Формула A принимает значение 1 (*определенно истинно*) в структуре <U, F>, если A определенно выполнена структуре <U, F> при всех оценках v. Формула A принимает значение 0 (*определенно ложно*) в структуре <U, F>, если A определенно не выполнена структуре <U, F> при всех оценках v. Формула A принимает истинностное значение 1/0 (*неопределенность*), если A неопределенно выполнена структуре <U, F> при всех оценках v.

Разумеется (как и в классическом случае, когда незамкнутая формула может быть ни истинной, ни ложной), незамкнутая формула может быть ни истинной, ни ложной, ни неопределенной. Зато каждая замкнутая формула в семантике неопределенности получит какое-то из трех истинностных значений.

Предложение 5. Если A – замкнутая формула языка Lн, то в любой структуре <U, F> для языка Lн A получит одно и только одно из трех истинностных значений: либо $\|A\| = 1$, либо $\|A\| = 0$, либо $\|A\| = 1/0$.

Еще одним очевидным следствием принятых определений является следующее утверждение.

Предложение 6. Унарные связки «¬» и «н» подчиняются вышеприведенной таблице истинности, тогда как бинарные связки не могут быть заданы конечной таблицей истинности.

Предложение 7. Пусть A – замкнутая формула. Тогда $\|нA\| = \|нA^*\| = \|н\neg A\| = \|н\neg A^*\|$. При этом либо $\|нA\| = 1$, либо $\|нA\| = 0$.

Для доказательства данного утверждения достаточно обратить внимание, что условия выполнимости для нA и нA* эквивалентны ввиду того, что A неопределенно выполнена тогда и только тогда, когда A* неопределенно выполнена. Аналогичным образом, если формула A неопределенно выполнена, то и ¬A также неопределенно выполнена, и наоборот. Поэтому можно было бы сказать, что если A неопределенно не выполнена, то и ¬A также неопределенно не выполнена. То есть в условиях неопределенности выполнимость и невыполнимость совпадают. В случае неопределенности A формула нA будет определенно истинной, а в случае определенной истинности или определенной ложности A формула нA окажется определенно ложной. Случай $\|нA\| = 1/0$ поэтому исключается. С философской точки зрения это означает, что утверждение неопределенности или, равным образом, отрицание неопределенности, само вполне определенно. Но так и должно быть. Либо неопределенность есть, либо ее нет. Словосочетание «неопределенная неопределенность», на наш взгляд, лишено смысла.

Стандартное понятие общезначимой формулы распространяется на построенную трехзначную семантику естественным образом: вместо *истинно* надо сказать *определенно истинно*. Точнее, формула A языка Lн является н-*общезначимой*, если A определенно истинна в любой структуре для языка Lн. Для обычной общезначимости пишем $\models$ А, а для н-общезначимости будем использовать запись н $\models$ А.

Принципиальное значение имеет следующее утверждение.

Предложение 8. Для любой формулы А языка Lн $\models$ А тогда и только тогда, когда н $\models$ А.

Из определений ясно, что если н $\models$ А, то не только $\models$ А, но и $\models$ А*. Доказательство в обратную сторону основывается на том факте, что $\models$ А $\Leftrightarrow$ $\models$ А* (ведь формулы А и А* имеют одинаковую структуру). Рутинные детали опустим.

Осуществив столь же естественное распространение на семантику неопределенности понятия логического следования (снова достаточно в нужных местах добавить слово «определенно»), получим более общее утверждение.

Предложение 9. Г $\models$ А $\Leftrightarrow$ Г н $\models$ А.

Наконец, используя теорему полноты для классической логики, получаем следующее утверждение.

Предложение 10. Тн $\vdash$ А $\Leftrightarrow$ н $\models$ А.

Пора проиллюстрировать логическую теорию неопределенности конкретными примерами рассуждений в неопределенных условиях. Лучше всего это сделать, обратившись к логике исторических рассуждений, поскольку именно исследователям уже исчезнувших событий прошлого приходится сталкиваться с неопределенностями там, где аналогичные события, будь мы их очевидцами, не вызвали бы вопросов.

Более конкретно, мы займемся проблемой прямого правила удаления квантора существования в рассуждениях историков. Но вначале необходимо показать, как эта проблема решалась в классической и интуиционистской (ставшей уже почти классической) логике. Одним из способов решения было ведение ε-оператора. Как известно, идея исчисления с ε-термином принадлежит Д.Гильберту. Смысл выражения вида εхА(х) состоит в указании на некий индивид, обладающий свойством А(х), если такой индивид существует. Знаки индивидов называются именами, однако в рассматриваемом случае мы имеем дело с именем не конкретного, а неопределенного индивида, произвольно выбранного среди объектов, удовлетворяющих свойству А(х), если таковые вообще найдутся. Поэтому оператор ε получил название оператора *неопределенной дескрипции*. Существует также оператор *определенной дескрипции*, обычно обозначаемый символом ι, который указывает на индивид однозначным образом. В трактовке Д.Гильберта требование однозначности обеспечивается доказательством существования и единственности введенного с помощью ι-оператора объекта. Выражение $\iota xA(x)$ имеет смысл тогда и только тогда, когда *предварительно* доказано, во-первых, что $\exists xA(x)$ (объект существует) и, во-вторых, что $\forall x\forall y((A(x) \& A(y)) \to x = y)$ (объект единственен) [7], или, в сокращенной форме, $\exists!xA(x)$. Отказываясь от слишком обременительного условия доказательства единственности и оставляя требование доказательства существования, приходим к η-оператору, который (так же, как и ε) оказывается оператором неопределенной дескрипции, поскольку указывает на произвольный объект, удовлетворяющий свойству $A(x)$: $\eta xA(x)$ означает результат выбора некоторого индивида, выполняющего свойство $A(x)$.

Необходимость перехода к оператору неопределенной дескрипции В.А.Смирнов иллюстрирует на следующем примере [16]. Рассмотрим предложение «Семен видел верблюда». Здесь «Семен» – имя индивида, а термин «верблюд» указывает на класс индивидных объектов. Однако интуитивное понимание данного предложения не совместимо с утверждением «Семен видел класс верблюдов». Имеется в виду, что Семен видел некоторого представителя класса верблюдов, а не сам класс. Уточнить сказанное позволяет оператор неопределенной дескрипции: «(Семен) Видел (ηx Верблюд (x))». Но выражение вида $\eta xA(x)$ имеет смысл тогда и только тогда, когда доказано $\exists xA(x)$, что также накладывает излишне строгие ограничения на использование оператора неопределенной дескрипции. Верблюды существуют, а динозавры нет. Поэтому утверждение «(Семен) Видел (ηx Динозавр (x))» оказывается просто неправильно построенным, хотя оно имеет точно такую же форму, как и в предыдущем примере.

Выходом из этого затруднения является отказ от обязательного доказательства существования объектов, обладающих некоторым свойством, в утверждениях с использованием оператора неопределенной дескрипции. Гильберт и Бернайс следующим образом обобщают идею неопределенной дескрипции, вводя ε-оператор [8]. Принимается аксиома:

$A(t) \to A(\varepsilon xA(x))$ (где t – терм).

Кванторы общности и существования вводятся определениями:

$\exists xA(x) =_{Df} A(\varepsilon xA(x))$, $\forall xA(x) =_{Df} A(\varepsilon x\neg A(x))$.

Теперь формулы вида $B(\varepsilon xA(x))$ можно вводить без каких-либо ограничений, связанных с предварительным доказательством существования индивидов, обладающих свойством $A(x)$. С семантической точки зрения, общезначимость выше приведенной аксиомы можно обосновать следующим рассуждением. Пусть значением выражения $\varepsilon xA(x)$ будет произвольный индивид, удовлетворяющий свойству $A(x)$, если предикат $A(x)$ проинтерпретирован на непустой области объектов. Если же при данной интерпретации предикат $A(x)$ пуст, то выражению $\varepsilon x A(x)$ сопоставляем любой индивид из универсума рассуждений. Пусть теперь формула $A(t)$ выполнена в интерпретации F при некоторой оценке f. Это означает, что предикат $A(x)$ не пуст в интерпретации F. Ясно, что формула $A(\varepsilon x A(x))$ также будет выполнена при данной интерпретации и оценке f. На самом деле $A(\varepsilon x A(x))$ в рассматриваемом случае будет выполнена при любой оценке g. Если же формула $A(t)$ не выполнена в данной интерпретации ни при какой оценке, $\varepsilon x A(x)$ сопоставим b, где b – произвольный индивид из универсума рассуждений. Поскольку формула $A(t)$ не выполнена ни при какой оценке, формула $A(\varepsilon x A(x))$ также не будет выполнена, какую бы оценку мы ни взяли, что и требовалось. В частности, если $A(t)$ истинна, то $A(\varepsilon x A(x))$ также будет истинна, а если $A(t)$ ложна, то $A(\varepsilon x A(x))$ также будет ложна. Фактически, именно такое понимание смысла оператора ε было предложено Гильбертом и Бернайсом [8. С. 30].

Существенно, что построенное Гильбертом и Бернайсом исчисление предикатов, содержащее оператор ε, не ведет к расширению класса формул, доказуемых в обычном исчислении предикатов. Точнее, если некоторая формула A, не содержащая символа ε, доказуема в гильбертовском ε-исчислении, то она будет доказуема и в исчислении предикатов первого порядка, не содержащем символа ε. Иначе говоря, ε-исчисление является консервативным расширением обычного исчисления предикатов. Исследования ε-оператора В.А.Смирновым позволили распространить полученные школой Гильберта результаты на исчисления иных типов и на интуиционистскую логику. Эти новые, далеко идущие обобщения первоначально были изложены в седьмой, заключительной главе книги [16]. В дальнейшем В.А.Смирнов неоднократно обращался к проблематике ε-исчислений, развивая и уточняя предложенный им подход.

Нас здесь будет интересовать, в первую очередь, сформулированное В.А.Смирновым несеквенциальное натуральное исчисление предикатов второго типа, предполагающее наличие прямых правил удаления для каждого логического знака, в том числе для квантора существования [16. С. 217]. Введение такого правила для квантора существования порождает проблему, связанную с обеспечением логического следования. Такого рода проблема возникает и в случае прямого правила введения квантора всеобщности. Переход (при линейном способе записи) $A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$ нарушает логическое следование: $A(x)$ может оказаться истинным при каком-то конкретном значении x, тогда как утверждение $\forall xA(x)$ окажется ложным. Однако общезначимость формулы $A(x)$ в каком-либо универсуме рассуждений гарантирует общезначимость и формулы $\forall xA(x)$ в том же универсуме.

С квантором существования дело обстоит сложнее. Прямое правило удаления квантора существования $\exists xA(x) \Rightarrow A(t)$ не воспроизводит отношение логического следования и в том случае, когда формула $\exists xA(x)$ является универсально общезначимой. Например, формула $\exists x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$ универсально общезначима, но формула $(P(t) \rightarrow \forall yP(y))$ не общезначима. Неформальное доказательство общезначимости первой формулы заключается в следующем простом рассуждении. Свойство $P(x)$ выполняется либо для всех объектов универсума, либо не для всех. В первом случае в качестве индивида, существование которого утверждается, возьмем произвольный объект универсума, скажем, b. Поскольку $P(b)$ истинно и $\forall yP(y)$ истинно, импликация также $P(b) \rightarrow \forall yP(y)$ истинна, а вместе с ней истинна и формула $\exists x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$. Например, в универсуме людей истинно утверждение «Все люди смертны». Отсюда истинно «Если Сократ смертен, то и все смертны» и, следовательно, истинно «Существует такой человек, что если он смертен, то и все смертны». Если же свойство $P(x)$ выполняется не для всех индивидов рассматриваемой области, то в качестве объекта, существование которого утверждается, возьмем любой из тех индивидов, который не удовлетворяет свойству $P(x)$. Например, пусть $P(x)$ означает «Добрый(x)». Но не все люди добры. Так, маркиз де Сад не является добрым. Отсюда импликация «Если уж и маркиз де Сад добр, то тогда все добры» будет истинна в силу ложности антецедента. Следовательно, истинно экзистенциальное обобщение «Существует такой человек, что если он добр, то все добры».

Решить задачу формулировки прямого правила удаления квантора существования можно с помощью ε-символа. Примем правило $\exists xA(x) \Rightarrow A(\varepsilon xA(x))$, где $A(\varepsilon xA(x))$ есть результат замены каждого свободного вхождения переменной x в формуле $A(x)$ на выражение $\varepsilon xA(x)$. Такое правило, учитывая сказанное выше о семантике выражений с ε-символом, воспроизводит отношение логического следования. Истинность посылки $\exists xA(x)$ гарантирует истинность заключения $A(\varepsilon xA(x))$ [13. С. 139-140]. В.А.Смирнов построил и исследовал различные классические и интуиционистские варианты натурального ε-исчисления с прямыми правилами введения и удаления логических знаков. При этом более ранний интуиционистский вариант основывался на требовании, чтобы ε-термы не входили в устраняемые допущения и в заключение вывода [16, гл.7]. Впоследствии он применил иной, более элегантный подход, использующий введение в систему предиката существования [17]. Таким образом, удалось рассмотреть с единых позиций и классическую, и интуиционистскую логики предикатов, представив их в виде ε-исчислений натурального вывода второго типа.

В данной работе будет показано, что трудности, связанные с принятием прямого правила удаления квантора существования, появляются вновь, если попытаться распространить его на область существенно неконструктивных рассуждений. Прежде всего поясним на примерах, что имеется в виду под неконструктивными рассуждениями. Всем известна загадочная история человека по имени Каспар Гаузер. Тайна его происхождения так и осталась нераскрытой. Кто были его родители? Несомненно, что таковые существовали, поскольку каждый человек имеет родителей. Зафиксируем это в символической форме: $\forall y \exists x P(x,y)$, где $P(x,y)$ читается «x родитель y». Представим себе, однако, что следы существования родителей Каспара Гаузера начисто исчезли, что их нет в самóм существующем в настоящее время универсуме. Заметим, что мы не утверждаем, что следы *действительно* исчезли. *Предположим*, что они исчезли. В таком предположении нет ничего невероятного. Более того, в трудах историков нередко можно встретить аналогичные утверждения о безвозвратной утрате источников и следов некоторых исторических событий. В рассматриваемой ситуации мы располагаем конечным множеством людей, которые могли бы быть родителями Каспара Гаузера. Претенденты на эту роль известны. Так, в одной из версий родителями Каспара Гаузера были герцог Баденский Карл и его жена Стефания де Богарне, удочеренная в свое время Наполеоном. Согласно еще одной гипотезе, Каспар Гаузер родился в семье простолюдинов Блохманнов [6, С.334-340]. Но при отсутствии следов ни одно из утверждений вида $P(b, КГ)$, где b – имя конкретного претендента и КГ – имя Каспар Гаузер, не может быть верифицировано в принципе. Хотя, конечно, многие люди (например, наши современники или далекие предки) заведомо не могли быть родителями Каспара Гаузера, так что если «а» – имя такого человека, то истинно $\neg P(a, КГ)$.

Не имея возможности приписать таким утверждениям, как $P(b, КГ)$, значение «истинно» или «ложно», будем оценивать их при помощи третьего истинностного значения «неопределенно». Предшествующие рассуждения позволяют заключить, что $\forall x(нP(x, КГ) \vee \neg P(x, КГ))$. Вместе с тем, несомненно $\forall y \exists x P(x,y)$. Снимая квантор общности в последнем предложении на имя «Каспар Гаузер», получаем: $\exists x P(x, КГ)$. Попытавшись применить правило прямого удаления квантора существования, приходим к $P(\varepsilon xP(x,К\Gamma), К\Gamma)$. Теперь в предложении $\forall x(нP(x, К\Gamma) \vee \neg P(x, К\Gamma))$ снимем квантор общности на ε-терм $\varepsilon xP(x,К\Gamma)$: $нP(\varepsilon xP(x,К\Gamma), К\Gamma) \vee \neg P(\varepsilon xP(x,К\Gamma), К\Gamma)$. Поскольку некоторый человек, являющийся родителем Каспара Гаузера, не может не быть его родителем, последний дизъюнктивный член должен быть оценен как ложный. Следовательно, истинно $нP(\varepsilon xP(x,К\Gamma), К\Gamma)$. Но предложения $P(\varepsilon xP(x,К\Gamma), К\Gamma)$ и $нP(\varepsilon xP(x,К\Gamma), К\Gamma)$ не могут быть вместе истинными!

Возникшая коллизия является результатом принятия правила прямого удаления квантора существования. Ситуация в действительности носит не частный характер, а имеет отношение к целому пласту реальных рассуждений в обыденной жизни и науке. Что касается науки, то речь идет о дисциплинах, которые (следуя терминологии В.Виндельбанда) можно назвать идиографическими в противоположность номотетическим. Идеалом науки является стремление к точности. Но как эту точность понимать? Не всякие представления о точности оправданы с теоретической и практической точек зрения. Например, представление о том, что любой феномен допускает строгое описание на языке чисел, в настоящее время уже не находит столько приверженцев, как это было раньше. В логике стремление к достижению бо́льшей строгости нашло выражение в требовании конструктивности рассуждений. Даже их формализация здесь не является решающим моментом.

Конструктивность в интересующем нас аспекте связана с особой трактовкой утверждений с квантором существования и дизъюнкцией[2]. Классического доказательства формул вида $\exists xA(x)$ и $(A \vee B)$ здесь недостаточно. Неконструктивность классической логики легче всего продемонстрировать на примере закона исключенного третьего. В классической логике принимается, что формула $A \vee \neg A$ истинна при любом суждении A, причем A либо истинно (тогда $\neg A$ ложно), либо ложно (тогда истинно $\neg A$). Однако классическая логика далеко не всегда позволяет получить ответ на вопрос, какое именно суждение истинно – само A или его отрицание. Несмотря на то, что имеются существенные разногласия в подходах к анализу понятия конструктивности, нашедшие выражение в создании различных систем конструктивных логик, общим остается требование считать дизъюнкцию $A \vee B$ доказанной лишь в том случае, если предъявлено доказательство по крайней мере одного из членов дизъюнкции. Еще один источник

[2] Как известно, в конечном случае квантор существования можно элиминировать при помощи дизъюнкции.

неконструктивности классической логики связан с квантором существования. Доказательство высказывания $\exists xA(x)$ с использованием классической логики может содержать неопределенность в отношении того объекта, существование которого утверждается. Речь идет о так называемых "чистых теоремах существования", из доказательства которых невозможно извлечь информацию о способах эффективного построения искомого объекта.

В конструктивных рассуждениях (например, в интуиционистской логике) наличие доказательства формулы вида $(A \vee B)$ означает, что мы располагаем доказательством по крайней мере одного из ее членов (свойство дизъюнктивности), а утверждение вида $\exists xA(x)$ считается доказанным лишь при условии, что имеется терм t, для которого доказано суждение A(t) (свойство экзистенциальности) [10]. Хотя классическая логика не удовлетворяет названным свойствам, любую основанную на ней теорию T всегда можно пополнить таким образом, чтобы расширенная теория T′ была дизъюнктивной и экзистенциальной. Правда, само такое расширение осуществляется неконструктивным образом и потому интуиционистски неприемлемо. В существенно неконструктивных рассуждениях в условиях неопределенности указанное расширение в общем случае осуществить невозможно в принципе. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда неконструктивная со стандартной точки зрения классическая логика оказывается слишком конструктивной!

Как было показано выше, доказательство (в рассмотренном примере со ссылкой на эмпирический закон) утверждений о существовании некоторых объектов не означает, что у нас имеется возможность предъявить эти объекты, даже если область рассуждений охватывает только конечное число индивидов. Последнее замечание также демонстрирует необычность ситуации, поскольку считается несомненным, что коль скоро задано конечное множество объектов K, то тем самым заданы и все подмножества множества K и его декартова произведения $K \times K$, представляющие соответственно всевозможные свойства и бинарные отношения на K. Ясно, в частности, что свойство «Родитель(x, КГ)» является подмножеством конечного множества людей, обстоятельства и время жизни которых не исключали возможности оказаться в роли одного из родителей Каспара Гаузера. Однако, как мы убедились, свойство «Родитель(x, КГ)» нельзя задать предъявлением двух его элементов. Поэтому стремление к строгости, выраженное идеалом конструктивности, оказывается нереализуемым. Представление о реальности как о вполне определенном образовании наталкивается на ограничения, поставленные самой природой вещей. Тем не менее, это не означает, что не следует стремиться к точности и строгости рассуждений в существенно неконструктивном случае. Просто идеал строгости не должен быть связан только с конструктивностью. Требуемая строгость, на наш взгляд, может быть достигнута за счет применения формальных методов анализа.

В условиях неопределенности свойство «Родитель(x, КГ)» не может быть представлено одним подмножеством универсума людей Л. Есть два *сходных* подмножества этого универсума P и P*, в одно из которых попадут аристократы герцог Карл и его жена, а в другое – простолюдины Блохманны. Все остальные претенденты также должны быть разведены по P и P*. Если бы остались реальные следы единственной пары родителей $\{a, b\}$, то необходимо было бы положить $P = P^* = \{a, b\}$. Если бы следы оставил один из родителей, но не другой (допустим, рассматриваемому свойству удовлетворяет b), то отсюда вытекало бы, что $P \neq P^*$, но $P \cap P^* = \{b\}$. В анализируемом примере, по предположению, нет ни того, ни другого. Остается утверждать, что $P \neq \varnothing$, $P^* \neq \varnothing$, но при этом $P \cap P^* = \varnothing$.

Высказанные соображения можно обобщить следующим образом. Если для двух сходных свойств A(x) и A*(x) верно, что $\exists x(A(x) \& A^*(x))$, то можно ввести константу *c*, для которой будет верно $(A(c) \& A^*(c))$. Назовем такую константу *определенной* в отношении свойств A(x) и A*(x). Если же $\neg\exists x(A(x) \& A^*(x))$, то будем говорить, что любая константа является *неопределенной* в отношении свойства A(x) и свойства A*(x)).

Теории с неопределенностью оказываются неконструктивными (или *антиконструктивными*) в следующем смысле. Распространим естественным образом понятие модели теории на теории с неопределенностью: н-*моделью* теории Тн называется структура, в которой все предложения Тн определенно истинны.

Предложение 11. Существует теория Тн такая, что а) $(P(c) \vee \neg P(c)) \in T$, б) $\exists x P(x) \in T$, в) Тн имеет н-модель, но при этом ни теория $Тн \cup \{P(\alpha)\}$, ни теория $Тн \cup \{\neg P(\alpha)\}$ не имеют н-моделей, какова бы ни была индивидная константа α.

Проанализированная выше история с Каспаром Гаузером подводит к построению примера требуемой Тн теории. Ведь какую бы индивидную константу α мы ни взяли, предложение $P(\alpha, КГ)$ не будет определенно истинным, но может быть либо определенно ложным, либо неопределенным. С формальной точки зрения, для получения искомого результата требуется еще исключить определенную ложность.

Пусть Lн={P, c, α}, где P – одноместный предикатный символ, а c и α – индивидные константы. Положим Мн = <{a,b}, F>, F(c) = a, F(P)={a}, F(P*)={b}. Ясно, что Мн – н-модель теории Тн = {(Pc $\vee$ $\neg$Pc), $\exists$xPx, $\forall$xнPx}. Но ни T$\cup${P(α)}, ни T$\cup${$\neg$P(α)} н-моделей не имеют, как бы мы ни определяли значение F(α) в произвольной структуре Мн для языка Lн.

Действительно, определенная истинность предложения $\forall$xнPx в модели Мн = <U, F> теории Тн влечет, что формула нP(α) определенно истинна и, значит, н$\neg$P(α) также определенно истинна. Отсюда как P(α), так и $\neg$P(α) являются неопределенными в любой н-модели теории Тн, что и требовалось доказать.

Итак, рассмотренная теория Тн не может быть расширена таким образом, чтобы полученные расширения удовлетворяли свойствам дизъюнктивности и экзистенциальности в трехзначной семантике неопределенности. Теперь правило прямого удаления квантора существования $\exists$xA(x) $\Rightarrow$ A(εxA(x)), принимаемое в натуральных ε-исчислениях, уже не воспроизводит отношения логического следования при естественном расширении понимания семантики выражений с ε-термом. В самом деле, формула вида $\exists$xA(x) теории Тн определенно истинна в построенной н-модели, однако независимо от того, какой индивид будет взят в качестве значения ε-выражения εxA(x), утверждение A(εxA(x)) уже не будет определенно истинным, что нарушает общепринятое требование «из истинных посылок – истинное заключение».

Построенная теория Тн, если посмотреть на нее с позиций классической двухзначной семантики, никакими интересными особенностями не обладает. И, разумеется, эта теория в данной семантике может быть расширена таким образом, чтобы появились свойства дизъюнктивности и экзистенциальности.

Но одно не противоречит другому. С метаязыковой точки зрения суть здесь в том, что в рассматриваемом случае нельзя ввести *определенную* константу α. Но ввести *неопределенную*, конечно, можно. Однако классическая логика не проводит различия между определенными и неопределенными ситуациями. Зато это позволяет делать логика неопределенности. Совмещение в одном (фактически, классическом) синтаксическом аппарате возможностей двух разноплановых семантик (классической и неклассической) позволяет удержать приятные метасвойства классической логики и, вместе с тем, промоделировать рассуждения в условиях неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анисов А.М.* Время и компьютер. Негеометрический образ времени. М., 1991.
2. *Анисов А.М.* Семантика неопределенности //Логические исследования. Вып.4. М., 1997.
3. *Анисов А.М.* Аксиоматическое исчисление неопределенности // Логические исследования. Вып.7. М., 2000.
4. *Анисов А.М.* Темпоральный универсум и его познание. М., 2000.
5. *Аристотель*. Соч.: в 4 т. М., 1976-1984. Т. 2. С. 99-102.
6. Великие тайны прошлого // Reader's Digest, 1996.
7. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979.
8. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Теория доказательств. М., 1982.
9. *Гранатовский Э.А.* Послесловие //*Бойс М.* Зороастрийцы. Верования и обычаи. М., 1988.
10. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. М., 1979.
11. *Карпенко А.С.* Фатализм и случайность будущего: Логический анализ. М., 1990.
12. *Лейстнер Л., Буйташ П.* Химия в криминалистике. М., 1990.
13. Логика и компьютер. Вып. 3. Доказательство и его поиск. М., 1996.
14. *Лукасевич Я.* О детерминизме //Логические исследования. Вып.2. М., 1993.
15. *Молчанов Ю.Б.* Проблема времени в современной науке. М., 1990.
16. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
17. *Смирнов В.А.* Поиск доказательств в натуральном интуиционистском исчислении предикатов с ε-символом и предикатом существования //Логические исследования. Вып. 3. М., 1995.

В.А.Бажанов

И.Е.ОРЛОВ – ЛОГИК, ФИЛОСОФ, УЧЕНЫЙ. ОСОБЕННОСТИ НАУЧНОГО ПОИСКА*

Abstract. *We present for the first time a detailed description of the life and work of I. E. Orlov (1886 – 1936) who is well-known as one of the pioneers of relevant logic, and whose interests touched a wide variety of fields of knowledge, from philosophy to chemistry and music theory. We show that the socio-political climate of the1920s and 1930s exerted a significant influence on the style and content of this scholar's work. We theorize that this climate determined, to a considerable degree, the evolution of Orlov's interests and also his fate.*

Мне на плечи кидается век-волкодав,
Но не волк я по крови своей.
О.Мандельштам

Введение

Судьба поколения российских ученых, родившихся в 1880 – 1890-х годах, оказалась весьма сложной. Образование они получали в императорских университетах, становление их как исследователей проходило в период заметного подъема русской науки и экономики, серебряного века русской поэзии – в период, когда зарубежные командировки являлись неотъемлемым элементом служебной карьеры и были достаточно регулярными. Ко времени февральской революции 1917 г. и октябрьского переворота это было поколение молодых, широко образованных, приобщившихся к опыту зарубежных коллег и успевших уже зарекомендовать себя ученых. Перед ними открывалось блестящее будущее. Особенно перед учеными-гуманитариями, которым были доступны богатства и западной, и русской культуры серебряного века. Однако едва ли не в один момент, обозначенный датой октябрьского переворота, впоследствии официально нареченного Великой Октябрьской социалистической революцией, все резко изменилось. Гражданская война, голод, разруха, укрепление власти большевиков, изначально не терпевших какого-либо инакомыслия, поставили перед этим поколением ученых-гуманитариев альтернативу – либо вступить на путь «подстройки» к догмам марксистской идеологии, используя последнюю в качестве призмы, сквозь которую просматривается мир, либо эмигрировать и стремиться продолжить

---

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 00-06-80149.

свою работу за пределами России. Как известно, советская власть для многих ведущих русских ученых, особенно гуманитариев, уготовила именно эту перспективу. «Философские пароходы» в 1922 году доставили на запад лучшие российские умы (см.: Хоружий 1994. С. 189-208). Кто-то уехал. Кто-то, скажем, Н.А.Васильев (см.: Бажанов 1988), в расцвете творческих сил (в 42 года) отправлен на пенсию и, пожалуй, лишь душевная болезнь позволила ему избежать сталинских репрессий. Судьба же как тех ученых, кто остался в Советской России, и тех, кто старался беззаветно служить новой власти, а также тех, кто стремился укрыться от ее всевидящего ока в нейтральных относительно господствующей идеологии областях, оказалась сложной или даже трагичной. В ГУЛАГе погибли П.А.Флоренский и Г.Г.Шпет, на Беломорканале ослеп А.Ф.Лосев, впоследствии почти четверть века писавший труды только «в стол». В 1921 году В.И.Несмелову запрещают преподавать, в 1931 на него заводят «дело» в связи с «обнаружением» Всесоюзного и административных центров контрреволюционной церковно-монархической организации «Истинно-православная церковь» и ее филиала в Татарии (см.: Бажанов 1995. С. 75). К кому-то судьба была более благосклонной, особенно если ученый выбирал стезю, связанную с заимствованием марксистской терминологии, марксистских принципов и подходов. Такой выбор вовсе не гарантировал счастливой жизни, часто он просто оттягивал роковую развязку, но тем не менее позволял какое-то время продолжать свою научную деятельность. «Век-волкодав» не делал исключений и для искренне присягнувших марксизму и беззаветно ему служивших.

В некоторых, достаточно редких, случаях сквозь интеллектуальную почву, иссушенную идеологическим суховеем 1920–1940-х годов, удалось пробиться уникальным по своей красоте растениям, как, скажем, в психологии (Л.С.Выготский, А.Р.Лурия). Впрочем, революционный энтузиазм, питавшийся марксистскими идеями, был способен увлечь за собой и ученых старой «закалки».

Нередко «исторические катаклизмы и идеологическая ломка меняют характер научных исследований, и изменения эти могут быть плодотворны» – справедливо замечает Б.В. Бирюков. «Однако когда социальный переворот переходит в стадию консервативной стагнации (в нашей стране – в стадию стабильного тоталитаризма), застывает и живая научная мысль. Во всяком случае это касается наук, не служащих непосредственно военно-экономическому упрочению господствующих властных структур» (Бирюков 1998. С. 12).

Иногда под плотным идеологическим покровом в 1920-е годы скрывались довольно важные и перспективные для будущего концепции и идеи. Именно с таких позиций можно оценить *единственную*, скромную по объему, но выдающуюся по своей роли в развитии логики статью «Исчисление совместности предложений» И.Е.Орлова (см.: Орлов 1928), опубликовавшего свои первые крупные научные работы еще накануне всеобщего обвала – в 1916 году (см.: Орлов 1916 а, б). В этой статье Орлов предложил первую аксиоматизацию релевантной логики – логики, относящейся к неклассическим логикам, интенсивно развивавшихся начиная примерно со второй половины XX в. (1960–1970-е годы)[1]. Статья Орлова 1928 года позволяет считать его не только автором первой системы релевантной логики, представленной в аксиоматическом виде (**R**) (см.: Попов, 1978; Došen 1992 а; Da Costa, Beziau, Bueno 1995), но даже, по мнению некоторых ученых, одним из пионеров паранепротиворечивого направления в логике (Alves 1992)[2].

И.Е.Орлов первый попытался связать интуиционистскую логику с модальной (Попов, 1986. С. 97) путем добавления к его оригинальному исчислению совместности предложений оператора необходимости, типичного для модальной системы S4.

Эта единственная строго логическая статья, мотивы написания которой были связаны – как будет показано ниже – сугубо с философскими интересами, принесла И.Е.Орлову мировую известность, хотя на нее обратили пристальное внимание только тогда, когда соответствующие идеи были позже высказаны независимо другими мыслителями (Мо-Шо-Квея, 1950 г. и А.Черча, 1951 г.). На фоне его творчества эта статья выглядит как своего рода внезапное *прозрение*, никогда более не повторившееся. Являлось ли оно случайным или закономерным итогом предшествующих размышлений?

---

[1] В 1930 г. систему, претендующую на релевантность, предложил Е. Нельсон (Сидоренко 2001). Р.Роутли именно И.Е.Орлова называл родоначальником релевантной логики (Routley 1991; см. также: Došen, 1992 б. P. 286; Došen, 1992 в. P. 179).

[2] По-видимому, впервые на логические идеи И.Е. Орлова обратил внимание в 1962 г. А.А.Зиновьев, а на связь этих идей с релевантной логикой у нас в 1978 указал В.М.Попов (Попов, 1978. С. 118; см. также: Попов, 1986). По мнению Е.А.Сидоренко, кто первый указал автору на данные факты (позже на работы Попова мне указал и К. Дошен), нельзя считать вывод из несовместимых (противоречивых) посылок несостоятельным, т.к. несовместимость нередко можно установить только путем самого вывода. Поэтому задача должна заключаться в формулировке условий вывода из любых, включая несовместимые, посылок (Сидоренко 2001).

Если попытаться взглянуть на творческое наследие И.Е.Орлова, то бросаются в глаза такие особенности его творчества, как поразительная ***широта интересов*** (работы посвящены философскому анализу математики и ее оснований, философским вопросам логики, релятивистской физики, теории вероятностей, индуктивному методу, эксперименту, музыкальной акустике, химии и химической технологии – потенциометрии, титрированию) и ***идеологизированность*** (выражающаяся в стремлении связать научные и социальные проблемы, подойти к научным проблемам исключительно с марксистских позиций, не признающих иных подходов). Весьма характерно, что мысль И.Е.Орлова заметно дрейфовала от философской к конкретно-научной проблематике, и в последние годы своей жизни он полностью отошел от философии и занимался только вопросами химической технологии.

Работа И.Е.Орлова 1928 года по логике достаточно известна среди специалистов в области неклассических логик. В работах по истории отечественной логики, касающихся взаимоотношения формальной и диалектической логики, имя И.Е. Орлова иногда упоминалось (см.: Cavaliere 1990. P. 13-15). Однако его внелогические интересы и работы, эволюция его интересов, а также мотивы, которые заставили ученого прекратить занятия философией и сосредоточиться на химии, неизвестны.

Содержатся ли в философских работах И.Е. Орлова серьезные предпосылки для создания логики нового типа? По каким причинам преуспевающий, казалось бы, философ, активный член общества "Воинствующих материалистов", работы которого публиковались в ведущих изданиях Советской России – в журналах «Под знаменем марксизма», «Красная новь», «Воинствующий материалист» и т.п., где имя Орлова соседствовало с именами ведущих советских философов и идеологов - В. Невского, А. Деборина, В. Ваганяна, Гр. Баммеля, А. Тимирязева, А. Варьяша и др., – по каким причинам этот философ предпочел расстаться с философией и заняться важной хозяйственной темой – химическими методами получения йода и брома?

Дать определенные, отчасти предварительные, ответы на поставленные вопросы, собрать воедино все опубликованные работы Орлова, в какой-то мере восполнить существенный пробел в истории отечественной логико-философской традиции – наша задача.

Страницы биографии

Иван Ефимович Орлов родился 1 (13) октября 1886 года в Галиче Костромской губернии. Окончил естественное отделение физико-математического факультета Московского университета. В 1920-х годах – сотрудник секции Естественных и точных наук отдела методологии Коммунистической академии. Работал также в химико-фармацевтическом институте (Поваров, Бирюков 2000/ С. 165; ср.: Алексеев П.В. 1995/ С. 435[1]).

В предисловии к посмертной книге И.Е. Орлова (Орлов 1939), посвященной методам анализа буровых вод и способам извлечения йода и брома, А.П.Снесарев (Снесарев 1939. С. 5) замечает, что автор не успел завершить работу над рукописью. Предисловие написано в августе 1938 года. Последняя публикация И.Е.Орлова относится к 1935 году. Отсюда можно заключить, что, вероятнее всего, ученый скончался в 1936-1937 годах (на завершение и подготовку рукописи к печати, чем, по-видимому, занимались коллеги И.Е.Орлова, требовалось какое-то время).

Первые публикации И.Е.Орлова относятся к 1916 году. Они носят философский характер и посвящены анализу индуктивного метода в целом и индуктивному доказательству в частности (Орлов 1916 а, б). Затем следует довольно продолжительный перерыв, обусловленный вполне понятными социально-политическими катаклизмами, и публикации возобновляются в 1923 году. По всей видимости, в этот период Орлов все-таки пишет, и пишет немало. В 1924 году выходят девять его статей значительного объема и 8 рецензий. Если публикации И.Е. Орлова 1916 года отвечают довольно высоким требованиям журнала «Вопросы философии и психологии» и являются в строгом смысле слова *научными,* то публикации советского времени местами приправлены идеологическими соображениями и фразеологией, правда, неперсонифицированного, так сказать, характера. Любопытно, что в почти 200-страничной книге Орлова «Логика естествознания», увидевшей свет в 1925 году и как бы сводящей воедино его изыскания в области философии естествознания, ни К.Маркс, ни В.И.Ленин не упоминаются вообще, а из классиков марксизма упоминается всего однажды лишь Ф.Энгельс (Орлов 1925 а. С. 193). Между тем все философские журналы того периода, в том числе, конечно, и те, где печатался Орлов, изобиловали статьями, воспевавшими

---

[1] Еще ранее (см.: Бажанов 2001. С. 6) я сомневался в том, действительно ли Орлов – инженер-гидравлик по образованию, как утверждает Алексеев. В своих трудах он предстает как ученый, стремящийся исследовать фундаментальные проблемы. Если все-таки он имел инженерное образование, то можно поражаться его способностью к самообразованию, ведь Орлов серьезно работал не только в области философии естествознания и логики, а еще и химии и химической технологии, и даже затрагивал психологию и теорию музыки. П.В.Алексеев приводит иную дату рождения Орлова – 1 сентября.

классиков марксизма и, прежде всего, В.И.Ленина. Уже первый номер журнала «Под знаменем марксизма» за 1924 год, выпуск которого был задержан из-за смерти вождя пролетариата, содержал представительную подборку статей о Ленине (см.: Невский 1924, Деборин 1924, Ваганян 1924).

Необходимо обратить внимание также на то, что первые публикации Орлова после перерыва, публикации 1923–1928 годов касаются едва ли не всего широкого спектра интересов ученого. Здесь есть работы и по философским проблемам оснований математики, и по философии логики, и по диалектической логике, и по проблеме вероятностей, и по психологии, и по химической технологии. Тем не менее, акцент приходится на философскую проблематику.

Начнем анализ творческого наследия ученого с его последней – психологической – работы, посвященной гуманитарным проблемам (1928 в) и напечатанной по замечанию редакции журнала «Под знаменем марксизма» лишь «в порядке обсуждения». В ней, лишенной каких-либо идеологических привнесений, он как бы показывает образец беспристрастного осмысления конкретной гуманитарной (в данном случае психологической) проблемы.

Психология

В этой статье И.Е.Орлов весьма строго и академично обсуждает достоинства и недостатки различных психологических школ.

Особое место, по его мнению, занимает школа И.П.Павлова, для которой в отличие от американских бихевиористов и школы В.М.Бехтерева характерно изучение не видимых и регистрируемых движений, а скрытых от непосредственного наблюдения деятельности мозговых полушарий. В этом смысле Павлов не столько эмпирик, сколько «конструктор».

«Школа Бехтерева, – замечает Орлов, – рассматривает слова как обычного типа условные раздражители. Но это ни в какой мере нельзя считать правильным...» Дело в законе поведения, который формулируется Орловым: организм реагирует не на раздражение, а на объект. С точки зрения этого закона «испытуемый реагирует вовсе не на слова, как таковые, а на того, кто произносит слова» (Орлов 1928 в. С. 186).

Образование восприятия предполагает синтез впечатлений, который совершается автоматически и не без выбора. Первоначально совпадающие раздражения замыкаются и тем самым порождают восприятие объективной связи как целого и нерасчлененного. Процессы отбора имеют вторичный характер и начинаются вместе с работой торможения, когда все раздражения, не имеющие реального основания в реальных объектах, отсеиваются. Работа синтеза отныне происходит по не заторможенным путям и в конечном итоге организм приходит в равновесие со средой таким образом, что воспринимает объективную связь в природе там и только там, где она действительно существует. Так возникает правильное отражение внешних объектов в мозгу.

Можно утверждать диалектичность этого процесса, констатирует Орлов. Элементарный анализ раздражений, происходящий в периферических частях органов чувств, «снимается» элементарным синтезом, так как все элементы раздражений вновь сливаются в одно целое (С. 194).

Логика

Мышление как предмет логики И.Е.Орлов делит на рассудочно-техническое и эмоциональное (Орлов 1924 с. С. 79), при этом он считает, что особенно насыщенной эмоциональным мышлением бывает классовая идеология, поскольку «одни вещи нельзя мыслить без ненависти и возмущения, а другие - без уважения и энтузиазма», а в сочинениях Маркса и Ленина, пишет Орлов в статье «Материализм и развитие нравственности», находятся «величайшие образцы эмоционального мышления» (Орлов 1924 с. С. 80).

Основное предназначение логики, по мнению Орлова, – давать нам в руки точный критерий, правильно ли мы судим, а законы мышления должны рассматриваться как простые формальные правила. Их выполнение по существу сводится к последовательному использованию законов тождества и противоречия (Орлов 1925 а. С. 65, 51), хотя никак нельзя согласиться с приписыванием формального характера мышлению, что, по мнению Орлова, является принципиальным препятствием для его механизации (Орлов 1926 г. С. 72). Орлов критикует принципы построения логической машины профессора А.Н.Щукарева (усовершенствованного варианта машины С.Джевонса) как раз за то, что мало не допускать противоречий истинных посылок и следствий (см.: Поваров, Петров 1978. С. 147–149). Главное, что в действиях машины надо предусмотреть возможность установления смысловой связи между ними (тем самым Орлов приближался к идее содержательного логического следования, релевантности. См.: Шуранов, Бирюков 1998. С. 36–37).

Одна из самых важных задач логики, замечал Орлов, заключается в том, чтобы дать удовлетворительную теорию доказательства. Доказать какое-либо суждение – значит устранить любую возможность сомнения в его истинности. Доказательство обязано отталкиваться от установленных фактов и «идти от них индуктивным путем к обобщениям», например, силлогизм должен строиться с конца (Орлов 1925 а. С. 13).

Всякое доказательство, был убежден Орлов, является доказательством «от противного». Даже прямые (не говоря уж о косвенных) доказательства основаны на законе противоречия.

Современный этап развития логики в виде математической логики не привнес каких-либо действительно новых принципов, отсутствующих в силлогистике «обычного» типа; поэтому нельзя считать оправданным пренебрежительное отношение авторов по математической логике к традиционной аристотелевой логике (Орлов 1925 в. С. 69).

Вообще, в основаниях математики лежат логические законы. Метод математики, утверждал Орлов, в конечном счете сводится к применению закона противоречия к так называемому отношению сосуществования (Орлов 1923 б. С. 218). Последнее отношение есть не что иное, как определенным образом истолковываемое отношение логического следования и его символическое выражение в виде импликации (Орлов 1925 в. С. 70). Между тем законы противоречия и исключенного третьего не могут применяться к рассмотрению содержательных суждений, а учение о понятии является самым слабым местом логики (Орлов 1925 а. С. 35).

Основное логическое противоречие, разрешение которого требует иной, нетрадиционной, логики, проявляется в отношении логического основания и следствия. Дело в том, рассуждает Орлов, что истинность посылок вовсе не является необходимым условием истинности вывода, но в то же время истинность следствия есть необходимое условие истинности его посылок. Логическое отношение между посылками и выводом в действительности как раз обратное тому, которое принято в традиционной логике, основанной на этой «неувязке», противоречии (Орлов 1924 з. С. 70). Если настаивать на том, что следствие есть необходимое условие своих посылок, то это ведет к построению неаристотелевой логики, которая будет носить диалектический характер. Она представляет собой, продолжает Орлов, не что иное, как ту логическую систему, которая фактически уже не одно десятилетие принята в естествознании, а именно естественнонаучную логику (С. 71). Эта логика отличается тем, что, во-первых, выводы всегда достовернее, чем, по крайней мере, одна из посылок, во-вторых, достоверность выводных суждений не зависит от достоверности безусловно общих посылок и, наконец, всякое безусловно общее суждение есть постулат, в котором допускается истинность всех его следствий (см.: С. 72–75). Хотя все выводы естественнонаучной логики совпадают с выводами диалектики, эта логика вовсе не есть диалектика. Предметом естественнонаучной логики являются методы открытия научных истин и методы их доказательства, тогда как диалектика требует также изложения «наиболее общих истин, относящихся к конкретному материалу» (С. 90). Орлов подчеркивает, что все сведения о внешнем мире получаются путем индукции, т.е. путем заключений от следствий к основаниям.

Между диалектикой и формальной логикой, убежден Орлов, нет исключающей противоположности, какая существует между диалектикой и метафизикой. Однако формальная логика не довольствуется вспомогательной ролью в научном исследовании, она претендует на абсолютное значение и отвергает любое не формально-логическое рассуждение, и потому формальная логика сама становится метафизикой. Критика формальной логики должна быть диалектической, т.е. должно быть показано, как эта логика сама себя упраздняет. Происходит это благодаря противоречию между основанием и следствием. Разрешение противоречия переводит формальную логику на высшую ступень, где она принимает вид логики естествознания (С. 89).

Логика естествознания

Логика естествознания должна ставить себе значительно более широкие задачи, нежели традиционная логика. По сути дела по характеру решаемых задач, полагает Орлов, логика естествознания сливается с теорией познания. Прежде всего, эта логика обязана поставить вопрос о природе и границах интуиции, она должна оценивать достоверность исходных посылок и приемов, при помощи которых наука приходит к своим открытиям. Но задача логики естествознания может считаться выполненной только тогда, когда она станет ars inveniendi, т.е. будет служить средством открытия новых методов эксперимента и построения гипотез (Орлов 1925 а. С. 65). Здесь ее выводы, как уже упоминалось, должны совпадать с выводами диалектики.

Логика совместности предложений, релевантная логика, подструктурные логики

«Логика совместности предложений», та единственная работа И.Е.Орлова, выполненная полностью в духе работ по математической логике (не содержащая никаких философских и уж тем более идеологических вкраплений) и опубликованная в 1928 г. в «Математическом сборнике» (Орлов 1928 а), где печатались ведущие отечественные математики, содержит первую аксиоматизацию идеи релевантности. В релевантной логике, инспирированной в какой-то степени стремлением сконструировать особую логику естествознания, совпадающую с теорией познания и диалектикой, Орлов пытался преодолеть парадокс материальной импликации и связать антецедент и консеквент смысловой зависимостью. Это означало бы переход от «логики объема» к «логике содержания».

«В основе классической математической логики лежит понятие материального вывода, которое может соединять в одной формуле два предложения, не имеющие никакой внутренней связи по смыслу: между тем та система, которую мы имеем в виду, может трактовать в символической форме смысловые связи между предложениями, – писал Орлов. – Она рассматривает в первую очередь не вопрос об истинности и ложности заданных предложений, но вопрос об их совместности или несовместности между собой… Требование совместности предложений является достаточным, а требование их совместной истинности – чрезмерным» (Орлов 1928 а. С. 263–264).

Орлов по существу оперирует интенсиональной конъюнкцией и интенсиональной дизъюнкцией, хотя в его статье непосредственно речь идет об импликации и отрицании.

Орлов стремится сохранить закон исключенного третьего, хотя оценивает свою работу как определенное развитие некоторых приемов и методов, введенных сторонниками интуиционизма. Он тщательно анализирует работы Л.Брауэра и пытается осмыслить истолкование импликации Дж.Пеано, А.Уайтхедом, Б.Расселом и В.Аккерманом. Вовсе не случайно, замечает К.Дошен, «аксиоматизация релевантной логики появилась в одно и то же время, когда была предложена аксиоматизация интуиционистской логики… Но это не единственное достижение Орлова. Он также предвосхищает модальное погружение систем с интуиционистским отрицанием в системы типа S4 с классическим отрицанием (под модальным погружением понимается погружение, которое помещает оператор необходимости перед подформулами немодальных формул)… Орлов вплотную подошел к построению систем S4, но добавил соответствующие постулаты к релевантной логике, а не логике классической» (Doљen 1992 a. P. 339-340).

Тем самым Орлов предвосхищает работы К.Геделя 1933 года и, главное, О.Беккера 1930 года, которому, собственно, и приписывают заслугу построения системы S4 (см.: там же. P. 349).

И.Е. Орлов строит свое исчисление на следующих аксиомах:
$a \rightarrow \neg\neg a$ (Аксиома 1); $\neg\neg a \rightarrow a$ (Аксиома 2);
$a \rightarrow a \bullet a$, где $a \bullet a = \neg(a \rightarrow \neg a)$ (Аксиома 3);

$(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$ (Аксиома 4);
$\{a \to (b \to c)\} \to \{b \to (a \to c)\}$ (Аксиома 5);
$(a \to c) \to \{(a \to b) \to (a \to c)\}$ (Аксиома 6).

Аксиома 7, которую вводит Орлов (Орлов, 1928 а. С. 266), он не считает «формальной»: «аксиомы, а также предложения, выведенные из аксиом, могут быть опущены в составе символических формул, если они служат посылками каких-либо выводов», на самом деле эта аксиома эквивалентна правилу modus ponens.

Обсуждая замысел интуиционизма, Орлов вводит оператор «доказуемости», обозначаемый как Φ(a), и расширяет список аксиом:
$\Phi(a) \to a$ (Аксиома 8); $\Phi(a) \to \Phi(\Phi(a))$ (Аксиома 9);
$\Phi(a \to b) \to \{\Phi(a) \to \Phi(b)\}$ (Аксиома 10).
Именно здесь им по существу формулируется система S4. Он заключает, что исчисление совместности предложений позволяет производить операции не только непосредственно над предложениями a, b, c..., но и над их функциями типа Φ(a). «Введение указанных функций в классическую математическую логику, – замечает Орлов, – невозможно, так как интерпретация понятия "следовать" как материального вывода лишает смысла все выражения, доказанные для введенных нами функций... а при построении схем трансфинитных заключений не осталось бы иного пути, кроме как отрицания "tertium non datur"» (там же. С. 286).

Весьма естественное истолкование идей Орлова и истории их возникновения достигается в подструктурных логиках, включающих в себя интуицинистскую, релевантную, линейную и т.д. логики. Все эти логики получаются путем ограничения *структурных правил* в системе натурального вывода Генцена. Дело в том, что структурное правило утончения (называемое некоторыми также правилом монотонности), которое отвергается при получении релевантной логики, как бы отстоит от остальных структурных правил, и именно этот путь кажется наиболее перспективным для раздумий (см.: Došen 1993. P. 9-10).

Философия математики

Математику Орлов определяет как науку о наиболее всеобщих и постоянных свойствах реальных объектов, когда эти свойства выражаются в максимально абстрактной форме (Орлов 1925 а. С. 86). Нетрудно заметить, что такое понимание природы математики является типично марксистским, при котором математика по своему теоретико-познавательному статусу приближается к физике (см.: Хейенорт 1991).

Вслед за Кантом Орлов считал, что следует признать синтетическую природу арифметических операций и геометрических рассуждений, и что теоремы выводятся из аксиом при помощи только правил логики (Орлов 1924 о, С. 88). Кроме того, и постулаты суть синтетические суждения, а, значит, таковыми следует признать и определения. Все математические операции сводятся к применению двух формальных правил, выраженных в законах тождества и противоречия (Орлов 1924 о, С. 93).

Математики впадают в глубочайшее заблуждение, утверждал Орлов, когда пытаются определить значение математических методов доказательств, апеллируя к внешнему миру. Это доступно лишь диалектическому мышлению. Любое обобщение в математике есть только «кажущееся» обобщение, в действительности же менее общее выводится из более общего (постулатов, аксиом, теорем и т.д.).

Особенно активно И.Е.Орлов критиковал теорию множеств Г.Кантора и отказывал в праве на научный статус абстракции актуальной бесконечности. Он пытался обосновать, что теория Кантора как «свободное творение разума» построена на паралогизмах, а противоречивость ее базовых постулатов ведет к самоупразднению теории. Допуская существование «целостно-бесконечных» (т.е. актуальных. – *В.Б.)* множеств, Кантор в то же время применяет рассуждения, которые не являются совместимыми с этим допущением (Орлов 1924 а. С. 136). Так, полагает Орлов, $2^{\aleph}$ является «исчислимым» (счетным. – *В.Б.*) множеством, если использовать метод математической индукции, но если применять полную индукцию, то получается противоположное заключение (там же. С. 142). И это вполне естественно, поскольку, констатировал Орлов, теория трансфинитных чисел целиком основана на применении полной индукции к целостно-бесконечным множествам, и без ее использования невозможно различать бесконечные множества различной мощности. Таким образом, под теорией трансфинитных чисел нет никакой почвы (см.: Орлов 1925 б).

Еще одна ошибка Кантора, по мнению Орлова, заключалась в том, что он игнорировал относительную природу чисел. Определенно-бесконечное число представляет собой собрание единиц и, следовательно, оно бесконечно по отношению к единице. Хотя понятие целостно-бесконечного числа и можно мыслить логически, но также мыслимо и понятие потенциально-бесконечного, и только реальная бесконечность Вселенной может примирить противоречие между указанными понятиями. Тем не менее, канторово понятие актуальной бесконечности следует признать в корне «фальшивым». «Никакой диалектики в теории Кантора нет. Его противоречия носят плоский, формальный характер, основанный на простом недоразумении», – писал Орлов (Орлов 1924 а. С. 147).

Популярность теории множеств Кантора объяснялась Орловым тягой математиков к абстракциям, имеющим внеопытный характер. Математики склонны к релятивизму и математическому фетишизму, поскольку они не имеют дела непосредственно с природой (Орлов 1924 б. С. 49), а когда наука отрешается от опыта и переходит к чистому умозрению, то она создает более или менее эффектные «мыльные пузыри мысли», и математика, как показывает учение об актуальной бесконечности, не является исключением в данном отношении (Орлов 1924 а. С. 147).

Предметом постоянного внимания И.Е. Орлова являлось понятие случайного. Он пишет рецензии на работы по теории вероятностей, в которых предлагает свое понимание случайного, а работы некоторых математиков оценивает уничижительно. Так, в одной из рецензий он констатирует, что «мышление Бореля страдает расплывчатостью и специфически мещанской ограниченностью... За его книгой мы не можем признать никаких достоинств... В мышлении Бореля нет и следов диалектики. Он не знает о том, что истина всегда конкретна; он ищет абстрактного, метафизического решения практических вопросов» (Орлов 1923 а. С. 260-261).

Окидывая взглядом историю возникновения понятия случайного, Орлов замечает, что оно впервые появилось как результат эволюции анимизма, а с возникновением капитализма буржуазная наука понятие случайного противопоставляет причинному объяснению событий. Смысл такого противопоставления очевиден: исторические законы имеют характер тенденций, которые неизбежно ведут к обострению классовой борьбы, к революциям и захвату власти угнетенными классами. В понятии же случайного буржуазия видит средство «затушевать диалектику истории, создать впечатление отсутствия исторических законов... однако та же самая буржуазная наука... охотно мирилась с полным детерминизмом в области естествознания» (Орлов 1924 и. С. 94).

Пуанкаре называет случайным неизвестное. Истинной задачей теории вероятностей, изучающей случайное, является, по Орлову, исследование тех условий, при которых вероятность стремится к 1, т.е. превращается в достоверность. Лаплас и Милль предлагают такую трактовку вероятности, которая применима только к единичным, а не массовым событиям.

Статистическая механика применяет вероятность a priori, статистика же – a posteriori; связь между явлениями, которую устанавливает статистическая механика, имеет не эмпирический, а рациональный характер, и именно поэтому, констатировал Орлов, она служит могучим орудием объяснения природы. Статистическое объяснение является наилучшим *механическим* (выделено мною. – *В.Б.*) объяснением потому, что оно исключает всякую попытку со стороны «благочестивых буржуа усмотреть... “разумное начало” и тому подобное в системе законов природы» (там же. С. 111).

Философия физики

Физика, считал Орлов, состоит из классической физики и релятивистской. Первая развивается преимущественно экспериментаторами, вторая – математиками. В классическую физику включаются те разделы этой науки, которые обеспечивают «гармоническое сочетание» эксперимента и теории, в том числе, квантовая механика и «даже теория Бора» (Орлов 1924 б. С. 49; 1925 а. С. 106). Таким образом, классическая физика в истолковании Орлова существенно шире физики Ньютона.

Физический релятивизм превращает математические приемы в абсолютные законы природы и утверждает, вслед за Эйнштейном, относительность всей реальности. Обобщения релятивистской теории, предлагаемые Г.Вейлем, свидетельствуют о «полном вырождении» этого направления, тем более что с экспериментальной проверкой тех следствий теории Эйнштейна, которые действительно противоречат классической физике, дело, полагал Орлов, обстоит безнадежно.

Орлов выдвигает следующие аргументы против релятивистской физики: 1. Видимое движение звезд должно быть признано только кажущимся, фиктивным; 2. Существование центробежных сил всецело объясняется вращением Земли; 3. Нельзя привлекать к объяснению явлений вращения соображения, относящиеся к движению отдаленных космических масс.

В современных физических теориях, писал Орлов, фигурирует особая жидкость – эфир, сплошь заполняющая пространство. Это придает материи, изучаемой современной физикой, «эластичность» – чисто «опытное» качество, которое является по существу диалектическим в том смысле, что «материя сжимаема и несжимаема, проницаема и непроницаема в одно и то же время» (Орлов 1924 р. С. 221). Большинство материалистов, утверждал Орлов в полемике с З.Цейтлиным о принципах научного объяснения, признает существование эфира, но материалисты не допускают метафизического доказательства этого факта, так как «это вопрос прежде всего опытный»; нельзя также отождествлять пространство и материю, поскольку последняя упруга и может испытывать деформации объема, что для пространства было бы «абсурдом» (Орлов 1925 д. С. 292). Понятие же субстанции вообще «недиалектично», поскольку оно отвлеченное и не имеет какого-либо механического обоснования.

И.Е.Орлов был убежденным механицистом. Он утверждал, что Энгельс требовал сводить законы природы к законам механического движения и, вообще, правомерен только механический взгляд на природу: границы механического понимания определяют границы нашего познания вещей. И электродинамика, и даже химия являются механическими теориями (в случае химии просто более сложной). При описании явлений «высшего порядка» (скажем, химических) может существовать бесчисленное количество механических версий.

Механическое понимание природы, рассуждал Орлов, взятое как универсальный метод, приводит к допущению существования бесконечно сложной мировой формулы, из которой можно было бы математическим путем вывести прошедшее, настоящее и будущее. В ней должны были бы содержаться все исторические законы вместе с их отрицаниями. Такое понимание ошибочно, поскольку механика не может притязать на статус универсального метода познания, но в области физических явлений метод механических моделей является ведущим. Собственно, «в борьбе с релятивизмом диалектический материализм должен подчеркивать механический момент» (Орлов 1926 а. С. 125).

Только на основе диалектики возможно правильное применение механических концепций к изучению действительности. Диалектика предохраняет их от «вырождения» до уровня простых вспомогательных представлений. Между тем «большинство естествоиспытателей до сих пор относятся с определенным недоверием к диалектическому методу вообще и в частности к его применению при изучении природы». В качестве примера ученого, не признающего диалектики, Орлов приводил А.Самойлова, известного физиолога, который также публиковался в журнале «Под знаменем марксизма» (Орлов 1928 б. С. 149).

В конце 1920-х годов дискуссия «механицистов» и «диалектиков» принимала уже достаточно обостренные формы. По-видимому, Орлов пытался не примыкать ни к одной из сторон этой полемики. Тем не менее, его научные установки были близки механицизму, а в философии он считал себя последовательным диалектиком. Поэтому в статье «О диалектической тактике в естествознании», относящейся к 1928 году, Орлов провозглашает, что «диалектическая критика "механицистов" не должна быть чрезмерной; отмечая односторонность механических концепций, необходимо сохранить метод изучения пространственно-временной структуры материи» (там же. С. 159-160).

Однако призыв Орлова, разумеется, не был услышан. Механисты, излагавшие свои взгляды (в том числе и Орлов) в вологодских сборниках «Диалектика в природе», вскоре были разгромлены; диалектики праздновали победу, но торжествовали недолго: буквально через год они были объявлены меньшевиствующими идеалистами и также попали под идеологический пресс. Элементы идеологизированной науки могут быть найдены и у Орлова еще в работах 1923 года (см.: Орлов 1923 б).

«В наше время, – писал Орлов, – мы имеем в физике те же самые два направления, о которых говорил и Владимир Ильич, причем оба направления обнаруживают те же самые шатания», а «причинная слепота той школы физиков, к которой принадлежат Эйнштейн, Эддингтон и др., зависит от априорных предубеждений философского идеализма» (Орлов 1925 г. С. 297).

Тем не менее, Орлов был прав, когда в 1924 году утверждал, что физика еще находится в процессе «брожения», и учение о материи нельзя считать чем-либо законченным (Орлов 1924 р. С. 231). Физика стояла прямо у порога создания квантовой теории и формулировки принципа неопределенности, но ее «брожение» имело иной характер, чем тот, который в основном подразумевал Орлов.

Феномен идеологизированной науки

И.Е.Орлов, как и многие другие философы и естествоиспытатели, был захвачен пафосом революционного подъема, который нашел отражение и в его научных трудах.

Диктатура пролетариата в России означала и диктатуру марксистско-ленинской идеологии, которая даже в тех случаях, когда она не отодвигала в сторону традиционные научные ценности и установки, часто являлась неотъемлемым элементом научного дискурса и густо пропитывала академические публикации (в первую очередь в области социально-экономических и гуманитарных наук). Это предполагало «препарирование» изучаемых объектов с помощью определенных идеологем, а уж потом – с помощью привычных научных понятий и подходов. Главными координатами, в которых осмысливались какие-либо идеи, были координаты, заданные борьбой материализма и идеализма.

Так, по поводу книги С.Богомолова «Основания геометрии» (М., 1923) И.Е.Орлов писал, что «перед нами развертывается картина “чистой” науки, основные постулаты которой “свободно” выбраны разумом», они абсолютно независимы от опыта, т.е. Богомолов излагает «излюбленные математиками идеи, те идеи, которые делают современную математику цитаделью идеалистического мышления», а сами математики по сути дела проповедуют идеалистическую метафизику (Орлов 1923 б. С. 214, 219). Именно в области математики «мы имеем еще один фронт, на котором должна происходить борьба с идеализмом и с ходячими “истинами” официальной науки буржуазных университетов» (Орлов 1924 о. С. 86).

Выше, когда речь шла об истолковании случайных явлений, отмечалось, что, по Орлову, буржуазная наука стремилась затушевать диалектику исторического процесса путем отрицания его закономерности и трактовки в духе индетерминизма.

Оценивая книгу А.Чижевского «Физические факторы исторического процесса» (Калуга, 1924), книгу, как известно, излагающую концепцию гелиобиологии, признанной лишь в середине XX века, Орлов пишет, что факт совпадения кривой, изображающей количество солнечных пятен, и кривой, изображающей массовые выступления народов, ни о чем не говорит, кроме как о редкой наивности автора книги. Концепция Чижевского представляет собой «попытку, притянув за волосы естествознание, найти трансцендентный фактор исторического процесса, не зависящий от производственных отношений и классовой борьбы», которая говорит о «никчемности» таких «ученых изысканий» (Орлов 1924 л. С. 315).

В своих оценках и полемике Орлов прибегает к обвинениям в идеализме (рациональный диалектический материализм, предлагаемый З.Цейтлиным, «приводит к идеализму»), агностицизме (физика Г.Ми, статья которого была напечатана в журнале «Под знаменем марксизма» в 1927 году), апеллирует к непререкаемому значению классиков марксизма (Э.Кольман, прикрываясь марксизмом, на самом деле проповедует такое понимание случайности, против которого еще боролся Энгельс), использует уничижительные выражения из политического лексикона (В.Оствальд образовал секту «энергетиков»; идеалистическая метафизика плетет сети вокруг теории Гельмгольца о гармонии; релятивисты-физики – это «причинные дальтоники» и т.п.). Он вполне разделяет мнение о том, что «нравственно все то, что способствует пролетариату в его героической борьбе», а нравственность им трактуется как форма приспособления человека к действительности (Орлов 1924 с. С. 55).

Справедливости ради надо заметить, что в отличие от других авторов журналов «Под знаменем марксизма», «Воинствующий материалист» и т.д., Орлов прибегает к идеологическим штампам и терминологии значительно реже. Он сам не провоцирует других на полемику, кидая обвинения в отходе от марксизма и т.п. Он только отвечает на выпады в его адрес (З.Цейтлина, Э.Кольмана). Призыв Орлова не переусердствовать в критике механицизма также свидетельствует о его неагрессивности или, во всяком случае, той степени агрессивности, которая была незначительной по сравнению с иными авторами, печатавшимися в названных журналах. Однако события разворачивались в сторону обострения полемик и перевода их в политическую плоскость, расширялся масштаб репрессий и, соответственно, репрессивный аппарат. Кажется весьма вероятным предположение, что именно предчувствуя возможность репрессий и по отношению к нему, ученому, печатавшемуся еще в дореволюционном журнале «Вопросы философии и психологии», в котором сотрудничали идеологические враги большевиков, Орлов стремился сменить сферу деятельности на идеологически нейтральную и, более того, крайне необходимую для развития промышленности – химическое исследование и производство йода и брома.

Видимо, в 1928–1929 годах он осваивает новую область, перестает печататься в журналах общественно-политического характера и старается углубиться в вопросы химической технологии, публикуя в специальных журналах свои работы и переводы трудов зарубежных химиков — Э.Мюллера, Ф.Гана, О.Томичека (см.: Орлов 1931, 1933, 1934, 1935, 1939). Вряд ли Орлов подвергался каким-то репрессиям: в противном случае в 1939, уже после его кончины, не была бы выпущена его книга, а в предисловии к ней профессор А.П.Снесарев не решился бы упомянуть имя ученого. Документальные свидетельства говорят о том, что скончался он 13 октября 1936 г. (Поваров, Бирюков 2000. С. 165).

Теория музыки

Наконец, нельзя не сказать кратко о таком увлечении И.Е.Орлова, как теория музыки. Он задавался вопросом: «Почему наш орган слуха распознает… простые числовые отношения (типа 8:11, 8:13, 10:13 и т.п. – *В.Б.*) и воспринимает их, как гармонии»? (Орлов 1926 б. С. 193). Орлов привлекал теорию Гельмгольца для того, чтобы показать, что прерывистое ощущение биений характеризует явление диссонанса, а консонанс получается при отсутствии биений. Орлов пытается экспериментировать в музыке и проводит опыты с катодным гармониумом Ржевкина, анализирует музыкальные произведения Прокофьева, Скрябина, Шенберга под углом зрения наличия и статуса в них «биений».

Заключение

И.Е.Орлов являлся ученым с весьма широким диапазоном интересов, простиравшимся от логики до химии и музыки. Его творческий путь пришелся на драматический период отечественной истории – период становления и расцвета феномена идеологизированной науки, на «век-волкодав». Социальная атмосфера революционного пафоса и установки идеологизированной науки отразились на творчестве Орлова, хотя, возможно, и в меньшей степени, чем его современников. Мысль ученого развивалась под символом поиска особой содержательной логики естествознания, которая должна была бы отвечать духу диалектики. В конечном счете это привело его к формулировке логики совместности предложений, оказавшейся важной вехой на пути развития современной релевантной логики. Логика совместности предложений сегодня может быть оценена как выдающееся достижение, родившееся как озарение в голове разностороннего ученого, попытка которого лишь однажды прикоснуться к собственно математической логике оказалась претендующей на уровень, близкий к гениальному.

Благодарность. Автор признателен Г.М.Полотовскому за полезные замечания, Г.Присту за присылку статьи (Došen 1992 a), что, собственно, и заставило предпринять настоящее исследование, К.Дошену за указание связи идей И.Е.Орлова с подструктурными логиками.

Библиография процитированных в тексте работ

Алексеев П.В. Орлов И.Е. // Философы России XIX–XX столетий. М., 1995. С. 435-436.

Ахундов М.Д., Баженов Л.Б. Философия и физика в СССР. М., 1989.

Бажанов В.А. Николай Александрович Васильев (1880–1940). М., 1988.

Бажанов В.А. Прерванный полет. История университетской философии и логики в России. М., 1995.

Бажанов В.А. Ученый и «век-волкодав». Судьба И.Е. Орлова в логике, философии, науке // Вопросы философии. 2001, № 11. С. 125–135.

Бирюков Б.В. О судьбах психологии и логики в России периода «войн и революций» // Вестник Международного Славянского университета. 1998, № 4. С.7-13.

Боголюбов А.Н., Роженко Н.М. Опыт «внедрения диалектики в математику» в конце 20-х–начале 30-х гг. // Вопросы философии. № 9, 1991. С. 32-43.

Ваганян В. Величайший из мастеров революции // ПЗМ. 1924. № 1. С. 29-34.
Деборин А. Ленин – воинствующий материалист // ПЗМ. 1924. № 1. С. 10-28; № 2. С. 5-23.
Невский В. Ленин // ПЗМ. 1924. № 1. С. 5-9.
Поваров Г.Н., Бирюков Б.В. Орлов Иван Ефимович // Новая философская энциклопедия. 2000. Т. 3. С. 165.
Поваров Г.Н., Петров А.Е. Русские логические машины // Кибернетика и логика. М.: Наука, 1978. С. 137–152.
Попов В.М. О разрешимости релевантной системы RAO // Модальные и интенсиональные логики. М.: ИФ АН СССР, 1978. С. 115–119.
Попов В.М. Система И.С.[3] Орлова и релевантная логика // Философские проблемы истории логики и методологии науки. Ч. 1. М.: ИФ АН СССР, 1986, С. 93–98.
Сидоренко Е.А. Письмо автору от 27 мая 2001 г.
Снесарев А.П. Предисловие к кн.: Орлов И.Е. Методы анализа рапы буровых вод и контроль производства йода и брома. М.-Л., 1939.
Философские исследования. 1993. № 3, 4. («Наука и тоталитарная власть»).
Хейенорт ван Ж. Энгельс и математика // Природа. 1991. № 8. С. 90-105.
Хоружий С.С. После перерыва. Пути русской философии. М., 1994.
Шуранов Б.М., Бирюков Б.В. У истоков логической релевантности: спор двух русских философов-естественников в 20-е годы XX столетия (И.Е.Орлов против А.Н.Щукарева) // Вестник Международного Славянского университета. 1998, № 4. С. 33-39.
Alves E. The First Axiomatization of Paraconsistent Logic // Bulletin of the Section of Logic. Vol. 21, 1992. P. 19-20.
Cavaliere F. La logica formale in Unione Sovietica. Firenze, 1990.
Da Costa N.C.A., Beziau J.-Y., Bueno O.S. Aspects of Paraconsistent Logic // Bull. of IGPL. Vol.3, N 4, 1995. P. 597-614.
Došen K. The First Axiomatization of Relevant Logic // Journal of Philosophical Logic. Vol. 21. 1992 a. P. 339-356.
Došen K. Modal Translations in Substructural Logics // Journal of Philosophical Logic. Vol. 21. 1992 б. P. 283–336.
Došen K. Modal Logic and Metalogic // Journal of Logic, Language, and Information. Vol. 1. 1992 в. P. 173–201.
Došen K. A Historical Introduction to Substructural Logics // Substructural Logics / Eds. Schroeder-Heister P., Došen K. Oxford, 1993. P. 1–36.
Mathias A.R.D. Logic and Terror // Physis. 1991. Vol.28. P. 557–578.
Routley R. Personal letters to the author February 22, 1991; August 6, 1991.

[3] В названии статьи допущена опечатка.

Библиография работ *И.Е.Орлова*

1914

Основные формулы принципа относительности с точки зрения классической механики // Журнал русского физико-химического общества. Часть физическая. Т. 46, вып. 4. С. 163–175.

1916

а. Реализм в естествознании и индуктивный метод // Вопросы философии и психологии. Кн. 131. С. 1-35.

б. Об индуктивном доказательстве // Вопросы философии и психологии. Кн. 135. С. 356-388.

1923

а. Рец. на кн.: Борель Э. Случай. М.: Гостехиздат, 1923 // ПЗМ. № 10. С. 260-264.

б. «Чистая геометрия» и реальная действительность // ПЗМ. № 11-12. С. 213-219.

в. Рец. на кн.: Оствальд В. Великий эликсир. М., 1923 // Там же. С. 312-314.

г. Диалектика эксперимента // Вестник Соц. Академии. Кн. 6.

1924

а. Существует ли актуальная бесконечность // ПЗМ. № 1. С. 136-147.

б. Классическая физика и релятивизм // ПЗМ. № 3. С. 46-76.

в. Рец. на кн.: Новые идеи в физике. Сб. 10. Л., 1924 // Там же. С. 291-292.

г. Рец. на кн.: Менделеев. Великий русский химик. Прага. 1923 // Там же. С. 298-299.

д. Рец. на кн.: W. Ostwald. Die Farbenlehre. Bd. I-V. Leipzig, 1920; Майзель С.О. Цвета и краски. Л., 1923 // Там же. С. 299-301.

е. Химическое сродство и валентность по новейшим исследованиям // ПЗМ. № 4-5. С. 108-114.

ж. Рец. на кн.: Бергсон Анри. Длительность и одновременность (по поводу теории Эйнштейна). М., 1923 // Там же. С. 293-294.

з. Логика формальная, естественнонаучная и диалектика // ПЗМ. № 6-7. С. 69-90.

и. О законах случайных явлений // ПЗМ. № 8-9. С. 93-114. (Частично воспроизведена в кн.: На переломе. Философские дискуссии 20-х годов. М., Политиздат, 1990. С. 449-454).

к. Рец. на кн.: Ферсман А.Е. Химические проблемы промышленности. Науч.-химич. изд-во. Л., 1924 // Там же. С. 312-314.

л. Рец. на кн.: Чижевский А.Л. Физические факторы исторического процесса. Калуга, 1924 // Там же. С. 314-315.

м. Научная деятельность Уильяма Томсона (Кальвина) // ПЗМ. 1924. № 10-11. С. 56-61.

н. Рец. на кн.: Астон Ф.В. Изотопы. «Современные проблемы естествознания». Кн. 14. М., 1923; Новые идеи в химии. Сб. 9. Изотопы. Л., 1924 // Там же. С. 311-312.

о. Математика и марксизм // ПЗМ. № 12. С. 86-99.

п. Рец. на кн.: Сб. статей по вопросам физико-математических наук и их преподавания. Центральный физико-педагогический институт. Ред. А.И. Багинский и А.А. Максимов. Т. 1. М., 1924 // Там же. С.317-318.

р. Что такое материя (эволюция понятия материи в физике) // Красная новь. № 4(21). С. 217-231.

с. Материализм и развитие нравственности // Воинствующий материалист. Кн. 1. С. 53-80.

1925

а. Логика естествознания. М.-Л., 1925. 195 С.

б. Логика бесконечности и теория Г. Кантора // ПЗМ. № 3. С. 61-74.

в. Логическое исчисление и традиционная логика // ПЗМ. № 4. С. 69-73.

г. Новые вариации на старую тему // Воинствующий материалист. Кн. 2. С. 294 - 307.

д. О принципах научного объяснения явлений // Воинствующий материалист. Кн. 3. С. 277-293.

1926

а. Механика и диалектика в естествознании // Диалектика в природе. Сб. по марксистской методологии естествознания. № 2. Вологда. С. 109-125.

б. Музыка и естествознание // ПЗМ. № 3. С. 193-206

в. Теория случайности и диалектика (по поводу статьи Э. Кольмана) // ПЗМ. № 9-10. С. 195-201. (Частично воспроизведена в кн.: На переломе. Философские дискуссии 20-х годов. М., Политиздат, 1990. С. 442-449).

г. О рационализации умственного труда // ПЗМ. № 12 С. 72-93.

д. Опыты с катодным гармониумом Ржевкина // Сб. статей по музыкальной акустике. Гос. Инст. Музык. Науки. Вып. 1. М., 1925.

е. Биения и их значение в новейшей музыке // Там же.

1928

а. Исчисление совместности предложений // Математический сборник. Т. 35. Вып. 3-4. С.263-286.

б. О диалектической тактике в естествознании // Сб. по марксистской методологии естествознания. № 3. Вологда. С. 148-163.

в. Об объективном изучении синтетической деятельности мозга// ПЗМ. №12. С. 179–195.

1931

а. J.E. Orlow. Über die Bestimmung von Chlorspuren in Bromiden // Zeitschr. f. analyt. Chem., Bd. 84, S. 185.

б. Бюллетень Научно-исследовательского химико-фармацевтического ин-та. № 6[1].

1933

а. Потенциометрия. Сб. перев. статей. Вып. 24. М.-Л. 112 с.
Предисловие.
Теоретические основы потенциометрического титрирования. С. 5-21.

---

[1] Данную работу найти не удалось.

б. О влиянии золей галоидного серебра на кривую потенциометрического титрования // Химико-фармацевтическая промышленность. № 4.

1934

а. Ускоренный способ определения брома в рапе // Химико-фармацевтическая промышленность. № 6.

б. I.E. Orlow. Eine Schwellmethod zur Bestimmung von Sulfat-Ionen mittels einer gekoppelten Austellung // Zeitschr. f. analyt. Chem. Bd. 8. S. 326.

1935

Контроль производства йода // Химико-фармацевтическая промышленность. № 1. (Совместно с Кагановой).

1939

Методы анализа рапы буровых вод и контроль производства йода и брома. М.-Л., 1939. 128 с.

Принятые сокращения: ПЗМ – Под знаменем марксизма.

М.Н.Бежанишвили

ЧАСТИЧНЫЕ ЭПИСТЕМИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ И «СЛУЧАЙНЫЕ» ТОЖДЕСТВА

Abstract. *The article deals with some difficulties which arise in normal modal predicate systems with identity (based on standard semantics of possible worlds). In such systems we can derive some theorems which, under the intended interpretation, are intuitively unacceptable. One of them says: every true statement of identity is necessarily true, or, in other words, there are no true contingent statements of identity. Such theorems seem more unacceptable when we interpret the necessity operator epistemically as 'someone knows that...' It is shown that difficulties of such kind do not arise in partial epistemic modal systems with identity (based on semantics of partial possible worlds), and no assertions of the above-mentioned kind are provable in them.*

Присоединение аксиом тождества к стандартным модальным предикатным системам, основанным на обычной семантике возможных миров, как известно, порождает определенные трудности. Они связаны с толкованием тождества в квантифицированных модальных контекстах и не соответствуют нашим обычным интуитивным представлениям о модальных понятиях. Целью настоящей статьи является обсуждение подобных трудностей и путей их устранения. Поэтому в статье большая часть доказательств будет опущена. Они полностью могут быть восстановлены на основе проведенного нами семантического анализа.

Для введения тождества в первопорядковых предикатных системах обычно расширяют словарь языка соответствующей системы символом «=», а к аксиомам системы, для любых индивидных переменных x и y, присоединяют специальные аксиомы тождества:

1. $x = x$,
2. $(x=y)\supset(A(x)\supset A(y))$,

где $A(z)$ – произвольная формула, а $A(x)$ и $A(y)$ получаются из нее заменой одних и тех же вхождений индивидной переменной z на x и y соответственно. Если рассматриваемая система, кроме того, содержит правила модус поненс (из A и $A\supset B$ следует B), модализации (из A следует $\Box A$) и закон перестановки антецедентов (из $A\supset(B\supset C)$ следует $B\supset(A\supset C)$), а в качестве $A(z)$ в (2) мы выбираем $\Box(x=z)$, то легко сможем вывести интуитивно неприемлемую формулу

3. $(x = y)\supset\Box(x = y)$.

Теперь, если $\Box$ интерпретируется как необходимость, то (3) утверждает, что всякое истинное тождество необходимо. Другими словами, не существует случайно истинных тождеств, т.е. из того случайного факта, скажем, что число планет совпадает с числом муз, согласно (3), следует необходимость их тождества, хотя число планет, естественно, свободно могло быть отличным от числа муз и даже от девяти. Очевидно, что совпадение этих чисел совершенно случайно.

В литературе утверждение (3) называют «парадоксом утренней звезды» (см. [6]). Планета Венера, самое яркое светило после солнца и луны, уже в древности была известна как вечерняя звезда и утренняя звезда. Парадокс, связанный с (3), заключается в следующем: из того факта, что утренняя звезда в нашем мире совпадает с вечерней звездой, следует, что утренняя звезда совпадает с вечерней звездой в каждом возможном мире. Однако это не соответствует нашему интуитивному пониманию необходимости.

Если исследуемая система содержит законы контрапозиции (из $A \supset B$ следует $\neg B \supset \neg A$), протаскивания отрицания через оператор необходимости ($\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$), навешивания оператора необходимости на стороны импликации (из $A \supset B$ следует $\Box A \supset \Box B$), специфическую аксиому системы Брауэра ($A \supset \Box\Diamond A$) и правило силлогизма (из $A \supset B$ и $B \supset C$ следует $A \supset C$), тогда из (3) легко можно будет вывести другую интуитивно неприемлемую формулу

4. $(x \neq y) \supset \Box(x \neq y)$,

утверждающую, что всякое истинное неравенство необходимо, т.е. не существует случайно истинных неравенств, что, как и (3), не согласуется с нашими интуитивными представлениями о необходимости.

Как видим, формула (3) будет доказуемой в предикатной версии минимальной модальной системы K, расширенной присоединением аксиом тождества (1) и (2), а также во всех охватывающих ее нормальных модальных системах. (4) же будет доказуемой только в предикатных версиях систем Брауэра и S5, расширенных добавлением аксиом тождества (1) и (2). Но в обычных реляционных семантиках для модальных систем, содержащихся в таких версиях системы Брауэра и S5, верным оказывается также формула (4) и поэтому к аксиомам каждой такой системы следует присоединить и формулу (4) (см. [5]).

Крипке объяснял трудность, связанную с (3), следующим образом: формула (3) не покажется парадоксальной, если мы правильно истолкуем смысл тождества. Рассматриваемый объект, в нашем примере число 9, обладающий случайным качеством быть равным числу планет, есть тот же объект, обладающий другим случайным качеством, – быть равным числу муз, но истинность указанного тождества на самом деле необходима, поскольку оно выражает совпадение этого объекта с самим собой (см. [8], а также [5]). В этом же духе можно объяснить приемлемость утверждения (4). Но при эпистемическом толковании знака □ это объяснение сразу теряет убедительность и утверждения (3) и (4) становится еще более парадоксальными. В самом деле, в таком случае (3) означает, что всякое истинное тождество заведомо известно некоторому лицу. Но знание неким лицом некоторого тождества вряд ли кто-либо сведет к тривиальному совпадению объекта с собой. Например, если переменная x в (3) интерпретируется как человек, называющий себя царевичем Дмитрием, переменная y – как Григорий Отрепьев, а □ – как знание или вера воеводы Мнишека, то неизбежно придем к парадоксальному заключению. Действительно, из того факта, что человек, называющий себя царевичем Дмитрием, есть Григорий Отрепьев, ни в коем случае не следует будто воевода Мнишек, выдавая свою дочь замуж за него, знал (или хотя бы считал), что его будущий зять – самозванец. Вряд ли удовлетворился бы он осознанием той очевидной логической истины, что этот человек, кто бы он ни был, совпадает с самим собой. Как справедливо подчеркивал Фреге, знание тождества предметов – это знание равенства смыслов их имен (ср. [2]). Итак, если модальный оператор □ мы интерпретируем эпистемически, т.е. читаем □ как «некое лицо знает, что ...», тогда утверждения (3) и (4) будут выражать особые виды логического всеведения, поскольку они утверждают, что всякое истинное тождество (неравенство) известно некоторому лицу.

Ограничить (2) немодализированной формулой $A(x)$ в духе Куайна (ср. [9]) или требованием, чтобы вхождения переменной x, заменяемые на y, не находились в $A(x)$ в области действия модального оператора (ср.[5]), не является полноценным выходом из затруднения. В предложенной ниже семантике частичных возможных миров легко опровергается (3), так как когда формула $x = y$ истинна в мире w для данных значений x и y, она может быть неопределенной в некотором достижимом (для лица пропозициональной установки знания или веры) частичном мире w. Правда при этом возникают дополнительные осложнения, к рассмотрению которых мы вернемся позже.

Некоторые логики предложили системы первопорядковой предикатной модальной логики (так называемые системы случайного тождества). Но в них возникают такие трудности, для разрешения которых либо надо менять первопорядковую логику предикатов, либо – модальную пропозициональную логику (ср., например, [6], [4], [5]). Они неестественны и с эпистемической точки зрения.

Здесь мы семантически опишем самую слабую эпистемическую систему с тождеством $EpT^{=}$, которая получается присоединением к алфавиту первопорядковой эпистемической системы EpT (см. [1]) нового символа «=», а к аксиомам EpT замыкания всеобщности утверждений (1) и (2).

Эпистемическая предикатная система EpT содержит логические связки: $\neg$, $\wedge$ и $\vee$, модальный оператор знания $\Box$, кванторы: $\forall$ и $\exists$. Остальные связки (как экстенсиональные, так и интенсиональные) вводятся надлежащими определениями. Формулы и атомарные формулы определяются обычно. А для построения формул $EpT^{=}$ дополнительно используются тождества вида x=y, где x и y – любые индивидные переменные.

$EpT^{=}$-фрейм есть упорядоченная четвёрка $Fr=\langle H,W,R,D\rangle$, где H – множество частичных возможных миров, W – множество тотальных возможных миров, такое, что $\varnothing\neq W\subseteq H$, $R\subseteq H\times H$, причём R рефлексивно в H, D – функция областей, определенная на H, такая, что для всякого $v\in H$ $D(v)\neq\varnothing$ и

(d) если $(w,v)\in R$, то $D(w)\subseteq D(v)$, $w,v\in H$.

Пусть Pr – множество n-арных предикатных букв нашего языка. $EpT^{=}$-моделью является пара $M=\langle Fr, V\rangle$, где Fr – $EpT^{=}$-фрейм, а V – двухместная частичная функция, определенная на $Pr\times H$, такая, что если n=0 (т.е. P^n является пропозициональной переменной) и $v\in W$, то $V(P^n,v)=T$ или $\perp$; а если при этом $v\in H\backslash W$, то $V(P^n,v)=T$ или $\perp$ или ни T, ни $\perp$. В первых двух случаях будем говорить, что V определена для P^n,v и писать $!V(P^n,v)$, а в третьем случае будем говорить, что V не определена для P^n,v и писать $non!V(P^n,v)$. Если n>0, то $V(P^n,v)$ есть пара (T_v,F_v), такая, что $T_v,F_v\subseteq[D(v)]^n$, где $[D(v)]^n$ является n-кратным декартовым произведением D(v) на себя, и если $v\in W$, то $T_v\cap F_v=\varnothing$ и $T_v\cup F_v= [D(v)]^n$, а если $v\in H\backslash W$, то $T_v\cap F_v=\varnothing$.

Пусть, далее, $U = \cup_{v\in H} D(v)$. Если задана $EpT^{=}$-модель, то для всякого $v\in H$ мы сможем определить значение любой формулы A при данном сопоставлении элементов U всем свободным индивидным переменным A в случае, когда A определеделена.

Если A – атомарная формула, она является пропозициональной переменной P^0 или имеет вид $P^n(x_1,\ldots,x_n)$, где n>0, (поскольку '=' – бинарный предикат, атомарной формулой будет и тож-дество вида x=y). При n=0, $V(P^n, v)$ уже задано моделью. Пусть n>0, $v\in W$ и индивидным переменным $x_1,\ldots,x_n$ соответственно сопоставлены элементы $a_1,\ldots, a_n$ из U, тогда $V(P^n(x_1, \ldots,x_n), v) = T$ тогда и только тогда, когда $(a_1,\ldots,a_n)\in T_v$. В противном случае $V(P^n(x_1, \ldots,x_n),v) =$

$\perp$. Если же n>0, $v \in H \setminus W$ и индивидным переменным $x_1, \ldots, x_n$ соответственно сопоставлены элементы $a_1, \ldots, a_n$ из U, тогда $V(P^n(x_1, \ldots, x_n), v) = T$ тогда и только тогда, когда $(a_1, \ldots, a_n) \in T_v$; $V(P^n(x_1, \ldots, x_n), v) = \perp$ тогда и только тогда, когда $(a_1, \ldots, a_n) \in F_v$; а в противном случае non!$V(P^n(x_1, \ldots, x_n), v)$.

Условия оценки формул $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $\forall y A(y)$ и $\exists y A(y)$ для любого v из W при данном сопоставлении элементов U всем свободным переменным этих формул совпадают с условиями их истинности в классической логике. А если $v \in H \setminus W$, то условия оценки $\neg A$, $A \wedge B$ и $A \vee B$ при данном сопоставлении элементов U всем свободным переменным этих формул совпадают с трехзначными таблицами Лукасевича (с той несущественной разницей, что третьему неопределенному значению Лукасевича в них соответствует отсутствие значения). Далее, пусть $x_1, \ldots, x_n$ – все свободные индивидные переменные, входящие в $\forall y A(x_1, \ldots, x_n, y)$, и пусть этим переменным соответственно сопоставлены элементы $a_1, \ldots, a_n$ из U. В таком случае $V(\forall y A(x_1, \ldots, x_n, y), v) = T$ тогда и только тогда, когда $V(A(x_1, \ldots, x_n, y), v) = T$, если при сопоставлении $a_1, \ldots, a_n$ переменным $x_1, \ldots, x_n$ переменной y сопоставляется любой элемент b из D(v); $V(\forall y A(x_1, \ldots, x_n, y), v) = \perp$ тогда и только тогда, когда существует элемент b из D(v), такой, что $V(A(x_1, \ldots, x_n, y), v) = \perp$ при том же сопоставлении $a_1, \ldots, a_n$ переменным $x_1, \ldots, x_n$, когда b сопоставляется переменной y; в противном случае non!$V(\forall y A(x_1, \ldots, x_n, y), v)$. Оценка формулы $\exists y A(x_1, \ldots, x_n, y)$ определяется двойственным образом.

Наконец, при данном сопоставлении элементов U всем свободным индивидным переменным формулы A $V(\Box A, v) = T$ тогда и только тогда, когда $V(A, u) = T$ (и, следовательно, $V(A, u)$ определена) для всякого u из H, такого, что $(v, u) \in R$; в противном случае $V(\Box A, v) = \perp$ (а именно тогда и только тогда, когда при том же сопоставлении элементов U всем свободным переменным A $V(A, u) = \perp$ или non!$V(A, u)$ для некоторого u из H, такого, что $(v, u) \in R$).

Формула A истинна в модели M при заданном сопоставлении элементов U всем свободным переменным A, если A истинна в M для всякого тотального мира w из W; A истинна в $EpT^=$-модели M, если A истинна в M при всяком сопоставлении элементов U всем свободным переменным A.

Аналогично можно определить $Ep4^=$- и $Ep5^=$-модели, предполагая, что в $Ep4^=$-модели отношение R является транзитивным, а в $Ep5^=$-модели – отношением эквивалентности.

Методом модифицированных диаграмм Крипке в [1] доказана семантическая полнота эпистемических систем EpT и Ep4. Для доказательства полноты $EpT^=$ и $Ep4^=$ к соответствующим правилам построения EpT- и Ep4-таблиц надо присоединить следующее правило тождества: если таблица t содержит тождество вида x=y, то во всякой формуле A таблицы t следует заменить на y каждое не находящееся в области действия эпистемического оператора $\Box$ вхождение индивидной переменной x. А определение явно замкнутой таблицы надо трансформировать следующим образом: будем говорить, что таблица t явно замкнута, если вместе с формулой A она содержит ¬A или A с верхней черточкой, либо она содержит ¬(x=x) или x=x с верхней черточкой. Подобным же способом можно установить и полноту $Ep5^=$.

Для иллюстрации вышеописанной семантики построим $EpT^=$-модель, опровергающую утверждение (3). Пусть H={w, v}; W={w}; R={(w,w), (w,v), (v,v)}; D(w)={a,b}; D(v)= {a,b,c}; $U=D(w)\cup D(v)=\{a,b,c\}$; $V(=,w) = (T_w,F_w)$, причём $T_w=\{(a,a), (b,b)\}$ и $F_w = \{(a,b), (b,a)\}$. Как видим, $T_w\cap F_w = \varnothing$ и $T_w\cup F_w = [D(w)]^2$. А $V(=,v) = (T_v,F_v)$, где $T_v=\{(a,a), (c,c)\}$, $F_v=\{(a,c), (c,a)\}$ и $T_v\cap F_v= \varnothing$.

Пусть переменным x и y сопоставляется один и тот же элемент b из U. Тогда V(x=y,w) = T, поскольку $(b,b)\in T_w$ $(=\{(a,a), (b,b)\})$. Однако non!V(x=y,v), так как $(b,b)\notin T_v$ $(=\{(a,a), (c,c)\})$ и $(b,b)\notin F_v$ $(=\{(a,c), (c,a)\})$. Поэтому $V(\Box(x=y),w) = \perp$ и, следовательно, $V((x=y)\supset\Box(x=y),w) = \perp$. Это означает, что утверждение (3) не общезначимо в классе фреймов $EpT^=$.

В нашем примере отношение R является также транзитивным, поэтому утверждение (3) не будет общезначимым и в классе фреймов $Ep4^=$. А если вместо R мы рассмотрим R^2, то получим контрмодель для (3) в $Ep5^=$. Нетрудно убедиться, что наша модель также опровергает утверждение (4) и, таким образом, устраняет логическое всеведение в форме утверждений (3) и (4)[1].

Однако в принятом нами толковании кванторов оценка кванторной формулы зависит только от области значений связанной переменной в каждом отдельном возможном мире. Это является слабым пунктом выбранного нами толкования кванторов. Дело в том, что в формулах, содержащих свободные переменные, мы им придаем интерпретацию всеобщности. Поэтому при утверждении такой формулы в качестве теоремы всегда подразумевается ее универсальное замыкание. Рассмотрим формулу

---

[1] Следует заметить, что семантика частичных возможных миров не является единственным способом для опровержения утверждений (3) и (4). Существуют и другие альтернативы. Например, (3) и (4) можно опровергнуть и с помощью семантики невозможных возможных миров (ср., например, [3]). Но с эпистемической точки зрения мы отдаем предпочтение семантике частичных возможных миров.

$\forall x \Box P(x) \supset \Box P(y)$,

содержащую свободную индивидную переменную y. Ее мы можем опровергнуть с помощью следующей модели.

$H=\{w,v\}$, $W=\{w\}$, свойства R зависят от того, какую модель мы строим – $EpT^{=}$, $Ep4^{=}$ или $Ep5^{=}$. Но в каждой из них R будет содержать (w,w), (w,v) и (v,v). Далее, $D(w)=\{a\}$, $D(v)=\{a,b\}$,

$U=D(w)\cup D(v) = \{a,b\}$. $V(P,w)=(T_w,F_w)$, где $T_w=\{a\}$, а $F_w=\varnothing$, поэто-му $T_w\cap F_w=\varnothing$ и $T_w\cup F_w=[D(w)]^1$. $V(P,v)=(T_v,F_v)$, где $T_v=\{a\}$, $F_v=\{b\}$и поэтому $T_v\cap F_v=\varnothing$. Оценим формулу (5) для случая, когда ее свободной переменной y сопоставляется элемент b из U. Так как D(w) содержит единственный элемент a, согласно условию оценки для $\forall$, формула $\forall x\Box P(x)$ будет истинной в мире w, если $\Box P(x)$ будет истинной в w, когда переменной x сопоставляется элемент a из D(w). Но так как $T_w=T_v=\{a\}$, для такого сопоставления $V(P(x), w) = T$ и $V(P(x), v) = T$, в силу чего $V(\Box P(x), w) = T$. Следовательно, $V(\forall x\Box P(x), w) = T$. С другой стороны, $V(P(y), v) = \bot$, поскольку $b\in F_v$. Поэтому $V(\Box P(y), w) = \bot$ и, следовательно, $V(\forall x\Box P(x)\supset \Box P(y), w) = \bot$.

Указанная трудность возникает и в нормальных модальных предикатных системах первого порядка (например в T, S4 и S5). Для устранения подобных трудностей из первопорядковых нормальных модальных систем Крипке, следуя Куайну, предложил так сформулировать первопорядковую модальную логику, чтобы в качестве теорем можно было утверждать только формулы с замыканием всеобщности. В самом деле, пропозициональную форму вида A(x), со свободным вхождением x, мы всегда сможем заменить утверждением $\forall xA(x)$. Формулы со свободными индивидными переменными (т.е. пропозициональные формы) следует рассматривать только ради удобства. Поэтому вместо (5), которое, согласно Куайну, не является утверждением, в качестве теоремы следует принять утверждение

5. $\forall y(\forall x\Box P(x)\supset\Box P(y))$,

являющееся общезначимым в классах фреймов вышеуказанных систем. В самом деле, согласно условию оценки для $\forall$, (6) будет неопровержимой, так как все значения переменной y в каждом отдельном мире w будут принадлежать D(w)[2].

---

[2] Это не означает, что интерпретация всеобщности теорем, содержащих свободные индивидные переменные, является единственно возможным способом устранения трудности, связанной с формулами вида (5), из нормальных модальных систем. В частности, $\Box$A можно понимать как означающее не то, что A истинно во всех возможных мирах, а как означающее, что A не ложна ни в одном возможном мире, но может быть неопределенной в некоторых из них. Такой подход Крипке называет позицией Фреге—Строусона [7]. В [5], например, он

Еще одна трудность в первопорядковых нормальных модальных системах связана с формулой Баркан. Здесь мы ее представим в виде

(7) $\forall x\Box P(x)\supset\Box\forall xP(x)$.

Согласно утверждению (7) из того факта, что все летающие живые существа актуального мира необходимо являются килегрудными птицами, следует необходимость того, что все летающие живые существа являются килегрудными птицами. Но с интуитивной точки зрения антецедент утверждения (7) вовсе не исключает возможности существования в некотором альтернативном мире летающих живых существ, не являющихся килегрудными птицами. Это, однако, опровергает консеквент утверждения (7).

Согласно нашему интуитивному пониманию, необходимым следует считать то, что является истинным не только в актуальном мире, но и во всех возможных по отношению к нему мирах.

Возможный мир интуитивно можно понимать как множество таких объектов, которые имеют разные свойства и находятся между собой в различных отношениях. Поэтому на вопрос, какие миры являются возможными по отношению к актуальному миру, можно дать разные ответы.

Согласно первому самому простому ответу на наш вопрос, можно предположить, что все возможные миры содержат только те объекты, которые имеются в актуальном мире, но эти объекты в разных возможных мирах могут иметь различные свойства и находиться между собой в различных отношениях.

Во-вторых, можно предположить, что объекты возможного мира могут отличаться от объектов актуального мира не только их свойствами и отношениями, но в них могут также появляться новые предметы. При таком толковании функция областей должна удовлетворять условию (d).

Наконец, третий, по мнению Хьюза и Крессвела (ср. [5]), самый либеральный ответ на наш вопрос предполагает, что возможными по отношению к актуальному миру могут быть не только указанные выше миры, но и те, в которых некоторые объекты актуального мира могут отсутствовать, хотя могут появляться и новые. В таком случае, мы должны отвергнуть условие (d).

Если мы соглашаемся с первым ответом, тогда формула Баркан во всех первопорядковых нормальных модальных системах будет общезначимой в соответствующих классах фреймов. При

использован для формулировки нормальных модальных систем без формулы Баркан.

втором ответе на поставленный выше вопрос она будет опровержимой, а ее конверсия, которая имеет вид

6. $\Box\forall xP(x)\supset\forall x\Box P(x)$

– не опровержима. Если же мы примем третий ответ, то, как показал Крипке (см. [7]), даже в S5 будут опровержимы как формула Баркан, так и ее конверсия.

Рассмотрим теперь эпистемические интерпретации формулы Баркан и ее конверсии. Пусть $\Box$ означает «нам известно, что …». Тогда утверждение (7) гласит: если для всех летающих в актуальном мире живых существ нам известно, что они являются килегрудными птицами, тогда нам известно и то, что все летающие живые существа являются килегрудными птицами. Но это противоречит нашему интуитивному пониманию знания. Хотя конверсия (7), т.е. утверждение (8), полностью соответствует нашей интуиции.

В EpT и, следовательно, в $EpT^{=}$ опровергается утверждение (7), но доказывается его конверсия (8). То же самое верно и для Ep4 и $Ep4^{=}$. А что касается Ep5 и $Ep5^{=}$, если мы потребуем выполнение условия (d), то ввиду симметричности отношения достижимости R в Ep5-фрейме, области индивидов во всех возможных мирах будут одинаковыми, и как (7), так (8) окажутся верными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бежанишвили М.* Об эпистемической модальной логике предикатов // Семантический анализ неклассической логики. Тбилиси: Мецниереба, 1991. С.80-103.
2. *Frege G.* Über Sinn und Bedeutung // Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik. 1892. Bd. 100. S. 25-50.
3. *Hintikka J.* Impossible possible worlds vindicated // Game-Theoretical Semantics (ed. Saarinen E.). Dordrecht: D.Reidel Publishing Company, 1978. P.367-379.
4. *Hintikka J.* Modality and quantification // Theoria. 1961. Vol. 27. P.110-128.
5. *Hughes G., Cresswell M.* A New Introduction to Modal Logic. London and New York: Routledge, 1996.
6. *Kanger S.* The morning star paradox // Theoria. 1957. Vol. 23. P. 1-11.
7. *Kripke S.* Semantical considerations on modal logic // Acta Philosophica Fennica, Fasc. 1963. Vol. XVI. P. 3-94.
8. *Kripke S.* Naming and Necessity. Cambridge: Harvard University Press, 1972.
9. *Quine W.V.* Reference and modality // From a Logical Point of View. Cambridge: Harvard University Press, 1953.

В.Л.Васюков

СИТУАЦИИ И СМЫСЛ: НЕ-НЕ-ФРЕГЕВСКАЯ (МЕТАФОРИЧЕСКАЯ) ЛОГИКА. II.

Abstract. *The paper is continuation of the early published work (cf. Logical Investigations, vol. 6, 1999). Semantics of the system of non-non-fregean (metaphorical) logics is proposed and some metamathematical results are obtained (soundness and completeness theorems are among them). It turns out that the systems of such a kind allow to give a first order treatment of Routley-Griffin's notion of relative identity. Then a pure metaphorical (non-suszkean) system of logics is proposed and metaphorical situational ontology is developed being the extension of the Wolniewicz's situational ontology. Final remarks concern the issues of the translation of systems proposed into Leśniewski's ontology.*

1. Не-не-фрегевская логика: система R-NNFL

Поскольку в наиболее общем виде не-фрегевская логика может быть описана как расширение исчисления предикатов с тождеством, то представляется вполне естественным в рамках не-не-фрегевского подхода описать не-не-фрегевскую логику как расширение системы ограниченной не-фрегевской логики **R-NFL** [3, с.14].

Вкратце систему **R-NFL** можно описать следующим образом.

Логическими константами **R-NFL** будут $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\equiv$, $\forall$, $\exists$. Обозначим как **HB** множество аксиом и правил, с помощью которых Гильберт и Бернайс построили исчисление предикатов первого порядка. Под аксиомой будем понимать подстановочный частный случай любой из схем аксиом в **HB** или любой из следующих схем:

1. $x = x$
2. $x = y \rightarrow y = x$
3. $(x = y \wedge y = z) \rightarrow (x = z)$
4. $(x_1 = y_1,\ldots,x_{s(i)} = y_{s(i)}) \rightarrow (R_i(y_1,\ldots,y_{s(i)}) \rightarrow R_i(x_1,\ldots,x_{s(i)}))$, $i = 1,\ldots,m$

A1. $A \equiv A$

A2. $(A \equiv B) \rightarrow (\varphi(B) \equiv \varphi(A))$ (где $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ – любые формулы, такие, что $\varphi(A)$ получается из $\varphi(B)$ замещением некоторых вхождений A в $\varphi(A)$, на B)

A3. $x = y \rightarrow (A(x) \equiv A(y))$ (где $A(x)$, $A(y)$ – любые формулы, такие, что x и y свободны в них и $A(y)$ получается из $A(x)$ замещением некоторых вхождений x в $A(x)$ на y).

A4′. $(A \equiv B) \to (A \leftrightarrow B)$

Система **R-NNFL** (ограниченной не-не-фрегевской логики – restricted non-non-fregean logic) получается при расширении языка за счет связки $\cong$ (подобие по смыслу), удалении A4′ и добавлении следующих трех схем аксиом из [2]:

A4. $(\varphi(A/p)) \cong \varphi(B/p)) \to (B \cong A)$ (где φ не является противоречивой формулой или пропозициональной переменной, переменная p должна явно фигурировать в φ и $\varphi(B/p)$ есть формула, получающаяся из формулы φ подстановкой в φ формулы B вместо некоторых вхождений переменной p)

A5. $(A \equiv A') \to (A' \cong A)$

A6. $(A' \cong A) \to (A \leftrightarrow A')$

Заметим сразу, что A4 влечет

$(A \cong B) \to (B \cong A)$

Вновь, как и в случае системы SCIS, мы получаем нетранзитивность связки $\cong$ в общем случае и транзитивность связки $\equiv$. Следовательно, у нас нет гарантии, что заменяя часть предложения на имеющую тот же самый смысл, мы сохраняем ситуацию, описываемую исходным предложением: Это будет иметь место, только если эти части будут вдобавок кореферентны. Например, в предложении из [3, с. 5]:

Джон знает, что Роби – гроссмейстер, но он не знает, что прозвище Роби просто «Роби» –

ситуация изменяется или остается без изменений в зависимости от того, что знает Джон: если существует компьютерная программа РОБИ, которая играет в шахматы, то тогда то, что РОБИ будет кореференциально с (человеком) Роби, определяет прозрачность или непрозрачность нашего предложения. Если Джон знает о шахматной компьютерной программе, то ситуация остается той же самой несмотря на то, что подставляется вместо «Роби». В противном случае, замена «Роби» на «РОБИ» затрагивает всю ситуацию, поскольку и создает новое смысловое измерение и в то же время сохраняет старый смысл.

Более сложным (и более противоречивым) представляется предложение рассматривать формулу

$$(A \cong B) \cong (B \cong C) \to (A \cong C)$$

(следствие вышеприведенной теоремы и A4) в качестве утверждения о «транзитивности» $\cong$.

Следующая теорема показывает разницу между подобием и тождеством в **R-NNFL** (в **R-NFL** [3, с.10] доказуема теорема $\equiv$-тривиальности).

Теорема $\cong$-нетривиальности. Все предложения подобия в **R-NNFL** являются нетривиальными, т.е. для всех ппф A,B

(NT) $\nvdash A \cong B$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

Доказательство. $A = B$ влечет $\vdash A \cong B$ по A1 и A5. Чтобы получить обратный результат, выберем любую модель

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_n)$$

для **R-NFL** из [2] и проверим, удовлетворяет ли следующая интерпретация правилам вывода **R-NNFL**. Обычные условия, которые определяют понятие выводимости, принимаем без изменений. Теперь, чтобы распространить это понятие на все формулы, добавим следующее условие:

($\cong$) $A \cong B$ выполняется при приписывании v переменным языка L (т.е. функции v, отображающей переменные L в $\boldsymbol{U}$) если и только если существуют переменные $x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$, ни одна из которых не связана в B, такие, что:

(a) $A = B\ (x_1/x_1', \ldots , x_n/x_n')$,

(b) $v(x_1) = v(x_1'), \ldots , v(x_n) = v(x_n')$.

Но в отличие от случая ($\equiv$) если $A \neq B$ и, следовательно, существует приписывание, которое не удовлетворяет $A \cong B$, то это не означает, что $\nvdash A \cong B$, поскольку достаточно, чтобы имелось хотя бы одно такое приписывание. Это и опровергает тривиальность. ■ (Здесь и далее ■ означает конец доказательства.)

Тем не менее, нетривиальность означает, что мы можем рассматривать любую пару предложений A,B как имеющие разный смысл даже когда $A = B$ (т.е. мы можем выбирать попарно разные смыслы каждого из двух предложений). Наоборот, в силу A5 тривиальность имеет место лишь в одну сторону, а именно, если $A = B$, то мы получаем $A \cong B$, но из того, что A и B имеют некоторый общий смысл, не следует, что $A = B$.

2. От ситуационной к смысло-ситуационной семантике

Чтобы получить семантику для **R-NNFL**, рассмотрим вначале ситуационную семантику для **R-NFL**, построенную в [3]. Пусть $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_n)$ будет моделью **R-NFL**, а именно $\boldsymbol{M}$ есть реляционная структура типа $(r(1), \ldots, r(s))$. Понятие ситуации в модельной структуре $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_n)$ описывается следующим образом:

(s1) Положим $r(0) = 2$ и обозначим через $\boldsymbol{R}_0$ отношение тождества на U. Пусть $i = 0,1,\ldots,s$ и пусть $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)} \in \mathbf{U}$. Тогда $(\boldsymbol{R}_i, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{r(i)})$ и (**не**-$\boldsymbol{R}_i, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{r(i)}$) являются элементарными ситуациями в $\boldsymbol{M}$.

(s2) Если для каждого $t \in T$ Σ_t есть непустое множество элементарных ситуаций в $\boldsymbol{M}$, то $\{\Sigma_t: t \in T\}$ является ситуацией в $\boldsymbol{M}$.

(s3) Если S_1 и S_2 – ситуации в $\boldsymbol{M}$, то $(=,S_1,S_2)$ и $(\neq,S_1,S_2)$ являются элементарными ситуациями в $\boldsymbol{M}$.

(s4) Ничто другое не является ни ситуацией, ни элементарной ситуацией.

(Элементарная) ситуация $(\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{r(i)})$ представляет собой такую ситуацию, что $\boldsymbol{R}_i(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{r(i)})$. Аналогично ситуации (**не**-$\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{r(i)})$, $(=,S_1,S_2)$ и $(\neq,S_1,S_2)$ суть такие ситуации, что не-$\boldsymbol{R}_i(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{r(i)})$, $S_1 = S_2$ и $S_1 \neq S_2$ соответственно. Элементарная ситуация $(\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{r(i)})$ ((**не**-$\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{r(i)})$, $(=,S_1,S_2)$, $(\neq,S_1,S_2)$) имеет место или является фактом, тогда и только тогда, когда $R_i(a_1,...,a_{r(i)})$ (*не*-$R_i(a_1,...,a_{r(i)})$, $S_1 = S_2$, $S_1 \neq S_2$ соответственно)[1].

Элементарные ситуации и ситуации имеют различный теоретико-множественный тип (поэтому ни одна элементарная ситуация не является ситуацией в строгом смысле этого слова). Поскольку же каждая элементарная ситуация σ однозначно соответствует ситуации $\{\{\sigma\}\}$, то элементарная ситуация σ отождествляется с $\{\{\sigma\}\}$. Каждое множество элементарных ситуаций Σ однозначно определяет ситуацию $\{\Sigma\}$. Будем говорить, что $\{\Sigma\}$ имеет место, или является фактом, если фактами являются все $\sigma\in\Sigma$. По условиям (s2) и (s4) для некоторого семейства $\{\Sigma_t: t\in T\}$ непустых множеств элементарных ситуаций $S = \{\Sigma_t: t\in T\}$, где S – некоторая произвольная ситуация. Будем говорить, что ситуация S имеет место, или является фактом, если и только если существует $t\in T$, такое, что $\{\Sigma_t\}$ есть факт (т.е. S можно рассматривать как некоторый вид «онтологической» дизъюнкции конъюнкций элементарных ситуаций).

Обозначим класс всех ситуаций из $\boldsymbol{M}$ посредством $\boldsymbol{S_M}$. Для каждого кардинального числа α $\boldsymbol{S_M}$ включает подкласс мощности α, отсюда $\boldsymbol{S_M}$ является действительным классом, а не множеством, если различать классы и множества.

Существенным моментом является то, что мы расширим наш язык за счет добавления имен $a,a_1,a_2...$ для элементов универсума U из $\boldsymbol{M}$. Сами элементы, соответствующие $a,a_1,a_2...$, будем обозначать через $\mathbf{a},\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2...$.

Функция D из множества всех предложений в класс всех ситуаций называется **R-NFL**-допустимой интерпретацией тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(i) $D(R_i(a_1,...,a_{(i)})$ есть факт, е. т. е. $\boldsymbol{R}_i(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{r(i)})$, где $i = 0,1,...,n$; $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{r(i)}\in \boldsymbol{U}$;

---

[1] Следует иметь в виду, что настоящее рассуждение ведется в метаязыке, а не в языке, что и объясняет запись (т.е. следует обращать внимание на различие между $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{(i)}$ и $a_1,...,a_{(i)}$, $\boldsymbol{R}_1,...,\boldsymbol{R}_s$ и $R_1,...,R_s$ и т.д.).

(ii) $D(A \wedge B)$ есть факт, е. т. е. $D(A)$ и $D(B)$ – факты;

(iii) $D(A \vee B)$ есть факт, е. т. е. хотя бы одна из ситуаций $D(A)$ и $D(B)$ есть факт;

(iv) $D(A \rightarrow B)$ есть факт, е. т. е. неверно, что $D(A)$ – факт, а $D(B)$ не факт;

(v) $D(A \leftrightarrow B)$ есть факт, е. т. е. либо $D(A)$ и $D(B)$ – факты, либо $D(A)$ и $D(B)$ не факты;

(vi) $D(\neg A)$ есть факт, е. т. е. $D(A)$ не факт;

(vii) $D(\forall xA)$ есть факт, е. т. е. для всех $\mathbf{a} \in \boldsymbol{U}$ фактами являются $D(A(a/x))$;

(viii) $D(\exists xA)$ есть факт, е. т. е. для некоторого $\mathbf{a} \in \boldsymbol{U}$, $D(A(a/x))$ есть факт;

(ix) $D(A \equiv B)$ есть факт, е. т. е. $D(A) = D(B)$;

(x) $D(A(a/x)) = D(B(a/x))$, если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Пусть теперь $(\Theta_i)_{i \in I}$ будет некоторым семейством отношений эквивалентности на $\boldsymbol{S_M}$, удовлетворяющих двум следующим условиям:

(a) $(\Theta_i)_{i \in I}$ совместимо с =, т.е. для любых $S_1, S_2 \in \boldsymbol{S_M}$ из $S_1 = S_2$ следует, что всегда найдется некоторое Θ_i (по крайней мере, одно) из $(\Theta_i)_{i \in I}$, такое, что $\Theta_i(S_1, S_2)$;

(b) $(\Theta_i)_{i \in I}$ совместимо с фактуальностью, т.е. отношение Θ_i определено либо на фактах, либо на не-фактах, нет никаких «смешанных» случаев;

(c) $(\Theta_i)_{i \in I}$ не тотально, т.е. всегда $\Theta_i \subset \boldsymbol{S_M} \times \boldsymbol{S_M}$ (и никогда не $\Theta_i = \boldsymbol{S_M} \times \boldsymbol{S_M}$).

R-NNFL-допустимая интерпретация получается при добавлении к списку условий для **R-NFL**-допустимой интерпретации еще одного дополнительного условия:

(xi) $D(A \cong B)$ есть факт, е. т. е. существует, по крайней мере, хотя бы одно $\Theta_i \in (\Theta_i)_{i \in I}$, для которого $\Theta_i(D(A), D(B))$.

Понятие истины определяется как относительно модели $\boldsymbol{M}$, так и относительно допустимой интерпретации в $\boldsymbol{M}$. Предложение A истинно в $\boldsymbol{M}$ при D тогда и только тогда, когда $D(A)$ есть факт. Заметим, что каждое приписывание $\mathbf{v}$ в $\boldsymbol{U}$ соответствует единственным образом функции v, отображающей переменные во множество имен элементов $\boldsymbol{U}$ и определенной как

$\mathbf{v}(x) = \mathbf{a}$ тогда и только тогда, когда $v(x) = a$

Для данной ппф A и приписывания $\mathbf{v}$ обозначим через $A[v]$ предложение, которое получается замещением каждой переменной x, содержащейся в A, на $v(x)$. Теперь будем говорить, что ппф A выполняется при приписывании $\mathbf{v}$ и интерпретации D тогда и только тогда, когда $D(A[v])$ есть факт. Наконец, будем говорить, что A истинна при интерпретации D тогда и только тогда, когда она выполняется для всех приписываний **v** при D.

Теорема непротиворечивости R-NNFL. Пусть $X \vdash A_0$ для множества ппф X и ппф A_0, а $\boldsymbol{U}$ есть универсум модели $\boldsymbol{M}$. Тогда для каждой допустимой интерпретации D в $\boldsymbol{M}$ A_0 истинна при D всякий раз, когда истинны все $A \in X$.

Доказательство. Стандартное. Достаточно просто проверить, что множество всех ппф A, истинных при D, замкнуто относительно всех правил вывода **R-NNFL**. ■

Чтобы доказать полноту **R-NNFL**, мы модифицируем доказательство из [3] путем «расширения» его на случай $\cong$-связки. Для данного множества ппф X и произвольной формулы A_0 определяем

($\vDash$) $X \vDash A_0$ тогда и только тогда, когда для каждой модели и каждой допустимой интерпретации D в $\boldsymbol{M}$ A_0 истинна при D всякий раз, когда истинны все $A \in X$.

Теорема полноты R-NNFL. Пусть X и A_0 будут как описано выше. Тогда $X \vdash A_0$ тогда и только тогда, когда $X \vDash A_0$.

Доказательство. Доказательство импликации слева направо сводится к теореме непротиворечивости. Чтобы получить доказательство в обратную сторону, допустим, что $X \nvdash A_0$. Добавим к нашему языку множество T индивидных констант таким образом, чтобы в расширенном языке было множество ппф X^*, для которого выполняются следующие условия:

(1) $X \subseteq X^*$;
(2) для каждой ппф A либо $A \in X^*$, либо $\neg A \in X^*$,
(3) если $A(a/x) \in X^*$ для всех $a \in T$, то $\forall x A \in X^*$,
(4) если $\exists x A \in X^*$, то существует такая $a \in T$, что $A(a/x) \in X^*$,
(5) $X^* \nvdash A_0$.

Поскольку **R-NNFL** фактически представляет собой аксиоматическое расширение **R-NFL**, доказательство существования расширенного за счет T языка и X^* с требуемыми свойствами проводится так же, как если бы речь шла о **R-NFL**.

Когда X^* уже дано, следующий шаг заключается в определении модели $\mathfrak{J}$. Универсум $\mathfrak{J}$ представляет собой фактор-множество $T/_{\div}$, где эквивалентность $\div$ определяется следующим образом:

$a \div b$ тогда и только тогда, когда $a = b \in X^*$.

Теперь для каждого $i = 0,1,\dots,n$ определяем отношение $\boldsymbol{R}_i^{\mathfrak{J}}$ как

$\boldsymbol{R}_i^{\mathfrak{J}}(|a_1|_{\div},\dots,|a_{r(i)}|_{\div})$ тогда и только тогда, когда $R_i(a_1,\dots,a_{r(i)}) \in X^*$.

Третий шаг заключается в демонстрации того, что имеется допустимая интерпретация D, которая делает правомочными все

$A \in X$, но не A_0. Теперь мы рекурсивно определяем некоторый специальный класс ситуаций в $\mathfrak{J}$. Выберем любую $a \in T$ и положим

$0^+ = (R_0, a, a)$.

Далее, для любого ординального числа $\xi > 0$ определим

$\xi^+ = (=, \cup\{\chi^+ : \chi < \xi\}, \cup\{\chi^+ : \chi < \xi\})$,

$\xi^- = (\neq, \cup\{\chi^+ : \chi < \xi\}, \cup\{\chi^+ : \chi < \xi\})$.

Легко видеть, что

(a) все ситуации вида ξ^+ – факты,

(b) ни одна ситуация вида ξ^- не есть факт.

(c) $\xi_1^+ = \xi_2^+$ тогда и только тогда, когда $\xi_1^- = \xi_2^-$ тогда и только тогда, когда $\xi_1 = \xi_2$.

Для любой пары ппф A_1, A_2 определим:

$A_1 \sim A_2$ тогда и только тогда, когда $A_1 \equiv A_2 \in X^*$.

Поскольку X^* дедуктивно замкнуто (как следует из условий (1)–(5), наложенных на это множество), то $\sim$ является отношением эквивалентности. Заметим также, что $A \in X^*$ тогда и только тогда, когда $|A|_\sim \subseteq X^*$.

Припишем каждому классу $|A|_\sim$ ординал ξ_A таким образом, что $\xi_A = \xi_B$ только если $|A|_\sim = |B|_\sim$, т.е. различные классы требуют различных ординалов.

Теперь для любого произвольного предложения A положим:

$$D_n(A) = \begin{cases} \xi_A^+, \text{ если } A \in X^*, \\ \\ \xi_A^-, \text{ если } A \notin X^*. \end{cases}$$

Легко проверить, что D_n представляет собой допустимую интерпретацию **R-NFL**, при которой A_0 ложна, хотя все $A \in X$ истинны. Чтобы расширить эту интерпретацию на **R-NNFL**, положим, что $(\Theta_i)_{i \in I}$ есть семейство отношений эквивалентности на множестве Ξ всех наших ординалов ξ, удовлетворяющее следующим условиям:

(d) $(\Theta_i)_{i \in I}$ совместимо с $=$, т.е. для любых $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$ из $\xi_1 = \xi_2$ следует, что всегда имеется некоторое (по крайней мере одно) Θ_i из $(\Theta_i)_{i \in I}$, такое, что $\Theta_i(\xi_1, \xi_2)$;

(e) отношения из $(\Theta_i)_{i \in I}$ определены либо на позитивных ситуациях ξ^+, либо на негативных ситуациях ξ^-, нет никаких «смешанных» случаев.

Если для любой пары ппф A_1, A_2 мы определим

$A_1 \approx A_2$ тогда и только тогда, когда $A_1 \cong A_2 \in X^*$,

то $\approx$ будет рефлективным, симметричным и нетранзитивным отношением в силу свойств $\cong$. Ясно, что последнее свойство может быть источником будущих осложнений. Чтобы обойти эту нетранзитивность, рассмотрим некоторое семейство $(\approx_i)_{i \in I}$ отношений эквивалентности и определим

для некоторого $\approx_i$ из $(\approx_i)_{i\in I}$ $A_1 \approx_i A_2$ т.т.т., когда $A_1 \cong A_2 \in X^*$, где $\approx_i$ есть отношение эквивалентности. Фактически подобное определение, с одной стороны, позволяет рассматривать нетранзитивность $\cong$ как случай, когда $A_1 \approx_1 A_2$ и $A_2 \approx_2 A_3$, а с другой стороны, $\sim$ также подпадает под это определение. Заметим, что

$$A\in X^* \text{ тогда и только тогда, когда } |A|_{\approx_i} \subseteq X^*.$$

Припишем каждому классу $|A|_{\approx_i}$ ординал ξ_A таким образом, что для некоторого Θ_i из $(\Theta_i)_{i\in I}$ мы имеем $\Theta_i(\xi_A,\xi_B)$ только, если $|A|_{\approx_i} = |B|_{\approx_i}$. Далее, вновь для любого произвольного предложения A положим

$$D_n(A) = \begin{cases} \xi_A^{+}, \text{ если } A\in X^*, \\ \xi_A^{-}, \text{ если } A\notin X^*. \end{cases}$$

Легко убедиться, что D_n представляет собой допустимую интерпретацию **R-NNFL**, при которой A_0 ложна, хотя все $A\in X$ истинны. Таким образом, $X \nvDash A_0$, что и завершает доказательство. ■

3. Стандартная интерпретация

Теорема $\equiv$-тривиальности [3, с.10] влечет за собой в качестве следствия нарушение принципа «кореференциальности эквивалентных», который гласит:

(CE) Если $A\vdash B$ и $B\vdash A$, то $A \equiv B$.

Если мы заменим этот принцип на принцип «смыслового подобия эквивалентных»

(SE) Если $A\vdash B$ и $B\vdash A$, то $A \cong B$,

то возникает вопрос, нарушается ли в **R-NNFL** этот принцип. Во-первых, теорема $\cong$-нетривиальности не означает, что (SE) имеет место: поскольку по A5 (SE) является следствием (CE) для A,B, таких, что $A = B$, то (SE) должно нарушаться.

Р.Вуйцицкий в [3] считает (CE)-принцип ошибочным, однако принимает следующий ограниченный принцип кореференциальности эквивалентных:

(RCE) Если $A\vdash B$ и $B\vdash A$, и $F(A) = F(B)$, то A и B обозначают одни и те же ситуации,

где $F(A)$ обозначает множество нелогических констант, которые встречаются в A (область A). **R-NNFL** нарушает как (CE), так и (RCE), будучи расширением **R-NFL** (не говоря уже о нарушении (SE), о котором речь шла выше). Однако естественным образом возникает вопрос о $\cong$-аналоге (RCE). Каково должно быть условие, которое мы должны ввести вместо $F(A) = F(B)$?

Скорее всего искомый $\cong$-аналог (RCE) будет выглядеть следующим образом:

(RSE) Если $A \vdash B$ и $B \vdash A$, и $F(A) \cap F(B) \neq \varnothing$, то A и B обозначают ситуации, подобные в некотором смысле.

Чтобы показать, как работает (RSE), введем помимо понятия необходимого (абсолютного) равенства

$(f)\ (P \sim Q) \leftrightarrow \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$

и понятия (случайного) равенства-совпадения

$(g)\ (P = Q) \leftrightarrow \forall x(P(x) \equiv Q(x))$

из R-NFL еще и понятие подобия:

$(h)\ (P \approx Q) \leftrightarrow \exists x(P(x) \cong Q(x))$.

$\exists$-форма (h) вызвана тем, что отношение подобия определяется принципом подобия

$a \approx b \leftrightarrow \exists\varphi(\varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b))$,

в отличие от равенства, определяемого принципом Лейбница

$a = b \leftrightarrow \forall\varphi(\varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)$.

Принятие (RCE)-принципа позволяет, например, заменить (g) на

$(g')\ (P = Q) \equiv \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$,

так как $P = Q$ логически эквивалентно $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ и поскольку $F(P = Q) = \{P,Q\} = F(\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)))$, то приходим к заключению, что $(P = Q) \equiv \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$. В случае (h) мы имеем $F(P \approx Q) \cap F(\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x))) \neq \varnothing$ и, соответственно, заключаем, что $(P \approx Q) \cong \exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$.

Теперь, используя (RSE)-принцип, мы можем ввести «стандартную» интерпретацию в рамках **R-NNFL**. Для начала обогатим наше понятие модели путем введения отношения подобия $\approx$ между ситуациями следующим образом:

(S5) Если S_1 и S_2 являются ситуациями в $\boldsymbol{M}$, то как $(\approx,S_1,S_2)$, так и $(\approx/\approx,S_1,S_2)$ представляют собой элементарные ситуации в $\boldsymbol{M}$, где $\approx$ есть отношение подобия, т.е. бинарное рефлексивное, симметричное и нетранзитивное отношение.

Определение «стандартной»[2] интерпретации, являющееся расширением определения из [3], выглядит следующим образом:

(I1) $\{(\boldsymbol{R_i}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)}))\} \in D(R_i(a_1,\ldots,a_{r(i)}))$,

(I2) $\{(=,D(A),D(B))\} \in D(A = B)$,

(I3) Если $F(A) = F(B)$ и, более того, A,B логически эквивалентны, т.е. $A \vdash B$ и $B \vdash A$, то $D(A) = D(B)$,

(I4) $\{(\approx,D(A),D(B))\} \in D(A \approx B)$,

(I5) Если $F(A) \cap F(B) \neq \varnothing$ и, более того, A,B логически эквивалентны, т.е. $A \vdash B$ и $B \vdash A$, то $D(A) \approx D(B)$.

---

[2] Под стандартной интерпретацией в [3] понимается допустимая интерпретация, удовлетворяющая некоторым условиям, которые должны гарантировать, что о ситуации, приписанной этой интерпретацией предложению, имеет смысл говорить как описываемой этим предложением.

Теорема существования. Для каждой модели $\boldsymbol{M}$ множество стандартных интерпретаций непусто.

Доказательство. Примем некоторые вспомогательные обозначения:

(J1) $-(\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)}) = (\text{не-}\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$,

(J2) $-(=,S_1,S_2) = (\neq,S_1,S_2)$,

(J3) $-(\approx,S_1,S_2) = (\approx/\approx,S_1,S_2)$,

(J4) $-\sigma = \sigma$, для каждой элементарной ситуации σ,

(J5) для любой ситуации $S = \{\Sigma_t\colon t\in T\}$ определим $\Sigma\in -S$ тогда и только тогда, когда для каждого $t\in T$ имеется $\sigma_t\in\Sigma_t$, такая, что $\Sigma = \{-\sigma_t\colon t\in T\}$.

Определим функцию I_0 в ситуации в $\boldsymbol{M}$, удовлетворяющую следующим условиям:

($I_0$1) $I_0(R_i(\backslash_1,\ldots,a_{r(i)})) = (\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$,

($I_0$2) $I_0(\neg A) = -I_0(A)$,

($I_0$3) $I_0(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}) = I_0(A)\cup I_0(B)$,

($I_0$4) $I_0(\mathrm{A}\equiv\mathrm{B}) = (=,I_0(A),I_0(B))$,

($I_0$5) $I_0(\mathrm{A}\cong\mathrm{B}) = (\approx,I_0(A),I_0(B))$,

($I_0$6) $I_0(\exists xA(x)) = \bigcup\{I_0(A(a/x)\colon \mathbf{a}\in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{M})\}$,

($I_0$7) $I_0(\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}) = I_0(\neg(\neg A\vee\neg B)$, $I_0(\mathrm{A}\to\mathrm{B}) = I_0(\neg A\vee B)$, $I_0(\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{B}) = I_0((A\to B)\wedge(B\to A))$, $I_0(\forall xA(x)) = I_0(\neg\exists x\neg A(x))$.

Очевидным образом I_0 представляет собой допустимую интерпретацию, обладающую всеми дефектами **R-NFL**-допустимой интерпретации. В качестве последнего шага для каждого предложения A определяем:

(I_M) $I_M(\mathrm{A}) = \bigcup\{I_0(B)\colon F(A) = F(B)$ или $F(A)\cap F(B)\neq\varnothing$; $A\vdash B$ и $B\vdash A\}$.

Как нетрудно заметить, функция I_M выполняет как условия, которым она должна удовлетворять, чтобы представлять собой **R-NFL**-допустимую интерпретацию, так и ($I_0$1)–($I_0$5). Таким образом, она представляет собой пример, который нам нужен, чтобы завершить доказательство. ■

Предложение 1. Пусть D будет стандартной интерпретацией в $\boldsymbol{M}$. Тогда для любого предложения A

$$\text{если } \Sigma\in I_M(\mathrm{A}), \text{ то } \Sigma\in D(\mathrm{A}).$$

Доказательство. Заметим, что условия (I3) и (I5) эквивалентны условию

$D(\mathrm{A}) = \bigcup\{D(B)\colon F(A) = F(B)$ или $F(A)\cap F(B)\neq\varnothing$; $A\vdash B$ и $B\vdash A\}$.

Остальное очевидно. ■

4. Относительное тождество и относительная кореференциальность

Подчеркнем еще раз, что тождество само по себе отнюдь не является таким простым понятием, как это кажется на первый взгляд. Современные исследователи проблемы тождества делят предложения с тождеством на два синтаксических класса. Предложения из первого класса имеют вид «a есть то же самое, что и b» или «a тождественно b» (абсолютные утверждения тождества, символически $a = b$), в то время как предложения из второго класса имеют вид «a есть то же самое Ф, что и b», где Ф представляет собой общее имя (относительное утверждение тождества, символически $a =_{Ф} b$).

При рассмотрении относительного тождества наибольший интерес вызывают два тезиса. Р.Роутли и Н.Гриффин формулируют их следующим образом: «Первый представляет собой утверждение, что (R) две сущности могут быть одной и той же по отношению к некоему общему имени, но различными по отношению к другому; второй состоит в том, что (D) утверждения абсолютного тождества семантически неполны» [7, с.66].

Трудно составить мнение о точном значении (D), поскольку у его защитников отсутствует консенсус как по вопросу о природе семантической неполноты абсолютного тождества, так и по вопросу о типе этой неполноты. Любая комбинация этих двух тезисов принимается кем-нибудь из исследователей: П.Т.Гич принимает (R) и (D); Д.Одегард принимает (R), но отвергает (D); Л.Стивенсон принимает (D), но отвергает (R) (точно так же поступает и Д.Уиггинс); Ф.Фелдман, Дж.Перри и Дж.Нельсон отвергают оба тезиса.

Так или иначе, но эти споры по поводу такого «простого» понятия, как тождество, имеют серьезные последствия для не-фрегевской логики: принятие концепции относительного тождества объектов сразу же ведет к попытке формулировки относительного (вдобавок к абсолютному) тождества предложений, т.е. *относительной кореференциальности*. Дело в том, что понятие тождества ситуаций с подобной точки зрения уже теряет свою универсальность, поскольку нам захочется теперь уметь различать также относительно тождественные ситуации. В не-фрегевских рамках рассмотрения подобная задача представляется неуместной: мы нацелены на абсолютное тождество ситуаций и трудно объяснить, что означает для предложения «относительная» референция. В то же время в не-не-фрегевских рамках это представляется очевидным: относительное тождество референтов двух предложений означает их тождество по смыслу, т.е. тождество лишь в некотором смысле.

Главная идея подхода Роутли–Гриффина к относительному тождеству заключается в том, что каждое относительное отношение тождества $=_{\Phi}$ влечет неразличимость в области свойств, детерминированных принимаемым понятием рассматриваемого относительного тождества. Отсюда для каждого отношения относительного тождества $=_{\Phi}$ будет существовать множество свойств Δ_{Φ}, такое, что Ф-тождество влечет неразличимость по отношению к свойствам из Δ_{Φ}, или Δ_{Φ}-неразличимость. Чтобы формулировать теории в расширенной второпорядковой логике, необходимо добавить к классической второпорядковой логике новую предикатную константу (отношение) Δ и правило образования выражений с ее помощью:

(FR) Если Φ и ψ – одноместные предикаты, то $\Delta_{\Phi}(\psi)$ – правильно построенная формула.

Константа Δ подразумевает функцию, заданную на свойствах, или некоторое отношение между свойствами. Отношение Δ обеспечивает ограничение, в терминах которого можно логически охарактеризовать относительное тождество следующим образом:

$x =_{\Phi} y$ тогда и только тогда, когда для каждого ψ, такого, что $\Delta_{\Phi}(\psi)$, $\psi(x)$ тогда и только тогда, когда $\psi(y)$.

Таким образом, формальная теория относительного тождества, развитая в [7], логически оказывается следствием ограниченной (второпорядковой) квантификации. Соответственно, для классической теории относительного тождества используется следующее определение [7, с.70]:

D0. $(U\psi\in\Delta_{\Phi})A =_{df} (U\psi)(\Delta_{\Phi}(\psi)\to A)$,

где U есть универсальный квантор, интерпретируемый нереференциально по индивидным переменным, пробегающим как по возможным и невозможным, так и по действительным объектам. Интуитивно $\Delta_{\Phi}(\psi)$ можно понимать как «ψ является элементом множества свойств Δ_{Φ}, определяемых Ф».

Первая из предлагаемых Гриффином и Роутли теорий (Теория 1) получается добавлением следующего определения [7, с.70]:

D1. $x =_{\Phi} y =_{df} (U\psi\in\Delta_{\Phi})(\psi(x) \leftrightarrow \psi(y))$.

Вторая теория (Теория 2) получается заменой D1 на иное определение [7, с.74]:

D2. $x =_{\Phi} y =_{df} (U\psi)(\Phi(x) \wedge \Phi(x) \wedge (\Delta_{\Phi}(\psi) \to (\psi(x) \leftrightarrow \psi(y))))$,
т.е. $x =_{\Phi} y \leftrightarrow (\Phi(x) \wedge \Phi(x) \wedge (U\psi\in\Delta_{\Phi})(\psi(x) \leftrightarrow \psi(y)))$.

Наше предложение (которое нетрудно предугадать) касается константного символа Δ: давайте попробуем использовать в этой роли связку подобия по смыслу $\cong$. Обогатим язык **R-NNFL** за счет тернарной связки $=_{(\text{-})}$ и рассмотрим две следующие аксиомы:

A6′. $x =_\Phi y \leftrightarrow (\Phi \cong \psi \to (\psi(x) \leftrightarrow \psi(y)))$

A6″. $x =_\Phi y \leftrightarrow (\Phi(x) \wedge \Phi(x) \wedge (\Phi \cong \psi \to (\psi(x) \leftrightarrow \psi(y))))$

Как и в [7], мы получаем две теории путем добавления A6′ и A6″ к **R-NNFL**: **R-NNFL**(1) и **R-NNFL**(2) соответственно.

Предложение 2. В **R-NNFL**(1) имеют место следующие схемы теорем:

$x =_\Phi x$ (рефлексивность)

$x =_\Phi y \to y =_\Phi x$ (симметричность)

$x =_\Phi y \wedge y =_\Phi z \to x =_\Phi z$ (транзитивность)

$x =_\Phi y \wedge \Phi \cong \psi \to (\psi(x) \leftrightarrow \psi(y))$ (подстановочность относительно-тождественных)

Все они справедливы также и в **R-NNFL**(2), за исключением рефлексивности, которая приобретает теперь вид

$\Phi(x) \to x =_\Phi x$ (рефлексивность′)

Доказательство. Рефлексивность следует из A6′ и $\psi(x) \leftrightarrow \psi(x)$. Симметричность получаем из A6′ (A6″) и $(\psi(x) \leftrightarrow \psi(y)) \to (\psi(y) \leftrightarrow \psi(x))$, транзитивность – из A6′ (A6″) и $(\psi(x) \leftrightarrow \psi(y)) \wedge (\psi(y) \leftrightarrow \psi(z)) \to (\psi(x) \leftrightarrow \psi(z))$, подстановочность относительно-тождественных – из A6′ (A6″) и $(\psi(x) \leftrightarrow \psi(y)) \to (\Phi \cong \psi \to (\psi(x) \leftrightarrow \psi(y)))$. Рефлексивность′ в **R-NNFL**(2) мы получаем ввиду того, что из $\Phi \cong \psi \to (\psi(x) \leftrightarrow \psi(y))$ следует $\Phi(x) \to \Phi(x) \wedge (\Phi \cong \psi \to (\psi(x) \leftrightarrow \psi(x)))$. ■

Таким образом, $=_{(\text{-})}$ имеет все свойства относительного тождества. Семантика как **R-NNFL**(1), так и **R-NNFL**(2) будет очевидным образом той же, что и для **R-NNFL** (интерпретация $=_{(\text{-})}$ получается путем комбинирования интерпретаций $\cong$ и $\leftrightarrow$ согласно правым сторонам A6′ и A6″).

Следующие очевидные предложения можно было бы охарактеризовать как расширение диапазона понятия относительного тождества на случай предложений. Основная идея заключается во введении тернарной связки *относительной кореференциальности* $\equiv_{(\text{-})}$ в язык и с помощью аксиом

A7′. $A \equiv_\Phi B \leftrightarrow (\Phi \cong \psi \to (\psi(A) \equiv \psi(B)))$

A7″. $A \equiv_\Phi B \leftrightarrow (\Phi(A) \wedge \Phi(B) \wedge (\Phi \cong \psi \to (\psi(A) \equiv \psi(B))))$,

где ограничения, накладываемые на $\psi(A)$, $\psi(B)$, таковы же, как и в A2. Очевидным образом мы получаем системы **R-NNFL**(11), **R-NNFL**(12), **R-NNFL**(21) и **R-NNFL**(22) при условии соответствующего добавления аксиом A7′ и/или A7″ к **R-NNFL**(1) или **R-NNFL**(2).

Предложение 3. В **R-NNFL**(11) и **R-NNFL**(21) имеют место следующие схемы теорем:

$A \equiv_\Phi A$ (рефлексивность)

$A \equiv_\Phi B \to B \equiv_\Phi A$ (симметричность)

$A \equiv_\Phi B \wedge B \equiv_\Phi C \to A \equiv_\Phi C$ (транзитивность)

$A \equiv_\Phi B \wedge \Phi \cong \psi \to (\psi(A) \equiv \psi(B))$ (подстановочность относительно-тождественных)

Все они справедливы также и в **R-NNFL**(12) и **R-NNFL**(22), за исключением рефлексивности, которая приобретает теперь вид

$\Phi(A) \to A \equiv_\Phi A$ (рефлексивность′)

Доказательство. Рефлексивность следует из 7′ и $\psi(A) \equiv \psi(A)$. Симметричность получаем из A7′ (A7″) и $(\psi(A) \equiv \psi(B)) \to (\psi(B) \equiv \psi(A))$, транзитивность – из A7′ (A7″) и $(\psi(A) \equiv \psi(A)) \wedge (\psi(B) \equiv \psi(C)) \to (\psi(A) \equiv \psi(C))$, подстановочность относительно-тождественных – из A7′ (A7″) и $(\psi(A) \equiv \psi(B)) \to (\Phi \cong \psi \to (\psi(A) \equiv \psi(B)))$. Рефлексивность′ в **R-NNFL**(12) и **R-NNFL**(22) мы получаем ввиду того, что из $\Phi \cong \psi \to (\psi(A) \equiv \psi(B))$ следует $\Phi(A) \to \Phi(A) \wedge (\Phi \cong \psi \to (\psi(A) \equiv \psi(A)))$. ■

Вновь, семантические рамки остаются без изменения, поскольку семантика **R-NNFL** позволяет расширить интерпретацию на $\equiv_{(\cdot)}$ (интерпретация $\equiv_{(\cdot)}$ получается путем комбинирования интерпретаций $\cong$ и $\equiv$).

5. Метафорическая (не-сушковская) логика

Простейшая пропозициональная система метафорической логики может быть получена путем отбрасывания аксиом, содержащих связку тождества. Отсюда система SCSS (the Sentential Calculus with Sense Similarity – пропозициональное исчисление с подобием по смыслу) получается добавлением следующих аксиом к аксиомам и правилам вывода классической логики:

(B1) $A \cong A$

(B2) $\varphi(A/p)) \cong \varphi(B/p)) \to (B \cong A)$ (где φ не является противоречивой формулой или пропозициональной переменной, переменная p должна явно фигурировать в φ и $\varphi(B/p)$ есть формула, получающаяся из формулы φ подстановкой в φ формулы B вместо некоторых вхождений переменной p)

(B3) $(A' \cong A) \to (A \leftrightarrow A')$

Продолжая систематически предыдущее исследование, обнаруживаем, что в подобной системе картина становится обратной: скрытое допущение, что кореференциальность является максимальным случаем подобия по смыслу, может стать необходимым условием для оправдания метафорического подхода.

В русле предыдущей аргументации мы приходим к не-сушковской логике путем отбрасывания аксиом A1–A4′ системы ограниченной не-фрегевской логики **R-NFL** и замене их следующими аксиомами:

C1. $A \cong A$

C2. $(\varphi(A/p)) \cong \varphi(B/p)) \rightarrow (B \cong A)$ (где φ не является противоречивой формулой или пропозициональной переменной, переменная p должна явно фигурировать в φ и $\varphi(B/p)$ есть формула, получающаяся из формулы φ подстановкой в φ формулы B вместо некоторых вхождений переменной p)

C3. $x = y \rightarrow (A(x) \cong A(y))$ (где $A(x)$, $A(y)$ – любые формулы, такие, что x и y свободны в них и $A(y)$ получается из $A(x)$ замещением некоторых вхождений x в $A(x)$ на y)

C4. $(A' \cong A) \rightarrow (A \leftrightarrow A')$

Асимметрия C2 и C3 не случайна: кореференциальность в A3, которая в правой части C3 заменена на подобие по смыслу, тесно связана с тождеством. Но нужна ли в нашем случае (не кореференциальности, а подобия по смыслу) столь сильная связь? Напомним, что согласно тезису Фреге референция сложного выражения определяется референцией его компонент. Следовательно, используя C3, мы получаем точную референциальную конструкцию, в то время как в C2 получаем лишь конкретно детерминированное совпадение (с точностью до некоторого смысла).

Чтобы ослабить C3, мы можем либо вообще отказаться от тождества (т.е. с самого начала, не рассматривая вообще A1–A4′, браться за первопорядковые системы, обогащенные за счет C1–C4), либо заменить его другой связкой, более подходящей к данному случаю. Отсюда возникает предложение использовать в этой роли отношение подобия, которое в [2] было определено как

$$\forall x \forall y \exists F(x \div y \rightarrow (F(x) \leftrightarrow F(y))$$

(где $\div$ означает отношение подобия). Ясно, что в таком случае следует заменить схемы 1–4 и C3 на следующие:

1′. $x \div x$

2′. $x \div y \rightarrow y \div x$

3′. $(R_i(y_1,\ldots,y_{s(i)}) \rightarrow R_i(x_1,\ldots,x_{s(i)})) \rightarrow (x_1 \div y_1,\ldots,x_{s(i)} \div y_{s(i)})$, $i = 1,\ldots,m$

C3′. $(A(x/c)) \cong A(y/c)) \rightarrow x \div y$ (где $A(x/c)$, $A(y/c)$ – любые формулы, такие, что x и y свободны в них, c явно фигурирует в A и $A(y/c)$ получается из $A(x/c)$ замещением некоторых вхождений x в $A(x/c)$ на y).

Семантические последствия принятия этих схем аксиом очевидны. Вместо равенства мы теперь имеем отношение подобия, которое нетранзитивно, что влечет, в свою очередь, что элементарные ситуации также определяются относительно отношения подобия. Таким образом, ситуационная семантика метафорической логики со схемами аксиом 1–3, C1–C3′, C4 (которую мы назовем системой **R-NSL**, т.е. ограниченной не-сушковской логикой) может быть получена путем отбрасывания семантических постулатов для интерпретации кореференциальности.

На первый взгляд система **R-NSL** представляется чересчур аморфной, чтобы служить базисом дальнейших рассмотрений. Можно заметить, что обогащая язык **R-NS** путем введения тернарной связки $=_{(\text{-})}$ и добавляя аксиомы A6′, A6″ из предыдущего параграфа, мы получаем системы **R-NSL**(1), **R-NSL**(2) с относительным тождеством. Тем не менее, следуя этим курсом, нам не удается преодолеть ограниченность чисто метафорического подхода. К сожалению, понятие относительной кореференциальности невозможно ввести, не используя связки кореференциальности. В качестве единственно возможного предложения можно рассмотреть следующие аксиомы:

B7′. $A \cong_\Phi B \leftrightarrow (\Phi \cong \psi \rightarrow (\psi(A) \cong \psi(B)))$

B7″. $A \cong_\Phi B \leftrightarrow (\Phi(A) \wedge \Phi(B) \wedge (\Phi \cong \psi \rightarrow (\psi(A) \cong \psi(B))))$

Легко проверить, что связка $=_{(\text{-})}$ будет нетранзитивной, что означает, что мы имеем дело с относительным подобием по смыслу. Это можно понимать так, что каждое относительное подобие по смыслу $=_{(\text{-})}$ содержит указание на неразличимость предложений по смыслу относительно их некоторого смысла, определяемого Ф.

До сих пор наиболее противоречивым, по-видимому, кажется введение отношения подобия $\div$, проделанное выше. Но, согласно Фреге, для того, чтобы понять, на какой именно объект указывает имя, необходимо знать, как распознать объект вновь как тот же самый. М.Даммит пишет в связи с этим: «Фреге был первым, кто ясно видел, что мы используем совершенно разные критерии тождества для объектов разного рода, и видел, что уже этого одного достаточно, чтобы требовать, что собственное имя должно иметь смысл, состоящий в более чем просто ассоциации имени со своим референтом» [4, p. 179]. Однако, если наш метафорический подход претендует на то, чтобы отвечать всем требованиям более чем «простой ассоциации» имени со своим референтом, то нам требуются некоторые семантические идеи, которые могли бы быть достаточно сильными, чтобы пролить свет на эти ассоциации. Ключевой идеей будет, по-видимому, аналогия с так называемой онтологией ситуаций, которая подсказывает нам возможную интерпретацию.

6. Метафорическая онтология: ситуации, возможные миры и точки зрения

Формальная онтология ситуаций, которая была разработана Б.Вольневичем в [12], представляет собой обобщение семантики Витгенштейна для пропозициональных языков, основанное на решетке элементарных ситуаций. Максимальные ситуации являются возможными мирами, образующими логическое пространство; минимальные ситуации суть логические атомы, делящиеся по измерениям. Верификатор высказывания A представляет собой элементарную ситуацию, такую, что если она действительна, то она делает A истинной. Референт (или объект) высказывания представляет собой ситуацию, которая является множеством всех ее минимальных верификаторов (максимальные ситуации образуют ее локус). Ситуации образуют булеву алгебру, а булева алгебра локусов является ее представлением.

В работе [13] Вольневич применяет эту теорию для получения типологии метафизических систем, интерпретируя их как различные онтологии ситуаций. Четыре системы при этом рассмотрены им во всех деталях: диахронический атомизм Юма, детерминизм Лапласа, синхронический атомизм Юма и логический атомизм Витгенштейна. Он также обсуждает отношение этих теорий к ситуационной семантике Перри и Барвайса.

Более формально онтология ситуаций может быть описана следующим образом. Пусть $S(A)$ есть ситуация, представленная высказыванием A. Элементарным ситуациям соответствуют либо атомарные высказывания, либо их конъюнкция: если A есть такая конъюнкция, то $S(A) = x$ для некоторых $x \in SE''$. Здесь SE'' есть универсум элементарных высказываний, состоящий из двух частей: множества SE *собственных* (т.е. случайных) элементарных ситуаций и двух *несобственных* ситуаций - *пустой* o и *невозможной* λ. То есть, $SE'' = SE \cup \{o,\lambda\}$.

Элементарная ситуация может *случиться* (быть получена) в другой: $x \leq y$. Это частичное упорядочение, такое, что $o \leq x \leq \lambda$ для каждого $x \in SE''$. Объединение $x;y = sup\{x,y\}$ соответствует конъюнкции, пересечение $x!y = inf\{x,y\}$ не имеет очевидного эквивалента в классическом пропозициональном языке.

Элементарная ситуация либо *верифицирует* данное высказывание, либо *фальсифицирует*, либо *нейтральна* к нему. Элементарная ситуация, верифицирующая A, является верификатором A.

Минимальные элементы SE, если они имеются, представляют собой *логические атомы* (или *состояния дел*). Максимальные элементы являются *логическими точками* (или *возможными мирами*), логическое пространство есть вся совокупность логических точек. Назовем $Min\ \alpha = \{x \in \alpha$: не $y < x$, для всех $y \in \alpha\}$ *минимумом* α, и схожим образом $Max\ \alpha$ – *максимумом*. Тогда $SA = Min\ SE$ и $SP = Max\ SE$, при условии, что SE не пусто. В противном случае $SP = \{o\} = Q_0$ и $SA = \{\lambda\} = \Lambda$.

Для любого $w \in SP$ множество $R = \{x \in SE''$: $x \leq w\}$ является максимальным идеалом SE''. Подобные множества называются *реализациями*, а **R** будет их полной совокупностью.

Ситуациями являются некоторые множества элементарных ситуаций (SE''- *множеств*): $\mathbf{SE} \subset \boldsymbol{P}(SE'')$. Два SE''- множества *V-эквивалентны* тогда и только тогда, когда они пересекаются с одними и теми же реализациями, т.е.

(1) $\alpha \sim_v \beta$ тогда и только тогда, когда $\forall R \in \mathbf{R}(\alpha \cap R = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\beta \cap R = \varnothing)$.

Полагая $V(\alpha) = \bigcup |\alpha|_v$ для любых $\alpha \subset SE''$ (где $|\alpha|_v = \{\beta$: $\alpha \sim_v \beta\}$, т.е. класс эквивалентности), множество ситуаций определяется как

$$\mathbf{S} = \{S \subset SE'': S = Min\ V(\alpha) \text{ для некоторого } \alpha \subset SE''\}.$$

Множество возможных миров определяется как

$$\mathbf{M} = \{M \subset SE'': M = Max\ (V(\alpha) - \Lambda) \text{ для некоторого } \alpha \subset SE''\}.$$

Элементы **M** называются *логическими локусами*. Ясно, что при этом $\mathbf{M} = \boldsymbol{P}(SP)$.

Отображения S: $L \to \mathbf{S}$ и M: $L \to \mathbf{M}$ (где L – язык, в котором мы работаем) определяют соответствующие интерпретации. При первой интерпретации получаем следующее очевидное условие:

(i) $A \equiv B$ тогда и только тогда, когда $S(A) = S(B)$.

Расширяя теперь онтологию ситуаций Вольневича на случай метафорической или не-не-фрегевской логики, мы можем модифицировать (1) путем введения понятия *S–подобия*. Назовем два SE''-множества *S-подобными*, если и только если они пересекают некоторую (по крайней мере, одну) реализацию, т.е.

(2) $\alpha \sim_s \beta$ тогда и только тогда, когда $\exists R \in \mathbf{R}(\alpha \cap R = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\beta \cap R = \varnothing)$.

Затем, полагая $T(\alpha) = \bigcup \{\beta$: $\alpha \sim_s \beta\}$ для некоторого $\alpha \subset SE$, получаем:

$$\mathbf{T} = \{T \subset SE: T = Max\ (T(\alpha) - \Lambda - Q_0) \text{ для некоторого } \alpha \subset SE\}.$$

Элементы **T** называются *точками зрения*. Таким образом, точки зрения определяются смыслами, обеспечивающими подобие ситуаций. Ясно, что $\alpha \sim_v \beta$ влечет $\alpha \sim_s \beta$. Заметим также, что $\alpha \sim_s \beta$ будет нетранзитивным отношением.

Определим отображение T: $L \to \mathbf{T}$, представляющее собой соответствующую интерпретацию во множестве точек зрения. Условие интерпретации для связки подобия по смыслу будет выглядеть следующим образом:

(ii) $A \cong B$ тогда и только тогда, когда $T(A) \cap T(B) \neq \varnothing$.
Пусть $R(w)$ будет реализацией, порожденной возможным миром w. Следуя [13, p. 272], допускаем, что для $V(A)$[3] справедливо следующее условие:

A истинно в w тогда и только тогда, когда $V(A) \cap R(w) \neq \varnothing$.
Нетрудно прийти к заключению, что, по (2), если $A \cong B$ истинна в некотором мире, то $A \leftrightarrow B$ также будет истинна в этом мире (при соответствующей интерпретации).

До сих пор все шло без осложнений. Тем не менее, хотелось бы знать, будет ли тождество объектов зависеть от рассматриваемых ситуаций или точек зрения. Ввиду печально знаменитых трудностей с тождеством объектов в возможных мирах современные исследователи всегда рассматривают эту проблему с некоторой осторожностью. А ведь возможные миры также встроены в рамки ситуационной онтологии в качестве максимальных элементов SE.

У нас не возникает никаких трудностей, пока мы имеем дело с пропозициональным исчислением. Но в системах типа **R-NFL** все эти проблемы, несомненно, не должны быть игнорируемы. В связи с этим, в частности, хотелось бы знать, почему у нас так богата структура референтов выражений (например, булева алгебра ситуаций) и, в то же время, почему у нас так бедна структура референтов собственных имен (просто множество объектов).

Метафорические логики, по-видимому, служат очевидным исключением из этого правила. Связка «метафорического» равенства $\div$ предполагает, что объекты обладают некоторыми смыслами, которые сказываются в различных ситуациях, создавая неразличимость относительно точек зрения. Отсюда возникает необходимость обогащения семантики, проблема заключается только в выборе средств.

Поскольку элементарные ситуации отвечают атомарным высказываниям (или их конъюнкции), то мы можем очевидным образом перейти теперь к модели $\boldsymbol{M}$ для **R-NNFL**. Но чтобы остаться в рамках ситуационной онтологии, предположим, что имеется функция SD: $\mathbf{S} \rightarrow \boldsymbol{P}(\mathbf{U})$, приписывающая каждой ситуации соответствующую подобласть имен. Обычно предполагается, что равенство уже определено на универсуме $\mathbf{U}$.

Трудность представляет тот факт, что метафорическое равенство тоже должно быть определено на $\mathbf{U}$. В сущности, это влечет для нас принятие экспликации мейнонговского типа, когда с каждым элементом универсума связывается множество ситуаций, в которых он «участвует», и формально означает требование суще-

[3] То есть, вводя некоторую функцию интерпретации V.

ствования функции SD^{-1}: $\mathbf{U} \to \boldsymbol{P}(\mathbf{S})$ из универсума во множество подмножеств ситуаций.

Заметим, что элементарные ситуации определяются подмножествами имен элементов универсума $\mathbf{U}$ из $\boldsymbol{M}$ (и наоборот). Как следствие, можно ассоциировать с каждым именем множество ситуаций, в которые это имя должно быть вовлечено. В **R-NFL** из аксиомы 4 следует, что все тождественные имена будут неразличимы во всех элементарных ситуациях. В **R-NNFL** картина совершенно противоположна: ситуации диктуют именам их тождество (в некотором смысле), т.е. как раз неразличимость в некоторой элементарной ситуации (и в неэлементарной также, согласно С3′) является решающей для признания тождественности двух имен с некоторой точки зрения. В то же время некоторая характерная черта определяет атомарность имен: лишь те, которые тождественны с точки зрения, определяемой аксиомой 3′, считаются атомарными, поскольку мы всегда можем предположить, что имеются имена, чье тождество с некоторой точки зрения определяется исключительно С3′.

Таким образом, онтология ситуаций косвенным образом входит в игру, индуцируя структуру имен (соответственно, объектов). Следующее наблюдение проясняет это влияние.

Поскольку $S(A) = S(B)$ может быть переписано как $S(A) \subset S(B)$ и $S(B) \subset S(A)$, то Вольневич в [13, р.404] вводит следующее условие:

(iii) из A выводимо B тогда и только тогда, когда $S(A) \subset S(B)$.

Отталкиваясь от этого условия, автором было предложено в работе [1] ввести не-фрегевскую связку $\Rightarrow$, когда $A \Rightarrow B$ означает «A (референциально) приводит к B». Следуя интерпретации систематических ограничений Барвайса–Перри, которые позволяют одной ситуации содержать информацию о другой, мы просто говорим о примитивном отношении между референтами-ситуациями (отношении вовлечения), достаточном для наших целей. При этом аксиомы, связанные со связкой тождества, преобразуются следующим образом:

Ax1. $A \Rightarrow A$

Ax2. $(A \Rightarrow B) \to (\varphi(B) \Rightarrow \varphi(A))$ (где $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ – любые формулы, такие, что $\varphi(A)$ получается из $\varphi(B)$ замещением некоторых вхождений A в $\varphi(A)$, на B)

Ax3. $(B \Rightarrow A) \to (A \to B)$

При этом вновь возникающие трудности с не-фрегевской аксиомой А3 преодолеваются путем «расщепления» = т.е. путем введения новой связки $\blacktriangleleft$ ($x \blacktriangleleft y$ читается «x ситуационно влечет y») и следующих схем аксиом:

01. $x \blacktriangleleft x$
02. $(x \blacktriangleleft y \wedge y \blacktriangleleft z) \rightarrow (x \blacktriangleleft z)$
03. $(x_1 \blacktriangleleft y_1,\ldots,x_{s(i)} \blacktriangleleft y_{s(i)}) \rightarrow (R_i(y_1,\ldots,y_{s(i)}) \rightarrow R_i(x_1,\ldots,x_{s(i)}))$, $i = 1,\ldots,m$
Ax2. $x \blacktriangleleft y \rightarrow (A(x) \Rightarrow A(y))$ (где $A(x)$, $A(y)$ – любые формулы, такие, что x и y свободны в них и $A(y)$ получается из $A(x)$ замещением некоторых вхождений x в $A(x)$ на y)

Есть ли возможность провести подобное расщепление и для связки $\cong$? С точки зрения онтологии ситуаций мы можем сделать это, если заменим (2) на следующее определение:

(3) $\alpha \geqq_s \beta$ тогда и только тогда, когда $\exists R \in \mathbf{R}$(если $\alpha \cap R = \varnothing$, то и $\beta \cap R = \varnothing$).

Будем называть подобные α и β *S-вовлеченными*, что означает, что α детерминирует пересечение β с некоторой реализацией. Затем, полагая $T_p(\alpha) = T(\alpha) = \bigcup\{\beta\colon \alpha \geqq_s \beta\}$ для некоторого $\alpha \subset SE$, получаем:

$\mathbf{T}_p = \{T \subset SE\colon T = Max\,(T(\alpha) - \Lambda - Q_0)$ для некоторого $\alpha \subset SE\}$.

Элементы $\mathbf{T}_p$ представляют собой *предвзятые точки зрения*. Заметим, что $\geqq_s$ будет антисимметричным и нетранзитивным отношением.

Пусть теперь отображение $T_p\colon L \rightarrow \mathbf{T}_p$ будет представлять собой соответствующую интерпретацию во множестве предвзятых точек зрения. Условие интерпретации для связки *вовлечения по смыслу* $\underline{\Rightarrow}$ (т.е. являющейся результатом расщепления $\cong$) будет выглядеть следующим образом:

(ii) $A \underline{\Rightarrow} B$ тогда и только тогда, когда $T_p(A) \sqsupset T_p(B)$,

где $A \underline{\Rightarrow} B$ означает «A референциально в некотором смысле приводит к B» , а $\sqsupset$ является отношением вовлечения по смыслу, определяемым следующим условием:

$\alpha \sqsupset \beta$ тогда и только тогда, когда $\exists x \in \alpha \exists y \in \beta (x \leq y)$

Теперь, если мы принимаем ситуационную онтологию предвзятых точек зрения, то напрашивается следующее преобразование метафорических аксиом B1–B3:

(B1) $A \underline{\Rightarrow} A$
(B2) $\varphi(A/p)) \underline{\Rightarrow} \varphi(B/p)) \rightarrow (B \underline{\Rightarrow} A)$ (где φ не является противоречивой формулой или пропозициональной переменной, переменная p должна явно фигурировать в φ и $\varphi(B/p)$ есть формула, получающаяся из формулы φ подстановкой в φ формулы B вместо некоторых вхождений переменной p)
(B3) $(A' \underline{\Rightarrow} A) \rightarrow (A \rightarrow A')$

Следующим напрашивающимся шагом будет расщепление связки $\div$, ведущее к использованию связки $\lhd$ *вовлечения с предвзятой точки зрения*. Более того, это влечет за собой следующую трансформацию аксиом 01,03, C1–C3 (аксиома 02 отбрасывается ввиду нетранзитивности $\lhd$):

04. $x \lhd x$

05. $(x_1 \lhd y_1,\ldots,x_{s(i)} \lhd y_{s(i)}) \rightarrow (R_i(y_1,\ldots,y_{s(i)}) \rightarrow R_i(x_1,\ldots,x_{s(i)}))$, $i = 1,\ldots,m$

Сх1. $A \Rrightarrow A$

Сх2. $(\varphi(A/p)) \Rrightarrow \varphi(B/p)) \rightarrow (B \Rrightarrow A)$ (где φ не является противоречивой формулой или пропозициональной переменной, переменная p должна явно фигурировать в φ и $\varphi(B/p)$ есть формула, получающаяся из формулы φ подстановкой в φ формулы B вместо некоторых вхождений переменной p)

С3. $(A(x) \Rrightarrow A(y)) \rightarrow x \lhd y$ (где $A(x)$, $A(y)$ - любые формулы, такие, что x и y свободны в них и $A(y)$ получается из $A(x)$ замещением некоторых вхождений x в $A(x)$ на y)

С4. $(A' \Rrightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A')$

Суммируя, можно сказать, что предложенная в рамках мейнонговской интерпретации совокупность систем позволяет нам говорить о более гибкой, чем у Вольневича, ситуационной онтологии, где у нас имеется универсум референтов как для имен, так и для предложений, взаимно координированных. Само по себе расщепление равенства = на связки $\blacktriangleleft$ и $\lhd$ приводит на ум связку ε системы онтологии Лесьневского, но подобный тезис требует отдельного подтверждения или опровержения.

Все же заметим, что если последовать этой аналогии, то удается сформулировать, например, в рамках **R-NNFL** некоторую версию аристотелевской силлогистики в смысле Я.Лукасевича, подобно тому, как это делает Я.Слупецкий в [10]. Напомним в связи с этим аксиомы системы Лукасевича:

(a) SaS

(b) SiS

(c) $MaP \wedge SaM \rightarrow SaP$

(d) $MaP \wedge MiS \rightarrow SiP$

Чтобы получить подобные аксиомы в системе метафорической онтологии (например, версии не-не-фрегевской логики со связками $\Rrightarrow$,$\blacktriangleleft$), воспользуемся следующими определениями терминов силлогистики:

DL1. $x[a]y \leftrightarrow \forall z(z \blacktriangleleft x \rightarrow z \blacktriangleleft y)$

DL2. $x[i]y \leftrightarrow \exists z(z \blacktriangleleft x \wedge z \blacktriangleleft y)$

DL3. $x[e]y \leftrightarrow \forall z(z \blacktriangleleft x \rightarrow \neg(z \blacktriangleleft y))$

DL4. $x[o]y \leftrightarrow \exists z(z \blacktriangleleft x \wedge \neg(z \blacktriangleleft y))$

Легко удостовериться, что при подобной интерпретации аксиомы Лукасевича справедливы в соответствующих системах метафорической онтологии, за исключением (b). Однако то же самое происходит и в онтологии Лесьневского, как это показывает Слупецкий [10, p. 85].

7. Замечания по поводу перевода в системы Лесьневского

Напомним, что до сих пор мы имели дело с ограниченной не-фрегевской логикой, в то время как ее наиболее общая форма может быть описана как расширение исчисления предикатов с равенством PCI, получающееся

(i) Добавлением связки тождества к PCI;

(ii) Добавлением к PCI переменных, пробегающих по ситуациям, и некоторых операторов (в частности, кванторов), связывающих эти переменные.

Р.Вуйцицкий в связи с этим в [3] замечает, что в этом случае не-фрегевская логика становится расширением как PCI, так и Прототетики Лесьневского. Последнее становится еще более очевидным, если принять во внимание, что кванторы связывают также пропозициональные переменные.

Тем не менее, здесь возникает проблема, связанная с экстенсиональноситью, о которой предостерегал Р.Сушко. Он пишет: «Математическое содержание теории ситуаций явственно булево-алгебраическое. Разумно, поэтому, ожидать, что будут обнаружены многочисленные связи между теорией ситуаций и стандартными математическими понятиями и теориями. Теория ситуаций, в том виде как она представлена здесь, может быть подкреплена другими математическими понятиями и аксиомами. Таким образом, можно строить и изучать не-фрегевскую логику и, наверное, гёделевскую арифметику. Можно добавить к теории ситуаций понятия и принципы теоретико-множественного рода, касающиеся абстрактных объектов (классов, отношений, функций, атрибутов и им подобных). В то же время сталкиваемся лицом к лицу с принципом экстенсиональности. Читателя можно предостеречь против смешения принципа экстенсиональности абстрактных объектов с фрегевской аксиомой экстенсиональности логики, которая гарантируется аксиомой инвариантности. Несомненно, существует множество значений слов "экстенсионал" и "экстенсиональность"» [11, pp.123-124].

Упомянутая Сушко аксиома инвариантности формулируется им следующим образом:

«Если F является n-местным функтором и P есть n-местный предикат, то следующие формулы являются аксиомами инвариантности для F и P:

(5.1) $x_1 = x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_n = x_{2n} \rightarrow Fx_1 \ldots x_n = F\, x_{n+1} \ldots\, x_{2n}$

(5.2) $x_1 = x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_n = x_{2n} \rightarrow Px_1 \ldots x_n = P\, x_{n+1} \ldots\, x_{2n}$

Если % является одноместной связкой и & есть бинарная

связка, то следующие формулы являются аксиомами инвариантности для % и &:
(5.3) $(p = q) \to (\%p = \%q)$
(5.4) $(p = q) \land (q = r) \to ((p \& r) = (q \& s))$» [11, p. 109].

Их эквивалентом в **R-NNFL** являются, очевидным образом, схемы аксиом 4,A2. В элементарной Прототетике Лесьневского, по-видимому, в качестве подобного эквивалента можно рассматривать закон экстенсиональности [9, p. 56]:

$$\forall f,p,q((p \leftrightarrow q) \to (f(p) \leftrightarrow f(q)))$$

Последнее вполне вероятно ввиду того, что данная формулировка эквивалентна следующему утверждению [8, p. 411]:

$$\forall p,q,r,s((p \leftrightarrow q \land r \leftrightarrow s) \to \forall f(f(p,r) \leftrightarrow f(q,s))),$$

которое явно намекает на аксиому Сушко (5.4) выше. Заметим, также, что отнюдь не случайно в Прототетике закон экстенсиональности является теоремой, а не аксиомой системы. Сам Лесьневский в связи с этим писал: «Я перехожу к следующему этапу в развитии прототетики, рассматривая такой вопрос: посредством каких аксиом и директив должна быть усилена система SS, обсужденная в предыдущем разделе, для того, чтобы получить из нее систему обычного пропозиционального исчисления, к которому добавляется тезис

$$\forall p,q\, f((p \leftrightarrow q) \to (f(p) \leftrightarrow f(q)))$$

вместе со всеми его последствиями? Я нуждаюсь в построении системы, в которой, наряду со многим другим, было бы доказуемо как раз такое утверждение, потому что всегда после 1922 этот тезис так много значил для меня как никакое другое утверждение пропозиционального исчисления вообще. (В последующем разделе я буду, вначале на техническом и редакторском основаниях, занят несколько более непосредственно различными теоретическими сомнениями, которые могут возникнуть относительного этого утверждения)» [6, p. 438].

Таким образом, можно заключить, что без добавления переменных, пробегающих по ситуациям, нет никакого различия в трактовке в рамках прототетики связки тождества Сушко и обычной эквивалентности: закон экстенсиональности подразумевает единообразное понимание.

Однако обратим внимание на то, что при добавлении переменных, пробегающих по ситуациям, мы фактически получаем систему с более чем одной семантической категорией, что равносильно переходу от прототетики к системе онтологии. И здесь ситуация становится технически более прозрачной.

Во-первых, в онтологии Лесьневского имеются два тождества – экстенсиональное тождество и собственно тождество, вводимые следующими определениями:

D1.3. $X =_Z Y \leftrightarrow \forall x(x\varepsilon X \leftrightarrow x\varepsilon Y)$

D2.3. $x = y \leftrightarrow x\varepsilon y \wedge y\varepsilon x$

Во-вторых, следует принять во внимание, что в неэлементарной онтологии Лесьневского (т.е. в полной системе онтологии) эпсилон отнюдь не понимается исключительно как функтор, образующий высказывание из двух аргументов, являющихся именами, т.е. его категория, или тип, не обязана обязательно быть $(s;n,n)$ (см. [5, p. 273]). Это приводит к следующей трансформации D1.3 и D2.3:

D3.3. $\Phi =_Z \Psi \leftrightarrow \forall\varphi(\varphi\varepsilon\Phi \leftrightarrow \varphi\varepsilon\Psi)$

D4.3. $\varphi = \psi \leftrightarrow \varphi\varepsilon\psi \wedge \psi\varepsilon\varphi$

Таким образом, единообразный перевод выражений со связками кореференциальности и равенства должен, по-видимому, основываться на следующих определениях:

DFL1. $tr(A \equiv B) = A =_Z B$

DFL2. $tr(x = y) = x =_Z y$

Однако чтобы перевести выражения со связкой подобия по смыслу $\cong$ и подобия $\div$, нам потребуется следующим образом модифицировать определения в онтологии Лесьневского, вводя новые понятия:

D5.3. $X \approx_Z Y \leftrightarrow \exists x(x\varepsilon X \leftrightarrow x\varepsilon Y)$

D6.3. $\Phi \approx_Z \Psi \leftrightarrow \exists\varphi(\varphi\varepsilon\Phi \leftrightarrow \varphi\varepsilon\Psi)$

При использовании этих определений (экстенсионального подобия) искомый перевод будет основываться на определениях следующего вида:

DFL3. $tr(A \cong B) = A \approx_Z B$

DFL4. $tr(x \div y) = x \approx_Z y$

Что касается связок референциального вовлечения $\Rightarrow$ и ситуационного вовлечения $\blacktriangleleft$, то в этом случае следует воспользоваться силлогистическим функтором a в онтологии Лесьневского:

D7.3. $XaY \leftrightarrow \forall x(x\varepsilon X \rightarrow x\varepsilon Y)$

D8.3. $\Phi a\Psi \leftrightarrow \forall\varphi(\varphi\varepsilon\Phi \rightarrow \varphi\varepsilon\Psi)$

Требуемые переводы будут основываться на следующих определениях:

DFL3. $tr(A \Rightarrow B) = AaB$

DFL4. $tr(x \blacktriangleleft y) = xay$

Наконец, чтобы получить переводы выражений со связками вовлечения по смыслу $\underline{\Rightarrow}$ и вовлечения с предвзятой точки зрения $\lhd$, то здесь, прежде всего, вновь надо модифицировать определения онтологии следующим образом:

D9.3. $Xa^*Y \leftrightarrow \exists x(x\varepsilon X \rightarrow x\varepsilon Y)$

D10.3. $\Phi a^*\Psi \leftrightarrow \exists\varphi(\varphi\varepsilon\Phi \rightarrow \varphi\varepsilon\Psi)$

Окончательно получаем, что в этом случае переводы должны основываться на определениях вида:
DFL5. $tr(A \Rightarrow B) = Aa^*B$
DFL6. $tr(x \lhd y) = xa^*y$

На первый взгляд кажется, что мы пренебрегли предостережением Сушко о смешении экстенсиональностей, занимаясь переводом референциальности подобным образом. Наличие в онтологии Лесьневского алгебры имен может казаться как раз эквивалентом «структурализации» ситуаций, о которой говорил Сушко. Однако заметим, что эта структура индуцируется пропозициональной структурой и, следовательно, полностью естественна и не ведет к разрушению или дополнительной модификации семантики. Тем не менее, этот вопрос требует дополнительного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васюков В.Л.* Не-фрегевская логика и Пост-Трактатная онтология // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН 1997,.М., 1998. С. 131-138.
2. *Васюков В.Л.* Ситуации и смысл: не-не-фрегевская (метафорическая) логика. I // Логические исследования. Вып. 6, М., 1999.
3. *Вуйцицкий Р.* Формальное построение ситуационной семантики // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С. 5-28.
4. *Dummett M.* Frege: Philosophy of Language. 2nd ed. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1981.
5. *Hiż H.* Descriptions in Russel's Theory and in Ontology // Studia Logica. Vol. 36, No 4. 1977. P. 271-283.
6. *Leśniewski S.* Collected Works. PWN-Kluwer, Warszawa-Dordrecht, 1992.
7. *Routley R. and Griffin N.* Towards a Logic of Relative Identity // Logique et Analyse. 1979. P. 65-83.
8. *Rickey V.F.* A Survey of Leśniewski's Logic // Studia Logica. Vol. 36. No 4. 1977. P. 405-426.
9. *Slupecki J.* S.Leśniewski's Protothetic // Studia Logica. No 1. 1953. P. 44-112.
10. *Slupecki J.* S.Leśniewski's Calculus of Names // Leśniewski's Systems. Ontology and Mereology / J.T.J.Srzednicki and V.F.Rickey (eds.), PWN-Kluwer, Wrocław-Dordrecht, 1984. P. 59-122.
11. *Suszko R.* Non-Fregean Logics and Theories // Acta Logica. Vol. 11. No 2. 1968. P. 105-125.
12. *Wolniewicz B.* A Formal Ontology of Situations // Studia Logica. Vol. 41. No 4. 1982. P. 381-413.
13. *Wolniewicz B.* Logical Space and Metaphysical Systems // Studia Logica. Vol. 42. No 2/3. 1983. P. 269-284.

Д.А.Витер

БАЗИСНАЯ ЛОГИКА И ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ

Abstract. *We introduce a primitive recursive (PR-) realizability for predicate formulas, based on PR-realizability for arithmetic formulas, introduced by S.Salehi in 2000.The different cases from Kleene's recursive realizability are* $\rightarrow$ *and* $\forall$, *in which the recursive functions associated with, are restricted to primitive recursive. It is proved, that the set of PR-realizable predicate formulas are non-arithmetic. The similar results obtained for sets of PR-non-refutable and PR-realizable sequences.*

Введение

Работа посвящена исследованию некоторых вопросов конструктивной математической логики.

В конструктивной логике (как и в клиниевском определении реализуемости) интуиционистское понятие эффективности уточняется с помощью частично-рекурсивных функций. В математике рассматриваются также другие, более узкие классы вычислимых функций, например, примитивно рекурсивные функции.

В 2000 году иранский математик С.Салехи [9] предложил понятие реализуемости для замкнутых арифметических формул, основанное на клиниевской рекурсивной реализуемости, ограниченное использованием только примитивно рекурсивных функций. Автором было введено аналогичное понятие реализуемости для замкнутых предикатных формул и была доказана неарифметичность множества всех предикатных формул, реализуемых в этом смысле.

Результаты этой статьи частично изложены в работе [10].

Базисная логика

Для доказательства результатов настоящей работы использованы методы исследования так называемой *базисной логики* (Basic Logic). Развитие этого направления конструктивной математической логики в 80-х годах XX века в работах А.Виссера [4], В.Руйтенбурга [7], М.Ардешира [8], С.Салехи [9][1] связано с критическим пересмотром интуиционистских взглядов на природу

[1] Определения и утверждения, приведенные в этом параграфе, принадлежат перечисленным авторам.

«доказательства» и, в частности, с интерпретацией связки $A \to B$. В отличие от интерпретации ВНК[2], где под доказательством того, что $A \to B$, подразумевается некоторая конструкция, которая преобразует *доказательство* А в доказательство В, в новой интерпретации под доказательством того, что $A \to B$, подразумевается некоторая конструкция, которая использует *предположение* А для построения доказательства В.

Чтобы проиллюстрировать этот подход, приведем цитату из работы В.Руйтенбурга [7]: «*Использование предположения* А, *а не доказательства* А, *для получения доказательства* В *позволяет избежать преобразования доказательств, как в интерпретации* ВНК. *Доказать* В *стало сложнее, так как дано меньше информации. Можно сравнить предположения с закрытыми "ящиками", на которых написано, что в них содержится. Мы предполагаем, что в ящиках содержится именно то, что на них написано, от нас не требуется "открыть" их и использовать содержимое ящиков для построения доказательств... Из предположения* А *легко следует, что доказательство* А *получается из некоторого очевидного предположения. Поэтому справедливо* $A \to (T \to A)$, *а также* $A \to A$. *Но* А *не следует из* $T \to A$, *так как доказательство* $(T \to A) \to A$ *есть некоторая конструкция* p, *которая использует предположение о том, что существует конструкция* q, *которая позволяет получить доказательство* А, *для того чтобы получить доказательство* А. *Лишь предполагается, что конструкция* q *существует, она не дана. Таким образом, мы не сможем построить* p *без доказательства предположения* $T \to A$. *Пользуясь аналогией с "ящиками", нам потребовалось бы "открыть" ящик* $T \to A$»

Следствием такого подхода является то, что формулы $A \to (B \to C)$ и $B \to (A \to C)$ не эквивалентны и существенно слабее, чем $(A \wedge B) \to C$. Это явилось основанием для изменения самого понятия формулы, в частности, изменилась форма квантора всеобщности. Новый квантор всеобщности записывается в виде $\forall \mathbf{x}{:}A.B$, что фактически означает $\forall \mathbf{x}(A \to B)$.

Указанная интерпретация доказательства явилась основой для аксиоматизации секвенциального исчисления *базисной логики предикатов* BQC (Basic Predicate Calculus[3]). Исчисление BQC строится в языке логики предикатов с равенством. В язык входят предметные переменные, предикатные символы, логические символы $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$, $\exists$, логические константы T и $\perp$. Выражение $\neg A$

---

[2] Brouwer-Heyting-Kolmogorov (см. [7])

[3] Буква Q в аббревиатуре BQC обозначает "Quantifier".

есть сокращенная запись для $A \to \bot$. Как только что было сказано, понятие формулы несколько отличается от понятия формулы, использовавшегося в интуиционистской логике предикатов IQC (Intuitionistic Predicate Calculus), а именно отличается случай с квантором всеобщности: если A и B – формулы, **x** – список переменных, то $\forall \mathbf{x}$:A.B – формула. Аксиоматика BQC приведена в работах [7], [8].

На основе BQC строится секвенциальное исчисление *базисной арифметики* BA (Basic Arithmetic) (см. аксиоматику в [9]). Как и язык HA, язык BA содержит функциональные символы для всех примитивно рекурсивных функций. В исчислении BA, как и в HA, любой примитивно рекурсивный предикат выражается атомарной формулой.

Формулы базисной арифметики допускают интерпретацию в стандартной модели арифметики, где ее связки и кванторы понимаются в классическом смысле. Очевидно, что если секвенция выводима в BA, то ее формульный образ истинен в стандартной модели арифметики. Таким образом, базисная арифметика корректна относительно классической семантики.

Пусть A – формула в языке BQC. Обозначим через A^i формулу, полученную из A путем замены каждой ее подформулы вида $\forall x$:B.C на $\forall x(B \to C)$. Очевидно, что формула A^i является теперь формулой в языке IQC. Обратно, пусть A – формула языка IQC, и A^b обозначает формулу языка BQC, полученную из A заменой любого вхождения подформулы вида $\forall xG(x)$ на $\forall x$:T.G(x).

Введем понятие «n-ослабления» $(A)^n$ и «n-усиления» $(A)_n$ для формул в языке BQC[4] (см. [8]). Рекурсивно определяем для любой формулы A: $T^0A{=}{=}A$, $T^{n+1}A{=}{=}T \to T^nA$[5].

Для каждого натурального n положим:

«n-*ослабление*»:

$(p)^n{=}{=}T^np$ для атомарных p;

$(A \wedge B)^n{=}{=}A^n \wedge B^n$;

$(A \vee B)^n{=}{=}T^n(A^n \vee B^n)$;

$(A \to B)^n{=}{=}A_n \to B^n$;

$(\exists xA(x))^n{=}{=}T^n\exists x(A(x))^n$;

$(\forall x{:}A(x).B(x))^n{=}{=}\forall x{:}(A(x))_n.(B(x))^n$;

$(T)^n{=}{=}T$;

---

[4] Будем опускать скобки в тех местах, где это не приводит к разночтениям, т.е. записывая просто A^n и A_n.

[5] Под символом «длинного равенства» == здесь и далее понимаем «равенство по определению»

$(\perp)^n == T^n\perp$;

$(A\Rightarrow B)^n == A_n \Rightarrow B^n$.

«n-*усиление*»:

$(p)_n == p$ для атомарных p;

$(A\wedge B)_n == A_n \wedge B_n$;

$(A\vee B)_n == A_n \vee B_n$;

$(A\rightarrow B)_n == A^n \rightarrow B_n$;

$(\exists x A(x))_n == \exists x(A(x))_n$;

$(\forall x{:}A(x).B(x))_n == \forall x{:}(A(x))^n.(B(x))_n$;

$(T)_n == T$;

$(\perp)_n == \perp$;

$(A\Rightarrow B)_n == A^n \Rightarrow B_n$.

Нами будет использовано утверждение 1) из теоремы Ардешира о «переводе из IQC в BQC»:

Теорема 1. *Для любой секвенции* $A\Rightarrow B$
1) *существует натуральное число* m *такое, что для всех* n *таких, что* $n\geq m$, *если* IQC $\vdash A\Rightarrow B$, *то* BQC $\vdash (A^b\Rightarrow B^b)^n$;
2) *если для некоторого числа* n *верно* BQC $\vdash (A\Rightarrow B)^n$, *то* IQC $\vdash (A^i\Rightarrow B^i)$.

Доказательство. [8, Теорема 3.14]. □

Примитивно рекурсивная реализуемость

В дальнейшем нам понадобятся обозначения для следующих примитивно рекурсивных функций:
Sx – операция прибавления единицы к x;
sg(x) – примитивно рекурсивная функция равная 0 в нуле и равная 1 при всех положительных значениях аргумента;
$\langle x,y\rangle == x+(x+y)(x+y+1)/2$ – примитивно рекурсивная функция «пары» с обратными примитивно рекурсивными проекциями π_1, π_2.

$$\langle x_0,\ldots,x_k\rangle == \langle\langle\ldots\langle\langle 0,x_k\rangle,x_{k-1}\rangle,\ldots x_1\rangle,x_0\rangle \qquad (1)$$

$f^*(0)==0$; $f^*(Sx)==x$

$eq(x,0)==1-sg(x)$, $eq(x,Sy)=sg(x)eq(f^*(x),y)$.

Введем обозначение $\sim x=y == eq(x,y)=0$.

Отметим, что BA $\vdash x=y\wedge\sim x=y\Rightarrow\perp$, однако неверно, что BA $\vdash x=y\wedge(x=y\rightarrow\perp)\Rightarrow\perp$ (см. [9]).

Пусть $f^{(n)}(x_0,\ldots,x_{n-1})$ есть n-местная частично-рекурсивная функция. Мы можем рассматривать ее как одноместную частично-рекурсивную функцию f с аргументом x, кодирующим конечную последовательность чисел $x_0,\ldots,x_{n-1}$, т.е. $f(x)==f^{(n)}(x_0,\ldots,x_{n-1})$, где $x=\langle x_0,\ldots,x_{n-1}\rangle$ определяется по формуле (1).

Клини (см. [1]) использует так называемую *систему равенств* для задания и геделевской нумерации частично-рекурсивных функций. Мы же для задания частично-рекурсивных функций, как и в работе [6], используем слова в алфавите 0, S, I^i_m ($m=1,2,\ldots$, $1\leq I\leq m$), C, R, M, которые строятся по следующим правилам:

1) 0 есть 0-местный функциональный символ;
2) S есть одноместный функциональный символ;
3) I^i_m есть m-местный функциональный символ ($m=1,2,\ldots$, $1\leq I\leq m$);
4) если f есть m-местный функциональный символ ($m\geq 1$), а $g_1,\ldots,g_m$ суть n-местные функциональные символы ($n\geq 0$), то $Cfg_1,\ldots,g_m$ есть n-местный функциональный символ;
5) если f есть n-местный функциональный символ, а g есть (n+2)-местный функциональный символ ($n\geq 0$), то Rfg есть (n+1)-местный функциональный символ;
6) если f есть (n+1)-местный функциональный символ ($n\geq 1$), то Mf есть n-местный функциональный символ.

Символы 0, S и I^i_m считаются обозначениями соответствующих исходных примитивно рекурсивных функций. Запись вида $Cfg_1,\ldots,g_m$ – это обозначение функции, полученной суперпозицией из функций, обозначенных посредством $f,g_1,\ldots,g_m$. Функциональный символ Rfg есть обозначение для функции, полученной рекурсией из функций, обозначенных через f и g. Функциональный символ Mf есть обозначение для функции, полученной операцией минимизации из функции f. Если оператор минимизации не использовался (т.е. буква M не входит в состав «кодирующего» слова), то выражаемая таким словом частично-рекурсивная функция является примитивно рекурсивной.

Можно ввести фиксированную геделевскую нумерацию таких слов и соответствующую ей нумерацию частично-рекурсивных функций. Аналогично построим нумерацию примитивно рекурсивных функций. Для этого зафиксируем геделевскую нумерацию слов, кодирующих частично-рекурсивные функции, не содержащих символа M, т.е. кодирующих примитивно рекурсивные функции. Такая кодировка примитивно рекурсивных функций допускает чисто синтаксический перевод в клиниевскую систему равенств, поэтому существует примитивно рекурсивная функция ф, такая, что если x – геделевский номер примитивно рекурсивной функции в нашей записи, то ф(x) – геделевский номер той же функции в «клиниевской» записи. Обозначим частично-рекурсивную функцию с геделевским номером n через φ_n, имея в виду «клиниевский» способ нумерации, и через ψ_n, имея в виду наш способ нумерации. Тогда

$$\psi_t = \varphi_{\phi(t)}. \qquad (2)$$

Пусть $T(x,y,z) == t(x,y,z)=0$, где t – трехместная примитивно рекурсивная функция, представляющая клиниевский предикат $T_1(x,y,z)$. Таким образом, $t(x,y,z)=0$ тогда и только тогда, когда z есть геделевский номер протокола вычисления частично-рекурсивной функции с «клиниевским» геделевским номером x на аргументе y. Одноместная примитивно рекурсивная функция U выделяет результат вычисления, т.е. $U(x)=y$, если y есть результат вычисления частично-рекурсивной функции, протокол вычисления которого имеет геделевский номер x. Тогда

$$\varphi_x(y)=z == \exists u(T(x,y,u) \wedge U(u)=z).$$

По (2),

$$\psi_x(y)=z == \exists u(T(\phi(x),y,u) \wedge U(u)=z).$$

Лемма 1. *Функция* $\xi(x) == \psi_x(0)$ *не является примитивно рекурсивной.*

Доказательство. Пусть даны произвольные натуральные числа m и n. Положим $f(x) == x+m$. Композиция $C\psi_n f$ есть примитивно рекурсивная функция $\psi_n(x+m)$. Ее геделевский номер k вычисляется по m и n с \`помощью примитивно рекурсивной функции $k(m,n)$. Тогда $\psi_{k(m,n)}(x)=\psi_n(x+m)$, значит, $\psi_{k(m,n)}(0)=\psi_n(m)$. Но $\psi_{k(m,n)}(0)=\xi(k(m,n))$. Тогда, если функция ξ примитивно рекурсивна, то $W == C\xi k$ есть двуместная примитивно рекурсивная функция, являющаяся универсальной для класса всех одноместных примитивно рекурсивных функций:

$$W(m,n)=C\xi k(m,n)=\xi(k(m,n))=\psi_{k(m,n)}(0)=\psi_n(m).$$

Однако такой универсальной функции не существует. Действительно, пусть p – номер примитивно рекурсивной функции $W(x,x)+1$ относительно универсальной функции W, т.е. $W(x,x)+1=W(p,x)$ для любого x. В частности, $W(p,p)+1=W(p,p)$. Противоречие. □

Введем понятие примитивно рекурсивной (сокращенно: PR) реализуемости для арифметических формул, несколько модифицированное по сравнению с определением С.Салехи из [9], однако эквивалентное ему.

Определение 1. Формулу $x\mathbf{r}^{pr}A$ определяем индукцией по построению арифметической формулы A языка базисной арифметики:

1. $x\mathbf{r}^{pr}p == p$ для атомарных p и $p = \top, \perp$;
2. $x\mathbf{r}^{pr}(A \wedge B) == (\pi_1(x)\mathbf{r}^{pr}A) \wedge (\pi_2(x)\mathbf{r}^{pr}B)$;

3. $\mathbf{x}\mathbf{r}^{pr}(A\vee B)==(\pi_1(x)=0\wedge\pi_2(x)\mathbf{r}^{pr}A)\vee(\sim\pi_1(x)=0\wedge\pi_2(x)\mathbf{r}^{pr}B)$;
4. $x\mathbf{r}^{pr}(A\to B)==\forall y(y\mathbf{r}^{pr}A\to\psi_x(y)\mathbf{r}^{pr}B)$;
5. $x\mathbf{r}^{pr}\exists zA(z)==\pi_2(x)\mathbf{r}^{pr}A(\pi_1(x))$;
6. $x\mathbf{r}^{pr}\forall\mathbf{z}:(A(\mathbf{z}).B(\mathbf{z}))==\forall y,\mathbf{z}(y\mathbf{r}^{pr}A(\mathbf{z})\to\psi_x(\langle y,\mathbf{z}\rangle)\mathbf{r}^{pr}B(\mathbf{z}))$.

Определение 2. Секвенцию $x\mathbf{r}^{pr}(A(\mathbf{z})\Rightarrow B(\mathbf{z}))$ определяем следующим образом:

7. $x\mathbf{r}^{pr}(A(\mathbf{z})\Rightarrow B(\mathbf{z}))==y\mathbf{r}^{pr}A(\mathbf{z})\Rightarrow\psi_x(\langle y,\mathbf{z}\rangle)\mathbf{r}^{pr}B(\mathbf{z})$, причем кортеж $\mathbf{z}$ может быть пустым.

Определение 3. Замкнутая арифметическая формула A называется *PR-реализуемой* (запись: $\mathbf{r}^{pr}A$), если существует такое число x (называемое *PR-реализацией* формулы A), что арифметическая формула $x\mathbf{r}^{pr}A$ истинна в стандартной интерпретации арифметики.

Каждой секвенции сопоставляется формула – *формульный образ* данной секвенции. А именно, если дана секвенция вида

$$A_1,\ldots,A_n\Rightarrow B_1,\ldots,B_m,$$

то ей сопоставляется формула

$$T\wedge A_1\wedge\ldots\wedge A_n\to B_1\vee\ldots\vee B_m\vee\perp.$$

Определение 4. Секвенцию $A\Rightarrow B$, где A и B – замкнутые арифметические формулы, будем называть *PR-реализуемой* (запись: $\mathbf{r}^{pr}(A\Rightarrow B)$), если существует такое число x (называемое *PR-реализацией* секвенции $A\Rightarrow B$), что формульный образ секвенции $x\mathbf{r}^{pr}(A\Rightarrow B)$ истинен в стандартной интерпретации арифметики при любом значении свободной переменной.

С.Салехи доказал теорему о корректности базисной арифметики BA относительно PR-реализуемости:

Теорема 2. Если $BA\vdash A\Rightarrow B$, то $BA\vdash n\mathbf{r}^{pr}(A\Rightarrow B)$ для некоторого натурального числа n.

Доказательство. См. [9]. □

Заметим, что применить понятие PR-реализуемости к арифметической формуле, записанной в обычном языке арифметики, нельзя, так как не сформулировано понятие PR-реализуемости для формул вида $\forall x$ A, где формула A имеет вид, отличный от импликации.

Можно дать другое определение PR-реализуемости для арифметических формул в обычном языке арифметики. Будем называть такую PR-реализуемость *PR-реализуемостью «по Клини»* в отличие от введенной нами ранее PR-реализуемости «по Салехи»:

6*. $x\mathbf{r}^{pr}\forall z\,A(\mathbf{z})==\forall z(\psi_x(z)\mathbf{r}^{pr}A(z))$

(все прочие пункты определения совпадают с определением 1 PR-реализуемости «по Салехи»). Такую PR-реализуемость будем обозначать через $x\mathbf{r}^{pr}{}_{Kl}A$. Напомним, что для любого x функция ψ_x является примитивно рекурсивной.

Связь между двумя определениями PR-реализуемости для арифметических формул устанавливает

Теорема 3. *Пусть* $F(x_1,\ldots,x_n)$ – *арифметическая формула в обычном языке, не содержащая параметров, отличных от* $x_1,\ldots,x_n$. *Тогда существуют* (n+1)*-местные примитивно рекурсивные функции* α_F *и* β_F *такие, что каковы бы ни были числа* $k_1,\ldots,k_n$, *выполняется:*

1) *если* $e\mathbf{r}^{pr}{}_{Kl}F(k_1,\ldots,k_n)$, *то* $\alpha_F(e,k_1,\ldots,k_n)\mathbf{r}^{pr}F^b(k_1,\ldots,k_n)$;

2) *если* $e\mathbf{r}^{pr}F^b(k_1,\ldots,k_n)$, *то* $\beta_F(e,k_1,\ldots,k_n)\ \mathbf{r}^{pr}{}_{Kl}F(k_1,\ldots,k_n)$.

В частности, замкнутая арифметическая формула F *PR-реализуема «по Клини» тогда и только тогда, когда ее перевод* F^b *PR-реализуем «по Салехи».*

Доказательство. См. [10]. □

Пример 1. *Неверно, что* $\mathbf{r}^{pr}\forall x{:}T.\exists y(\psi_x(0)=y)$. *Однако верно, что* $\mathbf{r}^{pr}{}_{Kl}\forall x(T\to\exists y(\psi_x(0)=y))$.

Доказательство. Покажем, что формула $\forall x{:}T.\exists y(\psi_x(0)=y)$ не является PR-реализуемой «по Салехи». Действительно, если для некоторого натурального числа e формула $e\mathbf{r}^{pr}\forall x{:}T.\exists y(\psi_x(0)=y)$ истинна в стандартной интерпретации арифметики, то, по определению 1, формула $\forall u,x(u\mathbf{r}^{pr}T\to\psi_e(\langle u,x\rangle)\mathbf{r}^{pr}\exists y(\psi_x(0)=y))$ истинна в стандартной интерпретации арифметики. Это справедливо тогда и только тогда, когда формула $\forall x(T\to\psi_{e^*}(x)\mathbf{r}^{pr}\exists y(\psi_x(0)=y))$ истинна в стандартной интерпретации арифметики. Здесь e* обозначает номер примитивно рекурсивной функции, такой, что $\psi_{e^*}(x_1,x_2,\ldots,x_l)=\psi_e(0,x_1,x_2,\ldots,x_l)$, т.е. изъят один не влияющий на результат параметр, соответствующий PR-реализации истины T. Значит, для любого числа x формула $\psi_{e^*}(x)\mathbf{r}^{pr}\exists y(\psi_x(0)=y)$ истинна в стандартной интерпретации арифметики. Значит, формула $\pi_2(\psi_{e^*}(x))\mathbf{r}^{pr}(\psi_x(0)=\pi_1(\psi_{e^*}(x)))$ истинна в стандартной интерпретации арифметики, т.е. существует примитивно рекурсивная функция $C\pi_1\psi_{e^*}$ такая, что $C\pi_1\psi_{e^*}(x)=\psi_x(0)$. Противоречие с леммой 1.

В то же время верно, что $\mathbf{r}^{pr}{}_{Kl}\forall x(T\to\exists y(\psi_x(0)=y))$. Действительно, для того чтобы формула $\forall x(T\to\exists y(\psi_x(0)=y))$ была PR-реализуемой по Клини, нам требуется по данному x найти номер примитивно рекурсивной функции, отображающей любое число в PR-реализацию формулы $\exists y(\psi_x(0)=y)$. Таким номером будет число $\Lambda t.\langle C\psi_x0(t),0\rangle$. Здесь 0 обозначает тождественно равную нулю примитивно рекурсивную функцию. Подчеркиваем, что нам не потребовалось искать значение $C\psi_x0(t)$, а потребовалось лишь указать способ ее вычисления (так как $\psi_x 0(t)$ является примитивно рекурсивной, то полученная функция примитивно рекурсивна, как композиция примитивно рекурсивных функций). □

Будем называть арифметическую формулу *негативной*, если она не содержит связки дизъюнкции $\vee$ и квантора существования $\exists$.

Следующая лемма справедлива как для PR-реализуемости «по Салехи», так и для PR-реализуемости «по Клини».

Лемма 2. *Пусть* $A(x_1,\ldots,x_n)$ *– негативная арифметическая формула, не содержащая параметров, отличных от* $x_1,\ldots,x_n$. *Тогда, каковы бы ни были числа* $k_1,\ldots,k_n$, *формула* $A(k_1,\ldots,k_n)$ *PR-реализуема тогда и только тогда, когда она классически истинна в стандартной интерпретации языка арифметики. В частности, если A – замкнутая негативная арифметическая формула, то формула A PR-реализуема тогда и только тогда, когда она классически истинна.*

Доказательство. Проводим рассуждения для PR-реализуемости «по Салехи» индукцией по построению негативной формулы $A(x_1,\ldots,x_n)$. При этом будем иметь в виду, что в некоторых подформулах формулы A некоторые переменные из списка $x_1,\ldots,x_n$ могут и не встречаться. Параллельно с доказательством леммы 2 мы для каждой негативной формулы $A(x_1,\ldots,x_n)$ будем строить n-местную примитивно рекурсивную функцию g_A такую, что каковы бы ни были натуральные числа $k_1,\ldots,k_n$, если формула $A(k_1,\ldots,k_n)$ PR-реализуема, то

$$g_A(k_1,\ldots,k_n)\mathbf{r}^{pr}A(k_1,\ldots,k_n).$$

В частности, если A – замкнутая формула, то $g_A(0,\ldots,0)$ есть такое число, что если формула A PR-реализуема, то $g_A(0,\ldots,0)\mathbf{r}^{pr}A$.

Приведем здесь доказательство для случая, когда A – атомарная формула (в частности, T или $\perp$). В этом случае, по определению 1, каковы бы ни были натуральные числа $k_1,\ldots,k_n$,

$$x\mathbf{r}^{pr}A(k_1,\ldots,k_n)=A(k_1,\ldots,k_n).$$

По определению 3 формула $A(k_1,\ldots,k_n)$ PR-реализуема тогда и только тогда, когда формула $A(k_1,\ldots,k_n)$ является классически истинной в стандартной интерпретации языка арифметики.

$$g_A(k_1,\ldots,k_n)==0.$$

Доказав лемму 2 для PR-реализуемости «по Салехи», с помощью теоремы 3 получаем доказательство и для PR-реализуемости «по Клини», так как преобразование $(\ )^b$ не меняет классической истинности формулы в стандартной интерпретации языка арифметики. □

Неарифметичность логики предикатов

Арифметическим примером предикатной формулы F будем называть арифметическую формулу $F(\lfloor\Phi\rfloor)$, где Φ – ряд арифметических формул, допустимый для подстановки в F, а $F(\lfloor\Phi\rfloor)$ – результат подстановки арифметических формул из ряда Φ вместо предикатных букв F.

Определение 5. Будем говорить, что замкнутая предикатная формула F *PR-реализуема «по Салехи»* (*«по Клини»*), если любой ее замкнутый арифметический пример PR-реализуем «по Салехи» («по Клини»). Обозначение: $\mathbf{r}^{pr}F$ ($\mathbf{r}^{pr}_{Kl}F$).

Теорема 4. *Пусть* F *есть замкнутая предикатная формула языка* BQC. *Тогда, если* BQC $\vdash\Rightarrow F$, *то* $\mathbf{r}^{pr}F$.

Доказательство. Пусть BQC $\vdash\Rightarrow F$, т.е. существует какой-то вывод секвенции $T\Rightarrow F$ в системе BQC. Если Φ есть ряд арифметических формул, допустимый для подстановки в F, то, заменяя каждую формулу в этом выводе на ее арифметический пример, получим вывод секвенции $T\Rightarrow F(\lfloor\Phi\rfloor)$ в системе BA. Значит, по теореме 2, существует число n такое, что BA $\vdash \mathbf{n}\mathbf{r}^{pr}(T\Rightarrow F(\lfloor\Phi\rfloor))$. Следовательно, BA $\vdash T\Rightarrow\psi_n(0)\mathbf{r}^{pr}F(\lfloor\Phi\rfloor)$, значит формульный образ секвенции $T\Rightarrow\psi_n(0)\mathbf{r}^{pr}F(\lfloor\Phi\rfloor)$ классически истинен, следовательно, формула $\psi_n(0)\mathbf{r}^{pr}F(\lfloor\Phi\rfloor)$ классически истинна, поэтому арифметический пример $F(\lfloor\Phi\rfloor)$ PR-реализуем. По определению 5, справедливо $\mathbf{r}^{pr}F$. □

В работе В.Е.Плиско [2] (см. также [3, 5, 6]) доказано, что множество всех реализуемых предикатных формул (т.е. реализуемых по Клини) неарифметично. Аналогичный результат справедлив и для PR-реализуемости:

Теорема 5. *Множество всех замкнутых PR-реализуемых предикатных формул неарифметично.*

Доказательство теоремы 5, однако, не является прямым следствием результатов из [2]. Укажем общую схему доказательства.

Как и в [6], через T^2 обозначим некоторое расширение формальной системы интуиционистской арифметики HA (в работе [5] вместо обозначения T^2 использовалось обозначение CHA^2). T^2 содержит как бы «два набора арифметики» – саму систему HA и систему, которая получается из нее заменой каждого (скажем, n-местного) функционального символа f на (n+1)-местный предикатный символ P_f. Описанную операцию, превращающую арифметическую формулу в предикатную, будем обозначать через F', а обратную ей – через F° (подробнее о системе T^2 см. [5], [6]).

Система T^2 непротиворечива относительно HA.

Теорема 6. *Для негативных замкнутых арифметических формул F справедливо* $T^2 \vdash F \equiv F'$.

Доказательство. [5, Теорема 7]. □

Пусть F – замкнутая негативная арифметическая формула в языке НА. По теореме 6 имеем $T^2 \vdash F \equiv F'$. Этот вывод содержит конечное число аксиом теории T^2. Обозначим конъюнкцию этого множества аксиом через $Eq \wedge Ar \wedge Ind \wedge Q$, где Ar – конъюнкция аксиом в чистом языке арифметики НА без аксиом индукции, Q – конъюнкция аксиом в чисто предикатном языке без аксиом индукции, Eq – конъюнкция аксиом равенства для предикатных символов, Ind – конъюнкция примеров аксиом индукции. Получаем, что в секвенциальном интуиционистском исчислении предикатов выводима формула $Eq \wedge Ar \wedge Ind \wedge F \wedge Q \Rightarrow F'$. По теореме Ардешира (теорема 1) получаем

$$\vdash_{BQC}(Eq^b_n \wedge Ar^b_n \wedge Ind^b_n \wedge F^b_n \wedge Q^b_n) \Rightarrow F'^b_n$$

для всех достаточно больших чисел n. По теореме о корректности базисной арифметики (теорема 2) получаем

$$\mathbf{r}^{pr}(Eq^b_n(\lfloor\Phi\rfloor) \wedge Ar^b_n(\lfloor\Phi\rfloor) \wedge Ind^b_n(\lfloor\Phi\rfloor) \wedge F^b_n(\lfloor\Phi\rfloor) \wedge \\ \wedge Q^b_n(\lfloor\Phi\rfloor) \Rightarrow F'^b_n(\lfloor\Phi\rfloor)) \qquad (3)$$

где Φ – произвольный ряд арифметических формул Φ, допустимых для подстановки в формулы Ar^b_n, Ind^b_n, F'^b_n и Q^b_n. Используя лемму 2, можно доказать, что PR-реализуемы формулы $Ar^b_n(\Phi)$, $Q^{ob}_n(\Phi)$, $F^b_n(\Phi)$. Доказывается, что по PR-реализации формулы Q^b_n примитивно рекурсивным способом можно найти PR-реализации формул $Ind^b_n(\Phi)$ и $Eq^b_n(\Phi)$.

Пусть $F^* == Q^b_n \rightarrow F'^b_n$. Используя (3), можно доказать следующую лемму:

Лемма 3. Если формула F является замкнутой негативной арифметической формулой, то для достаточно больших натуральных чисел n справедливо, что $\mathbf{r}^{pr}F^b$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{r}^{pr}F^*$.

Очевидно, что любая арифметическая формула классически эквивалентна некоторой негативной арифметической формуле. Тогда, в силу теоремы Тарского, множество всех замкнутых классически истинных негативных арифметических формул неарифметично. По лемме 2 это множество совпадает с множеством всех замкнутых PR-реализуемых негативных арифметических формул. Поэтому множество PR-реализуемых негативных арифметических формул неарифметично. По лемме 3, множество PR-реализуемых негативных арифметических формул 1-1 сводится к множеству PR-реализуемых предикатных формул. Следовательно, множество PR-реализуемых предикатных формул неарифметично. □

Введем определения PR-неопровержимой предикатной формулы и PR-неопровержимой секвенции.

Пусть A – предикатная формула языка BQC. Пусть $P_1,\ldots,P_k$ – набор входящих в нее предикатных символов $P_i(x_1,\ldots,x_{n\,i})$. Вместо A будем тогда писать $A(P_1,\ldots,P_k)$.

Определение 6. Будем говорить, что система арифметических формул $\Phi_1(x,\mathbf{x}),\ldots,\Phi_k(x,\mathbf{x})$ является *PR-опровержением* формулы A, если арифметическая формула $\forall x{:}T.A(\Phi_1,\ldots,\Phi_k)$ не PR-реализуема. Если у формулы A нет PR-опровержения, то она называется *PR-неопровержимой.*

Теорема 7. *Множество всех замкнутых PR-неопровержимых предикатных формул неарифметично.*

Пусть $A\Rightarrow B$ – секвенция, где A, B – предикатные формулы языка BQC. Пусть $P_1,\ldots,P_k$ – набор входящих в них предикатных символов $P_i(x_1,\ldots,x_{ni})$. Вместо $A\Rightarrow B$ будем тогда писать $A(P_1,\ldots,P_k)\Rightarrow B(P_1,\ldots,P_k)$.

Определение 7. Будем говорить, что система арифметических формул $\Phi_1(x,\mathbf{x}),\ldots,\Phi_k(x,\mathbf{x})$ является *PR-опровержением* секвенции $A\Rightarrow B$, если для любого числа x и любых значений параметров $\mathbf{x}$ секвенция $A(\Phi_1(x,\mathbf{x}),\ldots,\Phi_k(x,\mathbf{x}))\Rightarrow B(\Phi_1(x,\mathbf{x}),\ldots,\Phi_k(x,\mathbf{x}))$ не PR-реализуема. Если у секвенции $A\Rightarrow B$ нет PR-опровержения, то она называется *PR-неопровержимой.*

Лемма 4. *Замкнутая предикатная формула* $A(P_1,\ldots,P_k)$ *PR-неопровержима тогда и только тогда, когда секвенция* $T\Rightarrow A(P_1,\ldots,P_k)$ *PR-неопровержима.*

Теорема 8. *Множество всех PR-неопровержимых секвенций неарифметично.*

Доказательство. По лемме 4, множество PR-неопровержимых предикатных формул 1-1 сводится к множеству PR-неопровержимых секвенций (1-1 сводящей функцией является функция $f(A)==T\Rightarrow A$). По теореме 5 множество всех PR-неопровержимых предикатных формул неарифметично. Следовательно, множество всех PR-неопровержимых секвенций неарифметично. □

В заключение приведем пример интуиционистски выводимой секвенции, которая является PR-опровержимой.

Рассмотрим интуиционистски выводимую секвенцию $(T\rightarrow P)\Rightarrow P$, где P – некоторый предикатный символ. Укажем арифметическую формулу F(x), которая будет PR-опровержением секвенции $(T\rightarrow P)\Rightarrow P$.

Пусть $F(x)==\exists y(\psi_x(0)=y)$. Покажем, что формула F(x) является PR-опровержением секвенции $(T\rightarrow P)\Rightarrow P$, т.е. секвенция

$(T \to \exists y(\psi_x(0)=y)) \Rightarrow \exists y(\psi_x(0)=y)$ (4)

не PR-реализуема. Действительно, допустим, что число e PR-реализует секвенцию (4). Это значит, что каково бы ни было число x, если $a\mathbf{r}^{pr}(T \to \exists y(\psi_x(0)=y))$, то $\psi_e(\langle a,x\rangle)\mathbf{r}^{pr}\exists y(\psi_x(0)=y)$. Как и в примере 1, имеем, что $\Lambda t.\langle C\psi_x 0(t),0\rangle\mathbf{r}^{pr}(T \to \exists y(\psi_x(0)=y))$ (здесь 0(t) обозначает тождественно равную нулю примитивно рекурсивную функцию). Значит, $\psi_e(\langle\Lambda t.\langle C\psi_x 0(t),0\rangle,x\rangle)\mathbf{r}^{pr}\exists y(\psi_x(0)=y)$. Получили примитивно рекурсивный способ вычисления $\psi_x(0)$ по x, что противоречит лемме 1.

Итак, интуиционистски выводимая секвенция $(T \to P) \Rightarrow P$, где P есть некоторый предикатный символ, является PR-опровержимой.

Автор благодарит своего научного руководителя В.Е.Плиско за постановку задачи и ценные обсуждения, а также А.В.Чагрова и В.Х.Хаханяна за полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. Москва: ИЛ, 1957.
2. *Плиско В.Е.* О реализуемых предикатных формулах // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212, № 3. С. 553-556.
3. *Плиско В.Е.* Неарифметичность класса реализуемых предикатных формул // Известия АН СССР. 1977. Т. 41, № 3. С. 483-502.
4. *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica. 1981. Vol. 40. P. 155-175.
5. *Плиско В.Е.* Конструктивная формализация теоремы Тенненбаума и ее применения // Математические заметки. 1990. Т. 48, № 3. С. 108-118.
6. *Плиско В.Е.* Формализация теоремы Тенненбаума и ее применения // Депонировано в ВИНИТИ. 1992. № 1853-В92.
7. *Ruitenburg W.* Basic Logic and Fregean set theory // H.Barendregt, M.Bezem, J.W.Klop (eds). Dirk Van Dalen Festschrift, Quaestions Infinitae. Department of Philosopy. Utrecht University, 1993, vol. 5. P. 122-142.
8. *Ardeshir M.* A Translation of Intuitionistic Predicate Logic into Basic Predicate Logic // Studia Logica. 1999. Vol. 62. P. 341-352.
9. *Salehi S.* Primitive Recursive Realizability and Basic Arithmetic // The Bulletin of Symbolic Logic. 2001. Vol. 7. № 1. P. 147-148.
10. *Витер Д.А.* Примитивно рекурсивная реализуемость и логика предикатов // Рукопись депонирована в ВИНИТИ. 06.08.2001. № 1830-В2001. 86 с.

Ю.В.Ивлев

ОСНОВНЫЕ ОБЛАСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ КВАЗИМАТРИЧНОЙ ЛОГИКИ*

Abstract. *The basic notion of quasi-matrix logic is a notion of quasi-matrix. A set* $(Q,G,qf_1,...,qf_s)$ *is a quasi-matrix.* Q *and* G *are non-empty sets.* $Q \subseteq G$; $qf_1,...,qf_s$ *are quasi-functions.*

This logic had been created to describe connections between statements containing notions "necessity", "possibility", "contingency" and some others meaning as factual (physical, ontological) modalities. The main systems of four-valued and three-valued quasi-matrix logic are presenting in [1-6].

Quasi-matrix logic has been applied to the fields beyond logic (theory of notion, philosophical categories, theory of argumentation, etc) and in the other parts of logic as well. These fields are para-consistent logic for dubitable information, logic of propositional attitudes, three-valued and five-valued logic of norms.

Основным понятием квазиматричной логики является понятие квазиматрицы. Квазиматрица – это множество $(Q,G,qf_1,...,qf_s)$, где Q и G – непустые множества, $Q \subset G$; $qf_1,...,qf_s$ – квазифункции.

Эта логика создавалась для описания связей по логическим формам между суждениями, содержащими выражения «необходимо», «случайно», «возможно» и некоторые другие, понимаемые как фактические (физические, онтологические) алетические модальности. Основные системы четырехзначной и трехзначной алетической модальной логики изложены в [1–6].

Квазиматричная логика нашла приложение вне логики (философские категории, теория аргументации, теория абстрактных автоматов и т. д.), а также в других разделах логической науки. Укажем некоторые из этих разделов.

1. Квазиматричная паранепротиворечивая логика высказываний, которыми выражается сомнительная информация

Язык этой логики содержит логические термины $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, соответственно понимаемые как знаки отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и импликации, а также символы T и K, которые соответственно читаются «достоверно известно» и «известно».
Определение формулы обычное. Определения логических терминов:

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 00-03-00319.

A	**¬A**	**TA**	**KA**	**∧**	**n**	**c**	**i**	**∨**	**n**	**c**	**i**	**⊃**	**n**	**c**	**i**
n	**i**	**n**	**n**	**n**	**n**	**c**	**i**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**	**c**	**i**
c	**c**	**i**	**n**	**c**	**c**	**i|c**	**i**	**c**	**n**	**n|c**	**c**	**c**	**n**	**n|c**	**c**
i	**n**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**n**	**c**	**i**	**I**	**n**	**n**	**n**

Значения **n**, **c**, **i** понимаются, соответственно, так: «высказывание является несомненно истинным», «информация, выражаемая высказыванием, является сомнительной», «высказывание является несомненно ложным». Выражения **i|c** и **n|c** соответственно читаются «то ли **i**, то ли **c**», «то ли **c**, то ли **n**». Выделенное значение **n**.

Исчисление, формализующее семантически построенную логику, содержит схемы аксиом, совпадающие со схемами аксиом классического исчисления высказываний, в которых метапеременные обозначают модализированные формулы, а также следующие схемы аксиом, в которых метапеременные обозначают любые формулы системы:

$TA \supset A$; $\neg A \supset \neg TA$; $A \supset KA$; $\neg KA \supset \neg A$;
$TA \supset KA$; $\neg T\neg A \supset KA$; $KA \supset \neg T\neg A$;
$TA \supset TTA$; $KTA \supset TA$; $KA \supset TKA$; $KKA \supset KA$;
$\neg KA \supset T(A \supset B)$; $TB \supset T(A \supset B)$;
$T(A \supset B) \supset (TA \supset TB)$; $T(A \supset B) \supset (KA \supset KB)$; $K(A \supset B) \supset (TA \supset KB)$; $KB \supset K(A \supset B)$; $K\neg A \supset K(A \supset B)$;
$TA\wedge TB \supset T(A\wedge B)$; $KA\wedge TB \supset K(A\wedge B)$; $TA\wedge KB \supset K(A\wedge B)$; $T(A\wedge B) \supset TA\wedge TB$; $K(A\wedge B) \supset KA\wedge KB$;
$TA\vee(KA\wedge K\neg A)\vee\neg KA$;
$TA\vee TB \supset T(A\vee B)$; $KA\vee KB \supset K(A\vee B)$; $T(A\vee B) \supset TA\vee KB$;
$T(A\vee B) \supset KA\vee TB$; $K(A\vee B) \supset KA\vee KB$.

Правила вывода: modus ponens; правило замены формулы $\neg\neg A$ на A и vice versa; правило Гёделя – $A \Rightarrow TA$.

Определение доказательства обычное.

Для доказательства метатеоремы о семантической полноте вводится понятие альтернативной интерпретации.

Альтернативная интерпретация – это функция $\| \ \|$. Ее определение:

Если P – пропозициональная переменная, то $\|P\| \in \{n, c, i\}$.

Если $\|A\|$ и $\|B\|$ определены, то

$\|\neg A\| = n \Leftrightarrow \|A\| = i$; $\|\neg A\| = c \Leftrightarrow \|A\| = c$; $\|\neg A\| = i \Leftrightarrow \|A\| = n$;
$\|A\wedge B\| = n \Leftrightarrow \|A\| = \|B\| = n$;
если ($\|A\| = n$ и $\|B\| = c$) или ($\|A\| = c$ и $\|B\| = n$), то $\|A\wedge B\| = c$;
если $\|A\| = i$ или $\|B\| = i$, то $\|A\wedge B\| = i$;
если $\|A\| = \|B\| = c$, то $\|A\wedge B\| \in \{i, c\}$;
если $\|A\| = n$ или $\|B\| = n$, то $\|A\vee B\| = n$;
если $\|A\| = \|B\| = c$, то $\|A\vee B\| \in \{n, c\}$;

если $||A|| = ||B|| = i$, то $||A \vee B|| = i$;
если ($||A|| = i$ и $||B|| = c$) или ($||A|| = c$ и $||B|| = i$), то $||A \vee B|| = c$;
если $||A|| = i$ или $||B|| = n$, то $||A \supset B|| = n$;
если $||A|| = ||B|| = c$, то $||A \supset B|| \in \{n, c\}$;
если $||A|| = c$ и $||B|| = i$, то $||A \supset B|| = c$;
$||A|| = n$ и $||B|| = i \Leftrightarrow ||A \supset B|| = i$;
$||TA|| = n \Leftrightarrow ||A|| = n$; если $||A|| = c$ или $||A|| = i$, то $||TA|| \in i$;
$||KA|| = i \Leftrightarrow ||A|| = i$; если $||A|| = n$ или $||A|| = c$, то $||KA|| = n$.

В качестве метатеоремы о семантической полноте доказывается утверждение: *множество формул Δ, совместимое с исчислением, выполнимо.* Множество формул Δ расширяется до максимального совместимого с исчислением множества формул Θ. Вводится функция $|| \; ||_{\Theta}$ такая, что для произвольной формулы A верно: $||A||_{\Theta} = n \Leftrightarrow TA \in \Theta$; $||A||_{\Theta} = c \Leftrightarrow KA \in \Theta$ и $K\neg A \in \Theta$; $||A||_{\Theta} = i \Leftrightarrow \neg KA \in \Theta$. Индукцией по числу вхождений логических терминов в формулу доказывается, что функция $||A||_{\Theta}$ является альтернативной интерпретацией.

Очевидно, что функция $|| \; ||_{\Theta}$ приписывает выделенное значение каждой формуле из Δ.

Соотношение принципов классической, построенной паранепротиворечивой, релевантной логик и логики, двойственной логике Хао Вана, представлено в следующей таблице.

Классическая логика	Паранепро-тиворечивая	Релевантная	Двойст-венная Хао Вану
(1) принцип двухзначности – высказывания принимают значения из области {t, f}	принцип трехзначности: из области {n, c, i}	принцип трехзначности: из области {n, c, i}	принцип трехзначности: из области {n, c, i}
(2) принцип непротиворечия: высказывание не может иметь оба значения	непротиворечия: не может иметь более одного значения из из области {n, c, i}	может иметь два и три	может иметь два и три
(3) принцип исключенного третьего: высказывание обязательно принимает значение из указанной области	принцип исключенного четвертого	–	принцип исключенного четвертого

(4) принцип тождества: в сложном высказывании, системе высказываний, аргументации одно и то же высказывание принимает одно и то же значение из области {t,f}	тождества: из области {n, c, i}	–	–
(5) принцип обусловленности истинностного значения сложного высказывания истинностными значениями составляющих его простых высказываний (в пропозициональной логике этот принцип выступает в качестве принципа матричности – логические термины определяются посредством матриц, в логике предикатов он выражается в интерпретации логических терминов посредством функций).	принцип квазиматричности: логические термины интерпретируются посредством квазиматриц	принцип квазиматричности	принцип квазиматричности

Описание состояний классической логики: $\{a'_1, ..., a'_r, ...\}$. a'_m есть a_m или $\neg a_m$. Описаниями состояний релевантной логики являются все подмножества множества $\{a_1^n, a_1^c, a_1^i, ..., a_r^n, a_r^c, a_r^i, ...\}$. Если α – описание состояний релевантной логики, то переменная a_m принимает значение n в α если и только если $a_m^n \in \alpha$, a_m принимает значение c, если и только если $a_m^c \in \alpha$, a_m принимает значение i, если и только если $a_m^i \in \alpha$. Определение релевантной импликации: $\models A \rightarrow B \Leftrightarrow A \models B \Leftrightarrow$ информация B относительно всех описаний состояний (I(B,M)) есть часть информации A относительно всех описаний состояний (I(A, M)) $\Leftrightarrow M_A \subseteq M_B$. ($M_A$ и M_B – все описания состояний, в которых A, соответственно B, имеет значение n. Описаниями состояний логики, дуальной логике Хао Вана, являются все подмножества множества $\{a_1^n, a_1^c, a_1^i, ..., a_r^n, a_r^c, a_r^i, ...\}$, для которых верно: $\forall' a_s(a_s^n \in \alpha \vee' a_s^c \in \alpha \vee' a_s^i \in \alpha)$. $\forall'$ и $\vee'$ – метаязыковые символы.

Исчисление, формализующее описанную семантику релевантной логики, содержит схемы аксиом, совпадающие со схемами аксиом исчисления Е. В этих схемах аксиом метапеременные обозначают модализированные формулы, главный знак импликации соответствует релевантной импликации, а остальные вхождения знака импликации соответствуют материальной импликации. Дополнительными схемами аксиом являются следующие 28 схем, метапеременные в которых обозначают любые формулы:

$TA \to KA$; $TA \to A$;
$\neg A \to \neg TA$; $A \to KA$; $\neg KA \to \neg A$;
$\neg T \neg A \to KA$; $KA \to \neg T \neg A$;
$TA \to TTA$; $KTA \to TA$;
$KA \to TKA$; $KKA \to KA$;
$\neg KA \to T(A \supset B)$; $TB \to T(A \supset B)$;
$T(A \supset B) \to (TA \supset TB)$; $T(A \supset B) \to (KA \supset KB)$;
$K(A \supset B) \to (TA \supset KB)$; $KB \to K(A \supset B)$;
$K\neg A \to K(A \supset B)$; $TA \wedge TB \to T(A \wedge B)$;
$KA \wedge TB \to K(A \wedge B)$; $TA \wedge KB \to K(A \wedge B)$;
$T(A \wedge B) \to TA \wedge TB$; $K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$;
$TA \vee TB \to T(A \vee B)$; $KA \vee KB \to K(A \vee B)$;
$T(A \vee B) \to TA \vee KB$; $T(A \vee B) \to KA \vee TB$; $K(A \vee B) \to KA \vee KB$.

Правила вывода:
modus ponens $A \to B, A \Rightarrow B$;
введение конъюнкции $A, B \Rightarrow A \wedge B$;
правило замены произвольного вхождения $\neg\neg A$ на A и vice versa;
правило Геделя.

Логика, двойственная логике Хао Вана содержит, кроме базиса, аналогичного базису релевантной логики, те же 28 схем аксиом (где $\to$ – импликация Хао Вана) и дополнительную схему аксиом $TA \vee (KA \wedge K\neg A) \vee \neg KA$.

2. Логика пропозициональных установок

Символы $\Box_к$ и $\Diamond_к$ вводятся как сокращения для выражений «к уверен, что…», «к допускает, что…», соответственно. (Символ «к» можно опускать, если ясно, о каком субъекте идет речь. Язык содержит кроме этих и обычных символов следующие специальные символы: ′, *, +, $\to$ – соответственно суботрицание, субконъюнкция, субдизъюнкция и субимпликация; субпеременные а, б, в, $а_1$, … . Субпеременная является субформулой. Если А и В – субформулы, то A′, (A*B), (A + B), (A→ B) – субформулы. Если A – субформула, то $\oplus_{i1},\ldots,\ \oplus_{ir}A$ – формула (Индексы выражений $\oplus_{i1},\ldots,\ \oplus_{ir}$ различны, и $\oplus_{i1}$ есть $\Box_{i1}$ или $\Diamond_{i1}$ и т. д.) Если С и Д –формулы, то ¬С, (С∧Д) и т. д. – формулы. Субформула А может принимать значения n_k, i_k, c_k, которые соответственно означают: k уверен, что А истинно, k уверен, что А ложно, k допускает, что А истинно, и допускает, что А ложно. Определения:

A	¬A	$\Box_к$ A	$\Diamond_к$ A
n_k	i_k	t	t
c_k	c_k	f	t
i_k	n_k	f	f

A	B	(A* B)	(A + B)	(A→ B)
n	n	n	n	n
n	c	c	n	c
n	i	i	n	i
c	n	c	n	n
c	c	i/c	n/c	n/c
c	i	i	c	c
i	n	i	n	n
i	c	i	c	n
i	i	i	i	n

Выделенное значение – t.

Пусть дана формула $\Box_1\ \Box_2\ \Diamond_3\ \Diamond_4$(а+б). В каждой строке таблицы переменной приписываются четыре значения. Пусть в некоторой строке переменной а приписываются значения $n_1\ c_2\ i_3\ i_4$, а переменной б – $n_1\ c_2\ n_3\ i_4$.

Получаем:

$$\begin{array}{cccccccc} \Box_1 & \Box_2 & \Diamond_3 & \Diamond_4 & (& a & + & б\ ). \\ & & & & & n_1 & n_1 & n_1 \\ t & t/f & t & f & & c_2 & n_2/c_2 & c_2 \\ & & & & & i_3 & n_3 & n_3 \\ & & & & & i_4 & i_4 & i_4 \end{array}$$

Строка таблицы расщепляется на две подстроки:

$$\begin{array}{cccccccc} \Box_1 & \Box_2 & \Diamond_3 & \Diamond_4 & (& a & + & б\ ). \\ t & t & t & f \\ t & f & t & f \end{array}$$

$|\Box_1\ \Box_2\ \Diamond_3\ \Diamond_4\ (\ а\ +\ б\ )| = t$, если и только если $\forall_i\ |\oplus_i\ (а+б)| = t$, где i – переменная, область значений которой есть {1, 2, 3, 4}.

3. Трехзначная деонтическая логика

Язык содержит символы:

1) p, g, r, s, p_1, g_1, ... – переменные для деяний (действий и бездействий);
2) ·, ∪, ′ – знаки операций над деяниями, соответственно читаются «и», «или», «не» («воздержание от...»);
3) O, P – операторы, которые читаются «обязательно», «разрешено»;
4) ¬, ∧, ∨, ⊃ – логические связки:
5) скобки.

Определение субформулы:

1) переменная для деяний является субформулой;
2) если A и B являются субформулами, то A′, (A·B), (A∪B) – субформулы;
3) ничто иное не является субформулой.

Определение формулы:

1) если A – субформула, то OA, PA – формулы;
2) если B и C – формулы, то ¬B, (B∧C), (B∨C), (B⊃C) – формулы;
3) ничто иное формулой не является.

Определения:

A	A′
n	i
c	c
i	n

(A·B)	n	c	i
n	n	c	i
c	c	i/c	i
i	i	i	i

(A∪B)	n	c	i
n	n	n	n
c	n	n/c	c
i	n	c	i

Значения n, c, i соответственно читаются «обязательно», «безразлично», «запрещено». Операции ′, ·, ∪, имеют следующий смысл, соответственно. Выражение A′ обозначает деяние, заключающееся в воздержании от деяния A, выражение (A·B) – деяние, заключающееся в последовательном выполнении деяний A и B (A, а затем В) или же в одновременном выполнении этих деяний. Выражение $A \cup B$ обозначает деяние, заключающееся в выполнении или деяния А, или деяния В, или в последовательном выполнении деяний А и В (А, а затем В), или в одновременном выполнении этих деяний.

Определения терминов О и Р:

A	OA	PA
n	t	t
c	f	t
i	f	f

Формула принимает значения из области {t, f}. Выделенное значение – t. Определения терминов $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ обычные.

Формализацией семантически заданной логики является исчисление $S_{3д}$, содержащее схемы аксиом, совпадающие со схемами аксиом классического исчисления высказываний (КИВ), в которых метапеременные обозначают формулы (но не субформулы), а также следующие дополнительные схемы аксиом, в которых буквами А и В обозначены субформулы:

$OA \supset PA$, $\neg OA' \supset PA$,
$PA \supset \neg OA'$, $OA \wedge OB \supset O(A \cdot B)$,
$O(A \cdot B) \supset OA \wedge OB$,
$PA \wedge OB \supset P(A \cdot B)$,
$OA \wedge PB \supset P(A \cdot B)$,
$P(A \cdot B) \supset PA \wedge PB$,
$OA \vee OB \supset O(A \cup B)$,
$PA \vee PB \supset P(A \cup B)$,
$P(A \cup B) \supset PA \vee PB$,
$O(A \cup B) \supset PA \vee OB$, $O(A \cup B)\ ) \supset OA \vee PB$.

Правила вывода: modus ponens и замена произвольного вхождения субформулы A'' на А, и vice versa.

4. Пятизначная деонтическая логика

Язык содержит те же символы, что и язык трехзначной деонтической логики, за следующим исключением. Вместо символов О и Р используются символы Он, Ом, Рн, Рм, которые соответственно читаются «обязательно нормативно», «обязательно морально», «разрешено нормативно», «разрешено морально». Соответствующим образом изменяется определение формулы.

В семантике используются следующие значения субформул: о, о′, б, з, з′, которые соответственно читаются «обязательно», «одобряемо», «безразлично», «запрещено», «порицаемо».

Определения:

A	о	о′	б	з	з′
A′	з	з′	б	о	о′

Пусть | | – функция приписывания значений субформулам. $|A{\cdot}B| = \min(|A|, |B|)$, кроме случая, когда $|A| = |B| =$б. В этом случае $|A{\cdot}B| \in \{$б, з, з′$\}$. $|A \cup B| = \max(|A|, |B|)$, кроме случая, когда $|A| = |B|$ =б. В этом случае $|A \cup B| \in \{$б, о, о′$\}$.

A	OнA	OмA	PнA	PмA
о	t	t	t	t
о′	f	t	t	t
б	f	f	t	t
з′	f	f	t	f
з	f	f	f	f

t – выделенное значение. Остальные логические термины определяются обычным образом.

Формализация пятизначной деонтической логики, осуществленная моим учеником Кузнецовым А. М.:

1) схемы аксиом, совпадающие со схемами аксиом КИВ, в которых метапеременные обозначают формулы (но не субформулы);
2) дополнительные схемы аксиом, в которых буквами A и B обозначены субформулы:

OнA⊃OмA, OнA⊃PнA, OмA⊃PмA,
OнA⊃PмA, OмA⊃PнA,
¬OнA′ ≡ PнA, ¬OмA′ ≡ PмA,
PмA⊃PнA,
OнA∧OнB ≡ Oн(A·B), OмA∧OмB ≡ Oм(A·B),
OнA∧PнB ⊃ Pн(A·B), OнA∧OмB ⊃ Oм(A·B),
OмA∧PмB ⊃ Pм(A·B),
Pн(A·B) ⊃ PнA∧PнB, Pм(A·B) ⊃ PмA∧PмB,
¬PнA′ ⊃ PнA,
OнA ⊃ Oн(A∪B), OмA ⊃ Oм(A∪B),
PнA∨PнB ≡ Pн(A∪B), PмA∨PмB ≡ Pм(A∪B),
Oн(A∪B) ⊃ PнA∨OнB, Oм(A∪B) ⊃ PмA∨OмB,
PнA∧PнB′ ⊃ Pн(A·B)′, PмA∧PмB′ ⊃ Pм(A·B)′,
PнA ⊃ Pн(A∪B),
PмA′∨¬PмB ⊃ PM(A∪B)′;

3) правила вывода и определения те же, что и в предшествующей системе.

Возможно построение **шестизначной деонтической логики**, в которой значение «безразлично» заменяется двумя значениями: «безразлично юридически», «безразлично морально».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев В. Ю., Ивлев Ю. В.* Проблема построения теории фактических модальностей // Логические исследования. Вып. 7. М., 2000. С. 269-278.
2. *Ивлев Ю. В.* Таблицы истинности для модальной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Философия. 1973, № 6. С. 51-61.
3. *Ивлев Ю. В.* Содержательная семантика модальной логики. М., 1985. 170 с.
4. *Ивлев Ю. В.* Модальная логика. М., 1991. 224 с.
5. *Ивлев Ю. В.* Квазифункциональная логика // НТИ, сер. 2. Информ. процессы и системы. 1992. № 6.
6. *Ивлев Ю. В.* Квазиматричная логика – основа теории фактических модальностей // Логические исследования. Вып. 8. М., 2001. С. 50-64.
7. *Ivlev Y. V.* Theory of Logical Modalities // Multi. Val. Logic. 2000. Vol, 5. P. 91-102.
8. *Ivlev Y. V.* Outlines of the transition from the principles of traditional logic to the principles of non-classical logic // Zwischen traditioneller und modernen logik. Nichklassische Ansatze. Mentis, 2001. S. 297-310.
9. *Ivlev Y. V.* Quasi-matrix logic as a paraconsistent logic for dubitable information // Logic and Logical Philosofy. Vol. 8. 2000. P. 91-97.
10. *Ivlev Y. V.* Quasi-Functional Logic and Logic of Propositional Attitudes // Philosophie und Logik. Frege-Kolloquien, Jena, 1989/1991. Berlin; New York, 1993. S.200-204.
11. *Кузнецов А. М.* Квазиматричная логика норм. Автореферат дис. канд. филос. наук. М., 1998.

Е.Е.Ледников

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ИНДИВИДНЫЕ ДЕСКРИПЦИИ*

Abstract. *Logical analysis of the existence notion is closely related to treating individual descriptions as the type of denoting expressions. It is impossible to construct true statements about physically nonexistent objects, about mythological and literary persons in frame of extensional theories of individual descriptions, particularly in Russell's theory. However if existence of any object is understood as known or believed existence of it, then it is easy to ascribe in epistemic modal contexts to statements in question value "truth". It is necessary to revise Russell's contextual definitions of individual descriptions under such approach and to demand fulfilling so called epistemic existence and uniqueness condition by descriptions to make them genuine singular terms.*

Понятие существования является одним из самых запутанных в истории философии. Его логический анализ требует пристального внимания к обозначающим выражениям языка и структуре экзистенциальных высказываний. Мы полагаем, что при подобном анализе следует руководствоваться двумя бесспорными положениями: 1) что существование не является предикатом (И.Кант), и 2) что имена естественного языка на самом деле являются скрытыми дескрипциями (Б.Рассел). По поводу первого положения мы уже имели возможность высказаться в [1], теперь обратимся ко второму. Нужно отдать должное проницательности Рассела, обнаружившего почти полное отсутствие подлинных имен в естественном языке, что потребовало повышенного внимания к теории индивидных дескрипций. Согласно Расселу, поскольку собственные имена естественного языка далеко не всегда выполняют свое предназначение – указывать на существующие индивидуальные предметы (взять хотя бы такие имена, как «Пегас», «Одиссей», «Н.Бурбаки»), и к тому же они являются скрытыми дескрипциями (т.е. характеризуют те предметы, на которые они предназначены всего лишь указывать), уместно последние рассматривать в качестве «неполных» символов, приобретающих статус «подлинных» сингулярных терминов лишь тогда, когда имеет место существование и единственность их дескриптов. В этом случае дескрипции можно элиминировать из высказываний, воспользовавшись из-

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18290.

вестными контектстуальными определениями 14-й главы «Principia Mathematica»:

(1) $[(\iota x)A]B(\iota x)A =_{df} (\exists y)\ [(\forall z)(A \equiv z=y) \& B(y)]$

(2) $E!(\iota x)A =_{df} (\exists y)\ [(\forall z)(A \equiv z=y)]$,

где B – сложная формула, в которую входит дескрипция $(\iota x)A$, $[(\iota x)A]$ – обозначение области действия дескрипции (далее – одд), той части сложной формулы, которая зависит от дескрипции как от аргумента. В расселовской теории указание одд обязательно в случае так называемого вторичного вхождения дескрипции (далее – ввд), когда формула, содержащая дескрипцию в качестве аргумента, является подформулой сложной формулы.

Известно, что Рассел, руководствуясь «грубым чувством реальности», допускал истинную предикацию только в отношении существующих предметов. Его теория индивидных дескрипций построена так, что все высказывания о несуществующих объектах оказываются ложными, не приводя при этом к нарушению законов логики (в частности, закона исключенного третьего). Например, оба высказывания (а) «Нынешний король Франции лыс» и (б) «Нынешний король Франции не лыс» для Рассела являются ложными. Но данное обстоятельство не приводит к нарушению закона исключенного третьего, поскольку в соответствии с приведенными контекстуальными определениями эти высказывания записываются соответственно как

(3) $(\exists x)[(\forall y)(R(y) \equiv y=x) \& B(x)]$ и

(4) $(\exists x)[(\forall y)(R(y) \equiv y=x) \& \sim B(x)]$,

где R – предикат «быть нынешним королем Франции», B – предикат «быть лысым». Ясно, что эти формулировки не находятся в отношении противоречия. Ясно также, что оба упомянутых высказывания в формулировках (3) и (4) ложны, поскольку ложен первый конъюнкт, говорящий о существовании и единственности нынешнего короля Франции. С точки зрения Рассела, высказывания о несуществующих объектах могут быть истинными лишь в том случае, когда содержат ввд. Например, любое высказывание о нынешнем короле Франции будет истинным, если будет начинаться с отрицания, чему соответствует расселовская формула $\sim[(\iota x)R(x)]P(\iota x)R(x))$, где P – произвольный предикат.

Однако именно философские предпосылки расселовской теории индивидных дескрипций вызывают сомнения. Почему следует относить к ложным, скажем, все высказывания о мифологических или литературных героях, не являвшихся реальными историческими личностями? Как проверить знание школьниками древнегреческой мифологии или поэмы Пушкина «Евгений Онегин», если считать ложными как высказывание «Пегас был пленен Беллерофонтом», так и высказывание «Татьяна написала письмо Онегину»?

Чтобы расширить класс истинных экзистенциальных высказываний, следует отказаться от наивного расселовского представления о реальности. История философии сохранила нам два, можно сказать, радикальных понимания существования. Одно – «существование независимо от нашего сознания». Другое – «существование в качестве воспринимаемого». Ни одно из них нельзя признать удовлетворительным. Второе, отождествляющее существующее с воспринимаемым, некорректно уже потому, что, с одной стороны, существуют не воспринимаемые (в силу ограниченности наших органов чувств) предметы и явления, а с другой – не все воспринимаемое (в частности, видимое движение Солнца вокруг Земли) существует. Но и первое понимание, если вдуматься, вызывает вопросы. Как можно охарактеризовать в языке, являющемся продуктом сознания, существование чего-либо, никак не связанного с сознанием? Коль скоро существование не является предикатом, то в виде чего существует подобное *нечто*? Очевидно, только в виде носителя определенной совокупности дескриптивных предикатов языка. Но последнее обстоятельство делает существование подобных предметов зависимым от словарного запаса языка (скажем, в языке ньютоновской механики нельзя ничего сказать о существовании электромагнитного поля), а также от нашего *знания* того, какими дескриптивными характеристиками наделен соответствующий предмет. Сказанное означает, что более уместным было бы рассуждать об *известном* (или *предполагаемом*) существовании, а все контексты существования считать модальными в смысле эпистемических модальностей.

В таком случае любому высказыванию, характеризующему предмет мысли, следовало бы, вообще говоря, предпосылать указание на источник знания (или мнения): «из чувственного опыта известно, что...» (когда строим высказывания об объектах нашего восприятия), «из естествознания известно, что...» (когда строим высказывания о природных объектах), «из математики известно, что...» (когда строим высказывания о математических объектах), «из истории известно, что...» (когда строим высказывания о делах давно минувших дней), «из моих фантазий известно, что...» (когда пытаемся охарактеризовать в словах «мир» собственных домыслов), «из мифологии (литературы) известно, что...» и т.д.

Сказанное приводит к тому, что понятия «существующего» и «не существующего» лишаются абсолютного смысла, попадая в зависимость от контекстов знаний или мнений. Когда пишется учебник по физике или математике, подобный эпистемический контекст уже подразумевается названием учебника, и нет нужды задавать его перед каждым отдельным высказыванием. Открывая книгу по греческой мифологии, мы не нуждаемся в постоянном напоминании, что именно мы читаем. Но если в тексте рассуждения о происхождении Вселенной перемежаются математическими выкладками и экскурсами в мифологию или цитатами из религиозных книг, то явное указание контекстов становится обязательным.

В свете предлагаемого понимания существования высказывания о нынешнем короле Франции являются ложными постольку, поскольку королю не только нет места в политической системе современной Франции, его никто не видел, с ним никто не общался непосредственно или заочно, но, более того, о нем отсутствует какое-либо упоминание в литературе (если только не иметь в виду расселовскую теорию дескрипций). Но если завтра появится яркое литературное повествование о приключениях «нынешнего короля Франции», то в его контексте некоторые высказывания о короле, в том числе и экзистенциальные, будут такими же истинными, какими являются высказывания, повествующие о приключениях Алисы в Стране чудес, в частности, о ее диалоге с Чеширским Котом. Разумеется, различие между вымыслом и реальностью не стирается – оно сохраняется как различие эпистемических контекстов, источников знания.

Признав необходимость реконструкции контекстов существования в рамках модальной эпистемической логики, мы обязаны именно в нее встраивать теорию индивидных дескрипций. Ни одна из известных, помимо расселовской, экстенсиональных теорий индивидных дескрипций (Гильберта и Бернайса, Фреге, теорий, построенных в рамках «свободных от экзистенциальных предпосылок» логик) в той же мере, что и расселовская теория, не пригодна для решения проблем, интересующих нас, – в них невозможно создать требуемые эпистемические контексты. Но в этом случае нам придется отказаться от расселовских контекстуальных определений, иначе мы столкнемся с хорошо известными «модальными» парадоксами, связанными с нарушением правил $\forall$-удаления, $\exists$-введения и подставимости тождественного. Например, высказывание «Первоклассник Иванов знает, что $x > 7$» будет истинным для числа «9» (в предположении, что Иванов уже одолел основы счета) и ложным для индивидной дескрипции «число планет Солнечной системы» (если Иванов еще не приобрел элементарных знаний о строении Солнечной системы). Другими словами, индивидные дескрипции, удовлетворяющие условиям существования и единственности, в эпистемических контекстах ведут себя как «неполные» символы расселовской теории. Поэтому расселовские контекстуальные определения следует изменить с учетом требования «эпистемического» существования и единственности индивидной дескрипции, более сильного, чем расселовское, а именно с учетом требования

(5) $(\exists y)\, K^n(\forall z)(A \equiv z{=}x)$,

где А – формула, входящая в дескрипцию $(\iota x)A$, K^n – эпистемический модальный оператор (личный или безличный), n – число итерированных модальных операторов, в области действия которых находится вхождение дескрипции $(\iota x)A$ в формулу B. Таким образом, содержательно истинность эпистемической модальной формулы $B(\iota x)A$ будет означать, что существует такой объект y, удовлетворяющий условию (5), который одновременно удовлетворяет формуле B. Все сказанное приводит нас к следующим контекстуальным определениям для индивидных дескрипций эпистемической модальной логики (при максимальной одд в формулах, содержащих на аргументном месте дескрипцию):

(6) $[(\iota x)A]B(\iota x)A =_{df} (\exists y)\, [K^n(\forall z)(A \equiv z{=}y) \& B(y)]$

(7) $E_n!(\iota x)A =_{df} (\exists y)\, [K^n(\forall z)(A \equiv z{=}y)]$,

где $E_n!$ – контекстуально элиминируемый предикат эпистемического существования и единственности индивидной дескрипции. Нетрудно заметить, что в экстенсиональных контекстах, когда $n = 0$, определения (6) и (7) переходят в расселовские (1) и (2). В частности, если в формуле $KB(\iota x)A$ одд является модально свободная подформула $B(\iota x)A$, мы имеем случай обычного расселовского ввд, и формула $K[(\iota x)A]B(\iota x)A$ должна пониматься как сокращение формулы $K(\exists y)[(\forall z)(A \equiv z{=}y) \& B(y)]$. Следовательно, при контекстуальном определении (6), одд, в отличие от расселовского определения (1), задает не только контекст, но и форму элиминации.

Только те дескрипции, которые удовлетворяют условию $E_n!$, являются в эпистемических контекстах «подлинными» сингулярными терминами, подчиняющимися всем логическим правилам. В частности, в примере с первоклассником Ивановым в формулу $x > 7$ на место индивидной переменной x можно будет подставлять лишь ту дескрипцию, о которой Иванову известно, что она характеризует число 9. Таким образом, просматривается определенный параллелизм между расселовской и предлагаемой нами теориями индивидных дескрипций.

Этот параллелизм только усилится при доказательстве «эпистемического аналога» теоремы *14.03 из «Principia Mathematica», т.е. теоремы, говорящей о независимости истинностного значения формулы, содержащей дескрипцию, от ее одд, когда для дескрипции выполняется условие $E_n!$. Подобное доказательство легко извлечь из [2], где доказательство приведено для алетической модальной системы $C2^{*=}$ – кванторного расширения с тождеством системы C2, самой слабой из алетических модальных систем, имеющих семантику Крипке. Однако эпистемическая логика (получающаяся при замене алетического модального оператора на какой-либо из эпистемических) по крайней мере в одном отношении должна быть дедуктивно сильнее упомянутой системы $C2^{*=}$ – она должна содержать аксиому $K^nA \supset K^{n-m}A$, где n, m - целые числа, $n > m$. В частности, уместно считать, что если субъект знания знает, что он знает А, то он знает А. С другой стороны, в эпистемической логике приходится считаться с парадоксами «логического всеведения», что требует определенного ослабления ее дедуктивных возможностей в сравнении с соответствующими системами алетической модальной логики. Но обсуждение путей решения последней задачи выходит за рамки данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ледников Е.Е.* О понятии и суждениях существования // Логические исследования. М., 1999. Вып.7. С. 301-307.
2. *Ледников Е.Е., Омельянчик В.И.* Теория определенных описаний для алетической модальной логики // Философские основания научной теории. Новосибирск, 1985. С. 70-90.

В.И.Маркин

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИЛЛОГИСТИКА С ИНТЕНСИОНАЛЬНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ*

Abstract. *We set out an intensional semantics for pure positive syllogistic language. According to it each term Q denotes not a set of individuals but a concept* $\mathbf{d}(Q)$ *considered as a non-empty set of positive or negative characters. We define a function * on concepts, which assigns to every concept* α *the contrary concept* α^*: $p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow {\sim}p_i \in \alpha^*$ *and* ${\sim}p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow p_i \in \alpha$, *where* p_i *is a positive character and* ${\sim}p_i$ *is a negative character.* $S\mathbf{a}P$ *means that* $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$, $S\mathbf{e}P$ *means that* $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$. *We prove that this semantics is adequate to syllogistic system with the following axiom schemes:* $(M\mathbf{a}P \& S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P$, $(M\mathbf{e}P \& S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$, $S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S$, $S\mathbf{a}S$, $S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$, $S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$.

В предыдущем, восьмом, выпуске «Логических исследований» [3] мною была предложена нестандартная семантика для силлогистики Я.Лукасевича (системы **C4** по классификации В.А.Смирнова [4]), формализующей позитивный фрагмент традиционной силлогистики. Эта семантика основана на оригинальных идеях Г. Лейбница [1 Т.2. С. 501-502; Т.3. С.514-522], суть которых состоит в том, что силлогистика может рассматриваться не только с экстенсиональной точки зрения – как теория отношений между классами индивидов (объемами понятий), но и интенсионально – как теория отношений между совокупностями признаков (содержаниями понятий). При таком подходе субъекты и предикаты категорических суждений трактуются как понятийные конструкции, в качестве значений им сопоставляются множества признаков – положительных и отрицательных, а силлогистические константы **a**, **e**, **i** и **o** рассматриваются как знаки отношений между понятиями по содержанию.

Приведем краткое изложение данной семантики для силлогистики **C4** (незначительно изменив использовавшиеся в [3] обозначения и терминологию).

Рассмотрим множество *литералов* $\mathbf{L} = \{p_1, {\sim}p_1, p_2, {\sim}p_2, \ldots\}$. Литералы, не содержащие символа "~", представляют *положительные признаки*, а содержащие данный символ – *отрицательные признаки*. *Непротиворечивым понятием* назовем произвольное непустое и непротиворечивое подмножество **L**, т.е. множество $\alpha \subseteq \mathbf{L}$, удовлетворяющее условиям:

(i) $\alpha \neq \varnothing$;

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 00-03-00273.

(ii) не существует p_i, такого что $p_i \in \alpha$ и $\sim p_i \in \alpha$.

Пусть **H** – множество всех непротиворечивых понятий. Определим на **H** операцию *, которая каждому понятию α сопоставляет *противоположное* ему понятие α^*, замещая каждый положительный литерал на отрицательный с тем же индексом, а каждый отрицательный – на соответствующий положительный:

$$p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow \sim p_i \in \alpha \text{ и } \sim p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow p_i \in \alpha.$$

Интерпретирующая функция **d** сопоставляет каждому общему термину в качестве значения некоторое непротиворечивое понятие: $\mathbf{d}(P) \in \mathbf{H}$.

Зададим понятие *значимости* формулы A языка позитивной силлогистики при интерпретации **d** ($\mathbf{d} \models A$). Для атомарных формул:

(a1) $\mathbf{d} \models S\mathbf{a}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$;
(e1) $\mathbf{d} \models S\mathbf{e}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$;
(i1) $\mathbf{d} \models S\mathbf{i}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) = \varnothing$;
(o1) $\mathbf{d} \models S\mathbf{o}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \setminus \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$.

Условия значимости сложных формул обычные.

Согласно приведенным определениям высказывания типа **a** интерпретируются как утверждения о том, что содержание их предиката составляет часть содержания их субъекта; высказывания типа **e** выражают мысль о наличии противоречащих признаков (положительного и отрицательного), один из которых входит в содержание одного понятийного термина, а другой – в содержание другого; высказывания типов **i** и **o**, как обычно, рассматриваются как противоречащие высказываниям типов **e** и **a**, соответственно.

Силлогистическая формула A называется **C4**-*общезначимой*, е.т.е. $\mathbf{d} \models A$ при любой интерпретации общих терминов **d**, которая, как было сказано выше, сопоставляет им непротиворечивые понятия.

В [3] была продемонстрирована адекватность приведенной семантики силлогистической системе **C4**.

Возникает вопрос о возможности построения семантик, исходные конструкции которых имеют интенсиональную природу, для других известных систем силлогистики. Среди них особое место занимает так называемая *фундаментальная силлогистика*, идея которой восходит к работам Ф. Брентано и Г. Лейбница. С семантической точки зрения отличие фундаментальной силлогистики от традиционной заключается в отказе от исходной предпосылки о *непустоте* (и *неуниверсальности* – в случае введения в язык терминного отрицания) объемов общих терминов. В то же время экстенсиональная семантика для этих систем может быть сформулирована так (причем данная формулировка наиболее естественна), что условия истинности категорических высказываний будут одинаковыми: константе **a** соответствует теоретико-множественное включение объема субъекта в объем предиката, константе **e** – пустота пересечения объемов терминов и т.д.

Впервые аксиоматизация фундаментальной силлогистики на базе классического исчисления высказываний была предложена Дж. Шефердсоном [5], причем в языке, содержащем как положительные, так и отрицательные общие термины. Позитивный фрагмент системы Шефердсона – силлогистическое исчисление **ФС** – детально исследован в [2]. Аксиомами **ФС** являются формулы следующих типов:

Ф0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

Ф1. $(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P$,	**Ф5.** $S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S$,
Ф2. $(M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$,	**Ф6.** $S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{i}S$,
Ф3. $S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S$,	**Ф7.** $S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$,
Ф4. $S\mathbf{a}S$,	**Ф8.** $S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$.

Единственное правило вывода в **ФС** – *modus ponens*.

Первая, естественно возникающая гипотеза о том, каким образом может быть построена адекватная интенсиональная семантика для фундаментальной силлогистики, основывается на известных еще в традиционной логике фактах взаимозависимости объемов и содержаний понятий. Выдвижение этой гипотезы описывается следующим рассуждением по аналогии: если при экстенсиональной трактовке категорических высказываний фундаментальная силлогистика получается из традиционной отказом от требования непустоты объемов терминов при сохранении условий истинности высказываний, то при интенсиональном подходе следует отбросить исходную предпосылку о непротиворечивости содержаний, не меняя принципов означивания силлогистических формул.

В точных терминах эта идея выражается следующим образом. *Понятием* назовем произвольное непустое подмножество множества литералов $\mathbf{L} = \{p_1, \sim p_1, p_2, \sim p_2, \ldots\}$, т.е. множество $\alpha \subseteq \mathbf{L}$, удовлетворяющее условию (i) $\alpha \neq \varnothing$, но не обязанное удовлетворять условию непротиворечивости (ii).

Пусть **П** – множество всех понятий (как непротиворечивых, так и противоречивых). Очевидно, что $\mathbf{H} \subset \mathbf{П}$.

Расширим до **П** область определения и область значений операции *, сопоставляющей каждому понятию противоположное ему понятие посредством замены положительных литералов на соответствующие отрицательные, а отрицательных на положительные.

Пусть интерпретирующая функция **d** сопоставляет теперь каждому общему термину произвольное (не обязательно непротиворечивое) понятие: $\mathbf{d}(P) \in \mathbf{\Pi}$.

Определения значимости формулы при интерпретации **d** с базисными условиями (**a1**), (**e1**), (**i1**) и (**o1**), а также общезначимости формулы остаются неизменными.

Какое же силлогистическое исчисление аксиоматизирует класс общезначимых формул? Верна ли наша первоначальная гипотеза о том, что таковым является исчисление **ФС**? Оказывается, что это не так: аксиомы типов **Ф5** ($S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S$) и **Ф6** ($S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{i}S$) системы **ФС** необщезначимы в данной семантике (они незначимы, напр., при следующей интерпретации **d**: $\mathbf{d}(S) = \{p_1, \sim p_1,\}$, а $\mathbf{d}(P) = \{p_2\}$).

Формализацию интенсиональной семантики силлогистического языка, допускающей использование противоречивых по содержанию понятий, обеспечивает не система **ФС** "экстенсиональной" фундаментальной силлогистики, а ее *подсистема*, получающаяся из **ФС** отбрасыванием аксиомных схем **Ф5** и **Ф6**. Назовем данное исчисление **ИФС**, т.е. системой *"интенсиональной" фундаментальной силлогистики*.

Докажем адекватность приведенной семантики силлогистике **ИФС**.

Несложно продемонстрировать общезначимость каждой аксиомы **ИФС** и инвариантность правила *modus ponens* относительно общезначимости формул. Отсюда следует семантическая непротиворечивость системы **ИФС**.

Метатеорему о семантической полноте **ИФС** доказываем методом Хенкина.

Множество формул Γ называется **ИФС**-*непротиворечивым*, е.т.е. не найдется формул $B_1, B_2, ..., B_k$ таких, что формула $\neg(B_1 \,\&\, B_2 \,\&\, ... \,\&\, B_k)$ была бы теоремой **ИФС**.

Множество формул Δ называется **ИФС**-*максимальным*, е.т.е. оно **ИФС**-непротиворечиво и для любой формулы A верно, что $A \in \Delta$ или $\neg A \in \Delta$. Выделим следующие важные свойства Δ:

(m1) Δ содержит все теоремы **ИФС**,
(m2) Δ замкнуто относительно *modus ponens*,
(m3) $\neg A \in \Delta$, е.т.е. $A \notin \Delta$,
(m4) $A \& B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ и $B \in \Delta$,
(m5) $A \vee B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ или $B \in \Delta$,
(m6) $A \supset B \in \Delta$, е.т.е. $A \notin \Delta$ или $B \in \Delta$.

Стандартно доказывается утверждение о возможности расширения произвольного **ИФС**-непротиворечивого множества формул до **ИФС**-максимального.

С каждым **ИФС**-максимальным множеством Δ связывается *каноническое приписывание* значений общим терминам – функция $\mathbf{d}_\Delta$, определяемая следующим образом:

$$\mathbf{d}_\Delta(Q) = \{t: Q\mathbf{a}T \in \Delta\} \cup \{\sim t: Q\mathbf{e}T \in \Delta\},$$

где Q и T используются (как и употреблявшиеся ранее буквы S, P и M) в качестве синтаксических переменных по общим терминам (пусть язык силлогистики содержит общие термины P_1, P_2, P_3, ...), а t есть положительный литерал с тем же индексом, что и общий термин, представляемый синтаксической переменной T (напр., t есть литерал p_j, е.т.е T представляет общий термин P_j).

Прежде всего покажем, что $\mathbf{d}_\Delta(Q)$ является понятием, т.е. удовлетворяет условию непустоты (i):

1. $Q\mathbf{a}Q \in \Delta$	**Ф4**, (m1);
2. $q \in \mathbf{d}_\Delta(Q)$	1, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
3. $\mathbf{d}_\Delta(Q) \neq \varnothing$	2.

Индукцией по длине силлогистической формулы A доказывается основная лемма:

Лемма. *Для произвольного* **ИФС**-*максимального множества* Δ *и произвольной формулы* A *верно*: $A \in \Delta$, *е.т.е.* $\mathbf{d}_\Delta \models A$.

Базис индукции содержит четыре случая.

I. A есть $S\mathbf{a}P$.

Докажем сначала, что $S\mathbf{a}P \in \Delta \Rightarrow \mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$.

1. $S\mathbf{a}P \in \Delta$	допущение;
2. $t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	допущение;
3. $P\mathbf{a}T \in \Delta$	2, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
4. $(P\mathbf{a}T \,\&\, S\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{a}T \in \Delta$	**Ф1**, (m1);
5. $S\mathbf{a}T \in \Delta$	4,3,1, (m4), (m2);
6. $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	5, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
7. $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	допущение;
8. $P\mathbf{e}T \in \Delta$	7, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
9. $(P\mathbf{e}T \,\&\, S\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{e}T \in \Delta$	**Ф2**, (m1);
10. $S\mathbf{e}T \in \Delta$	9,8,1, (m4), (m2);
11. $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	10, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
12. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$	2–6,7–11, опр. $\mathbf{d}_\Delta$ и $\subseteq$;
13. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$	12, (**a1**).

Докажем далее, что $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P \Rightarrow S\mathbf{a}P \in \Delta$.

1. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$	допущение;
2. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$	1, (**a1**);
3. $P\mathbf{a}P \in \Delta$	**Ф4**, (m1);
4. $p \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	3, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
5. $p \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	2,4;

6. $S\mathbf{a}P \in \Delta$	5, опр. $\mathbf{d}_\Delta$.

II. A есть $S\mathbf{e}P$.

Докажем сначала, что $S\mathbf{e}P \in \Delta \Rightarrow \mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$.

1. $S\mathbf{e}P \in \Delta$	допущение;
2. $S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S \in \Delta$	**Ф3**, (m1);
3. $P\mathbf{e}S \in \Delta$	2,1, (m2);
4. $S\mathbf{a}S \in \Delta$	**Ф4**, (m1);
5. $\sim s \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	3, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
6. $s \in \mathbf{d}_\Delta(P)^*$	5, опр. *;
7. $s \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
8. $\mathbf{d}_\Delta(P)^* \cap \mathbf{d}_\Delta(S) \neq \varnothing$	6,7;
9. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$	8, (**e1**).

Докажем далее, что $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P \Rightarrow S\mathbf{e}P \in \Delta$.

1. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$	допущение;
2. $\mathbf{d}_\Delta(P)^* \cap \mathbf{d}_\Delta(S) \neq \varnothing$	1, (**e1**);
3. сущ-ет t: ($t \in \mathbf{d}_\Delta(P)^*$ и $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$) или ($\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)^*$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$)	2;
4. $t \in \mathbf{d}_\Delta(P)^*$ и $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	допущение;
5. $S\mathbf{a}T \in \Delta$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
6. $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	4, опр. *;
7. $P\mathbf{e}T \in \Delta$	6, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
8. $P\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}P \in \Delta$	**Ф3**, (m1);
9. $T\mathbf{e}P \in \Delta$	8, 7; (m2);
10. $(T\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}T) \supset S\mathbf{e}P \in \Delta$	**Ф2**, (m1);
11. $S\mathbf{e}P \in \Delta$	10,9,5, (m4), (m2);
12. $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)^*$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	допущение;
13. $S\mathbf{e}T \in \Delta$	12, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
14. $t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	12, опр. *;
15. $P\mathbf{a}T \in \Delta$	14, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
16. $S\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}S \in \Delta$	**Ф3**, (m1);
17. $T\mathbf{e}S \in \Delta$	16,13; (m2);
18. $(T\mathbf{e}S \,\&\, P\mathbf{a}T) \supset P\mathbf{e}S \in \Delta$	**Ф2**, (m1);
19. $P\mathbf{e}S \in \Delta$	18,17, 15; (m4), (m2);
20. $P\mathbf{e}S \supset S\mathbf{e}P \in \Delta$	**Ф3**, (m1);
21. $S\mathbf{e}P \in \Delta$	20,19; (m2);
22. $S\mathbf{e}P \in \Delta$	3,4-11,12-21.

III. A есть $S\mathbf{i}P$.

Данный случай сводится к случаю (II) в силу наличия в Δ аксиомы **Ф7** ($S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$), свойств максимального множества, а также того факта, что условия значимости формул вида $S\mathbf{i}P$ (**i1**) и $S\mathbf{e}P$ (**e1**) противоречат друг другу.

IV. A есть $S\mathbf{o}P$.

Данный случай сводится к случаю (I) в силу наличия в **Δ** аксиомы **Ф8** (S**o**$P \equiv \neg S$**a**P), свойств максимального множества, а также того факта, что условия значимости формул вида S**o**P (**o1**) и S**a**P (**a1**) противоречат друг другу.

Доказательство индуктивного перехода тривиально: оно основывается на классической семантике пропозициональных связок и свойствах (m1)–(m6) максимального множества. Лемма доказана.

Теперь легко обосновать утверждение о семантической полноте **ИФС**.

Рассмотрим произвольную общезначимую формулу A. Допустим, что она недоказуема в **ИФС**. Тогда формула $\neg\neg A$ также не будет теоремой этой системы. Отсюда, по определению **ИФС**-непротиворечивого множества, следует, что таковым является $\{\neg A\}$. Расширим его до **ИФС**-максимального множества Δ. Согласно основной лемме, $\mathbf{d}_\Delta \models \neg A$. Значит, сама формула A при каноническом приписывании (в силу семантики пропозиционального отрицания) не является значимой, что противоречит исходному предположению о ее общезначимости.

Система **ИФС** "интенсиональной" фундаментальной силлогистики в плане дедуктивных особенностей во многом сходна со своим "экстенсиональным" аналогом – исчислением **ФС**. В обеих системах доказуемы одни и те же базисные силлогистические законы: 15 модусов простого категорического силлогизма, законы диагоналей логического квадрата, принципы обращения для высказываний типов **e** и **i**, закон силлогистического тождества для **a**. Кроме того, в каждой из систем отбрасываются некоторые законы традиционной силлогистики: модусы силлогизма с общими посылками и частным заключением, законы подчинения, принцип обращения для высказываний типа **a**, принцип контрарности **a** и **e**, принцип субконтрарности **i** и **o**, закон силлогистического тождества для **i**.

Система **C4**, формализующая позитивный фрагмент традиционной силлогистики, легко получается из **ИФС** добавлением принципа контрарности, т.е. схемы аксиом

$\neg(S$**a**$P \;\&\; S$**e**$P)$.

Перейдем теперь к рассмотрению другого вопроса: о возможности построения адекватной интенсиональной семантики для "экстенсиональной" фундаментальной силлогистики **ФС**.

Базисные конструкции этой семантики точно такие, как и для системы **ИФС**, в частности, в качестве возможных значений общих терминов допускаются противоречивые понятия. Изменяются лишь семантические определения атомарных силлогистических формул. Понятие *значимости* силлогистической формулы (при интерпретации **d**) для **ФС** задается следующим образом:

(a2) $\mathbf{d} \models S\mathbf{a}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$;

(e2) $\mathbf{d} \models S\mathbf{e}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \notin \mathbf{H}$;

(i2) $\mathbf{d} \models S\mathbf{i}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \in \mathbf{H}$;

(o2) $\mathbf{d} \models S\mathbf{o}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \setminus \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$ и $\mathbf{d}(S) \in \mathbf{H}$.

Согласно данному определению, общеутвердительное высказывание значимо, если содержание его предиката составляет часть содержания его субъекта или же субъект противоречив (т.е. максимально информативен). Смысл общеотрицательного высказывания состоит в наличии в содержаниях субъекта и предиката противоречащих признаков (или у какого-либо из понятий в отдельности, или по отношению друг к другу).

Нетрудно убедиться в том, что при принятии исходной предпосылки (ii) о непротиворечивости понятий условия значимости формул в семантиках для **ИФС** и **ФС** эквивалентны. Однако в семантиках указанных систем, где условие (ii) не постулируется, условия значимости общих высказываний в **ФС** оказываются более слабыми, а условия значимости частных высказываний – более сильными, чем в **ИФС**. Для условий (**a2**) и (**a1**), (**o2**) и (**o1**) верность этого утверждения очевидна. Что же касается условий (**e2**) и (**e1**), (**i2**) и (**i1**), справедливость сказанного станет наглядной, если эквивалентным образом переформулировать условия (**e2**) и (**i2**):

(**e2**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{e}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$ или $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$ или $\mathbf{d}(P) \notin \mathbf{H}$;

(**i2**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{i}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) = \varnothing$ и $\mathbf{d}(S) \in \mathbf{H}$ и $\mathbf{d}(P) \in \mathbf{H}$.

При доказательстве непротиворечивости системы **ФС** относительно интенсиональной семантики с условиями значимости (**a2**), (**i2**), (**e2**), (**o2**) некоторую сложность представляет лишь демонстрация общезначимости аксиом типов **Ф1** и **Ф2**:

Ф1. $(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P$

1. $\mathbf{d} \models M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M$	допущение;
2. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(M)$ или $\mathbf{d}(M) \notin \mathbf{H}$	1, (**a2**);
3. $\mathbf{d}(M) \subseteq \mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$	1, (**a2**);
4. $\mathbf{d}(M) \subseteq \mathbf{d}(S)$	допущение;
5. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(M)$	допущение;
6. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$	5,4, транзитивность $\subseteq$;
7. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$	6;
8. $\mathbf{d}(M) \notin \mathbf{H}$	допущение;
9. $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$	4,8, опр. **d** и **H**;
10. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$	9;
11. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$	2, 5-7,8-10;

12. $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$	допущение;
13. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$	13;
14. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$	3,4-11,12-13;
15. $\mathbf{d} \models S\mathbf{a}P$	14, (**a2**).

Ф2. $(M\mathbf{e}P \;\&\; S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$

1. $\mathbf{d} \models M\mathbf{e}P \;\&\; S\mathbf{a}M$	допущение;
2. $\mathbf{d}(M) \cup \mathbf{d}(P) \notin \mathbf{H}$	1, (**e2**);
3. $\mathbf{d}(M) \subseteq \mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$	1, (**a2**);
4. $\mathbf{d}(M) \subseteq \mathbf{d}(S)$	допущение;
5. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \notin \mathbf{H}$	2,4, опр. **d** и **H**;
6. $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$	допущение;
7. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \notin \mathbf{H}$	6, опр. **d** и **H**;
8. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \notin \mathbf{H}$	3,4-5,6-7
9. $\mathbf{d} \models S\mathbf{e}P$	8, (**e2**).

Доказательство семантической полноты осуществляется по тому же плану, что и для системы **ИФС**: аналогичным образом вводятся понятия **ФС**-непротиворечивого и **ФС**-максимального множеств формул, обосновывается утверждение о возможности расширения произвольного **ФС**-непротиворечивого множества до **ФС**-максимального, с каждым **ФС**-максимальным множеством Δ связывается *каноническое приписывание* $\mathbf{d}_\Delta$, определяемое тем же способом. Различие состоит только в доказательстве основной леммы:

Лемма. *Для произвольного* **ФС**-*максимального множества* Δ *и произвольной формулы* A *верно*: $A \in \Delta$, *е.т.е.* $\mathbf{d}_\Delta \models A$.

Достаточно рассмотреть два базисных случая.

I. A есть $S\mathbf{a}P$.

Докажем сначала, что $S\mathbf{a}P \in \Delta \Rightarrow \mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$.

Первые 12 шагов доказательства повторяют соответствующий фрагмент основной леммы для системы **ИФС**. Завершающие шаги искомого доказательства таковы:

13. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$ или $\mathbf{d}_\Delta(S) \notin \mathbf{H}$	12;
14. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$	13, (**a2**).

Докажем далее, что $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P \Rightarrow S\mathbf{a}P \in \Delta$.

1. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$	допущение;
2. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$ или $\mathbf{d}_\Delta(S) \notin \mathbf{H}$	1, (**a2**);
3. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$	допущение;
4. $P\mathbf{a}P \in \Delta$	**Ф4**, (m1);
5. $p \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
6. $p \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	3,5;
7. $S\mathbf{a}P \in \Delta$	6, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
8. $\mathbf{d}_\Delta(S) \notin \mathbf{H}$	допущение;

9. сущ-ет t: $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	8, опр. **d** и **H**;
10. $S\mathbf{a}T \in \Delta$	9, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
11. $S\mathbf{e}T \in \Delta$	9, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
12. $S\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}S \in \Delta$	**Ф3**, (m1);
13. $T\mathbf{e}S \in \Delta$	12,11, (m2);
14. $(T\mathbf{e}S \mathbin{\&} S\mathbf{a}T) \supset S\mathbf{e}S \in \Delta$	**Ф2**, (m1);
15. $S\mathbf{e}S \in \Delta$	14,13,10, (m4), (m2);
16. $S\mathbf{e}S \supset S\mathbf{a}P \in \Delta$	теорема **ФС**[1], (m1);
17. $S\mathbf{a}P \in \Delta$	16,15;
18. $S\mathbf{a}P \in \Delta$	2,3-7,8-17.

II. A есть $S\mathbf{e}P$.

Докажем сначала, что $S\mathbf{e}P \in \Delta \Rightarrow \mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$.

1. $S\mathbf{e}P \in \Delta$	допущение;
2. $S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S \in \Delta$	**Ф3**, (m1);
3. $P\mathbf{e}S \in \Delta$	2,1, (m2);
4. $S\mathbf{a}S \in \Delta$	**Ф4**, (m1);
5. $\sim s \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	3, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
6. $s \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
7. $\mathbf{d}_\Delta(S) \cup \mathbf{d}_\Delta(P) \notin \mathbf{H}$	5,6;
8. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$	7, (**e2**).

Докажем далее, что $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P \Rightarrow S\mathbf{e}P \in \Delta$.

1. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$	допущение;
2. $\mathbf{d}_\Delta(S) \cup \mathbf{d}_\Delta(P) \notin \mathbf{H}$	1, (**e2**);
3. сущ-ет t: $[t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)]$ или $[t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)]$ или $[t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)]$ или $[t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)]$	2, опр. **d** и **H**;
4. $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	допущение;
5. $S\mathbf{a}T \in \Delta$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
6. $S\mathbf{e}T \in \Delta$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
7. $S\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}S \in \Delta$	**Ф3**, (m1);
8. $T\mathbf{e}S \in \Delta$	7,6, (m2)
9. $(T\mathbf{e}S \mathbin{\&} S\mathbf{a}T) \supset S\mathbf{e}S \in \Delta$	**Ф2**, (m1);
10. $S\mathbf{e}S \in \Delta$	9,8,5, (m4), (m2);
11. $S\mathbf{e}S \supset S\mathbf{e}P \in \Delta$	теорема **ФС**[2], (m1);
12. $S\mathbf{e}P \in \Delta$	11,10; (m2);
13. $t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	допущение;
14. $P\mathbf{a}T \in \Delta$	13, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
15. $P\mathbf{e}T \in \Delta$	13, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
16. $P\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}P \in \Delta$	**Ф3**, (m1);
17. $T\mathbf{e}P \in \Delta$	16,15, (m2);
18. $(T\mathbf{e}P \mathbin{\&} P\mathbf{a}T) \supset P\mathbf{e}P \in \Delta$	**Ф2**, (m1);

[1] Данная формула доказывается в системе **ФС** с использованием аксиом **Ф6**, **Ф7** и **Ф8**.

[2] Данная формула доказывается в системе **ФС** с использованием аксиом **Ф5** и **Ф7**.

19. $PeP \in \Delta$ — 18,17,14, (m4), (m2);
20. $PeP \supset SeP \in \Delta$ — теорема **ФС**[3], (m1);
21. $SeP \in \Delta$ — 20,19, (m2);
22. $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ — допущение;
23. $SaT \in \Delta$ — 22, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
24. $PeT \in \Delta$ — 22, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
25. $PeT \supset TeP \in \Delta$ — **Ф3**, (m1);
26. $TeP \in \Delta$ — 25,24, (m2);
27. $(TeP \,\&\, SaT) \supset SeP \in \Delta$ — **Ф2**, (m1);
28. $SeP \in \Delta$ — 27,26,23, (m4), (m2);
29. $t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ — допущение;
30. $PaT \in \Delta$ — 29, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
31. $SeT \in \Delta$ — 29, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
32. $SeT \supset TeS \in \Delta$ — **Ф3**, (m1);
33. $TeS \in \Delta$ — 32,31, (m2);
34. $(TeS \,\&\, PaT) \supset PeS \in \Delta$ — **Ф2**, (m1);
35. $PeS \in \Delta$ — 34,33,30, (m4), (m2);
36. $PeS \supset SeP \in \Delta$ — **Ф3**, (m1);
37. $SeP \in \Delta$ — 36,35, (m2);
38. $SeP \in \Delta$ — 3,4-12,13-21,22-28,29-37.

Лемма (а вместе с этим и семантическая полнота **ФС**) доказана.

Комбинируя различные условия значимости для **a** и **o** с различными условиями значимости для **e** и **i**, можно получить адекватные семантики еще для двух систем позитивной силлогистики, занимающих промежуточное положение между исчислениями **ИФС** и **ФС**.

Пусть сначала силлогистические константы **a** и **o** трактуются в духе **ФС**, а константы **e** и **i** – в духе **ИФС**:

(**a2**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{a}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$;
(**i1**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{i}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) = \varnothing$;
(**e1**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{e}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$;
(**o2**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{o}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \setminus \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$ и $\mathbf{d}(S) \in \mathbf{H}$.

Класс общезначимых в такой семантике формул аксиоматизирует исчисление, получающееся из **ФС** отбрасыванием схемы аксиом **Ф5** ($S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S$). Назовем эту систему **ИС1**.

Далее, пусть, наоборот, константы **a** и **o** трактуются в духе **ИФС**, а **e** и **i** – в духе **ФС**:

(**a1**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{a}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$;
(**i2**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{i}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \in \mathbf{H}$;
(**e2**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{e}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \notin \mathbf{H}$;

---

[3] Данная формула доказывается в **ФС** с использованием аксиом **Ф5**, **Ф7** и **Ф3**.

(**o**1) $\mathbf{d} \models S\mathbf{o}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \setminus \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$.

Адекватная формализация данной семантики получается отбрасыванием из **ФС** схемы аксиом **Ф6** ($S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{i}S$). Назовем эту систему **ИС2**.

Весь необходимый материал для демонстрации семантической непротиворечивости и полноты исчислений **ИС1** и **ИС2** уже содержится в приведенных выше доказательствах, касающихся систем **ИФС** и **ФС**. Так, пункт I (*A* есть $S\mathbf{a}P$) основной леммы для **ИС1** повторяет доказательство соответствующего случая леммы для **ФС**, а пункт II (*A* есть $S\mathbf{e}P$) – соответствующего случая леммы для **ИФС**. Что же касается основной леммы для системы **ИС2**, то здесь, напротив, случай I доказывается так же, как в лемме для **ИФС**, а случай II – как в лемме для **ФС**.

В заключение поставлю одну проблему, касающуюся статуса представленных в данной статье силлогистических систем **ИФС**, **ИС1** и **ИС2**. Существуют ли "экстенсиональные" семантики для этих исчислений, построенные в том же духе, что и подобная семантика для **ФС**? Иными словами, имеется ли адекватная трактовка силлогистических констант указанных исчислений в терминах булевой логики классов или, что в сущности то же самое, существуют ли операции (рекурсивно задаваемые по степени сложности формулы), которые погружали бы системы **ИФС**, **ИС1** и **ИС2** в классическое одноместное исчисление предикатов?

Позволю высказать гипотезу, что ответы на поставленные вопросы – отрицательные. Справедливость данной гипотезы означала бы, что по крайней мере в некоторых существенных отношениях интенсиональный подход к построению силлогистических теорий семантически гибче и богаче стандартного, экстенсионального.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбниц Г.В.* Сочинения: В 4 т. Т. 2–3. М.: Мысль, 1983-1984.
2. *Маркин В.И.* Силлогистические теории в современной логике. М.: МГУ, 1991.
3. *Маркин В.И.* Интенсиональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001. С. 82-91.
4. *Смирнов В.А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев: Наукова думка, 1980.
5. *Shepherdson J.C.* On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // Journal of Symbolic Logic. Vol. 21 (1956). No.2. P. 137-147.

И.Б.Микиртумов

СТРУКТУРА ЗНАЧЕНИЯ И КОМПЕТЕНТНОСТЬ СУБЪЕКТА В ЛОГИКЕ СМЫСЛА И ДЕНОТАТА*

Abstract. *The main issue of the paper is the realisation of Alternative (0) within the logic of sense and denotation (LSD). The structural analysis of meaning and the notion of logical (semantical) competence of subject are suggested as the approaches for solution, that provide epistemic character for the interpretation of LSD.*

Проблема Альтернативы (0)

Созданная Алонзо Чёрчем в начале 50-х годов логика смысла и денотата (ЛСД)[1], ставшая основанием общей интенсиональной логики, включала три содержательные альтернативы: Альтернатива (0) – смыслы двух синтаксически различных выражений всегда различны; Альтернатива (1) – λ-конверсия не затрагивает смысл; Альтернатива (2) – смыслы двух синтаксически различных выражений могут совпадать. Работы по ЛСД самого Чёрча затрагивают главным образом варианты Альтернатив (1) и (2). Версию Альтернативы (0), так называемую логику синонимического изоморфизма, предложил ученик Чёрча Энтони Эндерсон [2]. В ней ключевая для Альтернативы (0) проблема различения смысла выражений вида $A(x \,//\, B)$ и $(\lambda x A x)B$ решается за счёт сопоставления им в качестве смыслов классов синонимического изоморфизма, т. е. классов выражений, которые могут быть получены друг из друга, посредством переименования связанных переменных. Поскольку синтаксически $A(x \,//\, B)$ и $(\lambda x A x)B$ различны, различны и соответствующие классы.

Чёрч сформулировал Альтернативу (0), исходя из первоначального замысла ЛСД [3], который был шире идеи применения ЛСД для анализа интенсиональных контекстов. А именно предполагалось, что ЛСД будет равным образом применима как к естественному, так и к формализованному языку и в конечном счете окажется системой оснований математики, базирующейся на формализованной теории значения. Еще раньше на параллельном пути потерпело неудачу, оказавшись противоречивым, созданное Чёр-

* Работа выполнена при поддержке ZEIT-Stiftung Ebelin und Gerd Bucerius.

[1] Подробное описание языка и свойств ЛСД см. в статьях Чёрча [4], [5], [6] и Эндерсона [2].

чем бестиповое λ-исчисление. Но сочетание λ-конверсии с простой теорией типов [7], как доказал позднее Генкин [8]), дает непротиворечивую и относительно полную теорию. Добавление к этой теории интенсиональных типов образует ЛСД, в которой концепт истинностного значения всегда имеет концепт, что ведет к появлению иерархии, подобной иерархии предикатов истинности и выполнимости. Предчувствуя неминуемые сложности, и, возможно, сомневаясь в реализуемости своего плана, Чёрч уже в первой развернутой формулировке ЛСД оставляет в стороне наиболее радикальную Альтернативу (0), предлагая для ее интерпретации синтаксически ориентированную теорию синонимического изоморфизма, и исследует Альтернативы (1) и (2), которые позднее легли в основу интенсиональных систем Каплана, Монтегю и других авторов. В итоге, кроме теории Эндерсона, Альтернатива (0) не имеет иной содержательно прозрачной интерпретации. На наш взгляд, из-за чрезмерной строгости полная реализация Альтернативы (0) вряд ли может быть полезна, но ее ключевая идея, а именно различение смысла выражений до и после λ-конверсии заслуживает внимания и будет обсуждаться ниже.

Смысл (концепт) как процедура

Языком ЛСД является язык простой теории типов порядка ω, который расслоён на интенсиональные уровни. Интенсиональному уровню 0 соответствуют сущности языка простой теории типов, интенсиональный уровень 1 содержит смыслы сущностей уровня 0, интенсиональный уровень 2 содержит смыслы сущностей уровня 1 и т. д. Определены также все функции через уровни, что, правда, порождает ряд проблем, которые мы не будем здесь рассматривать.

Основанием интерпретации ЛСД является трактовка понятия “смысл” (“концепт”). Под смыслом мы будем понимать внелингвистическую процедуру (операцию) сопоставления выражению денотата. Такие процедуры в языке ЛСД репрезентированы на ненулевых интенсиональных уровнях как функции от выражений некоторого языка-объекта в область денотатов. В ЛСД каждая лингвистическая единица имеет смысл. Так, если A - имя, а $[A]$ имя смысла A, то $[[A]]$ - имя смысла имени смысла A и т. д. Лингвистическое оправдание такой свободы порождения интенсиональных сущностей состоит в том, что мы легко образуем имена вида

“смысл выражения A”,

«смысл выражения “смысл выражения A” »,

"*смысл выражения «смысл выражения*

"смысл выражения A"»"

и т. д. и всегда можем адекватно их понять. Согласно известному определению Чёрча, знать смысл суждения (предложения) означает знать условия, при которых оно истинно. Другая формулировка может звучать так: смысл суждения – это процедура проверки его истинности. Это определение мы модифицируем, следуя известной идее Фреге: смысл суждения – это процедура проверки суждения, выраженная его утверждением. Легко заметить, что введение понятия "утверждение" делает анализ смысла анализом специфических пропозициональных установок.

Смысл именного выражения – это внелингвистическая процедура, отделяющая одни объекты от других. Очевидно, что может быть сколько угодно разных способов задания одного и того же денотата для имени, т. е. для того, чтобы указывать на некоторый объект, имя может получить любой из бесконечного числа смыслов. Смысл сложного выражения в соответствии с принципом композициональности есть функция от смыслов его компонент, поэтому смысл предложения, в котором компоненты могут иметь каждый раз новый смысл, также будет в каждом случае новым.

Структура и двойственность значения

Попытаемся различить смысл выражений $(\lambda y.\, fy)(x)$ и fx, где f – примитивная константа, исходя из способа установления значения выражений, как он представлен в теоретико-типовой семантике ЛСД. Рассмотрим выражения $(\lambda xy\ .\ x + y)(2)(3)$ и $(2 + 3)$. Денотат первого определяется так:

$$\begin{aligned} val_v((\lambda xy\ .\ x + y)(2)(3)) &= val_v(\lambda xy\ .\ x + y)(val_v2)(val_v3) \\ &= gab \end{aligned}$$

где функция g, такая, что для любых a и b, $(ga)b = val_{v^*}(x + y)$, где $v^* = v(x/a, y/b)$. Точно так же,

$$\begin{aligned} val_v(2 + 3) &= val_v(+)(val_v2)(val_v3) \\ &= gab, \end{aligned}$$

где относительно g мы не можем сказать, чем она является, пока мы не знаем, обозначает ли выражение "+" примитивную константу или является λ-выражением. В любом случае, раскрывая определение функции "+" до тех пор, пока мы не придём к примитивным константам и переменным, мы сделаем одинаковое число шагов, начав с $val_{v^*}(x + y)$ и начав с $val_v(+)$. Это значит, что процедура установления значения первого выражения, помимо необходимости выполнять условие для g, на шаг длиннее. В самом деле, пусть

$(A + B) =_{\mathrm{Df}} plus(A, B)$

где *plus* есть примитивная константа. Тогда

$(2 + 3)$ есть сокращение для $plus(2)(3)$

а

$(\lambda xy \,.\, x + y)(2)(3)$ есть сокращение для

$$(\lambda x \lambda y \,.\, plus(x, y))(2)(3)$$

и для того, чтобы в последнем случае дойти до значения константы *plus*, требуется сделать лишний шаг и ввести дополнительную функцию. Экстенсионально, функциональные константы *plus* и $(\lambda x \lambda y \,.\, plus(x, y))$ тождественны, но процессы анализа их значения различаются.

Рассматривая семантические определения как описания структуры, т. е. ряда процедур (программы) установлении значения, мы для таких процедур, соответствующих A и B, где A *conv* B, обнаруживаем, во-первых, что они содержат различное число шагов, и, во-вторых, что в одном случае мы можем иметь дело непосредственно с примитивной константой, а не с λ-выражением. Можно ли отсюда получить основание для различия смысла? Да, и этот метод не является новым. Впервые он был использован Дэвидом Льюисом [9], который отождествил смысл с деревом семантических операций, определяющих денотат. При таком анализе можно различить смысл даже для выражений A и $\neg\neg A$, хотя такое различение и будет слишком сильным. Но чем тогда окажутся сами такие деревья или описания семантических процедур? Ниже мы увидим, что они станут элементами специфических пропозициональных установок субъекта.

Здесь неожиданно возникает проблема дифференциации смысла внутри- и внелогических единиц языка. Определение истинности для отрицания и обычный смысл слова "лошадь" далеко отстоят друг от друга, а главное, по-разному осознаются и используются носителями языка. В семантике формализованного языка мы получаем две независимые группы семантических процедур, одна из которых описывает, в частности, λ-конверсию, а другая имеет дело с нелогическими константами. Отождествление смыслов выражений оказывается при этом зависящим от того, какая группа семантических процедур задействована. Если обычная семантика λ-исчисления сопоставляет формулам в качестве значений классы эквивалентности по метаязыковому отношению λ-конверсии *conv* или классы λ-эквивалентности, то в семантике ЛСД каждому типу сопоставлен домен сущностей, который в общем случае и, например, для Альтернативы (0) не является классом λ-эквивалентности. Простое совмещение двух семантик невозможно, и нам потребуется сохранить эту двойственность, превратив процедуры одной семантики в объекты языка, интерпретируемого другой семантикой. Здесь нам на помощь приходит анализ естественного языка, в котором наличие параллельных способов интерпретации обычно. Итак, чему может соответствовать λ-абстракция в естественном языке?

λ-абстракция и естественный язык. Компетентный субъект

Запись $(\lambda x P x)y$ есть "приложение функции к аргументу", а запись Py есть "результат корректной подстановки y в P вместо всех свободных вхождений x". Пусть для некоторых интерпретации и означивания Py соответствует предложению

(1) *Сократ бел*

На роль предложений, соответствующих $(\lambda x P x)y$, могут претендовать два выражения естественного языка:

(2) ***Значение функции*** *"белый"* ***для аргумента*** *"Сократ"*

и

(2′) ***Приписывыание*** *Сократу* ***свойства быть*** *белым*

(2) будем называть экстенсиональной переформулировкой (1) в метаязыке или экстенсиональной λ-абстракцией, а (2′) будем называть интенсиональной переформулировкой и, соответственно, интенсиональной λ-абстракцией. Жирным шрифтом выделены существенные для данного фрагмента метаязыка термины. В (2) это "значение", "функция", "аргумент", а в (2′) - это "свойство", "приписывать". Какая из формулировок более подходит на роль аналога применения функции к аргументу в естественном языке? Ответ на этот вопрос зависит от того, какой уровень компетентности мы будем предполгать для субъекта, понимающего высказывание (1).

Поместим (1), (2) и (2′) в косвенный контекст:

(3) *Саша полагает, что Сократ бел*

(4) *Саша полагает, что* ***значение функции*** *"белый"*
для аргумента *"Сократ"* ***есть "И"***

(4′) *Саша полагает, что Сократу* ***правильно будет приписать свойство быть*** *белым*

В (4) слова "есть "И"" и "правильно" в (4′) появляются в связи с тем, что пропозициональная установка "полагает" вводит утверждение. В какой степени выражения (3), (4) и (4′) имеют сходный смысл и будет ли замена (1) на (2) или (2′), например, в (3) допустима? Как известно, во всех случаях, когда мы сталкиваемся с пропозициональными установками, возможность замены тождественных имен либо вовсе исключается, либо, в особых случаях, ограничена теми тождествами, которые также являются объектом пропозициональной установки. Например,

(5) *Алиса полагает, что Лондон - столица Парижа*

(6) *Алиса полагает, что Париж - столица Рима*

---

(7) *Алиса полагает, что Лондон столица столицы Рима*

Переход от (5) и (6) к (7) не является безусловным, если не предполагается достаточная языковая и логическая компетентность Алисы. В самом деле, Алиса, полагая (5) и (6), может, например, впопыхах, не успеть сделать вывод (7). Легко воспроизвести подобную ситуацию уже со многими посылками, когда Алиса, например, знает условия какой-то логической задачи, но еще не вывела следствия. Поэтому естественно устранить или по крайней мере ослабить пропозициональную установку, разрешив, например, переход от (5) и (6) к

(7′) *Алиса не станет отрицать, что Лондон - столица столицы Рима,*

предполагая, тем самым, что Алиса столь же компетентна в оценке корректности этого перехода, как и любой другой субъект. "Не станет отрицать" – это одна из возможностей. Другие таковы: "готова (должна) признать", "признает", "может (должна) понимать", "понимает", "поймет" и т. п.

Интересен ли для анализа субъект, лишенный любой семантической или логической компетентности? Видимо, нет. Во-первых, способность оценивать некоторые финитные рассуждения как правильные, не является логическим всеведением, т. е. минимальная логическая или семантическая компетентность субъекта пропозициональной установки – это очень слабое требование. Во-вторых, если считать субъект свободным от любых логических обязательств, то он сможет отрицать истинность, например, предъявленного ему суждения

Лондон - это Лондон.

Мир мнения такого субъекта будет "слишком" невозможным. В-третьих, отсутствие логической компетентности ограничит сферу знания субъекта некоторым случайным набором пропозиций, хотя он, будучи "по определению" способным к познанию, может рассмотреть в связи с известными ему пропозициями любую пропозицию. Слабость требования минимальной логической компетентности субъекта проявляется также и в том, что приняв его, мы сохраняем полную свободу при выборе метода описания мира мнения и пропозициональных установок.

Вернемся к примерам (3), (4) и (4′). При каких условиях (3) истинно, а, например, (4′) – ложно, т. е. при каких условиях Саша будет полагать, что Сократ бел и не будет полагать, что Сократу правильно будет приписать свойство быть белым? Если Саша обладает минимальной логической компетентностью, т. е. понимает смысл фраз (1) и (2′), но не считает их взаимозаменимыми, то, очевидно, он не знает принципа

$A \Leftrightarrow T(A)$

где T – предикат истинности, входящий в значение слова “правильно”. Кроме того, он, возможно, не знает, что значит “быть свойством” или что значит “приписать свойство”. Иными словами, Саша не оценит как корректную операцию λ-абстракции, позволяющую перейти от (1) к (2′). Если же мы возьмем утверждение (2) как подходящее на роль применения функции к аргументу, то признание корректным перехода от (1) к (2) потребует от Саши знания того, что такое “функция”, “аргумент”, “значение функции для аргумента” и что значит быть “истинным” (“И”). И такого рода знание является более специальным, чем знание понятий, содержащихся в интенсиональной формулировке.

Понятно, что смыслы (1), (2) и (2′), понимаемые как процедуры установления субъектом значения этих выражений, не являются тождественными. В первом случае осуществляется проверка того, бел ли Сократ (без временной оценки). Во втором сначала производится интерпретация того, что значит “значение функции для аргумента” и “истина”, а лишь затем осуществляется приложение функции к аргументу и проверка. Точно так же для (2′) сначала требуется выяснить, что такое “свойство”, “приписывать”, “правильность”, “объект”. Приемлемость для субъекта перехода по правилам λ-конверсии, т. е. перехода от (1) к (2) или родственного перехода от (1) к (2′) объясняется тем, что к его логической компетентности относится знание ряда понятий, имеющих отношение к синтаксису и семантике языка. Сами эти понятия и правила, в частности, понятия о функции, значении функции для аргумента, “истине”, объекте, свойстве, приписывании свойства объекту являются необходимыми как для осуществления переформулировок выражения, сохраняющих его истинность, так и для формулирования утверждений о смысле выражения, коль скоро субъект употребляет его осмысленно и понимает, что это значит. Следовательно, можно предположить, что принятие субъектом корректности переходов по правилам λ-конверсии связано с его знанием того, что такое объект, свойство и предикация.

Принятие описанных выше переходов, которые мы сопоставили λ-конверсии в качестве ее аналога в естественном языке, не зависит от содержания предложений. Например, от утверждения того, что

(8) *Бряка курдявится*

мы можем перейти к утверждениям

(9) ***Значение функции*** *"курдявиться"* ***от аргумента*** *"бряка"* ***есть "И"***

(9′) ***Свойство*** *курдявиться* ***правильно приписывается объекту, являющемуся*** *брякой*

без знания смысла имен "бряка" и "курдявиться". Выделенные слова играют здесь, так сказать, служебную роль, но их понимание субъектом обязательно и, хотя они, вообще говоря, не являются синкатегорематическими терминами, в данном контексте они используются именно в таком качестве. Это означает, что в языке, к которому принадлежат выражения, выступающие в роли аргумента и функции, т. е. "бряка" и "курдявиться", значения выделенных в (9) и (9′) слов "функция", "значение", "аргумент", "И", "свойство", "правильно", "приписывают", "объект" заведомо иные, чем в метаязыке.

Такое одновременное присутствие двух пластов значений хорошо иллюстрируют следующие пары предложений, в которых нижнее получено из верхнего по неформальным правилам λ-конверсии как в случае экстенсионального, так и в случае интенсионального прочтения (кванторы не рассматриваем):

Функция имеет в качестве денотата операцию
Значение функции *"иметь в качестве денотата операцию"* ***для аргумента*** *"функция"* ***есть "И"***

Свойство - это то, что приписывается объекту
Свойство *быть тем, что приписывается объекту* ***правильно приписывается объекту*** *свойство*

"Истина" - это возможный денотат предложения
Значение функции *"возможный денотат предложения"* ***для аргумента*** *«"истина"»* ***есть "И"***

Правильность есть характеристика приписывания свойства
Значение функции *"характеристика приписывания свойства"* ***для аргумента*** *"правильность"* ***есть "И"***

Правильность есть характеристика приписывания свойства
Свойство *быть характеристикой приписывания свойства* ***правильно приписывается объекту*** *правильность.*

Приписывать свойство объекту можно и неправильно
Возможность быть неправильным ***есть свойство, которое правильно приписывается объекту*** *приписывание свойства объекту*

Объекты - это такие сущности, которым можно приписывать свойства
Возможность быть тем, чему приписывается свойство ***есть свойство, которое правильно приписывать объекту*** *объект*

В этих примерах слова “значение функции”, “аргумент”, “И”, “свойство”, “объект”, “приписывать”, “правильно” употребляются сразу в двух ролях. Будучи выделенными, они играют служебную роль, в то время как невыделенные и не стоящие в контексте цитирования вхождения тех же слов употреблены прямо референциально. Очевидно, что генерировать вложенность одних употреблений этих выражений в другие можно сколько угодно. Как интерпретировать такого рода переходы?

В логической теории свойств, пропозиций и истины [11, P. 69-72] понятие “свойство” определяется как такая семантическая функция, значение которой для любого аргумента образует пропозицию. Не будем здесь вдаваться в подробности, касающиеся соответствующего определения пропозиции [1], скажем только, что это понятие определено так, что оказываются исключенными семантические парадоксы. Истина или “правильность приписывания” рассматривается как предикат на пропозициях, а “приписыванию” соответствует функционал *App*. Это значит, что термины “функция”, “значение”, “аргумент”, “И”, “свойство” (или “операция”), “объект”, “приписывать” (или “применять функцию к аргументу”), “правильно” (или “значение”) всегда относятся к метаязыку и их использование прямо референциально возможно только в метаязыке для репрезентации тех или иных семантических функций и операций. Поэтому в каждом из приведенных примеров переходы от верхнего предложения к нижнему оказываются переходами от предложения некоторого языка-объекта к предложению в метаязыке, хотя эти языки и не различаются синтаксически. То есть там, где фигурируют выделенные слова, мы имеем дело по меньшей мере с *мета*метаязыком. Но если интенсиональная или экстенсиональная переформулировки, подобные описанным выше, рассматриваются как аналоги приложения функции к аргументу, то запись $(\lambda x A x)B$, не отличаясь в своей денотации от $A(x \mathbin{//} B)$, предполагает существенно иное прочтение в метаязыке. Понятно поэтому, что семантика $(\lambda x A x)B$, раскрывающая смысл этого выражения, должна осуществлять интерпретацию метаязыковой формулировки, описывающей значение $(\lambda x A x)B$.

Впрочем, реализовав такую интерпретацию, мы столкнемся с необходимостью уточнения понятия концепта функции в ЛСД и его приложения в качестве функции к концептам аргументов. Возьмём пример не со свойством, а с операцией. Если

$$(2 + 3)\ conv\ ((\lambda x \lambda y\ .\ x + y)2)3,$$

то в метаязыке

$val(+)(val(2), val(3))$ *conv** ***значение применения функции*** *val*(+) ***к аргументам*** *val*(2) ***и*** *val*(3),

где *conv** обозначает метаязыковую конверсию. Здесь хорошо видно, что при осуществлении конверсии в метаязыке мы используем сущности, невыразимые в языке-объекте. Выражение справа от *conv** есть описание способа задания денотата для формулы (2 + 3), которое после интерпретации констант предстаёт в следующем виде:

Результат операции "сложение" для чисел 2 и 3.

Здесь "сложение" есть имя константной функции и вся фраза описывает процедуру, соответствующую смыслу выражения (2 + 3). В ЛСД смысл (2 + 3) будет значением смысла имени "+" от смыслов имён "2" и "3". В нашей интерпретации смысл имени "+" – это процедура сопоставления этому имени операции сложения и поэтому "+" есть константное имя, которое не является λ-выражением, а смыслы имен "2" и "3" – это процедуры сопоставления этим именам чисел 2 и 3. Поскольку процедура задания денотата "+" не является функцией на других процедурах, воспроизвести конструкцию Чёрча можно, добавив, например, комбинатор композиции *K*, задача которого будет состоять в преобразовании нескольких процедур в новую процедуру. В рассматриваемом случае,

$$K([\lambda xy\ .\ x + y][2])[3] = K([\lambda y\ .\ 2 + y])[3] = [2 + 3]$$

Работа комбинатора *K* в этом случае сходна с функциями аналогичного комбинатора в системе ЛСД Давида Каплана[2].

Семантика метаязыковых переформулировок λ-выражений

Итак, переформулировки выражений естественного языка, которые можно уподобить λ-конверсии, могут быть интерпретированы только как выражения метаязыка, поскольку аналог λ-выражения предполагает использование ряда терминов, которые являются синкатегорематическими в языке-объекте, а в метаязыке

---

[2] См. статью Чарльза Парсонса [10].

получают интерпретацию. Тем самым для реализации идеи Альтернативы (0) семантика λ-выражений должна стать семантикой их метаязыковых переформулировок. Семантика метаязыка становится тогда общим пространством интерпретации, в котором получают значения как выражения языка-объекта, так и самого метаязыка. Может ли введение такого рода комбинированной семантики помочь дифференцировать смыслы выражений $(\lambda x A x)B$ и $A(x \,/\!/\, B)$? Или иначе, существует ли интерпретируемая такой семантикой функция f, для которой, если A *conv* B, то $f[A] \neq f[B]$? Рассмотрим пример:

(10) *Боря полагает, что небо синее*

(11) *Боря полагает, что **значение функции** "синий" **для аргумента** "небо" **есть "И"**.*

(11′) *Боря полагает, что **свойство** быть синим **правильно приписывается объекту** небо*

Функция "полагает", выражающая пропозициональную установку субъекта, очевидно, годится для различения соответствующих пропозиций. В самом деле, стоит нам предположить, что субъект Боря не обладает достаточной компетентностью для того, чтобы считать утверждение предложения

(12) *Небо синее*

равносильным утверждению предложения

(13) ***Значение функции** "синий" **для аргумента** "небо" **есть "И"**.*

как мы получаем различие смыслов выражений $A(x \,/\!/\, B)$ и $(\lambda x A x)B$. И это выглядит естественно, ведь переход от (12) к (13) совсем не очевиден и даже менее очевиден, чем переход от (12) к утверждению

(13′) ***Свойство** быть синим **правильно приписывается объекту** небо*

Иными словами, мы должны иметь дело по меньшей мере с тремя разными уровнями логической (семантической) компетентности, один из которых, более продвинутый, обеспечивает корректность перехода от (10) к (11) и (11′), другой – менее продвинутый, только от (10) к (11′) и, наконец, минимальный – не принимающий ни одного из этих переходов, но позволяющий субъекту оценить истинность (12).

Для того чтобы переход от (10) к (11) или к (11′) стал невозможен, должно быть неверно одно из утверждений:

(14) *Боря полагает, что* (12) = (13)

или

(14′) *Боря полагает, что* (12) = (13′)

В первом случае это будет означать, что субъект Боря обладает самое большее минимальной логической компетентностью, а во втором, что он не обладает некоторым продвинутым ее вариантом. Выше уже говорилось, что субъект, не обладающей логической компетентностью, достаточной для верификации предложения

Лондон - это Лондон,

не представляет интереса как ответственный носитель знаний и коммуникатор. Но такого рода субъект существует (в логическом смысле) и его пропозициональные установки должны фигурировать в ЛСД, с тем чтобы иметь возможность дифференцировать ответственного и неответственного носителей информации. Тем более интересно рассмотреть пропозициональные установки такого Бори, для которого не определены значения утверждений (14) и (14′), поскольку для их описания в реляционной семантике понадобятся "невозможные" возможные миры, относительно которых значения выражений, содержащих формулы вида $(\lambda x A x)B$, также не определены, и применение λ-абстракции в любом таком мире немедленно выводит за его пределы. Можно предложить гораздо более детальную и разнообразную иерархию видов логической компетентности субъекта и соответвующих эпистемических структур, но мы оставим этот вопрос в стороне.

Вернемся к проблеме дифференциации смысла $A(x \,//\, B)$ и $(\lambda x A x)B$. Оказалось, что функция "полагать" есть такая метаязыковая функция на смыслах выражений, что для некомпетентного в той или иной мере субъекта она не отождествляет пропозиции, выраженные (12), (13) и (13′).

Опишем теперь набросок комбинированной семантики языка-объекта и фрагмента метаязыка, в которой существование таких функций обеспечивается для языка-объекта. Обозначим язык ЛСД как L и будем считать L языком-объектом или "внутренним" языком. Язык L^+, являющийся фрагментом метаязыка для L, задан функцией-переводчиком φ относительно языка L и мы будем считать L^+ "внешним" языком. В язык L^+ входят примитивные функциональные константы, определенные на переводах выражений языка L:

Funk – оператор "функция";

App – оператор "приложение функции к аргументу"[3].

Определим функцию-переводчик φ формул языка L на язык L^+:

– если A – переменная или примитивная константа, то $\varphi(A) = A$;

– если A имеет вид $\lambda x_\beta B_\alpha$, то $\varphi(A) = Funk(\varphi(B_\alpha(x_\beta))$;

[3] Эти операторы происходят из теории свойств и семантики λ-исчисления. См. книгу Раймонда Тёрнера [11].

– если A имеет вид $B_{\alpha\beta}C_{\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ – λ-выражение, то

$$\varphi(A) = App(\varphi(B_{\alpha\beta}), \varphi(C_{\beta}));$$

– если A имеет вид $B_{\alpha\beta}C_{\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ не является λ-выражением, то

$$\varphi(A) = \varphi(B_{\alpha\beta})\varphi(C_{\beta}).$$

Значение формул L^{+} задается функцией V относительно означиваний и относительно функции val_{v}, задающей стандартные значения выражениям языка L, не содержащим имена смыслов λ-выражений. Определим сначала значения примитивных констант L^{+}:

(a) $V_{v}(Funk)$ есть функция $g : Expr_{\alpha}(x_{\beta}) \to D_{\alpha\beta}$,

где $Expr_{\alpha}(x_{\beta})$ есть множество выражений типа α языка L, содержащих единственную свободную переменную типа β.

(b) $V_{v}(App) = h$,

где h – функция, определенная на парах выражений языка L^{+} и для пары $\langle e, d\rangle$, $h(e, d) = V_{v}(e)V_{v}(d)$.

(1) если X_{α} – переменная или примитивная константа языка L, то $V_{v}(X) \in D_{\alpha}$;

(2) если X – формула языка L^{+} вида $Funk(a(b))$, то $V_{v}(X)$ есть единственная f, такая, что для любого b, $f(b) = V_{v^{*}}a$, где $v^{*}= v(x \leftarrow b)$

(3) если X – формула языка L^{+} вида $App(a, b)$, для $n \geq 0$, то

$$V_{v}(X) = (V_{v}App)(a, b).$$

Назовем *семантической программой* для формулы X последовательность выражений метаязыка, которую можно получить редукцией записи $V_{v}(X)$ по определению значения формул языка L^{+}. Переход из одной строки в другую осуществляется заменой по определению значения самой внутренней подформулы, к которой редукция может быть применена. В качестве денотата формулы $[X]$ языка L будем рассматривать семантическую программу для X, считая такие программы сущностями, образующими домены интенсиональных типов. (Здесь мы временно не рассматриваем смысл сложного выражения как функцию смыслов его составляющих.)

Легко увидеть, что в приведенном определении, выражения экстенсиональных типов языка L получают обычную теоретико-типовую интерпретацию. В то же время, поскольку денотатами интенсиональных сущностей, т. е. смыслов являются семантические программы, смыслы выражений $A(x \,//\, B)$ и $(\lambda x A x)B$ окажутся, очевидно, различными. В самом деле, значения формул, в которых фигурируют подформулы вида $\lambda x A$, потребует использования метаязыковых функций App и $Funk$, в то время как $A(x \,//\, B)$ может и не содержать подформул такого вида и, следовательно, привлечение этих функций не требуется. Предполагая различные степени семантической компетентности, мы можем считать, что смысл функций *App* и *Funk* остается неизвестным для некомпетентного субъекта и поэтому он не в состоянии осуществить процедуру задания денотата для $(\lambda x A x)B$, т. е. для него это выражение остается бессмысленным.

Рассмотрим пример, содержащий примитивные константы естественного языка (отклоняясь от ЛСД, равенство также будем считать примитивной константой):

$$[(\lambda x\,.\,\textit{синий}(x))(\textit{небо})] = [\textit{синий}(\textit{небо})]$$

Денотатом левой части этого выражения является следующая семантическая программа

$$V_v(App(Funk(\textit{синий}(x)), \textit{небо})$$
$$V_vApp(V_v(Funk(\textit{синий}(x)), V_v\textit{небо})$$
$$V_v(Funk(\textit{синий}(x))V_v\textit{небо}$$
$$f(V_v\textit{небо}),$$

где f – единственная функция, такая, что для любого b, $f(b) = V_{v^*}(\textit{синий}(x))$, где $v^* = v(x \leftarrow b)$. Правой части равенства соответствует семантическая программа

$$V_v\textit{синий}(\textit{небо})$$
$$V_v\textit{синий}V_v\textit{небо}$$
$$g(V_v\textit{небо}),$$

где g – функция, сопоставленная константе "*синий*" функцией интерпретации и совпадающая с f. Очевидно, что эти семантические программы нетождественны.

Существенным отличием полученных семантических программ оказывается уже не количество шагов и даже не структура, а наличие в первой программе функций *App* и *Funk*, интерпретация которых может быть не известна некомпетентному субъекту. Пусть теперь функция f_{ool}[4] имеет следующую интерпретацию: "то, с чем согласен не вполне компетентный субъект Боря". Тогда, оставляя Боре минимум компетентности, мы получим

$$f_{ool}[\textit{синий}(\textit{небо})] \vee f_{ool}[\neg\,.\,\textit{синий}(\textit{небо})]$$

но неверно, что

$$f_{ool}[(\lambda x\,.\,\textit{синий}(x))(\textit{небо})] \vee f_{ool}[\neg\,.\,(\lambda x\,.\,\textit{синий}(x))(\textit{небо})],$$

поскольку в последнем случае, обе пропозиции остаются для Бори неопределенными по смыслу и значению.

Конечно, градации логической компетентности субъекта относительно семантических понятий, формулируемых в расширении языка-объекта, гораздо многообразнее, чем градация по принципу осведомленности в тех или иных способах рассуждения. Например, мы можем считать, что субъект понимает, что такое

---

[4] Ее тип – из пропозиций в истинностные значения.

истинность формулы языка-объекта, но не понимает, что такое истинность выражения метаязыка. Для такого субъекта оказываются неразрешимыми семантические парадоксы. С другой стороны, можно предположить и максимальную степень компетентности, проявляющуюся в знании принципа построения иерархии метаязыков и ветвления предиката истинности. Соответствующие теории могут быть развиты и в эпистемической логике.

Некоторые итоги

На наш взгляд, введение понятия логической или семантической компетентности субъекта может оказаться полезным для достижения интуитивно приемлемой реализации основной идеи Альтернативы (0) ЛСД, т. е. для различения смысла выражений вида $(\lambda x_\beta A_\alpha)(B_\beta)$ и $A_\alpha(x_\beta \ // \ B_\beta)$. Для этого необходимо иметь дело с метаязыком ЛСД, в котором фигурируют эпистемические функции, характеризующие логическую компетентность субъекта. Стандартные семантические процедуры или программы репрезентируют в метаязыке смысл выражений языка-объекта и становятся объектами специфических пропозициональных установок, в рамках которых λ-конверсия оказывается некоторым преобразованием таких объектов. Развитие ЛСД в предлагаемом нами направлении превращает ее в одну из разновидностей эпистемической логики, что кажется неизбежным, по крайней мере в связи с проблемой Альтернативы (0).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aczel P.* Frege Structures and the Notions of Proposition, Truth and Set // The Kleene Symposium / Eds. J.Barwise, H.J.Heisler and K.Kunen. North-Holland P.C. 1980. P. 31-59.
2. *Anderson C.A.* General Intensional Logic // Handbook of Philosophical Logic / Eds. D.Gabbay, F.Guenthner. D.Reidel P.C. 1984. Vol. II. P. 355-385.
3. *Church A.* A Formulation of the Logic of Sense and Denotation (Abstract) // Journal of Symbolic Logic. V. 11. 1946. P. 31.
4. *Church A.* A Formulation of the Logic of Sense and Denotation // Structure, Method and Meaning. Essays in honor of H.M.Sheffer. New York: The Liberal Arts Press. 1951. P. 3-24.
5. *Church A.* A Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation. Alternative (1) // NOUS. V. 27. 1993. P. 141-157.
6. *Church A.* Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation (Part I) // NOUS. V. 7. 1973. P. 24-33; (Part II) // NOUS. V. 8. 1974. P. 135-156.

7. *Church A.* A Formulation of the simply Theory of Types // Journal of Symbolic Logic. V. 5. 1940. P. 56-67.
8. *Henkin L.* Completeness in the Theory of Types // Journal of Symbolic Logic. V. 15. 1950. P. 81-91.
9. *Lewis D.* General semantics // Semantics of natural language / Eds. D.Davidson, G.Harman. D.Reidel P.C. North-Holland. 1977. P. 169-218.
10. *Parsons C.* Intensional logic in extensional language // Journal of Symbolic Logic. V. 47. 1982. P. 289-328.
11. *Turner R.* Truth and modality for knowledge representation. MIT Press. Cambridge, Mass., 1991.

Л.И.Мчедлишвили

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА ДЛЯ НЕТРАДИЦИОННЫХ СИСТЕМ СИЛЛОГИСТИКИ

Abstract. *Leibniz worked out for the assertoric positive syllogistics an arithmetical semantics with ordered pairs of mutually prime natural numbers as admitted values of term-variables. In [5], [14] was proved that the arithmetical semantics gives the adequate understanding of the Łukasiewicz's formal Systems L of syllogistics. In set-theoretical (extensional) semantics of the formal Systems B and Sm, in contrary to L, the empty value for term-variables is admitted and the propositions SaP and SeP means accordingly* $S \subseteq P$ *and* $S \cap P = \varnothing$ *(in B),* $S \neq \varnothing$ & $S \subseteq P$ *and* $S \cap P = \varnothing$ *(in Sm). In this article is defined Leibniz-style arithmetical semantics with arbitrary natural numbers as admitted values of term-varibles for these systems.*

В рамках своей программы универсальной науки Г.В.Лейбниц в 1679 г. разработал *арифметическую семантику* для аристотелевской ассерторической позитивной силлогистики (APS)[1]. Правильно построенные выражения APS, при ее формулировке в качестве самостоятельной логической теории, образуются из атомарных формул вида SaP, SeP, SiP и SoP с помощью обычных пропозициональных связок, где S и P – переменные для общих (силлогистических) терминов (язык Syl^+). В понятиях современной методологии основные идеи арифметической семантики можно изложить следующим образом. *Арифметической интерпретацией* языка Syl^+ является функция f, которая 1) каждому силлогистическому термину T языка Syl^+ (в качестве значения) приписывает упорядоченную пару взаимнопростых чисел (t_1,t_2), 2) а каждой формуле этого языка – истинностное значение И или Л согласно следующим базисным правилам:

f(SaP)=И $\Leftrightarrow$ s_1 делится без остатка на p_1 и s_2 делится без остатка на p_2,

f(SeP)=И $\Leftrightarrow$ s_1 и p_2 или s_2 и p_1 не являются взаимнопростыми числами,

f(SiP)=И $\Leftrightarrow$ f(SeP)=Л,

---

[1] Полный список фрагментов Лейбница, в которых обсуждается эта тема, дан в [11]; некоторые из них посвящены интересующей нас интерпретации силлогистического языка упорядоченными парами натуральных чисел; только один из этих фрагментов – “Правила, по которым...” (“Regulae ex quibus...”) – переведен на русский язык [4]. Р. Кауппи анализирует также комментарий Л.Кутюра (из его “La Logique de Leibniz”) к ним. Далее мы будем иметь в виду этот анализ.

$f(SoP)=И \Leftrightarrow f(SaP)=Л$,

и индуктивным правилам, соответствующим классическим таблицам истинности для пропозициональных связок. Как увидим далее, более согласованной с другими логическими положениями, принимаемыми Лейбницем, является следующая модификация базисного правила для общеутвердительного высказывания:

$f(SaP)=И \Leftrightarrow$ все простые делители p_1, являются делителями также s_1, а все простые делители p_2 – делителями s_2.

Пусть для всякого натурального числа n "[n]" обозначает множество его простых делителей; тогда, принимая эту коррекцию, базисные правила можно записать в терминах обычных теоретико-множественных отношений:

$f(SaP)=И \Leftrightarrow [p_1] \subseteq [s_1]$ и $[p_2] \subseteq [s_2]$,

$f(SeP)=И \Leftrightarrow [s_2] \cap [p_2] \neq \varnothing$ или $[s_2] \cap [p_1] \neq \varnothing$,

$f(SiP)=И \Leftrightarrow f(SeP)=Л$,

$f(SoP)=И \Leftrightarrow f(SeaP)=Л$[2].

Арифметическую общезначимость в смысле Лейбница для формул Syl^{+} можно определить стандартно. Е.Слупецкий и Я.Лукасевич показали, что понятия выводимости в формальном силлогистическом исчислении Лукасевича L (его мы называем традиционной системой силлогистики) и арифметической общезначимости в смысле Лейбница равнобъемны [5, гл. V], [14].

Ввиду важности этого результата для дальнейшего изложения коротко опишем его. Исчисление L построено как реконструкция APS Аристотеля; оно формулируется в языке Syl^{+} на базе классического исчисления высказываний (PC), принимая *частные случаи классических тавтологий* в качестве аксиом, с исходными правилами *подстановки* (переменного термина на место переменного термина) и *отделения антецедента* (modus ponens) и следующими специальными аксиомами[3]:

1. $SeP \supset PeS$,	4. $MaP \wedge SaM \supset SaP$,
2. $\neg SaP \equiv SoP$,	5. $MeP \wedge SaM \supset SeP$,
3. $\neg SeP \equiv SiP$,	6. $\neg(SaP \wedge SeP)$
	7. SaS

С экстенсиональной точки зрения система L представляет собой такой фрагмент обычного исчисления классов, в котором SaP и SeP понимаются как $S \subseteq P$ и $S \cap P=0$ с ограничением: *допус-*

---

[2] В этой формулировке базисных пунктов правил истинности обнаруживается, что в арифметической семантике числа не играют существенной роли и могут быть заменены произвольными конечными подмножествами некоторого непустого множества.

[3] Данная формулировка L отлична от оригинальной версии Лукасевича, однако легко можно доказать в определенном смысле их равносильность.

тимыми значениями переменных терминов являются непустые подмножества области предметов (т.е. термины с непустыми объемами). Заметим, что в арифметической семантике Лейбница в некотором смысле обращены соотношения, существование которых утверждается в категорических высказываниях при их экстенсиональной трактовке. Это можно рассматривать как признак того, что в основе арифметической семантики Лейбница лежит некоторая интенсиональная концепция понимания категорических высказываний.

Лукасевич и Слупецкий построили также исчисление отбрасываемых (непринимаемых) силлогистических формул (исчисление *L); оно формулируется на базе L как его расширение, с единственной дополнительной аксиомой отбрасывания

*1. $PaM \cap SaM \supset SiP$,

где «*» – знак отбрасывания, и следующими дополнительными исходными правилами вывода: *обратная подстановка* (если отбрасывается результат подстановки в формулу F, то отбрасывается и сама формула F), *отделение консеквента*, modus tollens (если доказуема $F \supset G$, а G отбрасывается, то отбрасывается также F) и *правило Слупецкого* (если отбрасываются $A \supset D$ и $B \supset D$, где A и B – отрицательные атомы, а D – дизъюнкция произвольных атомов, то отбрасывается также $A \wedge B \supset D$) (о понятии отбрасывания см. [5], [9]); – и дали эскиз доказательства следующих двух утверждений: (I) *Ни одна силлогистическая формула не является доказуемой в L и отбрасываемой в* *L (утверждение о *несовместимости* метапредикатов доказуемости и отбрасываемости) и (II) *Каждая силлогистическая формула или доказуема в L или отбрасываема в *L* (утверждение о *дополнительности* метапредикатов доказуемости и отбрасываемости). Первая из них выводится из утверждений (I.1) *Каждая доказуемая в L формула является арифметически общезначимой в смысле Лейбница* и (I.2) *Каждая отбрасываемая в *L формула является арифметически опровержимой в смысле Лейбница*[4]. Для доказательства (I.1) достаточно проверить арифметическую общезначимость специфических силлогистических аксиом L, так как очевидно, что правила вывода L сохраняют это свойство формул. Очевидно также, что правило обратной подстановки и modus tollens сохраняют арифметическую опровержимость, поэтому для доказательства утверждения (I.2) достаточно проверить арифметическую опровержимость единственной аксиомы отбрасывания исчисления *L и доказать, что пра-

[4] В дальнейшем в подобных контекстах разъяснительную фразу «в смысле Лейбница» будем опускать.

вило Слупецкого также обладает аналогичным свойством сохранения арифметической опровержимости: если арифметически опровержимы формулы $A \supset D$ и $B \supset D$, где A и B – отрицательные атомы, а D – дизъюнкция произвольных атомов, то арифметически опровержима также формула $A \wedge B \supset D$; доказательство этого утверждения, принадлежащее Слупецкому, приводится в книге Лукасевича [5, 185-187]. Что же касается доказательства утверждения (II), то в нем используется силлогистическая версия теоремы о конъюнктивной нормальной форме, а также эффективная процедура нахождения для любой дизъюнкции силлогистических атомов ее доказательства в L или ее отбрасывания в *L. Из утверждений (II) и (I.2) следует теорема полноты для исчисления L: (III) *Каждая арифметически общезначимая формула языка Syl^+ доказуема в L.* Метатеоремы (I.1) и (III) совместно составляют утверждение о равнообъемности предикатов выводимости в L и арифметической общезначимости в смысле Лейбница.

Лейбниц был уверен, что описанную трактовку силлогистического языка с соответствующими изменениями можно приложить к модальным, гипотетическим и негативным силлогизмам. Однако его попытка определить арифметическое значение отрицательного термина по арифметическому значению отрицаемого термина оказалось неудачной. В частности, при доказательстве законов силлогистической контрапозиции Лейбниц применяет правило: если значением термина T является упорядоченная пара чисел (t_1, t_2), то значение его отрицания T′ (не -T) определяется как упорядоченная пара (t_2, t_1); однако легко можно показать, что при таком понимании из SeP не следует SaP′, т.е. проваливается один из законов превращения [11]. После этой неудачи работа в направлении расширения сферы применимости арифметической семантики Лейбницем не была продолжена. Но думается, что для того чтобы адекватно оценить Лейбницево предположение и его метод арифметизации силлогистики, необходимо исследовать возможности применения этого метода за пределами традиционной ассерторической силлогистики, реконструированной в исчислении L.

В настоящей работе анализируется философское основание, так сказать, "идеология" арифметической семантики Лейбница и показывается возможность истолкования арифметически в духе Лейбница двух нетрадиционных систем APS (первый набросок такого обобщения дан в [8][5]); эти системы с экстенсиональной точки зрения являются такими фрагментами обычного исчисления

[5] Эскиз обобщения Лейбницева метода арифметизации для негативной силлогистики дан в [3].

классов, в которых для переменных терминов, в отличие от L, допускается и пустое значение; кроме того, суждения SaP и SeP в первом из них, вслед за А. Де Морганом, Ф.Брентано, Ч.Пирсом и др., соответственно понимаются как $S \subseteq P$ и $S \cap P \neq 0$ без всякого ограничения, а в другом – как $S \neq \varnothing$ & $S \subseteq P$ и $S \cap P = \varnothing$. При первом истолковании непустота субъекта является необходимым условием истинности частного (но не общего) высказывания, тогда как при втором истолковании непустота субъекта следует из утвердительных (но не отрицательных) высказываний. Второе понимание силлогистического языка имеет корни в "Категориях" Аристотеля, широко обсуждалось в средневековой логике, а в XX в. предлагалось (Дж.Кейнсом, У.Джонсоном, К.Поппером) как альтернатива первого понимания, сохраняющая все законы обращения, логического квадрата и силлогизмов [12], [2], [1].

Первое нетрадиционное понимание силлогистики было аксиоматизировано Ю.М.Бохенским [1] и Дж.Шефердсоном [13], второе Э.Дж.Леммоном [15] и В.А.Смирновым [10]. Обозначим эти системы как B и Sm соответственно. B и Sm, подобно L, формулируются в языке Syl^{+} на базе PC с теми же исходными правилами вывода и следующими специальными силлогистическими аксиомами:

B. Аксиомы 1, -5,7 и

8. $SiP \supset SiS$

9. $SoP \supset SiS$

Sm. Аксиомы 1- 6 и

10. $SiP \supset SaS$

В [9] нами были построены также исчисления отбрасываемых формул *B и *Sm; они соответственно формулируются на базе исчислений B и Sm, как их расширения, с аксиомами отбрасывания:

* B * 2. $(PiP \wedge SiS) \supset (PaM \wedge SaM \supset SiP)$,

* 3. $SiS \supset PiP$

* Sm. Аксиома отбрасывания *1 и

* 4. $SaS \supset PiP$;

с теми же дополнительными исходными правилами вывода, что и *L (однако правило Слупецкого в *B ограничивается определенным условием [9,98]); на основе их экстенсионального (т.е. вышеуказанного теоретико-множественного) понимания, без привлечения какого-либо варианта арифметической семантики, также доказаны утверждения (I^0) и (II^0) *о несовместимости и дополнительности метапредикатов выводимости в B (Sm) и отбрасываемости в *B (*Sm).*

* * *

Как пришел Лейбниц к арифметической семантике? На какой "логической идеологии" основывал он свою интуицию? Лейбницова программа универсальной науки (scientia universalis) состоит из двух частей: универсального метода обозначений (characteristica universalis), целью которого является разработка существенно отличной от обычной, в некотором смысле алгебраической, системы обозначений для записи научных фактов, и формальной теории рассуждения (calculus ratiocinator), применяемой к языку, основанному на новой системе обозначений. Убежденность Лейбница в осуществимости идеи универсальной характеристики опирается на его концепцию о структуре или комбинаторике понятий. Согласно первоначальной версии этой концепции (1) каждое понятие, т.е. содержание каждого термина, однозначно разлагается (анализируется) на простые, далее неразложимые понятия (на простые признаки, реквизиты), (2) из которых оно строится (синтезируется) с помощью их сочленения, трактуемого Лейбницем в смысле конъюнкции (пересечения) понятий. Рассуждение представляет собой оперирование характерами или знаками; они могут быть картинками, словами, числами и пр. Прогресс в познании во многом зависит от особенностей избранной системы характеров. Лейбниц считает, что успехи математики существенно обусловлены спецификой применяемой в математическом языке обозначений. Исходя из этого он отдает предпочтение выбору чисел в качестве характеров и в других областях науки. Основными положениями универсальной характеристики и исчисления рассуждений являются: (3) каждому простому понятию можно взаимнооднозначно поставить в соответствие простое число и (4) это соответствие распространить на все понятия, обозначив каждое из них произведением простых чисел, соответствующих простым понятиям, из которых оно составлено (характеристическое число понятия); (5) каждое высказывание (Лейбниц имеет в виду простые категорические суждения) можно трактовать как утверждение существования некоторого арифметического отношения между характеристическими числами понятий, входящих в данное высказывание.

Чтобы задать характеристические числа, нужно искать определения понятий и, в конце концов, сводить их к неразложимым реквизитам. Однако Лейбниц полагал, что даже в том случае, когда фактически не найдены все определения и, тем самым, не найдены все характеристические числа, выполнив требование (5), на основе гипотетического существования характеристических чисел можно задать арифметические критерии корректности рассуждения и доказать все логические законы. Логические фрагменты Лейбница содержат серию попыток сведения отношений между понятиями к численным отношениям. Большинство из них датированы апрелем 1679 г., хотя отдельные идеи, рассмотренные в них, встречаются и в более ранних работах, в том числе в Dissertatio de Arte combinatoria.

При поиске решения проблемы, заключенной в тезисе (5), *исходным для Лейбница была интенсиональная трактовка общеутвердительного высказывания:* оно утверждает включение предиката высказывания в субъект высказывания, т.е. SaP истинно, если и только если понятие P является (конъюнктивной) частью понятия S; точнее, если каждое простое понятие, входящее в содержание P, входит также в содержание S. Пусть s и p – характеристические числа понятий S и P; учитывая способ их задания, Лейбниц заключает, что указанное интенсиональное условие равносильно арифметическому условию: *существует такое натуралное число n, что s=pn*, другими словами, *p является делителем s*. Более точным арифметическим переводом интенсиональной трактовки общеутвердительного высказывания была бы следующая формулировка: *каждый простой делитель p является делителем также s*, символически, $[p]\subseteq[s]$; кроме того, такая формулировка была бы более согласованной с другими логическими положениями, принимаемыми Лейбницем, например, законом идемпотентности для понятий (частноотрицательное высказывание как интенсионально, так и арифметически понимается как отрицание общеутвердительного высказывания).

Лейбницу не удалось найти такие интенсиональные и арифметические условия истинности частноутвердительного и общеотрицательного высказываний, чтобы они совместно с условиями истинности высказываний типа a и o обеспечивали корректность всех законов традиционной APS. Один вариант таких условий, над которым размышлял Лейбниц и который встречается уже в Dissertatio, гласит: каждое частноутвердительное высказывание возникает из общеутвердительного высказывания с теми же терминами либо посредством субальтернации, либо посредством обращения с ограничением. Как заметил Кутюра, это предположение Лейбница подразумевает принятие неверной равносильности $SiP \equiv SaP \vee PaS$, ибо очевидно, что существуют такие термины S и P, для которых, хотя SiP истинно, не выполняются ни SaP, ни PaS. В другом варианте на SiP распространяется с определенным ограничением понимание SaP: в частноутвердительном высказывании утверждается включение предиката в какой-либо вид субъекта. Так как вид получается добавлением нового признака к совокупности признаков рода, Лейбниц полагал, что такому (интенсиональному) пониманию SiP соответствует арифметическое условие: SiP истинно, если и только если характеристическое число s субъекта, умноженное на некоторое число, делится без остатка на характеристическое число p предиката (общеотрицательное высказывание как интенсионально, так и арифметически понимается как отрицание отношения, утверждаемого в SiP). С применением кванторов описанные арифметические условия истиности простых категорических высказываний можно записать следущим образом:

SaP: $\exists n(s=pn)$, SeP: $\forall mn(sm\neq pn)$

SiP: $\exists mn(sm=pn)$, SoP: $\forall n(s\neq pn)$.

Кутюра был прав, когда утверждал, что всегда (т.е. для любых S и P) можно найти числа m и n, удовлетворяющие равенству $sm=pn$ (например, путь $m=p$ и $n=s$); это означает, что при таком понимании SiP формулы SiP и $\neg$SeP являлись бы законами силлогистики, что противоречит традиционному пониманию APS.

Эти трудности, которые, по-видимому, осознавал и сам Лейбниц, для него были симптомом каких-то дефектов комбинаторики понятий, служащей основанием концепции универсальной характеристики. С целью их устранения Лейбниц скорректировал как свое понимание содержания понятия (термина), так и способ использования чисел в качестве характеров; в частности, в усовершенствованной версии комбинаторики понятий сложное понятие является композицией (сочленением) не только простых понятий – теперь каждая ее составляющая является либо простым понятием, либо отрицанием (дополнением) простого понятия и поэтому каждое понятие обозначается (кодируется) упорядочнной парой чисел; первая компонента этой пары является произведением простых чисел, соотвествующих простым понятиям, которые входят в данное понятие сами, т.е. положительно, а вторая – произведением простых чисел, соответствующих простым понятиям, дополнения которых входят в данное понятие, т. е. входят отрицательно. Это предположение подтверждается употреблением Лейбницем знаков «+» и «–» при описании арифметической интерпретации. Первый член характеристической пары чисел он снабжает знаком «+», второй – знаком «–» (см. [4, 538-546]); однако эти знаки в арифметическом смысле совершенно излишни (Лукасевич их даже не упоминает). Очевидно, что они «реликты» подразумеваемой Лейбницем новой версии комбинаторики понятий: первое число кодифицирует простые понятия, входящие положительно в данное понятие, второе – простые понятия, входящие в данное понятие отрицательно.

Следовательно, для содержания произвольного понятия (термина) T имеется равенство

$$T=T_1\cap\ldots\cap T_m\cap T'_{m+1}\cap\ldots\cap T'_{m+n},$$

где $T_1, \ldots, T_{m+n}$ – простые понятия (признаки, реквизиты), « ' » – знак понятийного отрицания (дополнения), а характер T определяется как пара чисел $(t_1\cdot\ldots\cdot t_m, t_{m+1}\cdot\ldots\cdot t_{m+n})$, где $t_1\ldots t_m, t_{m+1}\ldots t_{m+n}$ простые числа, соответствущие простым понятиям $T_1, \ldots, T_m, T_{m+1}, \ldots T_{m+n}$[6].

Имея в виду описанную версию комбинаторики понятий, все пункты арифметической семантики, предложенной Лейбницем, обретают неарифметический смысл и становится возможным *перевести* их в интенсионально-семантические утверждения, одновременно выявляя корреляцию, которая существует между обычным экстенсиональным рассмотрением силлогистики [6]; [9] и et интенсиональной трактовкой.

Во-первых, требование взаимной простоты членов упорядоченной пары чисел (t_1, t_2), являющейся допустимым арифметическим значением произвольного термина T, означает, что содержание термина (понятия) T не должно содержать в себе какое-либо простое понятие и положительно, и отрицательно, т. е. оно не должно быть противоречивым, оно должно обеспечивать возможность непустоты экстенсионального значения термина T. Тем самым это утверждение является интенсиональным аналогом требования непустоты объемов силлогистических терминов при их экстенсиональной трактовке.

Арифметическое условие истинности высказывания SaP в новой версии универсальной характеристики означает, что каждое простое понятие, содержащееся в P положительно или отрицательно, содержится также положительно, соотвественно, отрицательно в S и, таким образом, так же, как в старой версии, оно требует *необходимой (аналитической) истинности* соотношения $S\subseteq P$ между объемами терминов S и P. С другой стороны, арифметическое условие истинности высказывания SiP означает, что ни одно простое понятие, содержащееся в одном из понятий S и P положительно или отрицательно, не содержится в другом из них отрицательно, соответственно положительно; другими словами SiP

---

[6] Может ли понятие состоять только из простых понятий, взятых положительно (тогда n=0), или только из простых понятий, взятых отрицательно (тогда m=0)? Текст Лейбница не содержит никакого указания, могущего помочь в решении этого вопроса. Однако на рассматриваемом общем уровне ничего не мешает допустить такие возможности; ведь, например, простые понятия являются примерами таких понятий. Характерами для подобных понятий будут соответственно служить пары чисел $(t_1\cdot\ldots\cdot t_m, 1)$ и $(1, t_1\cdot\ldots\cdot t_n)$.

истинно, если и только если сочленение SP является непротиворечным и поэтому экстенсиональное соотношение $S \cap P \neq \varnothing$ является *возможно истинным* (аналогично расшифровываются арифметические условия отрицательных высказываний)[7].

Описанную комбинаторику понятий и универсальную характеристику приложим, приспособим к системам B и Sm.

В обычной теоретико-множественной семантике этих систем в качестве значения переменных терминов, кроме произвольных непустых множеств, в отличие от такой же семантики L, допускается и пустое множество. Осмысливая комбинаторику понятий для систем B и Sm и задавая соответствующий метод определения арифметических характеров, следует отказаться от требования непротиворечивости допустимых интенсиональных значений переменных терминов и взаимной простоты членов пар чисел, составляющих соответствующие арифметические характеры. Таким образом, следует расширить область интенсиональных значений терминов противоречивыми понятиями, а в качестве характеров допустить пары произвольных натуральных чисел.

При расширенной области интенсиональных значений переменных терминов необходимая истинность экстенсинальных соотношений $S \subseteq P$ (теоретико-множественно понимаемое SaP в B) и $S \neq \varnothing$ & $S \subseteq P$ (теоретико-множественно понимаемое SaP в Sm) обеспечивается соответственно следущими толкованиями SaP в новой версии комбинаторики понятий: *в B высказывание SaP утверждает, что каждое простое понятие, содержащееся в P положительно или отрицательно, содержится в S таким же способом – положительно, соответственно, отрицательно, или S является противоречивым понятием; в Sm высказывание SaP утверждает, что S не является противоречивым понятием и каждое простое понятие, содержащееся в P положительно или отрицательно, содержится в S таким же способом.* Экстенсиональный смысл высказывания SiP в B и Sm один и тот же, оно понимается как утверждение $S \cap P \neq \varnothing$. Возможную истинность этого соотношения, так же как в случае L, *обеспечивает непротиворечивость сочленения SP (конъюнкция содержаний S и P) и, следовательно, в B и Sm высказывание SiP утверждает, что если какое-нибудь простое понятие содержится в S или P положительно, то оно ни в S, ни в P не содержится отрицательно* (истолкованием отрицательного высказывания является отрицание истолкования соответствующего контрадикторного высказывания).

---

[7] Эта интенсиональная подоплека Лейбницевой арифметической семантики рассматривается независимо от последней В.И.Маркиным в [7].

Перевести эти положения интенсиональной семантики с языка комбинаторики понятий обратно на арифметический язык универсальной характеристики не представляет трудности.

Функцию f назовем *арифметической B-интерпретацией (Sm-интерпретацией)* языка Syl^{+}, если она 1) каждому переменному термину T этого языка приписывает (в качестве значения) упрядоченную пару произвольных натуральных чисел (t_1,t_2), 2) а каждой формуле этого языка – истинностное значение согласно следующим базисным правилам:

при истолковании B

$f(SaP)=И \Leftrightarrow [s_1]\cap[s_2]\neq\varnothing \vee ([p_1]\subseteq[s_1] \& [p_2]\subseteq[s_2])$,

при истолкованиии Sm

$f(SaP)=И \Leftrightarrow [s_1]\cap[s_2]=\varnothing \& ([p_1]\subseteq[s_1] \& [p_2]\subseteq[s_2])$,

в обоих случаях

$f(SeP)=И \Leftrightarrow [s_1]\cap[s_2] \neq\varnothing \vee [s_1]\subseteq[p_2] \neq\varnothing \vee ([p_1] \cap[s_2] \neq\varnothing \vee$
$\vee [p_1] \cap[p_2] \neq\varnothing$,

$f(SiP)=И \Leftrightarrow f(SeP)=Л$,

$f(SoP)=И \Leftrightarrow f(SaP)=Л$,

и индуктивным правилам, соответствующим классическим таблицам истинности для пропозициональных связок. Можно стандартным образом определить понятия арифметической B-общезначимости и арифметической Sm-общезначимости.

Доказываются следующие аналоги утверждений (I.1) и (I.2):

(I^0.1) *Каждая доказуемая в B (Sm) формула является арифметически B-общезначимой (сооответственнно, арифметически Sm-общезначимой);*

($I^0$2) *Каждая отбрасываемая в *B (*Sm) формула является арифметически B-опровержимой (соответственно, арифметически Sm-опровержимой).*

Доказательства проводятся индуктивно точно так, как доказательства утверждений (I.1) и (I.2), и почти полностью сводятся к проверке соответствующих типов арифметической общезначимости и опровержимости аксиом исчислений B, *B, Sm и *Sm. Имеется единственное отклонение – при доказательстве корректности правила Слупецкого в *B (в *Sm она доказывается методом Слупецкого–Лукасевича точно так, как в *L) применяется следующая лемма: *Если формулы $A\supset D$ и $B\supset D$ арифметически B-опровержимы, где A и B – отрицательные атомы, D – дизъюнкция прозвольных атомов, а A имеет вид SoP, то существует арифметическая B-интерпретация f языка Syl^{+} такая, что f опровергает $B\supset D$ и числа s_1 и s_2 являются взаимнопростыми.*

Из утверждений (II^0) и (I^0.2) так же, как в случае L, следуют теоремы *полноты* для исчислений B и Sm: (III^0) *Каждая арифметически B-общезначимая (Sm-обощезначимая) формула языка Syl^+ доказуема в B (соответственно, в Sm).* (III^0) вместе с ($I^0$1) составляет утверждение о равнообъемности предикатов выводимости в B (Sm) и арифметической B-общезначимости (соответствено, Sm-общезначимости).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бочаров В. А.* Аристотель и традиционная логика. М., 1984.
2. *Бочаров В.А.* Интерпретация ассерторической силлогистики Аристотеля // Логика Аристотеля. Материалы симпозиума. Тбилиси, 1985. С. 6-20.
3. *Дургпишвили Н. К., Мчедлишвили Л. И.* Обобщение Лейбницева метода арифметизации силлогистики // Современая логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы V общероссийской научной конференции. С.-Пб., 1998. С. 109-118.
4. *Лейбниц.* Сочинения. Том 3. М., 1984. С. 395-617.
5. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики (пер. с англ.). М., 1959.
6. *Маркин В. И.* Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.
7. *Маркин В. И.* Интенсиональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. Вып. 8. М., 2001. С. 82-91.
8. *Мчедлишвили Л. И.* Применение Лейбницва метода арифметизации к нетрадиционным системам силлогистики // Смирновские чтения. 2 Международная конференция. М., 1999. С. 47-49.
9. *Мчедлишвили Л.И.* Исчисления отбрасываемых формул для нетрадиционных систем позитивной силлогистики // Логические исследования. Вып 8. М., 2001. С. 92-104.
10. *Смирнов В. А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1981.
11. *Kauppi R.* Über die Leibnizsche Logik. New York; London, 1985. S. 54-65, 145-153.
12. *Prior A.N.* Formal Logic. Oxford, 1962. P. 103-184.
13. *Shepherdson J. C.* On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // JSL. 1956. Vol. 21, N. 2. P. 137-147.
14. *Slupecki J.* On Aristotelian Syllogistic // Studia Philosophica, 1949/50 (4). P. 275-300.
15. *Sotirov V.* Slupecki's Syllogistic Axiomatized // Preprint.

Н.Н.Непейвода

КВАЗИИСКУССТВЕННЫЕ ОБЪЕКТЫ*

Abstract. *A new notion of quasi-artificial object is introduced here. This is inspired by Computational Linguistic considering Natural, Formal and Quasi-natural languages. One member of this classification is obviously lost. Quasi-artificial objects as opposed to purely artificial ones are constructed from natural origins by purposeful and often formal transformations and actions. UNL language expressions can be viewed as examples here. Programming, technical engineering and creative thinking phenomena are considered from the point of view of this philosophical opposition.*

Постановка проблемы

Одним из направлений в современной методологии науки является исследование *искусственных объектов*, или *артефактов*. Как правило, искусственные объекты определяются как нечто сделанное, сотворенное по плану. Например, стол является искусственным объектом, поскольку он сделан с определенной целью и по определенному образцу. План или образец может быть либо явным, либо неявным, но критерий искусственного как чего-то целенаправленно сделанного не меняется.

Сразу отметим, что при такой характеризации искусственного объекта возникает некоторая субъективность. Например, камень, находящийся на вершине холма, является естественным объектом для отдыхающего на нем пастуха и искусственным объектом для историка, рассматривающего как «памятник старины: межевой камень между Москвой и Ростовом». Это не всегда существенно, хотя задача объективного выявления искусственности может быть весьма актуальной, в частности при попытке установления контакта с другими цивилизациями или при попытке восстановления информации о других цивилизациях в прошлом Земли.

Уточним приведенную выше характеристику. Объект может быть описан с разных сторон. Так, он может иметь структурное описание, характеризующее систему через ее компоненты; функциональное – описывающее действие каждой из компонент; холистическое – описывающее действие системы как целого при ее функционировании (обычно в системном подходе этими описаниями и ограничиваются и видят его задачу в декомпозиции системы на компоненты и в получении холистического описания всей системы из структурного и функционального). Гармонично орга-

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18307а.

низованная система (не обязательно искусственная) имеет и другие описания, из которых для нас важнее всего *атрибутивное* описание.

Атрибутивное описание определяет зависимость между структурным и функциональным описанием объекта.

Кроме того, существуют еще два вида описания: *внешнее* (или интерфейсное): как выглядит система и для чего она рассматривается либо применяется (обычно именно такое описание дается, когда пытаются определить понятие) – и *генетическое,* раскрывающее возникновение,происхождение системы.

Определение 1. Объект называется *искусственным*, если его генетическое описание логически определяет атрибутивное.

Таким образом, у искусственного объекта построение определяет зависимость между структурой и функциями. Заметим, что сказать, что построение определяет структуру либо построение определяет функции, было бы неточно, поскольку и структура, и функции могут быть привнесены в построение извне. Таковы, например, структура каменной глыбы, структура холма и функция границы в рассмотрении межевого камня. А вот гербы либо надписи, выбитые на камне, следы которых нашел историк, как раз и связывают структуру системы «Приметный камень на вершине» со структурой системы политических отношений княжеств.

Но при изучении искусственных объектов все время остается некоторая неудовлетворенность. Кажется, что разные авторы не очень понимают друг друга и, видимо, говорят о разных вещах. Вроде бы, поскольку сущность искусственных объектов одинакова, должна быть общая методология их проектирования, но работы, например, по инженерному творчеству резко отличаются от работ по архитектуре программных систем, а те и другие принципиально отличаются от работ по искусству. Чаще всего в таких случаях оказывается, что рассматриваемые понятия концептуально внутренне противоречивы, поскольку мы недостаточно их уточнили и не разделили какие-то важные подслучаи. Выделению подслучая, который, насколько известно автору, ранее в литературе не рассматривался систематически, посвящена настоящая статья.

Высокоуровневый и чисто методологический характер данной работы привел к тому, что мы решили не делать ссылок вообще, поскольку в противном случае их пришлось бы делать сотни.

Морфологический ящик языков

Роль вдохновляющего и наводящего примера в данном случае сыграла компьютерная лингвистика. В ней выделены понятия естественного языка (комментариев не требует, воспринимается как нечто данное нам извне и в развитии); искусственного, или формального, языка, у которого есть точные синтаксис и семантика; и квазиестественного языка, который выглядит по форме близко к естественному, а воспринимается машиной на самом деле чисто формально.

Мы предлагаем чисто логически ввести в рассмотрение упущенный компонент морфологического ящика.

Форма	Естественный	Искусственный
Сущность		
Естественный	Естественный	*Квазиискусственный*
Искусственный	Квазиестественный	Формальный

Рассмотрим подробнее случай квазиестественного языка, поскольку в чистом виде такого понятия не было выделено для произвольных объектов, а нам это полезно для дальнейших более общих методологических рассмотрений.

Квазиестественные языки появляются в двух случаях. Наиболее важное их практическое приложение – системы запросов к базам данных для специализированных нужд. Например, рапорт патрульного о происшествии чисто формально преобразуется в запрос на пополнение базы данных. При этом из него выделяются ключевые элементы: идентификатор автора сообщения, время события, место события, его характер (например, драка, перешедшая в поножовщину, а затем в перестрелку), формальные характеристики участников и вещественных доказательств (например, данные либо приметы участников побоища и характеристики изъятого холодного оружия, количество потерпевших и данные о них, данные о свидетелях). Все остальное, что писалось в рапорте, будет проигнорировано. Так что при вводе текста, рассматриваемого как квазиестественный, игнорируется все, кроме ключевых и некоторых служебных слов (последнее – только чтобы распознать структуру предложения).

Есть и обратная задача: генерация текста. Это делается при генерации отчетов при запросах к специализированным базам данных или в «болталках»: диалоговых системах, имитирующих естественный диалог. При генерации, которая является более творческой задачей, на искусственный скелет натягивается оболочка, взятая из прецедентов либо из более ранних фраз из диалогов данной системы. В чисто формальных языках программирования такие необязательные синтаксические конструкции, служащие для облегчения восприятия текста, часто называются синтаксическим сахаром. При генерации текста на квазиестественном языке такого «сахара» столь много, что получается нечто похожее на варенье: крупицы смысла плавают в густом сиропе, улучшающем их вкус.

Таким образом, мы видим, что синтаксис квазиестественного языка *выглядит* как не полностью определенный, а семантика остается точной (конечно же, он только выглядит не полностью определенным: здесь количественные характеристики, а именно доля необязательных элементов, влияют на качественные показатели обработки и восприятия текста).

Квазиискусственный язык на примере UNL

Соответственно, квазиискусственный язык должен иметь уточненный синтаксис, а семантика фраз должна быть унаследована из естественного.

На самом деле доля квазиискусственности есть в каждом литературном языке. Стоит лишь рассмотреть разительные отличия литературного и разговорного русского или, тем более, французского языков. Еще более явно черты квазиискусственности проглядывают в языках, созданных для нужд межнационального общения либо кодификации ритуала: санскрит, яванский, эсперанто, церковнославянский, средневековая латынь, “Basic English”. Но и в том, и в другом случае элементы квазиискусственности – это прежде всего нормативные ограничения.

Первым языком, который явно выделил черты, присущие квазиискусственному языку, явился международный язык UNL (Universal Networking Language).

Пример 1. Рассмотрим запись на языке UNL предложения “I can hear a dog barking outside”.

```
{unl}
aoj(hear(icl>perceive(agt>thing,obj>thing)).@entry.@ability, I)
obj(hear(icl>perceive(agt>thing,obj>thing)).@entry.@ability, :01)
agt:01(bark(agt>dog).@entry, dog(icl>mammal))
plc:01(bark(agt>dog).@entry, outside(icl>place))
{/unl}
```

Не вдаваясь в детали, заметим, что основной единицей записи на UNL является сверхиероглиф, называемый в официальной терминологии UW (Universal Word). Этот сверхиероглиф состоит из семантического ключа, которым, как правило, является английское простое слово (например, bark). Основа уточняется при помощи модификаторов, что дает возможность выразить, например, такие слова, отсутствующие в английском языке, как русское слово «жениться»:

Marry(agt>man,obj>woman),

что означает модификацию смысла английской основы условиями, в соответствии с которыми действующим лицом является мужчина, а объектом, на который направлено действие, – женщина. В некоторых случаях служебные слова превращаются в дополнительные модификаторы сверхиероглифа, как, например, "can" вошло частью в выражение

hear(icl>perceive(agt>thing,obj>thing)).@entry.@ability.

Заметим, что это же выражение показывает способ раскрытия, в каком из многих присущих ей смыслов употребляется английская основа. В выражении

hear(icl>perceive)

уточняется, что hear в данном случае означает именно «воспринимать звук», что указывается уточняющим модификатором (icl>perceive). Пример показывает, что список сверхиероглифов открыт, и что на каждую основу может накладываться целая иерархия модификаторов.

Само предложение представляется не как линейная последовательность, а как граф подвыражений, связанных отношениями.

В данном случае видно, как на основу естественного языка накладывается точный синтаксис и как при этом остается нетронутой неоднозначная и неформализуемая (что, как известно, означает активно противостоящая всякой формализации) семантика.

Искусственные и квазиискусственные объекты

Язык оказался лишь хорошим полигоном, на котором выявилось достаточно общее методологическое понятие. Видно, что термин «искусственный объект» содержит в себе две в корне различных сущности.

Первый класс: искусственные объекты в собственном смысле этого слова. Эти объекты:

a) созданы лишь силой логики творца (в данном случае, конечно же, с маленькой буквы, хотя практически данный пассаж является переводом на научный язык предложения «В начале было Слово»; но слово здесь – научное и логическое, которое порождено творческой идеей, а не является ею);
b) сконструированы из таких элементов, что их свойства могут быть описаны логически и *в принципе* полно;
c) их идея обозрима.

К таким объектам относятся прежде всего математические конструкции и программы. Создатель такой конструкции выступает в роли демиурга, ограниченного лишь законами логики и собственной мыслительной мощью. Сущность искусственных объектов чаще всего информационная. Заметим, что мы не причисляем к числу таких искусственных объектов химеры чистого воображения, излюбленный объект анализа в упадочнические времена fin de ciecle или постмодернизма.

Пока не появилось программирование, пожалуй, лишь математические объекты служили примером искусственных в собственном смысле. Неудивительно, что методология и методика творческого мышления игнорировали их как чисто абстрактные сущности. Но появившись, программы стали в тот же класс, выявив, что, хотя искусственные объекты создаются по законам одной лишь логики, они не могут восприниматься отдельно от ресурсных ограничений. «Железо» машины в данном случае выступает именно в качестве такого ресурсного ограничения, что выявляет еще одну скрытую, но глубокую причину того, почему хорошие программисты не интересуются тем, как устроены вычисления на физическом уровне. Однако проблема ресурсов возникла еще для математических объектов.

В самом деле, математическая конструкция и математическое доказательство в традиционном смысле – несколько разные объекты. Если математическая конструкция обладает свойством обозримости (в противном случае она никогда не будет признана сообществом математиков), то доказательство (в особенности носящее спортивный характер: доказательство давно сформулированного авторитетным математиком результата) часто находится на грани между артефактом и химерой, ввиду своей необозримости и часто расплывчатости. Так что абстрактность и идеальность чисто искусственного объекта ограничивается возможностями его восприятия. Заметим, что среда, в которой живет чисто искусственный объект, сама по себе не может считаться чисто искусственной, поскольку даже критерии *качественной* оценки математических результатов и построений неформализуемы и близки к экспертным оценкам, скажем, в фигурном катании.

Еще ярче феномен большой искусственной системы проявляется в программах: современные программные системы необозримы и часто лучше описываются как естественные объекты. Тем более что версии программ все время «обновляются», и поведение новой версии становится другим. В качестве анекдотического примера можно сослаться на тот факт, что в системе UNIX введено понятие абсолютно совместимой версии:

версии, сохраняющей не только полезные качества и цель, но и ошибки предыдущей.

Следует заметить, что центральная роль логики в построении чисто искусственных объектов означает также возможность разных логик для разных классов таких объектов. Особенно ярко это проявилось в программировании, когда начали описывать построения программ. Выяснилось, что в зависимости от отношения к ресурсам программы делятся по крайней мере на четыре класса, соответствующих разным классам конструктивных логик и разным стилям программирования.

Когда вычисления и действия локальны и направлены на поиск новой информации преобразованиями данной, логика является интуиционистской (что часто огрубляется до классической), а стиль программирования – традиционным структурным программированием.

Когда программа может быть представлена как автомат, лучше всего описываемый последовательностью глобальных действий, изменяющих состояние вычислителя и направляющих их локальных проверок, то работают нильпотентные логики.

Когда и действия, и проверки глобальны, возникает новый класс логик, пока еще не разработанный, соответствующий сентенциальным языкам типа Рефал.

Когда действия локальны, а условия глобальны, возникают динамические логики и программирование от приоритетов.

Заметим, что в программировании впервые был осознан любопытный феномен: повышение сложности системы приводит не только к трудностям (проблемы и проклятия сложных систем), но и к новым возможностям. В частности, использовать понятия объектно-ориентированного проектирования, стоящие на 3-4 уровне в иерархии типов (выше, чем, в частности, понятия математического анализа), целесообразно лишь для сложных программных систем, в простых им негде развернуться и они лишь усложняют дело. Так что не всегда можно показать преимущества нового метода на пальцах и на демонстрационных примерах.

Второй класс: *квазиискусственные* объекты, которые созданы из естественных материалов. Свойства их составляющих и, соответственно, объекта целиком даже в принципе не могут быть полно описаны. Такими объектами являются практически все изделия, встречающиеся в материальном мире.

Далее, по логическим и системообразующим признакам к таким объектам относятся и многие конструкции, получающиеся формальными преобразованиями естественного языка. Хотя данные конструкции не материальны, но они наследуют от прародительского материала *неформализуемость* в исключительно сильной форме. Мало того что они не могут быть даже в принципе описаны полностью формальными методами, они упорно сопротивляются всякой формализации, сами помогая найти противоречащий пример для каждого общего точного утверждения, сделанного о таких объектах. Известно, скажем, что практически каждое точно сформулированное утверждение, касающееся формальных аспектов синтаксиса и особенно семантики естественных языков, может быть опровергнуто на примере. Проблема универсалий является одной из труднейших проблем формального синтаксиса, а уж нахождение нетривиальных универсалий кажется нереальным.

Рассмотрим отдельно случай технического проектирования. Здесь основная проблема – борьба с «сопротивлением материала» в обобщенном смысле. Именно поэтому методы ТРИЗ не поднялись выше второго уровня в иерархии типов и не пригодны для архитектурного проектирования действительно сложных систем (хотя могут пригодиться для внесения достаточно системного изменения в уже существующую систему). Здесь нет разных логик, поскольку все диктует физика с ее единой логикой (здесь мы используем слово «логика» в традиционном смысле, как науку о формах и методах правильных рассуждений; в данном смысле физика, конечно же, имеет свою логику, которую она слишком часто высокомерно отождествляет с математической и/или научной).

Автор благодарен Ю. Д. Апресяну и мастеру ТРИЗ, инженеру И. В. Иловайскому.

Дискуссии с ними помогли прояснению многих выявленных в статье понятий.

С.А.Павлов

ОТ СЕНТЕНЦИАЛЬНОЙ ЛОГИКИ К ЛОГИКЕ СИМВОЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ*

Abstract. *The classical sentential logic which enrichment with help of truthfulness and falsehood operators is proposed in this paper. It is possible to express both semantical and non-semantical laws of contradiction and excluded middle in this logic. We adopted three groups of axioms in this logic: 1) axioms of the classical logic for formulas that are prefixed by truthfulness and falsehood operators; 2) axioms that express truth conditions for implication and 3) axiom that expresses the bivalence principle. This logic is generalized by extending of definition domain of truth and falsity predicates to any symbolic expressions universe of logic language. All axioms except bivalence principle is generalized to this universe too. So we get the symbolic expressions logic.*

1. Формулировка классической сентенциальной логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно»

В различных подходах к построению классической сентенциальной логики возможно различать три уровня ее рассмотрения: онтологический, синтаксический и семантический. К онтологическому уровню относят истинностные значения, таблицы истинности, логические алгебры. К синтаксическому уровню относят правила образования и правила преобразования языка логики. К семантическому уровню относят понятия выполнимости и предикатов истинности и ложности.

Н.А.Васильев в своих работах отделял металогику от эмпирической логики [1] и, соответственно, различал две формулировки закона противоречия. 1-я формулировка этого закона, принадлежащая металогике, гласит: «Нельзя объявлять одно и то же суждение истинным и ложным». Символически записываем в языке логики с символами предикатов истинности и ложности T и F: $\sim(T\text{A} \wedge F\text{A})$. 2-я формулировка закона противоречия гласит: «Закон противоречия высказывает несовместимость утверждения и отрицания». Символически $\sim(\text{A} \wedge \sim\text{A})$. Последняя соответствует формулировке этого закона в классической логике CL.

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18287.

А.Тарский [7] также отмечает, что семантические законы противоречия и исключенного третьего не следует отождествлять с родственными ему законами противоречия и исключенного третьего, не включающими в себя термин «истинно».

Я.Лукасевич [4] различал принцип исключенного третьего и «принцип, что *каждое высказывание либо истинно, либо ложно*». Последний он называл «*принципом двузначности*» (бивалентности).

Для одновременной формулировки всех этих законов, как в семантической, так и в несемантической формулировках, и для их одновременного рассмотрения необходимо в объектный язык логики ввести символы, соответствующие семантическим терминам «истинно» и «ложно».

Введение таких терминов в качестве логических операторов было проведено для случая неклассической логики FL4 в работах автора [5, 6]. Основные содержательные положения логики с операторами истинности и ложности приведены там же.

Представляет интерес формулировка классической логики, в язык которой введены операторы истинности и ложности.

Для классической сентенциальной (пропозициональной) логики имеет место принцип двузначности, состоящий в том, что любое высказывание P является либо истинным, либо ложным. В то же время одного принципа двузначности недостаточно для построения классической логики. Возникает вопрос, какие положения достаточно присоединить к принципу двузначности, чтобы получить классическую логику.

Перейдем теперь от неформальной постановки вопроса к его формальным уточнениям.

Прежде всего, нужно иметь язык, содержащий необходимые логические связки и символы предикатов (или операторов) истинности и ложности, так как формулировка принципа двузначности включает термины «истинно» и «ложно».

Следующим шагом является формулировка в этом языке принципа двузначности. Используя символы языка логики с операторами истинности и ложности, выразим этот принцип формулой $(T\mathrm{A} \veebar F\mathrm{A})$, где $\veebar$ символ строгой дизъюнкции.

Затем необходимо найти такое множество формул языка, чтобы они вместе с формулой $(T\mathrm{A} \vee F\mathrm{A})$, взятые в качестве аксиом, были эквивалентны классической логике (конечно, с ее правилами вывода). В качестве таковых можно ввести две группы аксиом: одна соответствует условиям истинности для связок, а другая соответствует положению, что для формул вида $T\mathrm{A}$ и $F\mathrm{A}$

имеет место классическая логика. Несколько иные принципы построения классической логики рассмотрены также в [2].

Далее операторы истинности и ложности будем обозначать соответственно символами | и –, исходную импликацию как →.

Язык исчисления FL2

Алфавит FL2: s, s_1, s_2, ... сентенциальные переменные;
–, → логические константы;
(,) технические символы.

Правила образования ппф

(i) Всякая сентенциальная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A , B есть ппф, то (–A), (A → B), есть ппф.

Метапеременные: A, B, C, ... для ппф.

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие **сокращения** для формул.

Определим формулу 0, являющуюся тождественно ложной, которая будет играть роль константы "ложь".

D1.2.1 $0 =_{df} -(-s \to -s)$ (константа "ложь")

Определим отрицание ~.

D1.2.2 $\sim A =_{df} (A \to 0)$ (отрицание)

Для высказывания об истинности предложения A
('|' содержательно означает 'истинно '):

D1.2.3 $|A =_{df} -\sim A$

Высказывание об истинности предложения A рассматривается как сокращение для высказывания о ложности отрицания предложения A.

Для высказывания о строгой истинности предложения A:
'⌈ ' содержательно означает 'есть истинно и неложно'.

D1.2.4 $\ulcorner A =_{df} -(|A \to -A)$

Определим импликацию ⊃, которую назовем D-импликацией.

D1.2.5 $(A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \to \ulcorner B)$

Из всего класса ппф выделим подкласс формул, которые образованы из префиксированных операторами истинности или ложности формул (называемыми в дальнейшем T.F.-формулами (T.F.-ф.)).

(iii) Если A есть ппф, то (–A) есть T.F.-ф.

(iv) Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., то $(P_1 \to P_2)$, есть T.F.-ф.

Пусть P, P_1, P_2, ... есть метапеременные для T.F.-ф.

D1.3.1 $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$
D1.3.2 $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$
D1.3.3 $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$
D1.3.4 $(P_1 \veebar P_2) =_{df} -(P_1 \equiv P_2)$

Схемы аксиом

Имеем 3 группы аксиом:
1) аксиомы классической логики для T.F.-формул,
2) аксиомы, выражающие условия истинности для импликации,
3) аксиома, выражающая принцип двузначности.

A1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$
A1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$
A1.3 $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

К этим схемам аксиом добавим следующие специальные схемы аксиом.

A1.4 $|P \equiv P$ (редукция оператора истинности)
A2.1 $|(A \to B) \equiv -A \vee |B$ (условие истинности импликации)
A2.2 $-(A \to B) \equiv |A \wedge -B$ (условие ложности импликации)
A3 $(|A \veebar -A)$ (принцип двузначности или бивалентности)

Правило вывода $\dfrac{A,\ (A \supset B)}{B}$

Особенностью полученной двухуровневой формулировки классической логики является то, что в аксиомных схемах присутствуют только формулы, префиксированные операторами истинности или ложности.

Поэтому представляет интерес привести теорему, устанавливающую тождество между префиксированными оператором истинности ппф и не префиксированными ппф, и имеющую подобие по форме со схемой Тарского.

Определим конъюнкцию, дизъюнкцию и эквиваленцию $\leftrightarrow$.

D1.3.3 $(A \,\&\, B) =_{df} \sim(A \to \sim B)$.
D1.3.3 $(A \vee B) =_{df} (\sim A \to B)$.
D1.3.3 $(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \to B) \,\&\, (B \to A)$

Имеем теорему о редукции оператора истинности

T1 $|A \leftrightarrow A$.

Эта теорема говорит о возможности элиминации оператора истинности | из языка FL2.

Имеем также теоремы, выражающие законы противоречия и исключенного третьего.

T2 $\sim (A \,\&\, \sim A)$.

T3 $(A \vee \sim A)$.

Представляет интерес рассмотреть утверждение Тарского, гласящее, что из определения истины следуют семантические законы противоречия и исключенного третьего.

Так как аналогом схемы Тарского в языке FL2 является формула $|A \leftrightarrow A$, то можно сделать следующее. Аксиому A3, выражающую принцип двузначности, заменяем на аксиому A3′, являющуюся аналогом схемы Тарского.

A3′ $(|A \leftrightarrow A)$

В новой формулировке исчисления FL2 имеем теоремы, выражающие семантические законы противоречия и исключенного третьего.

T4 $-(|A \wedge -A)$

T5 $(|A \veebar - A)$

Тем самым показано, что в предложенной формулировке классической логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно», выражаются и имеют место семантические законы противоречия и исключенного третьего наряду с их несемантическими формулировками.

Рассмотрение формулировки логики FL2, эквивалентной классической логике, показывает, что она может быть также получена присоединением аксиом неклассической логики с операторами истинности и ложности FL4, к формуле $(TA \veebar FA)$.

Тем самым одним из возможных ответов на ранее поставленный вопрос является следующий: объединение принципа двузначности с аксиомами неклассической логики с операторами истинности и ложности FL4 приводит к логике, эквивалентной классической. Другими словами аксиомы логики FL4 дополняют принцип двузначности до классической логики.

2. Расширение области определения предикатов истинности и ложности

Говоря об объеме термина ‘истинно’, Тарский, как и многие логики и философы, полагает, что «Предикат ‘истинно’ … относят к определенным физическим объектам – языковым выражениям, в частности, к предложениям» [7].

Известны трудности, связанные с определением того, что есть высказывание и предложение. Так, Карри пишет, что «Термин 'высказывание' (proposition) вызывает большие споры … Некоторые логики избегают его как отравы; они настаивают на замене этого термина во всех контекстах, где он употребляется как нечто само собой разумеющееся, словом 'предложение'; другие настаивают на его употреблении ...» [3]. Также и Тарский: «Мы не знаем в точности, какие выражения являются предложениями» [7].

Приведем примеры языковых выражений, которые можно считать или не считать предложениями в зависимости от того, какого взгляда придерживаться на язык.

Волга впадает в Каспийское море.

Дважды два – четыре.

Мощность множества всех множеств бесконечна.

Истина есть благо.

Познай самого себя.

Сократ был любителем мудрости.

Кентавр Хирон был мудр.

Нынешний король Франции лыс.

Бесцветные зеленые идеи яростно спят.

И, наконец, в этом сне разума или на пиру воображения, драматично, но грамматично:

Глокая куздра штеко будланула бокренка.

Следующей проблемой является оценка некоторых из вышеперечисленных выражений на истинность или ложность.

Будем применять понятия истинности и ложности к предложениям языка, не только двузначным, но и к таким, в отношении которых нельзя говорить, что они либо истинны, либо ложны, тем самым расширяя возможности применения этих понятий. В число последних могут войти метафизические высказывания, которые в соответствии с взглядами логических позитивистов объявляются ими бессмысленными, т.е. ни истинными, ни ложными. Согласно обычным критериям истины, процедурам верификации и фальсификации (которые не сводятся к определению истины) предложение «Бесцветные зеленые идеи яростно спят», относимое Хомским к грамматически правильно построенным предложениям, ни истинно, ни ложно.

Чтобы конъюнкция отрицания истинности и отрицания ложности подобных бессмысленных предложений не превращалась в противоречие, необходимо вслед за Лукасевичем отказаться от принципа двузначности, а также от логической взаимозависимости предикатов истинности и ложности, имеющей место в классической логике и состоящей в том, что отрицание истинности предложения эквивалентно его ложности, а отрицание ложности предложения эквивалентно его истинности. В таком случае логика, конечно, должна быть неклассической.

Такой отказ ведет к расширению сферы применимости понятий истинности и ложности на универсум всевозможных предложений, оставляя вопрос об определении того, что такое предложение, за рамками логики.

Тарский говорит о новых возможностях применимости понятия истины: «тот факт, что нас прежде всего интересует понятие истины для предложений, не исключает возможности последующего расширения сферы применимости этого понятия на другие виды объектов» [7].

В качестве этих других видов объектов возьмем символьные выражения языка. При этом всякое предложение есть символьное выражение. Те же символьные выражения, которые не являются предложениями, все тривиально ни истинны, ни ложны. Такое расширение области определения предиката истинности ведет лишь к небольшому видоизменению формулировки сентенциальной логики с операторами истинности и ложности FL4. Достаточно заменить индивидные переменные для имен предложений переменными для имен символьных выражений. Символически отрицания утверждений об истинности и ложности бессмысленных предложений, именем для которых пусть будет nonsense, и выражений, не являющихся предложениями, именем для которых пусть будет symbex, запишем следующим образом:

$$\neg T(\text{nonsense}) \wedge \neg F(\text{nonsense}), \qquad \neg T(\text{symbex}) \wedge \neg F(\text{symbex}).$$

Так как неограниченное применение понятий истинности и ложности ведет к семантическим парадоксам, то чтобы избежать их, в качестве имен предложений и имен символьных выражений, подставляемых в формулу с предикатом истинности, будем использовать только такие имена, которые образуются из предложений с помощью кавычек, т.е. кавычковой функции или функции цитирования q. Пусть переменной для символьных выражений будет s. Тогда формулы с предикатом истинности и ложности будут выглядеть так: $T(\mathrm{q(s)})$, $F(\mathrm{q(s)})$.

Необходимо отметить, что при таком расширении области определения предиката истинности Т-эквивалентность Тарского не распространяется на универсум символьных выражений, а, значит, определение истины не строится. Вместо этого имеем соотношение

$$(T(\mathrm{q(s)}) \equiv \mathrm{s}) \equiv (T(\mathrm{q(s)}) \veebar F(\mathrm{q(s)})),$$

в котором обусловливают друг друга Т-эквивалентность и принцип двузначности.

Таким образом, если для символьных выражений выполняется Т-эквивалентность, то они являются двузначными, а, значит, высказываниями в соответствии с определением высказывания в классической логике.

С другой стороны, если символьные выражения выполняют принцип бивалентности, т.е. являются двузначными, то для них имеет место Т-эквивалентность.

Логика, в которой область определения предикатов истинности и ложности расширяется до универсума символьных выражений, может быть получена из формулировки классической сентенциальной логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно», отбрасыванием принципа двузначности.

При этом к правилам образования добавляем правило образования символьных выражений, гласящее, что

(i)^s Всякая последовательность символов из алфавита является символьным выражением (этого языка),

и расширяем правило образования Т.F.-формул:

(iii)^s Если А есть символьное выражение, то (–А) есть Т.F.-формула.

В группе аксиом, задающих условия истинности для импликации, метапеременные для ппф заменяем на метапеременные для символьных выражений. Таким образом, получаем формулировку логики символьных выражений, которая при данном подходе может рассматриваться как обобщение предложенной формулировки классической сентенциальной логики на универсум символьных выражений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика (конспект лекции) // Н.А.Васильев Воображаемая логика. Избранные труды. М., 1989.
2. *Ивлев Ю.В.* Основные области приложения квазиматричной логики (см. наст. сборник).
3. *Карри Л.И.* Основания математической логики. М., 1969.
4. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190-205.
5. *Павлов С.А.* Логика ложности FL4 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. 1993. М., 1994
6. *Павлов С.А.* Трехзначная логика Лукасевича и логика ложности FL4 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 1997.
7. *Тарский А.* Семантическая концепция истины и основания семантики // Аналитическая философия: становление и развитие. М., 1998.

В.М.Попов

ОБ ОДНОЙ ТРЕХЗНАЧНОЙ ПАРАПОЛНОИ ЛОГИКЕ*

Abstract. *A propositional logic LAP with semantics of descriptions of state is constructed. For* LAP *a three valued characteristic matrix and Gentzen-type sequent calculus are presented. A theorem that* LAP *is paracomplete logic is formulated and a translation from the calculus* ClP *(which is a formalization of the classical propositional logic) to the* LAP *is described.*

Строится пропозициональная логика LAP, наделенная модифицированной семантикой обобщенных по Е.К.Войшвилло [1] опианий состояния. Конструируется трехзначная характеристическая матрица для LAP, формулируется теорема о паранеполноте LAP, описывается секвенциальное исчисление, аксиоматизирующее эту логику, определяются операции, погружающие классическую пропозициональную логику в LAP.

Язык L логики LAP есть стандартно определяемый пропозициональный язык над алфавитом $< S, \&, \vee, \supset, \neg,), (>$, где S есть множество $\{ s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \}$ всех пропозициональных переменных языка L. Термин «формула» используется здесь как сокращение термина «формула в языке L», принимаются обычные соглашения об опускании скобок в формулах. Квазиэлементарной формулой называется формула, которая не имеет вхождений ни одной из логических связок $\&, \wedge, \supset$. Логика LAP есть наименьшее множество формул, которое замкнуто относительно правила подстановки и правила modus ponens и которому принадлежат все классические тавтологии в языке L, не содержащие вхождений $\neg$, и следующие формулы:

$\neg (s_1 \supset s_1) \supset s_2$, $(s_2 \supset(\neg s_2 \supset \neg (s_1 \supset s_1))$,

$((s_1 \supset s_2) \supset s_2) \supset(\neg s_2 \supset s_1)$,

$\neg \neg s_1 \supset s_1$,

$s_1 \supset \neg \neg s_1$,

все формулы вида

$(A \supset \neg (s_1 \supset s_1)) \supset \neg A$, где A не является квазиэлементарной формулой, и все формулы вида

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 00-06-80037, и РГНФ, грант № 02-03-18196.

$(A \supset s_1) \supset ((s_1 \supset \neg A) \supset \neg A)$, где A не является квазиэлементарной формулой.

Описанием состояния называется отображение множества всех квазиэлементарных формул во множество $\{0,1\}$. Описание состояния v такое, что $v(x) = v(\neg\neg x)$ для всякой квазиэлементарной формулы x, называется регулярным описанием состояния. Последнее определение корректно, так как x есть квазиэлементарная формула, т.т.т. $\neg$ x есть квазиэлементарная формула.

Описание состояния v такое, что $v(x) = 0$ или $v(\neg x) = 0$ для всякой квазиэлементарной формулы x, называется непротиворечивым описанием состояния.

Для всякого описания состояния v определяем отображение $|\ |_v$ множества всех формул в $\{0,1\}$следующим образом:

а) для всякой квазиэлементарной формулы x верно, что $|x|_v = v(x)$,

б) для всякой формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, верно что $|\neg A|_v = 1$ т.т.т. $|A|_v = 0$,

в) для всяких формул A и B верно, что

$|A \& B|_v = 1$ т.т.т. $|A|_v = 1$ и $|B|_v = 1$,

$|A \vee B|_v = 1$ т.т.т $|A|_v = 1$ или $|B|_v = 1$,

$|A \supset B|_v = 1$ т.т.т. $|A|_v = 0$ или $|B|_v = 1$.

Теорема 1. Для всякой формулы A выполняется следующее условие: $A \in LAP$ т.т.т. $|A|_v = 1$ для всякого регулярного и непротиворечивого описания состояния v.

Теорема 2. Логическая матрица $M = < \{0, 1, f\}, \{1\}, \&, \vee, \supset, \neg >$, операции которой определяются нижеследующими таблицами T 1, T 2, T 3 и T 4, является характеристической матрицей логики LAP.

T 1

&	1	0	f
1	1	0	0
0	0	0	0
f	0	0	0

T 2

∨	1	0	f
1	1	1	1
0	1	0	0
f	1	0	0

T 3

⊃	1	0	f
1	1	0	0
0	1	1	1
f	1	1	1

T 4

	¬
1	0
0	1
f	f

LAP-теорией называется множество формул, включающее LAP и замкнутое относительно modus ponens.

Полной LAP-теорией называется такая LAP - теория T, что для всякой формулы A верно следующее: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Теорема 3 (о параполноте логики LAP). Существует такая LAP-теория T, которая не является полной, и всякая полная LAP-теория, включающая T, равна множеству всех формул.

Секвенциальное исчисление GLAP является секвенциальным исчислением генценовского типа. Далее буквы A и B используются как переменные по формулам, а буквы Γ, Δ, Σ, Θ – как переменные по конечным последовательностям формул (пустая последовательность формул является конечной последовательностью формул). Множество всех основных секвенций исчисления GLAP есть множество всех секвенций вида $A \to A$. Множеству всех правил этого исчисления принадлежат все следующие правила R1 – R19 и только они.

R1: $\dfrac{\Gamma, A, B, \Lambda \to \Theta}{\Gamma, B, A, \Lambda \to \Theta}$, R2: $\dfrac{\Gamma \to \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, B, A, \Theta}$, R3: $\dfrac{A, A, \Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}$,

R4: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A, A}{\Gamma \to \Delta, A}$, R5: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}$, R6: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, A}$,

R7: $\dfrac{\Gamma \to \Lambda, A \quad B, \Sigma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}$, R8: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B}$, R9: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta}$,

R10: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{B \,\&\, A, \Gamma \to \Theta}$, R11: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \,\&\, B}$, R12: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, A \vee B}$,

R13: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, B \vee A,}$, R14: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta}$, R15: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta}$,

R16: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg A}$ (здесь A не является квазиэлементарной формулой),

R17: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{\neg\neg A, \Gamma \to \Theta}$ (здесь A есть квазиэлементарная формула),

R18: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, \neg\neg A}$ (здесь A есть квазиэлементарная формула),

R19: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \quad A, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}$ (правило сечения).

Определение GLAP-вывода является обычным для секвенциальных исчислений генценовского типа (см. 2, 3). Для GLAP верна теорема об устранимости сечения.

Теорема 4. Для всякой формулы A выполняется условие: $A \in LAP$ т.т.т. секвенция $\to A$ выводима в GLAP.

Связь логики LAP с классической пропозициональной логикой ClP, сформулированной в языке L , устанавливает теорема 5.

Теорема 5. Пусть φ – отображение множества всех пропозициональных переменных языка L во множество всех формул, удовлетворяющее условиям: 1) $\varphi(s_i)$ не есть квазиэлементарная формула ни для какой пропозициональной переменной s_i языка L, 2) для всякой пропозициональной переменной s_i языка L формулы $s_i \supset \varphi(s_i)$ и $\varphi(s_i) \supset s_i$ принадлежат логике ClP.

Тогда для всякой формулы A верно, что

$A \in ClP$ т.т.т. $h_\varphi(A) \in LAP$,

где h_φ есть такое отображение множества всех формул в само это множество, что для всякой пропозициональной переменной s_i языка L и всяких формул B и C выполняются условия:

а) $h_\varphi(s_i) = \varphi(s_i)$,

б) $h_\varphi(B \circ C) = h_\varphi(B) \circ h_\varphi(C)$ (здесь $\circ \in \{ \&, \vee, \supset \}$),

$$h_\varphi(\neg B) = \neg h_\varphi(B).$$

Например, определив для всякой пропозициональной переменной s_i $\varphi(s_i)$ как $s_i \& s_i$ (или как $s_i \vee s_i$), получаем операцию h_φ, погружающую ClP в LAP.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.
2. *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода.М., 1967. С. 9-74.
3. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления М., 1999. С. 16-233.

М.Н.Рыбаков

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ВЫРАЗИТЕЛЬНОСТИ МОДАЛЬНОГО ЯЗЫКА С ОДНОЙ ЛИШЬ ОДНОМЕСТНОЙ ПРЕДИКАТНОЙ БУКВОЙ

Abstract. *It is observed that fragments with only one monadic predicate letter of such logics as* **QK**, **QK4**, **QT**, **QS4**, **QGL**, **QGrz**, *and others are undecidable. It is proved that fragments with only one monadic predicate letter of* $\mathbf{QGL}^{sem}$ *and* $\mathbf{QGrz}^{sem}$ *(the sets of semantical consequences on Kripke frames of* **QGL** *and* **QGrz** *correspondently) are not recursively enumerable.*

Хорошо известно, что классическая логика предикатов не является разрешимой, причем для этого достаточно, чтобы ее язык содержал хотя бы одну предикатную букву местности два или более; в то же время классическая логика одноместных предикатов (в любом количестве) разрешима (см., например, [1]). Разрешимость логики одноместных предикатов сохранится, даже если обогатить язык кванторами по предикатным переменным (т.е. второпорядковая классическая логика одноместных предикатов разрешима; отметим, что логика второго порядка[1] в языке с бинарной предикатной буквой не только не разрешима, но даже не является перечислимой).

Как заметил Крипке, при обогащении предикатного языка модальностью разрешимость логики одноместных предикатов пропадает: всякая модальная логика L такая, что

- язык L содержит хотя бы две одноместные предикатные буквы;
- $L \subseteq \mathbf{QS5}$;
- безмодальный фрагмент L совпадает с классической логикой предикатов в соответствующем языке,

неразрешима [7]. В силу факта разрешимости классической логики одноместных предикатов результат [7] казался удивительным. Тем не менее, идея доказательства, использовавшаяся в [7], легко распространяется и на многие другие логики (не обязательно включающиеся в **QS5**), и это позволило Крипке сделать вывод о том, что в сфере модальной логики разрешимым одноместным модальным системам попросту нет места (при этом подразумевалось, что «хорошая» модальная система имеет шкалу Крип-

[1] Имеется в виду множество тождественно истинных второпорядковых формул.

ке, в которой из некоторого мира достижимо бесконечно много миров).

Чуть позже результат Крипке был усилен для некоторых систем. В [2] доказывается неразрешимость нескольких фрагментов интуиционистского исчисления предикатов, формулы которых строятся с использованием всего лишь одной одноместной предикатной буквы. Поскольку интуиционистское исчисление предикатов легко погружается в модальные исчисления **QS4** и **QGrz**, а **QS4** и **QGrz** – соответственно, в **QK4** и **QGL**, то из результатов [2] получаем, что фрагмент от одной одноместной буквы всякой модальной логики L такой, что
$\mathbf{QK4} \subseteq L \subseteq \mathbf{QGL}$ или $\mathbf{QK4} \subseteq L \subseteq \mathbf{QGrz}$, неразрешим.

В данной работе предлагается некоторый способ моделирования в модальных логиках предикатных букв с помощью одной одноместной предикатной буквы. Мы применим этот способ для доказательства неразрешимости фрагментов модальных предикатных логик, содержащихся в **QGL** и **QGrz** и состоящих из формул, построенных с использованием всего одной одноместной предикатной буквы, а затем докажем, что аналогичные фрагменты логик $\mathbf{QGL}^{sem}$ и $\mathbf{QGrz}^{sem}$ не являются рекурсивно перечислимыми ($\mathbf{QGL}^{sem}$ – множество модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке логики **QGL**, $\mathbf{QGrz}^{sem}$ – множество модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке логики **QGrz**). Идея такого моделирования взята из [6] (см. также [3]), где похожее моделирование проводится на пропозициональном уровне: при обосновании PSPACE-трудности довольно просто устроенных фрагментов некоторых пропозициональных логик все пропозициональные переменные моделируются с помощью одной.

Сначала проведем подробное доказательство неразрешимости соответствующего фрагмента логики **QK4**, а потом покажем, как изменить это доказательство, чтобы получить остальные упомянутые результаты.

Обозначим через $\mathcal{ML}$ модальный предикатный язык, содержащий счетное число индивидных переменных, счетное число n-местных предикатных букв для всякого $n \geqslant 0$, логические связки $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\bot$, $\Box$, кванторы всеобщности по индивидным переменным, скобки и запятую. Формулы в этом языке строятся обычным образом. В дальнейшем при записи $\mathcal{ML}$-формул мы будем использовать и другие связки и кванторы, определяя их как обычные сокращения основных, а именно: $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$, $\neg\varphi = \varphi \rightarrow \bot$, $\exists x\, \varphi = \neg\forall x\, \neg\varphi$, $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$. Наряду с языком $\mathcal{ML}$ будем рассматривать язык $\mathcal{L}$, который содержит те же символы, что и $\mathcal{ML}$, и не содержит символа $\Box$.

Через **QCl** обозначим классическую логику предикатов в языке $\mathcal{L}$. Тогда логика **QK4** определяется следующим образом:

$$\mathbf{QK4} = \mathbf{QCl} \oplus \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi) \oplus \Box\varphi \to \Box\Box\varphi,$$

где операция $\oplus$ означает замыкание получающегося множества формул по правилу *modus ponens*, правилу обобщения, правилу Гёделя и правилу подстановки.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится семантика Крипке (см. вступительную статью в [5]); мы будем придерживаться обозначений, введенных в [4].

Пусть P – некоторая бинарная предикатная буква. Обозначим через $\mathbf{QCl}^P$ фрагмент логики **QCl**, формулы которого не содержат предикатных букв, отличных от P. Как уже было отмечено выше, известно, что

логика $\mathbf{QCl}^P$ *неразрешима.*

Прежде чем доказать неразрешимость фрагмента логики **QK4**, состоящего из формул, построенных с использованием одной одноместной предикатной буквы, мы построим погружение логики $\mathbf{QCl}^P$ во фрагмент **QK4**, состоящий из формул, построенных с использованием двух одноместных предикатных букв (и тем самым докажем неразрешимость последнего фрагмента). Пусть φ – некоторая формула языка логики $\mathbf{QCl}^P$. Пусть также Q_1 и Q_2 – одноместные предикатные буквы. Обозначим через φ^* модальную формулу, получающуюся из φ заменой каждой подформулы φ вида $P(x, y)$ на подформулу $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$.

Идея построения формулы φ^* взята из [7]. Именно, в [7] бинарная предикатная буква моделируется с помощью двух одноместных с использованием той же конструкции, только вместо $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$ рассматривается формула $\Diamond(Q_1(x) \wedge Q_2(y))$. Заметим, что формула $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$ получается из формулы $\neg\Diamond(Q_1(x) \wedge Q_2(y))$ заменой $Q_1(x)$ и $Q_2(y)$ на $\neg Q_1(x)$ и $\neg Q_2(y)$ соответственно. Использование именно формулы $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$ связано с тем, что при таком моделировании, как представляется автору, легче будет понять те рассуждения, которыми будут сопровождаться дальнейшие модификации формулы φ^*.

Следующая лемма утверждает, что операция * является погружением логики $\mathbf{QCl}^P$ в логику **QK4**.

Лемма 1 [7]. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi^* \in \mathbf{QK4}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbf{QCl}^P$. Поскольку $\mathbf{QCl}^P \subseteq \mathbf{QK4}$, то $\varphi \in \mathbf{QK4}$. Формула φ^* является подстановочным примером формулы φ, и поэтому $\varphi^* \in \mathbf{QK4}$.

Пусть теперь $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P$. В силу полноты логики предикатов формула φ в этом случае опровергается в некоторой модели. Без ограничений общности можем считать, что индивидная область этой модели счетно-бесконечна и, для определенности, состоит в точности из натуральных чисел. Итак, существует модель $M = \langle G, J \rangle$, где $G = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $J(P) \subseteq G \times G$, при этом $M \nvDash \varphi$. Построим по M модель M^* логики **QK4**, в корне которой будет опровергаться формула φ^*.

Рассмотрим шкалу $F = \langle W, R \rangle$, где

$$\begin{array}{rcl} W & = & w \cup \{w_{k,m} : k, m \in \mathbb{N}\}; \\ w'Rw'' & \Leftrightarrow & \text{либо } w' = w \text{ и } w'' \neq w, \\ & & \text{либо } w' = w'' \text{ и } w' \neq w. \end{array}$$

Для наглядности шкала F изображена на рис. 1. Черным кружком изображен иррефлексивный мир w, светлыми – рефлексивные миры; отношению достижимости между различными мирами соответствуют линии, при этом считаем, что если два мира соединены на рисунке линией, то верхний достижим из нижнего, но не наоборот.

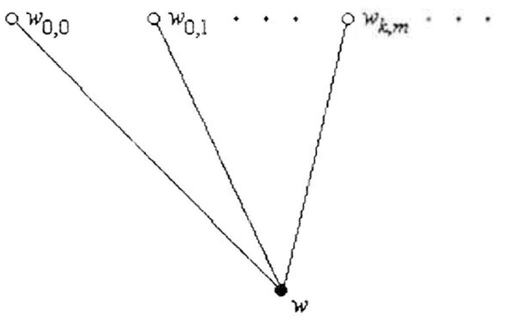


Рис. 1

На шкале F определим модель $M^* = \langle W, R, D, I \rangle$, положив для всякого $v \in W$

$$\begin{array}{rcl} D(v) & = & \mathbb{N}; \\ (M^*, v) \nvDash Q_1[k] & \Leftrightarrow & \text{либо } v = w, \text{ либо существует такое } m \in \mathbb{N}, \\ & & \text{что } v = w_{k,m} \text{ и } M \nvDash P[k, m]; \\ (M^*, v) \nvDash Q_2[m] & \Leftrightarrow & \text{либо } v = w, \text{ либо существует такое } k \in \mathbb{N}, \\ & & \text{что } v = w_{k,m} \text{ и } M \nvDash P[k, m]; \end{array}$$

в остальном модель M^* произвольна.

Для всякой подформулы ψ формулы φ через ψ^* обозначим формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $P(x, y)$ формулы $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$. Индукцией по построению ψ докажем, что для всякой интерпретации α индивидных переменных справедлива следующая эквивалентность:

$$M \vDash \psi[\alpha] \Leftrightarrow (M^*, w) \vDash \psi^*[\alpha].$$

Случай, когда $\psi = \perp$, тривиален. Пусть $\psi = P(x, y)$. Тогда нам надо показать, что для всяких $k, m \in \mathbb{N}$

$$M \models P[k, m] \Leftrightarrow (M^*, w) \models \Box(Q_1[k] \vee Q_2[m]).$$

Пусть $M \not\models P[k, m]$. Тогда по определению модели M^* получаем, что $(M^*, w_{k,m}) \not\models Q_1[k]$ и $(M^*, w_{k,m}) \not\models Q_2[m]$. Следовательно, $(M^*, w) \models \Diamond(\neg Q_1[k] \wedge \neg Q_2[m])$, а последнее равносильно тому, что $(M^*, w) \not\models \Box(Q_1[k] \vee Q_2[m])$.

Пусть теперь $(M^*, w) \not\models \Box(Q_1[k] \vee Q_2[m])$. Тогда в M^* существует мир v, достижимый из w, такой, что $(M^*, v) \not\models Q_1[k]$ и $(M^*, v) \not\models Q_2[m]$. По определению модели M^* это означает, что $v \neq w$ (так как мир w иррефлексивен), следовательно, $v = w_{s,t}$ для некоторых $s, t \in \mathbb{N}$. Из того, что $(M^*, w_{s,t}) \not\models Q_1[k]$, следует, что $s = k$ и $M \not\models P[k, t]$, а из того, что $(M^*, w_{k,t}) \not\models Q_2[m]$ следует, что $t = m$ и $M \not\models P[k, m]$; получили требуемое.

Пусть подформула ψ формулы φ имеет вид $\forall x\, \psi_1$ и пусть для ψ_1 выполнено индукционное предположение, т.е. для всякой интерпретации α индивидных переменных справедлива следующая эквивалентность:

$$M \models \psi_1 [\alpha] \Leftrightarrow (M^*, w) \models \psi_1{}^*[\alpha].$$

Предположим, что $M \not\models (\forall x\, \psi_1)[\alpha]$ для некоторой интерпретации α. Тогда существует интерпретация α_x, отличающаяся от α только, быть может, значением на переменной x, такая, что $M \not\models \psi_1[\alpha_x]$. Применяя индукционное предположение для ψ_1, получаем, что $(M^*, w) \not\models \psi_1[\alpha_x]$, а следовательно, $(M^*, w) \not\models (\forall x\, \psi_1)[\alpha]$.

Пусть $(M^*, w) \not\models (\forall x\, \psi_1)[\alpha]$ для некоторой интерпретации α. Тогда существует интерпретация α_x индивидных переменных, отличающаяся от α только, быть может, значением на переменной x, такая, что $(M^*, w) \not\models \psi_1[\alpha_x]$. Снова применяя индукционное предположение для ψ_1, получаем, что $M \not\models \psi_1[\alpha_x]$, из чего заключаем, что $M \not\models (\forall x\, \psi_1)[\alpha]$.

Обоснование индукционного шага в случаях, когда ψ является конъюнкцией, дизъюнкцией или импликацией формул, оставляется читателю.

Поскольку φ является своей подформулой и $M \not\models \varphi$, то мы тем самым доказали, что $(M^*, w) \not\models \varphi^*$. Осталось заметить, что модель M^* определена на транзитивной шкале, поэтому в M^* истинны все формулы, выводимые в **QK4**. Значит, $\varphi^* \notin$ **QK4**.

Из леммы 1 и неразрешимости логики $\mathbf{QCl}^P$ вытекает справедливость следующего утверждения.

Предложение 2 [7]. *Фрагмент логики* **QK4**, *состоящий из формул, построенных с использованием лишь двух одноместных предикатных букв, неразрешим.*

Пусть теперь Q – некоторая одноместная предикатная буква, отличная от букв Q_1 и Q_2. Определим следующие формулы:

$$\delta_1(x) \quad = \quad \Diamond\Box Q(x);$$
$$\delta_{m+1}(x) \quad = \quad \Diamond[Q(x) \wedge \Diamond(\neg Q(x) \wedge \delta_m(x))].$$

Заметим, что если v – мир некоторой модели Крипке $M' = \langle W', R', D', I'\rangle$, причем порожденная им подмодель является рефлексивно-транзитивной, то для всякого $a \in D'(w)$

$(M', v) \models \delta_m[a] \quad \Leftrightarrow$ существуют миры $v_1, \ldots, v_{2m-1} \in W'$ такие, что (i) $v\, R'\, v_1\, R' \ldots R'\, v_{2m-1}$, (ii) для всякого k такого, что $1 \leqslant k \leqslant 2m - 1$, отношение $(M', v_k) \models Q[a]$ выполнено ровно в том случае, когда k нечетно, и (iii) для всякого мира v', достижимого из v, имеет место отношение $(M', v') \models Q[a]$.

Положим

$$\sigma_m(x) \quad = \quad \Box(\neg Q(x) \wedge \delta_m(x) \wedge \neg\delta_{m+1}(x) \to \Box\Diamond Q(x)).$$

Для всякой формулы ψ обозначим через ψ_σ формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $Q_i(x)$ формулы $\sigma_i(x)$. В результате $\varphi_\sigma{}^*$ представляет собой формулу, построенную с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы Q. Для завершения доказательства неразрешимости фрагмента **QK4**, состоящего из формул, построенных с использованием всего одной одноместной предикатной буквы, осталось доказать справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi^* \in \mathbf{QK4} \Leftrightarrow \varphi_\sigma{}^* \in \mathbf{QK4}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi^* \in \mathbf{QK4}$. Тогда $\varphi_\sigma{}^* \in \mathbf{QK4}$, поскольку формула $\varphi_\sigma{}^*$ получена из формулы φ^* подстановкой, а логика **QK4** замкнута относительно правила подстановки.

Пусть $\varphi^* \notin \mathbf{QK4}$. В силу леммы 1 это означает, что $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P$, и по доказательству леммы 1 получаем, что формула φ^* опровергается в корне w модели $M^* = \langle W, R, D, I\rangle$, определенной в доказательстве леммы 1.

Рассмотрим шкалу $F = \langle W, R\rangle$, на которой определена модель M^*. Расширим F следующим образом. Из каждого мира $w_{k,m}$ положим достижимыми две рефлексивно-транзитивные шкалы, изображенные на рис. 2, и возьмем транзитивное замыкание получившегося отношения достижимости. Светлыми кружками изображены рефлексивные миры, при этом внизу – мир $w_{k,m}$ шкалы F. Отношениям достижимости соответствуют линии, соединяющие миры, при этом считаем, что верхние миры достижимы из нижних, но не наоборот; отношения достижимости, которые восстанавливаются по транзитивности, на рисунке не отражены.

Получившуюся в результате такого расширения шкалу $\langle W_1, R_1 \rangle$ обозначим через F_1. На шкале F_1 определим модель $M_1 = \langle W_1, R_1, D_1, I_1 \rangle$, положив для всякого $v \in W_1$

$$D_1(v) = \mathbb{N},$$

кроме того, для всяких $k, m, n \in \mathbb{N}$

$$(M_1, w_{k,m}) \models Q[n]$$

и для всяких $k, m, n, r \in \mathbb{N}$

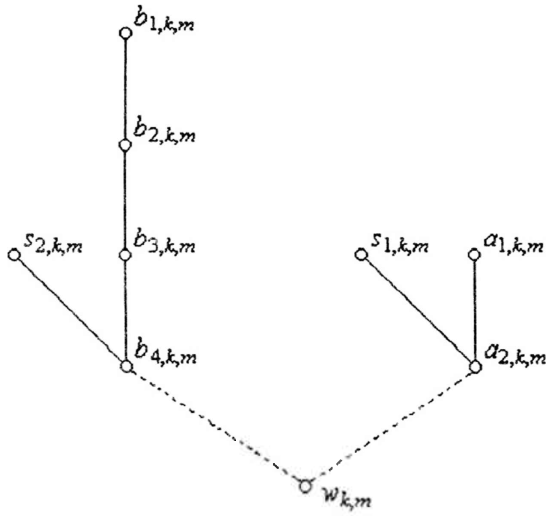


Рис. 2

$$\begin{array}{lcl}
(M_1, a_{n,k,m}) \models Q[r] & \Leftrightarrow & n = 1; \\
(M_1, b_{n,k,m}) \models Q[r] & \Leftrightarrow & n = 1 \text{ или } n = 3; \\
(M_1, s_{1,k,m}) \models Q[r] & \Leftrightarrow & (M^*, w_{k,m}) \models Q_1[r]; \\
(M_1, s_{2,k,m}) \models Q[r] & \Leftrightarrow & (M^*, w_{k,m}) \models Q_2[r];
\end{array}$$

в остальном модель M_1 произвольна.

Для всякой подформулы ψ формулы φ, как и раньше, через ψ^* обозначим формулу, получающуюся из ψ заменой каждой подформулы вида $P(x, y)$ на формулу $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$, а через ψ_σ^* – формулу, получающуюся из ψ^* заменой каждого вхождения подформулы вида $Q_i(x)$ на $\sigma_i(x)$.

Индукцией по построению подформулы ψ формулы φ покажем, что для всякой интерпретации α индивидных переменных имеет место следующая эквивалентность:

$$(M^*, w) \models \psi^*[\alpha] \Leftrightarrow (M_1, w) \models \psi_\sigma^*[\alpha].$$

Случай, когда $\psi = \bot$, тривиален. Пусть $\psi = P(x, y)$. Тогда $\psi^* = \Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$, $\psi_\sigma^* = \Box(\sigma_1(x) \vee \sigma_2(y))$, и нужно показать, что для всяких натуральных чисел k и m

$$(M^*, w) \models \Box(Q_1[k] \vee Q_2[m]) \Leftrightarrow (M_1, w) \models \Box(\sigma_1[k] \vee \sigma_2[m]).$$

Пусть $(M^*, w) \not\models \Box(Q_1[k] \vee Q_2[m])$. Тогда, как было показано выше, $(M^*, w_{k,m}) \not\models Q_1[k]$ и $(M^*, w_{k,m}) \not\models Q_2[m]$. В этом случае по определению модели M_1 получаем, что $(M_1, s_{1,k,m}) \not\models Q[k]$ и $(M_1, s_{2,k,m}) \not\models Q[m]$. Поскольку миры $s_{1,k,m}$ и $s_{2,k,m}$ рефлексивны и из каждого из них не достижимы другие миры, то $(M_1, s_{1,k,m}) \not\models \Diamond Q[k]$ и $(M_1, s_{2,k,m}) \not\models \Diamond Q[m]$. Следовательно,

$$\begin{array}{lcl}
(M_1, a_{2,k,m}) & \not\models & \neg Q[k] \wedge \delta_1[k] \wedge \neg\delta_2[k] \to \Box\Diamond Q[k]; \\
(M_1, b_{4,k,m}) & \not\models & \neg Q[m] \wedge \delta_2[m] \wedge \neg\delta_3[m] \to \Box\Diamond Q[m].
\end{array}$$

Значит, $(M_1, w_{k,m}) \not\models \sigma_1[k] \vee \sigma_2[m]$, т.е. $(M_1, w) \not\models \Box(\sigma_1[k] \vee \sigma_2[m])$.

Пусть теперь $(M_1, w) \nVdash \Box(\sigma_1[k] \vee \sigma_2[m])$. Тогда из w достижим мир v такой, что $(M_1, v) \nVdash \sigma_1[k]$ и $(M_1, v) \nVdash \sigma_2[m]$. Несложно понять, что отношение $(M_1, v) \nVdash \sigma_1[m]$ возможно только в том случае, когда $v = a_{2,c,d}$ или $v = w_{s,t}$ для некоторых c и d. Аналогично, отношение $(M_1, v) \nVdash \sigma_2[m]$ возможно только в том случае, когда $v = b_{4,c,d}$ или $v = w_{c,d}$ для некоторых c и d. В результате заключаем, что $v = w_{c,d}$ для некоторых c и d.

Тот факт, что $(M_1, w_{c,d}) \nVdash \sigma_1[m]$ означает, что в модели M_1 существует мир u такой, что $w_{c,d}R_1u$ и

$$(M_1, u) \nVdash \neg Q[k] \wedge \delta_1[k] \wedge \neg\delta_2[k] \to \Box\Diamond Q[k].$$

Формула $\neg Q[k] \wedge \delta_1[k] \wedge \neg\delta_2[k]$ истинна лишь в двух мирах, достижимых из $w_{c,d}$: в мире $a_{2,c,d}$ и в мире $b_{2,c,d}$. Но в мире $b_{2,c,d}$ для всякого n истинна формула $\Box\Diamond Q[n]$, поэтому в $b_{2,c,d}$ не может опровергаться формула $\Box\Diamond Q[k]$. Следовательно, $u = a_{2,c,d}$. Отношение $(M_1, a_{2,c,d}) \nVdash \Box\Diamond Q[k]$ выполнятся только в том случае, когда $(M_1, s_{1,c,d}) \nVdash Q[k]$, а из чего, руководствуясь определением модели M_1, заключаем, что $c = k$, т.е. $w_{c,d} = w_{k,d}$.

Тот факт, что $(M_1, w_{k,d}) \nVdash \sigma_2[m]$ означает, что в модели M_1 существует мир u такой, что $w_{k,d}R_1u$ и

$$(M_1, u) \nVdash \neg Q[m] \wedge \delta_2[m] \wedge \neg\delta_3[m] \to \Box\Diamond Q[m].$$

Формула $\neg Q[m] \wedge \delta_2[m] \wedge \neg\delta_3[m]$ истинна только в одном мире, достижимом из $w_{k,d}$, именно, в мире $b_{4,k,d}$. Следовательно, $u = b_{4,k,d}$. Отношение $(M_1, b_{4,k,d}) \nVdash \Box\Diamond Q[m]$ выполнятся только в том случае, когда $(M_1, s_{2,k,d}) \nVdash Q[m]$, а последнее возможно только тогда, когда $d = m$, т.е. $w_{k,d} = w_{k,m}$.

Осталось заметить, что отношение $(M_1, s_{1,k,m}) \nVdash Q[k]$ выполняется только в том случае, когда $(M^*, w_{k,m}) \nVdash Q_1[k]$, а отношение $(M_1, s_{2,k,m}) \nVdash Q[m]$ – только в том случае, когда $(M^*, w_{k,m}) \nVdash Q_2[m]$. Следовательно, $(M^*, w) \nVdash \Box(Q_1[k] \vee Q_2[m])$. На этом обоснование базиса индукции завершено.

Обоснование индукционного шага в случаях, когда ψ есть конъюнкция, дизъюнкция или импликация формул, тривиально: достаточно заметить, что для любых подформул γ и δ формулы φ имеют место следующие соотношения:

$$(\gamma \wedge \delta)^* = \gamma^* \wedge \delta^*; \qquad (\gamma^* \wedge \delta^*)_\sigma = \gamma_\sigma^* \wedge \delta_\sigma^*;$$
$$(\gamma \vee \delta)^* = \gamma^* \vee \delta^*; \qquad (\gamma^* \vee \delta^*)_\sigma = \gamma_\sigma^* \vee \delta_\sigma^*;$$
$$(\gamma \to \delta)^* = \gamma^* \to \delta^*; \qquad (\gamma^* \to \delta^*)_\sigma = \gamma_\sigma^* \to \delta_\sigma^*.$$

То же относится и к случаю, когда $\psi = \forall x\, \gamma$: нужно воспользоваться соотношениями $(\forall x\, \gamma)^* = \forall x\, \gamma^*$ и $(\forall x\, \gamma^*)_\sigma = \forall x\, \gamma_\sigma^*$.

Поскольку φ является своей подформулой и $(M^*, w) \nVdash \varphi^*$, то мы тем самым доказали, что $(M_1, w) \nVdash \varphi_\sigma^*$. Осталось заметить, что модель M_1 транзитивна, т.е. в ней истинны все формулы, выводимые в **QK4**. Следовательно, $\varphi_\sigma{}^* \notin$ **QK4**.

Теорема 4. *Фрагмент логики* **QK4**, *состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешим.*

Доказательство. Из лемм 1 и 3 следует, что для всякой $\mathcal{L}$-формулы φ, не содержащей предикатных букв, отличных от двуместной буквы P, имеет место эквивалентность

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi_\sigma{}^* \in \mathbf{QK4}.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что формула $\varphi_\sigma{}^*$ выписывается по φ эффективно и не содержит предикатных букв, отличных от одноместной буквы Q.

Применим метод, использованный для обоснования теоремы 4, чтобы доказать аналогичное утверждение для логики Гёделя–Лёба

$$\mathbf{QGL} = \mathbf{QK4} \oplus \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi,$$

шкалами Крипке которой являются в точности иррефлексивные транзитивные шкалы, не содержащие бесконечных возрастающих цепей, и для логики Гжегорчика

$$\mathbf{QGrz} = \mathbf{QK4} \oplus \Box\varphi \to \varphi \oplus \Box(\Box(\varphi \to \Box\varphi) \to \varphi) \to \varphi,$$

шкалами Крипке которой являются в точности рефлексивные транзитивные шкалы, не содержащие бесконечных возрастающих цепей, состоящих из попарно различных миров[2], и не содержащие нетривиальных сгустков. Трудность переноса теоремы 4 на эти логики состоит в том, что шкалы F и F_1, которые мы строили в обосновании лемм 1 и 3, содержат как рефлексивные, так и иррефлексивные миры, в то время как ни одна шкала Крипке логики **QGL** не содержит рефлексивных миров и ни одна шкала Крипке логики **QGrz** не содержит иррефлексивных миров. Тем не менее, некоторая модификация формул позволяет провести нашу конструкцию и для этих логик.

Сначала рассмотрим логику **QGL**. Учитывая опыт, полученный при обосновании лемм 1 и 3, будем более кратки в рассуждениях.

Пусть, как и раньше, φ – некоторая формула языка логики $\mathbf{QCl}^P$, Q_1 и Q_2 – одноместные предикатные буквы, φ^* – модальная формула, получающаяся из формулы φ заменой каждой подформулы φ вида $P(x, y)$ на подформулу $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$.

Лемма 5. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi^* \in \mathbf{QGL}.$$

[2] Правда, эти логики не полны относительно указанных классов шкал (см. [4], [8]).

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1, только вместо шкалы F и модели M^* нужно рассмотреть шкалу $F_{ir} = \langle W, R_{ir} \rangle$ и модель $M_{ir} = \langle W, R_{ir}, D, I \rangle$ на этой шкале, которые отличаются от F и M^* лишь тем, что все миры в них иррефлексивны.

Для всякой формулы ψ обозначим $\Box^+\psi = \psi \wedge \Box\psi$. Модальность $\Box^+$ «заставляет» отношение достижимости в модели Крипке быть рефлексивным: если v – некоторый мир некоторой модели $M' = \langle W', R', D', I' \rangle$, то

$(M', v) \models \Box^+\psi \quad \Leftrightarrow \quad$ для всякого мира $v_1 \notin W'$ такого, что $v = v_1$ или $v R' v_1$, имеет место отношение $(M', v_1) \models \psi$.

Для всякой формулы ψ через ψ^+ обозначим формулу, получающуюся из ψ заменой каждого вхождения $\Box$ на $\Box^+$. Пусть

$$\lambda_m(x) = [\sigma_m(x)]^+.$$

Для всякой формулы ψ обозначим через ψ_λ формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $Q_i(x)$ формулы $\lambda_i(x)$. В этом случае $\varphi_\lambda{}^*$ является формулой, построенной с использованием единственной предикатной буквы Q.

Лемма 6. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi^* \in \mathbf{QGL} \Leftrightarrow \varphi_\lambda{}^* \in \mathbf{QGL}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3. Изменение состоит в том, что вместо шкалы F_1 и модели M_1 нужно рассмотреть шкалу $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$ и модель $M_2 = \langle W_2, R_2, D_2, I_2 \rangle$, которые отличаются от F_1 и M_1 только тем, что все миры в них иррефлексивны; при этом в соответствующем месте рассуждения нужно воспользоваться леммой 5.

Из лемм 5 и 6 получаем аналог теоремы 4 для логики **QGL**.

Теорема 7. *Фрагмент логики* **QGL**, *состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешим.*

Теперь обратимся к логике **QGrz**. С ней дело обстоит несколько сложнее: в случае **QGL** мы могли заменить все миры шкал F и F_1 иррефлексивными мирами, а затем «заставить» их снова быть рефлексивными, заменив в нужных местах используемых формул модальность $\Box$ на модальность $\Box^+$. Но если мы заменим в шкалах F и F_1 иррефлексивный корень рефлексивным миром, то «фокус» с заменой модальностей нам ничего не даст: «рефлексивная» модальность выражается через «иррефлексивную», а наоборот – нет. Поэтому мы поступим иначе.

Возьмем одноместную букву Q_3, отличную от букв Q, Q_1 и Q_2. Как и раньше, рассмотрим формулу φ, не содержащую предикатных букв, отличных от двуместной буквы P. Через φ' обозначим формулу, получающуюся из φ подстановкой вместо $P(x, y)$ формулы $\Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1(x) \vee Q_2(y))]$.

Лемма 8. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi' \in \mathbf{QGrz}.$$

Доказательство. Если $\varphi \in \mathbf{QCl}^P$, то $\varphi \in \mathbf{QGrz}$, а следовательно, $\varphi' \in \mathbf{QGrz}$, так как φ' является подстановочным примером φ.

Пусть теперь $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P$. Тогда существует модель $M = \langle \mathbb{N}, J \rangle$ такая, что $M \not\models \varphi$. Рассмотрим шкалу $F_r = \langle W, R_r \rangle$, которая отличается от шкалы F только тем, что все миры в ней рефлексивны. На шкале F_r определим модель $M_r = \langle W, R_r, D, I \rangle$, положив для всякого $v \in W$

$$\begin{array}{rcl} D(v) & = & \mathbb{N}; \\ (M_r, v) \not\models Q_1[k] & \Leftrightarrow & \text{либо } v = w, \text{ либо существует такое } m \in \mathbb{N}, \\ & & \text{что } v = w_{k,m} \text{ и } M \not\models P[k, m]; \\ (M_r, v) \not\models Q_2[m] & \Leftrightarrow & \text{либо } v = w, \text{ либо существует такое } k \in \mathbb{N}, \\ & & \text{что } v = w_{k,m} \text{ и } M \not\models P[k, m]; \\ (M_r, v) \not\models Q_3[n] & \Leftrightarrow & v = w; \end{array}$$

в остальном модель M_r произвольна.

Для всякой подформулы ψ формулы φ через ψ' обозначим формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $P(x, y)$ формулы

$\Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1(x) \vee Q_2(y))]$.

Индукцией по построению ψ докажем, что для всякой интерпретации α индивидных переменных

$$M \models \psi[\alpha] \Leftrightarrow (M_r, w) \models \psi'[\alpha].$$

Случай, когда $\psi = \bot$, тривиален. Пусть $\psi = P(x, y)$. Тогда нам надо показать, что для всяких $k, m \in \mathbb{N}$

$$M \models P[k, m] \Leftrightarrow (M_r, w) \models \Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1[k] \vee Q_2[m])].$$

Пусть $M \not\models P[k, m]$. Тогда по определению модели M_r получаем, что

$(M_r, w_{k,m}) \models \exists z\, Q_3(z)$, $(M_r, w_{k,m}) \not\models Q_1[k]$ и $(M_r, w_{k,m}) \not\models Q_2[m])$.

Следовательно, $(M_r, w) \not\models \Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1[k] \vee Q_2[m])]$.

Пусть теперь $(M_r, w) \not\models \Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1[k] \vee Q_2[m])]$. Тогда в модели M_r существует мир v, достижимый из w, такой, что $(M_r, v) \models \exists z\, Q_3(z)$, $(M_r, v) \not\models Q_1[k]$ и $(M_r, v) \not\models Q_2[m]$. Ясно, что $v \neq w$, поскольку $(M_r, w_{k,m}) \not\models \exists z\, Q_3(z)$, следовательно, $v = w_{s,t}$ для некоторых $s, t \in \mathbb{N}$. Так как $(M_r, w_{s,t}) \nvDash Q_1[k]$, то $s = k$ и $M \nvDash P[k, t]$, а поскольку $(M_r, w_{k,t}) \nvDash Q_2[m]$, то $t = m$ и $M \nvDash P[k, m]$.

Обоснование индукционного шага оставляется читателю.

В результате получаем, что $(M_r, w) \nvDash \varphi'$. Осталось заметить, что в шкале F_r истинны все формулы, выводимые в **QGrz**, и следовательно, $\varphi' \notin$ **QGrz**.

Для всякой формулы ψ будем обозначать через ψ_σ формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $Q_i(x)$ формулы $\sigma_i(x)$.

Лемма 9. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi' \in \mathbf{QGrz} \Leftrightarrow \varphi'_\sigma \in \mathbf{QGrz}.$$

Доказательство. Ясно, что если $\varphi' \in$ **QGrz**, то $\varphi'_\sigma \in$ **QGrz**.

Пусть $\varphi' \notin$ **QGrz**. Тогда φ' опровергается в корне w модели M_r (см. доказательство леммы 8). Пусть $F_3 = \langle W_3, R_3\rangle$ – шкала, которая строится по F_r так же, как в доказательстве леммы 3 шкала F_1 была построена по F. В результате F_3 будет отличаться от F_1 лишь тем, что все миры в ней рефлексивны.

Расширим F_3 следующим образом. Положим достижимой из корня w шкалы F_3 рефлексивно-транзитивную шкалу, изображенную на рис. 3 (светлыми кружками, как и раньше, изображены рефлексивные миры, отношениям достижимости соответствуют линии, верхние миры достижимы из нижних, но не наоборот), а в качестве отношения достижимости возьмем транзитивное замыкание получившегося отношения. Определенную таким образом шкалу $\langle W_4, R_4\rangle$ обозначим через F_4. На F_4 определим модель $M_4 = \langle W_4, R_4, D_4, I_4\rangle$, положив для всякого $v \in W_4$

$$D_4(v) = \mathbb{N},$$

кроме того, для всяких $v \in W$ (т.е. $v = w$ или $v = w_{k,m}$) и $n \in \mathbb{N}$

$$(M_4, v) \vDash Q[n],$$

для всяких $k, m, n, r \in \mathbb{N}$

$$(M_4, a_{n,k,m}) \vDash Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad n = 1;$$

$$(M_4, b_{n,k,m}) \vDash Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad n = 1 \text{ или } n = 3;$$

$$(M_4, c_n) \vDash Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad n = 1, n = 3 \text{ или } n = 5;$$

$$(M_4, s_{1,k,m}) \vDash Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad (M_r, w_{k,m}) \vDash Q_1[r];$$

$$(M_4, s_{2,k,m}) \vDash Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad (M_r, w_{k,m}) \vDash Q_2[r]$$

и для всяких $m \in \mathbb{N}$

$$(M_4, s) \nvDash Q[r];$$

в остальном модель M_4 произвольна.

Как и раньше, для всякой подформулы ψ формулы φ через ψ' обозначим формулу, получающуюся из ψ заменой каждой подформулы вида $P(x, y)$ на формулу $\Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1(x) \vee Q_2(y))]$, а через ψ'_σ – формулу, получающуюся из ψ' заменой каждого вхождения подформулы вида $Q_i(x)$ на $\sigma_i(x)$.

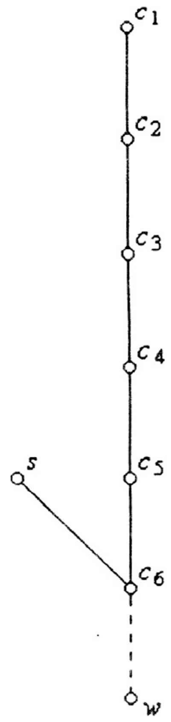


Рис. 3

Доказательство следующего факта проводится аналогично соответствующему рассуждению, приведенному в доказательстве леммы 3. Именно, индукцией по построению подформулы ψ формулы φ легко доказать, что для всякой интерпретации α индивидных переменных

$$(M_r, w) \vDash \psi' [\alpha] \Leftrightarrow (M_4, w) \vDash \psi'_\sigma[\alpha].$$

Тем самым доказали, что $(M_4, w) \nvDash \varphi'_\sigma$. Осталось заметить, что модель M_4 рефлексивна, транзитивна, не содержит бесконечных возрастающих цепей, состоящих из попарно различных миров, а также не содержит нетривиальных сгустков, т.е. в ней истинны все формулы, выводимые в **QGrz**. Следовательно, $\varphi'_\sigma \notin$ **QGrz**.

Теорема 10. *Фрагмент логики* **QGrz***, состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешим.*

На самом деле мы доказали более сильное утверждение, чем теоремы 4, 7 и 10.

Теорема 11. *Пусть модальная предикатная логика L такова, что:*

- *безмодальный фрагмент L совпадает с* **QCl***;*
- $L \subseteq$ **QGL** *или* $L \subseteq$ **QGrz**.

Тогда фрагмент логики L, состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешим.

Доказательство. Пусть $L \subseteq$ **QGL**. Если $\varphi \in \mathbf{QCl}^P$, то $\varphi_\lambda^* \in L$. Пусть теперь $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P$. Тогда $\varphi_\lambda^* \notin$ **QGL** по теореме 7, а следовательно, $\varphi_\lambda^* \notin L$. Таким образом,

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi_\lambda^* \in L,$$

откуда и следует неразрешимость указанного фрагмента логики L.

Пусть $L \subseteq$ **QGrz**. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi'_\sigma \in L,$$

откуда снова следует неразрешимость соответствующего фрагмента логики L.

Отметим, что теорема 11 останется справедливой, если вместо упомянутых выше логик рассматривать логики постоянных областей. Действительно, достаточно заметить, что во всех рассуждениях мы использовали модели Крипке, в которых предметные области миров совпадали друг с другом. Условие постоянства областей может быть описано синтаксически путем добавления к соответствующей логике всех формул вида

$$\mathbf{BF} = \forall x\, \Box\varphi \to \Box\forall x\, \varphi,$$

и хотя получающаяся таким образом логика не всегда оказывается полной по Крипке, для нее проходит описанная выше конструкция. Следовательно, имеет место

Теорема 12. *Пусть модальная предикатная логика L такова, что:*

- *безмодальный фрагмент L совпадает с* **QCl**;
- $L \subseteq \mathbf{QGL} \oplus \mathbf{BF}$ *или* $L \subseteq \mathbf{QGrz} \oplus \mathbf{BF}$.

Тогда фрагмент логики L, состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешим.

Следствие 13. *Фрагменты логик* **QK**, **QT**, **QK4**, **QS4**, **QGL**, **QGrz**, $\mathbf{QK} \oplus \mathbf{BF}$, $\mathbf{QT} \oplus \mathbf{BF}$, $\mathbf{QK4} \oplus \mathbf{BF}$, $\mathbf{QS4} \oplus \mathbf{BF}$, $\mathbf{QGL} \oplus \mathbf{BF}$, $\mathbf{QGrz} \oplus \mathbf{BF}$, *состоящие из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешимы.*

Отметим, что логики **QK**, **QT**, **QK4**, **QS4** являются полными по Крипке: они полны, соответственно, относительно класса всех шкал Крипке, относительно класса всех рефлексивных шкал, относительно класса всех транзитивных шкал и относительно класса всех рефлексивно-транзитивных шкал. Иначе обстоит дело с логиками **QGL** и **QGrz**: они не являются полными относительно ни одного из классов шкал Крипке (см. [4] и [8]).

Рассмотрим логики $\mathbf{QGL}^{sem}$ и $\mathbf{QGrz}^{sem}$, где $\mathbf{QGL}^{sem}$ – множество модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке логики Гёделя–Лёба **QGL**, а логика $\mathbf{QGrz}^{sem}$ – множество модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке логики Гжегорчика **QGrz**. Ясно, что для них проходит описанная выше конструкция, и их фрагменты, состоящие из формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешимы. В [4] доказано, что логики $\mathbf{QGL}^{sem}$ и $\mathbf{QGrz}^{sem}$ не являются рекурсивно перечислимыми, поэтому, быть может, указанные фрагменты этих логик не только не разрешимы, но и не перечислимы. Покажем, что дело обстоит именно так.

Мы будем пользоваться общеизвестным фактом, состоящим в том, что шкалами логики **QGL** являются в точности иррефлексивно-транзитивные шкалы, не содержащие бесконечных возрастающих цепей, а шкалами **QGrz** – в точности рефлексивно-транзитивные шкалы, не содержащие бесконечных возрастающих цепей, состоящих из попарно различных миров, и не содержащие нетривиальных сгустков. Ввиду этого наблюдения очевидно, что для всякой формулы φ

$$\varphi \in \mathbf{QGrz}^{sem} \Leftrightarrow \varphi^{+} \in \mathbf{QGL}^{sem}, \qquad (*)$$

поэтому для наших целей будет достаточно доказать неперечислимость фрагмента логики $\mathbf{QGrz}^{sem}$, состоящего из всех формул от некоторой одноместной буквы, что мы и сделаем.

Пусть $\mathbf{QCl}_{fin}$ – классическая логика конечных областей, $\mathbf{QCl}^{P}_{fin}$ – фрагмент этой логики, состоящий из всех формул от одной двуместной предикатной буквы P. Известно, что логика $\mathbf{QCl}^{P}_{fin}$ является неперечислимой. Построим погружение этой логики в логику $\mathbf{QGrz}^{sem}$. Пусть Q – одноместная, а E, G и S – двуместные предикатные буквы (отличные от буквы P). Обозначим

$$\begin{aligned} Eq \quad = \quad & \Box^{+}[\forall x\, E(x,x) \wedge \forall x \forall y\, (E(x,y) \rightarrow E(y,x)) \wedge \\ & \wedge \forall x \forall y \forall z\, (E(x,y) \wedge E(y,z) \rightarrow E(x,z))] \end{aligned}$$

и ниже вместо $E(x, y)$ в большинстве случаев будем писать $x \approx y$. Выполнимость в некотором мире w формулы Eq означает, что предметные области мира w и достижимых из w миров разбиваются на классы эквивалентности по отношению $\approx$.

Смысл, который вкладывается в остальные буквы, чуть сложнее для описания; ниже мы определим формулу A, выполнимость которой одновременно с формулой Eq в некотором мире w модели, определенной на шкале логики **QGrz**, будет означать следующее:

- область мира w разбивается с помощью E на конечное число классов эквивалентности;
- эти классы упорядочены линейно по G, где G задает нестрогий частичный порядок;
- при переходе к непосредственно следующему за данным миру этот порядок либо сохраняется, либо изменяется таким образом, что два последних класса эквивалентности склеиваются в один;

- отношение S определяется через G, и $S(x, y)$ означает, что либо $x \approx y$, либо класс, в который попал y, непосредственно следует по G за классом, в который попал x;
- буква Q нужна для того, чтобы «помечать» миры индивидами; считаем, что мир w модели $M = \langle W, R, D, I\rangle$ «помечен» индивидом $a \in D(w)$, если $(M, w) \models Q[a]$; при этом a будем называть меткой мира w;
- если a является меткой некоторого мира, то всякий элемент, следующий по G за a, тоже является меткой этого мира;
- при переходе к непосредственно следующему за данным миру множество меток не уменьшается и может пополниться за счет не более чем одного класса эквивалентности по E.

Перечислим условия, которые и будут определять формулу A. Опишем транзитивность G с добавлением, что для всякого элемента существует сравнимый с ним по G элемент:

$$A_1 = \Box\forall x\exists y\, G(x, y) \wedge \forall x\forall y\forall z\, [G(x, y) \wedge G(y, z) \to G(x, z)].$$

Запишем определение S:

$$A_2 = \Box\forall x\forall y\, [S(x, y) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (G(x, y) \wedge \forall z\, (G(x, z) \wedge G(z, y) \to (z \approx x) \vee (z \approx y)))].$$

Следующая формула гарантирует, что отношения G и S сохраняются (быть может, расширяются) при переходе к следующим мирам:

$$A_3 = \Box\forall x\forall y\, [(G(x, y) \to \Box G(x, y)) \wedge (S(x, y) \to \Box S(x, y))].$$

Согласованность G и E описывается формулой

$$A_4 = \Box\forall x\forall y\, [(x \approx y) \leftrightarrow (G(x, y) \wedge G(y, x))],$$

линейность G – формулой

$$A_5 = \Box\forall x\forall y\, [(x \approx y) \vee G(x, y) \vee G(y, x)].$$

Существование наименьшего по G элемента и наибольшего по G элемента можно описать с помощью формулы

$$A_6 = \exists x\, \Box\forall y\, G(x, y) \wedge \exists x\, \Box\forall y\, G(y, x).$$

Теперь запишем, что для всякого элемента, отличного от наибольшего, существует элемент, непосредственно следующий за ним по G, а для всякого элемента, отличного от наименьшего, – его непосредственный предшественник по G:

$$A_7 = \Box\forall x\, [(\exists y\, ((x \not\approx y) \wedge G(x, y)) \to \exists y\, ((x \not\approx y) \wedge S(x, y))];$$
$$A_8 = \Box\forall x\, [(\exists y\, ((x \not\approx y) \wedge G(y, x)) \to \exists y\, ((x \not\approx y) \wedge S(y, x))].$$

Следующие формулы описывают согласованность отношения G и свойства Q. Условие «если y следует непосредственно за x, то имеется мир, такой, что y является его меткой, а x – нет» описывается формулой

$$A_9 = \Box\forall x\forall y\, [((x \not\approx y) \wedge S(x, y)) \to \Diamond(Q(y) \wedge \neg Q(x))],$$

наследственность меток (в результате один и тот же мир может иметь несколько меток) – формулой

$$A_{10} = \Box\forall x\, [Q(x) \to \Box Q(x)].$$

Итак, при переходе от одного мира к другому множество меток может увеличиваться. Следующая формула описывает тот факт, что увеличение множества меток происходит постепенно – с добавлением не более чем одной метки при переходе к непосредственно следующему за данным миру:

$$A_{11} = \Box\forall x\forall y\forall z\, [Q(x) \wedge \neg Q(y) \wedge G(y, x) \wedge G(z, y) \wedge (z \not\approx y) \to$$
$$\to \Diamond(Q(y) \wedge \neg Q(z))].$$

Теперь запишем условие, выполнение которого наряду с остальными будет означать, что при переходе к миру, непосредственно следующему за данным, в новый класс эквивалентности могут слиться только наибольший по G и непосредственно ему предшествующий:

$$A_{12} = \Box\forall x\forall y\forall z\, [G(x, y) \wedge G(y, z) \wedge (x \not\approx y) \wedge (y \not\approx z) \to$$
$$\to \Box(G(y, z) \wedge (y \not\approx z) \to G(x, y) \wedge (x \not\approx y))].$$

Пусть меткой нижнего мира является всякий максимальный по G элемент и не является ни один другой:

$$A_{13} = \forall x\, (\forall y\, G(y, x) \to Q(x)) \wedge \forall x\, (\neg\forall y\, G(y, x) \to \neg Q(x)).$$

Осталось явно выразить G через Q:

$$A_{14} = \Box\forall x\forall y\, [G(x, y) \leftrightarrow \Box(Q(x) \to Q(y))].$$

Пусть $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_{14}$. Пусть также $B(P)$ – конъюнкция всех аксиом равенства для буквы P, где вместо равенства стоит буква E.

Лемма 14. *Если* $\varphi \in \mathbf{QCl}^P{}_{fin}$, *то* $Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi \in \mathbf{QGrz}^{sem}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbf{QCl}^P{}_{fin}$. Предположим, что существует модель $M = \langle W, R, D, I\rangle$, определенная на шкале логики **QGrz**, в некотором мире w которой опровергается формула $Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi$. Покажем, что в этом случае множество $D(w)$ разбивается с помощью E (т.е. с помощью $\approx$) на конечное число классов эквивалентности.

Предположим, что это не так. Так как в w истинны формулы A_1, A_4, A_5, то G линейно упорядочивает $D(w)$. Следовательно, достаточно показать, что в $D(w)$ нет бесконечных возрастающих и бесконечных убывающих по G цепей, состоящих из попарно неэквивалентных элементов. Заметим, что если в $D(w)$ имеется бесконечная возрастающая цепь, состоящая из попарно неэквивалентных элементов, то в $D(w)$ имеется и бесконечная убывающая цепь, состоящая из попарно неэквивалентных элементов. Действительно, в силу A_6 в $D(w)$ существует наибольший по G элемент a, который ограничивает сверху всякую бесконечную возрастающую цепь, состоящую из попарно неэквивалентных элементов. По A_8 для a существует его непосредственный предшественник по G, который, очевидно, будет обладать тем же свойством. Для него, в свою очередь, тоже существует непосредственный предшественник, ограничивающий всякую бесконечную возрастающую цепь, состоящую из попарно неэквивалентных элементов, и т.д. В результате получаем, что в $D(w)$ имеется бесконечная убывающая по G цепь, начинающаяся с элемента a и состоящая из попарно неэквивалентных элементов. Итак, достаточно показать, что в $D(w)$ нет бесконечных убывающих по G цепей, состоящих из неэквивалентных друг другу элементов.

Предположим, что в $D(w)$ имеется бесконечная убывающая цепь $\ldots a_3Ga_2Ga_1Ga_0$, где $a_i \not\approx a_j$ при $i \neq j$. Без ограничений общности можем считать, что a_0 – максимальный по G элемент. В силу A_{13} элемент a_0 является меткой мира w, а всякий элемент a_{i+1} – нет; по A_{11} и A_{12} получаем, что существуют миры $w_1, w_2, w_3, \ldots$ такие, что $wRw_1Rw_2Rw_3R\ldots$, причем метками мира w_k являются элементы $a_0, \ldots, a_k$ и не являются элементы a_i при $i > k$. Это означает, в частности, что миры $w_1, w_2, w_3, \ldots$ попарно различны, т.е. в модели M существует бесконечная возрастающая цепь, состоящая из попарно различных миров. Таким образом, M не может быть определена на шкале логики **QGrz**. Получили противоречие.

Итак, $D(w)$ разбивается с помощью G на конечное множество классов эквивалентности по E. Поскольку для P выполнены аксиомы равенства (где символ равенства заменен буквой E), то в мире w должна быть истинна формула φ (если бы это было не так, мы бы легко построили конечную контрмодель для φ, взяв из каждого класса эквивалентности по одному элементу и сохранив интерпретацию для буквы P). Последнее противоречит тому, что в w опровергается формула $Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi$.

Лемма 15. *Пусть φ – формула языка логики $\mathbf{QCl}^P_{fin}$. Тогда если $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P_{fin}$, то $Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi \notin \mathbf{QGrz}^{sem}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P_{fin}$. Тогда существует модель $M_0 = \langle C, J\rangle$ с конечной областью C, в которой опровергается φ. Без ограничений общности можем считать, что $C = \{0, \ldots, n\}$ для некоторого натурального числа n. Построим модель логики $\mathbf{QGrz}^{sem}$, в корне которой будет опровергаться формула φ. Рассмотрим шкалу $F = \langle W, R\rangle$, где

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{w_0, \dots, w_n\}; \\ w_k R w_m & \Leftrightarrow & k \geqslant m. \end{array}$$

На F определим модель $M = \langle W, R, D, I\rangle$, положив для всякого $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{array}{rcl} D(w_k) & = & \{0, \dots, n\}; \\ (M, w_k) \models Q[m] & \Leftrightarrow & k \leqslant m; \\ (M, w_k) \models E[m, r] & \Leftrightarrow & m = r \text{ или } m, r \geqslant k; \\ (M, w_k) \models G[m, r] & \Leftrightarrow & m \leqslant r \text{ или } m, r \geqslant k; \\ (M, w_k) \models S[m, r] & \Leftrightarrow & r = m \text{ или } r = m + 1 \text{ или } m, r \geqslant k; \\ (M, w_k) \not\models P[m, r] & \Leftrightarrow & k = n \text{ и } M_0 \not\models P[m, r]. \end{array}$$

Очевидно, что при таком определении имеет место отношение $(M, w_n) \not\models \varphi$ (мы определили отношение истинности в мире w_n так же, как и в модели M_0); при этом несложно убедиться, что $(M, w_n) \models Eq \wedge A \wedge B(P)$.

Из лемм 14 и 15, а также из теоремы Трахтенброта о неперечислимости классической логики конечных областей вытекает

Теорема 16. *Логика* $\mathbf{QGrz}^{sem}$ *неперечислима.*

Изменим рассматривавшиеся выше формулы, выполнив последовательно следующие действия:

- вместо каждого вхождения $S(x, y)$ подставим формулу $G(x, y) \wedge \forall z\, (G(x, z) \wedge G(z, y) \rightarrow (z \approx x) \vee (z \approx y))$;
- вместо каждого вхождения $E(x, y)$ подставим формулу $G(x, y) \wedge G(y, x)$;
- вместо каждого вхождения $G(x, y)$ подставим формулу $\Box(Q(x) \rightarrow Q(y))$.

Получившиеся формулы будем помечать верхним индексом «1». В силу формул A_2, A_4, и A_{14} имеет место эквивалентность

$$Eq \wedge A \wedge B(P) \rightarrow \varphi \in \mathbf{QGrz}^{sem} \Leftrightarrow [Eq \wedge A \wedge B(P) \rightarrow \varphi]^1 \in \mathbf{QGrz}^{sem}.$$

Теперь промоделируем букву P с помощью одноместных предикатных букв. Пусть Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 – одноместные буквы, отличные от Q. Подставим во все рассматривающиеся формулы вместо $P(x, y)$ формулу $\Box[\exists z\, Q_3(z) \rightarrow (Q_1(x) \vee Q_2(y))]$, а вместо $Q(x)$ – формулу $Q_4(x)$. Получившиеся в результате такой замены формулы будем помечать верхним индексом «2». Из допустимости в логике $\mathbf{QGrz}^{sem}$ правила подстановки вытекает

Лемма 17. *Если* $[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1 \in \mathbf{QGrz}^{sem}$, *то имеет место отношение* $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \in \mathbf{QGrz}^{sem}$.

Имеет место и обратное утверждение.

Лемма 18. *Если* $[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1 \notin \mathbf{QGrz}^{sem}$, *то имеет место отношение* $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \notin \mathbf{QGrz}^{sem}$.

Доказательство. Расширим шкалу F, определенную в доказательстве леммы 15, до шкалы $F_1 = \langle W_1, R_1\rangle$, положив

$$\begin{array}{rcl} W_1 & = & W \cup \{v_{k,m} : k, m \in \{0, \dots, n\}\}; \\ w_k R_1 w_m & \Leftrightarrow & k \geqslant m; \\ w_s R_1 v_{k,m} & \Leftrightarrow & s = n; \\ v_{s,t} R_1 v_{k,m} & \Leftrightarrow & s = k \text{ и } t = m. \end{array}$$

На F_1 определим модель $M_1 = \langle W_1, R_1, D_1, I_1\rangle$, положив для всякого $u \in W_1$ и всяких $k, m \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{array}{rcl} D_1(u) & = & \{0, \dots, n\}; \\ (M_1, u) \not\models Q_1[k] & \Leftrightarrow & \text{либо } u = w_n, \text{ либо существует такое } \\ & & m \in \{0, \dots, n\}, \text{ что } u = v_{k,m} \text{ и } M \not\models P[k, m]; \\ (M_1, u) \not\models Q_2[m] & \Leftrightarrow & \text{либо } u = w_n, \text{ либо существует такое } \\ & & k \in \{0, \dots, n\}, \text{ что } u = v_{k,m} \text{ и } M \not\models P[k, m]; \\ (M_1, u) \not\models Q_3[m] & \Leftrightarrow & u = w_n; \\ (M_1, u) \not\models Q_4[m] & \Leftrightarrow & u \in W \text{ и } (M, u) \not\models Q[m]. \end{array}$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, что мы проводили при доказательстве лемм 1 и 8, несложно доказать, что

$$(M_1, w_n) \not\models [[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2,$$

откуда получаем, что $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \notin \mathbf{QGrz}^{sem}$.

Осталось промоделировать буквы Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 посредством некоторой одноместной буквы Q. Это можно сделать с помощью формул $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, $\sigma_3(x)$, $\sigma_4(x)$. Как и раньше, для всякой формулы ψ через ψ_σ будем обозначать формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $Q_i(x)$ формулы $\sigma_i(x)$.

Лемма 19. *Отношение* $[[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2]_\sigma \in \mathbf{QGrz}^{sem}$ *выполняется тогда и только тогда, когда имеет место отношение* $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \in \mathbf{QGrz}^{sem}$.

Доказательство. Если $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \in \mathbf{QGrz}^{sem}$, то $[[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2]_\sigma \in \mathbf{QGrz}^{sem}$, поскольку вторая формула получена из первой с помощью подстановки.

Пусть $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \notin \mathbf{QGrz}^{sem}$. Расширим шкалу F_1, положив из каждого мира $v_{k,m}$ достижимой шкалу, изображенную

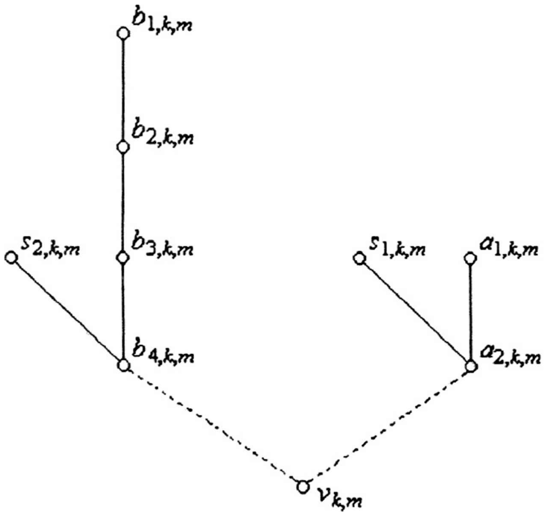


Рис. 4

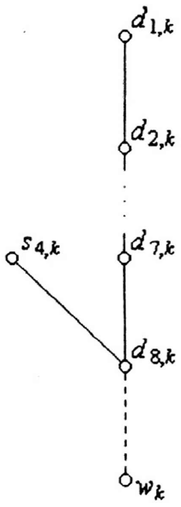


Рис. 5

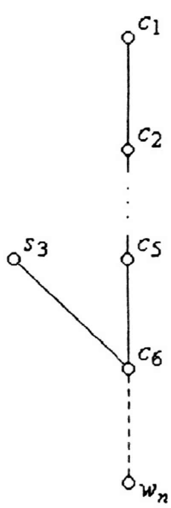


Рис. 6

на рис. 4, из каждого мира w_k – шкалу, изображенную на рис. 5, а из мира w_n – еще и шкалу, изображенную на рис. 6; в качестве отношения достижимости возьмем транзитивное замыкание получившегося в результате такого расширения отношения. Новую шкалу $\langle W_2, R_2\rangle$ обозначим через F_2. На F_2 определим модель $M_2 = \langle W_2, R_2, D_2, I_2\rangle$, положив для всякого $u \in W_2$ и всяких $k, m, r, t \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{array}{rcl}
D_2(u) & = & \{0, \dots, n\}; \\
(M_2, a_{t,k,m}) \vDash Q[r] & \Leftrightarrow & t = 1; \\
(M_2, b_{t,k,m}) \vDash Q[r] & \Leftrightarrow & t = 1 \text{ или } t = 3; \\
(M_2, c_t) \vDash Q[r] & \Leftrightarrow & t = 1, t = 3 \text{ или } t = 5; \\
(M_2, d_{t,k}) \vDash Q[r] & \Leftrightarrow & t = 1, t = 3, t = 5 \text{ или } t = 7; \\
(M_2, s_{1,k,m}) \vDash Q[r] & \Leftrightarrow & (M_1, v_{k,m}) \vDash Q_1[r]; \\
(M_2, s_{2,k,m}) \vDash Q[r] & \Leftrightarrow & (M_1, v_{k,m}) \vDash Q_2[r]; \\
(M_2, s_{4,k}) \vDash Q[r] & \Leftrightarrow & (M_1, w_k) \vDash Q_4[r]; \\
(M_2, s_3) \nvDash Q[r]; & & \\
(M_2, w_k) \vDash Q[r]; & & \\
(M_2, v_{k,m}) \vDash Q[r]. & &
\end{array}$$

Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве леммы 8, можно показать, что $(M_2, w_n) \nvDash [[\varphi^1]^2]_\sigma$. Кроме того, несложно проверить, что $(M_2, w_n) \vDash [[[Eq \wedge A \wedge B(P)]^1]^2]_\sigma$. При проверке этого факта нужно воспользоваться тем, что

$$(M_2, u) \not\models \sigma_4[m] \quad \Leftrightarrow \quad u = w_k \text{ и } m < k \text{ или же } u = d_{8,k} \text{ и } m < k.$$

В результате получаем, что $(M_2, w_n) \not\models [[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2]_\sigma$. Поскольку F_2 является шкалой логики **QGrz**, то отсюда следует, что $[[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2]_\sigma \notin \mathbf{QGrz}^{sem}$,

Используя утверждения 14–19, получаем, что имеет место

Теорема 20. *Фрагмент логики* $\mathbf{QGrz}^{sem}$, *состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, не является рекурсивно перечислимым.*

Используя эквивалентность (*), получаем аналогичный результат и для логики $\mathbf{QGL}^{sem}$. Именно, верна следующая

Теорема 21. *Фрагмент логики* $\mathbf{QGL}^{sem}$, *состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, не является рекурсивно перечислимым.*

В [4] доказывается неперечислимость бесконечных классов логик (логики $\mathbf{QGL}^{sem}$ и $\mathbf{QGrz}^{sem}$ являются в этих классах наименьшими по включению), поэтому кажется естественным распространить утверждения теорем 20 и 21 на другие логики, рассмотренные в [4]. Для этого достаточно было бы провести описанную выше конструкцию для логик $\mathbf{QGLLin}^{sem}$ и $\mathbf{QS4.3Grz}^{sem}$ (первая логика описывается классом всех линейных шкал логики **QGL**, а вторая – классом всех линейных шкал логики **QGrz**). Здесь мы сталкиваемся с трудностью, поскольку описанная выше конструкция предполагает, что рассматриваемая логика, по меньшей мере, должна иметь шкалы, в которых существуют антицепи любой (конечной) мощности, в то время как мощность любой антицепи в шкалах логик $\mathbf{QGLLin}^{sem}$ и $\mathbf{QS4.3Grz}^{sem}$ равна единице.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
2. *Маслов С.Ю., Минц Г.Е., Оревков В.П.* Неразрешимость в конструктивном исчислении предикатов некоторых классов формул, содержащих только одноместные предикатные переменные // Доклады АН СССР. 1965. Т. 163, № 2. С. 295–297.
3. *Рыбаков М.Н., Чагров А.В.* Константные формулы в модальных логиках: проблема разрешения // См. настоящий сборник.
4. *Рыбаков М.Н.* Перечислимость модальных предикатных логик и условия обрыва возрастающих цепей // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001. С. 155–167.
5. Семантика модальных и интенсиональных логик. Сб. статей. Пер. с англ., сост., общ. ред. и вступит. статья В.А.Смирнова. М.: Прогресс, 1981.

6. *Halpern J.Y.* The Effect of Bounding the Number of Primitive Propositions and the Depth of Nesting on the Complexity of Modal Logic // Artificial Intelligence, Vol. 75. No. 2, 1995. P. 361–372.
7. *Kripke S.A.* The Undecidability of modal quantification theory // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. Vol 8. 1962. P. 113–116. (Русский перевод: *С.А. Крипке.* Неразрешимость одноместного модального исчисления предикатов // Р. Фейс. Модальная логика. М.: Наука, 1974. С. 247–253.)
8. *Montagna F.* The Predicate Modal Logic of Provability // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1984. Vol. 25. N 2. P. 1059–1073.

М.Н.Рыбаков, А.В.Чагров

КОНСТАНТНЫЕ ФОРМУЛЫ В МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ: ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ*

Abstract. *The main result: the provability problem of constant formulas is* PSPACE-*complete for modal logics* **K**, **K4**. *Some closed questions are discussed.*

Решение рассматриваемой в данной статье проблемы было стимулировано двумя обстоятельствами.

Во-первых, довольно часто при изучении той или иной логики высказываний порой забывают, что формулы – это схемы высказываний, а не сами высказывания, и потому, решив ту или иную проблему для логики в целом, неплохо бы посмотреть, как это решение соотносится со множеством самих высказываний. (Краткое содержательное обсуждение высказываний в логиках высказываний читатель может найти в [1]. В частности, предлагается считать, что типичным высказыванием в логике высказываний является константная формула, т.е. формула без переменных.) Например, если решена проблема разрешимости логики и/или проблема ее разрешения[1], то что можно сказать про решение сопутствующей проблемы для константных формул (или, быть может, формул с ограниченным числом используемых переменных)? В конце концов, схемы высказываний изучаются именно для удобного выделения видов правильных (истинных в какой-либо точной семантике) высказываний. В качестве довольно простого примера можно указать модальную логику **S4**. Эта логика разрешима, однако алгоритмически довольно сложна – проблема доказуемости в **S4** PSPACE-полна: известен разрешающий ее алгоритм с полиномиальными от длины проверяемой формулы затратами памяти, а можно ли ее разрешать (хотя бы недетерми-

* Работа выполнена при поддержке Фонда Минобразования РФ, грант № Е00–1.0–175, и РГНФ, грант № 01-03-00403.

[1] Напомним, что проблема разрешимости состоит в том, что требуется узнать, разрешима ли логика, т.е. существует ли соответствующий алгоритм, а проблема же разрешения – в указании самого алгоритма. Почти всегда эти проблемы решаются одновременно, хотя имеются случаи, когда первая проблема решена, а вторая «почти безнадежна». Следует иметь в виду, что помимо этих проблем имеются еще сложностные их разновидности: проблема оптимизации разрешающего алгоритма – требуется найти разрешающий алгоритм (или изучить возможность его построения) с минимальными затратами времени, памяти и т.п.

нированным!) алгоритмом с полиномиальными затратами времени, неизвестно. Последний вопрос тесно связан с одной из краеугольных проблем теории сложности алгоритмов и вычислений – «Верно ли, что PSPACE = NP?»; по этой проблематике мы отсылаем читателя к весьма популярно написанной монографии [5], соотношения же сложностных проблем с алгоритмическими проблемами (не)доказуемости (точнее, (не)принадлежности) в модальных и суперинтуиционистских логиках подробно обсуждаются в [4] и [11]. Так вот, если ограничиться константными формулами, то положение меняется коренным образом: всякая константная формула с помощью имеющихся в логике **S4** эквивалентностей, соответствующих классическим таблицам истинности, например,

$$(\bot \wedge \top) \leftrightarrow \bot, (\bot \vee \top) \leftrightarrow \top, (\bot \to \bot) \leftrightarrow \top, \neg\bot \leftrightarrow \top$$

и т.п., а также «стирающих» эквивалентностей

$$\Box\bot \leftrightarrow \bot \text{ и } \Box\top \leftrightarrow \top$$

довольно быстро (за не более чем квадратичное время от длины исходной формулы) приводится к формуле $\top$ (и тогда исходная формула принадлежит **S4**) или к формуле $\bot$ (тогда она не принадлежит **S4**). Ясно, что сказанное останется справедливым и для любого (даже неразрешимого!) расширения **S4**, точнее, для расширений минимальной модальной логики, в которой указанные эквивалентности действуют, каковой в нормальных логиках является $\mathbf{D} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top$. Для иных логик, конечно, вопрос о константных формулах может оказаться и не столь простым. Ниже мы увидим примеры возможных ситуаций.

Во-вторых, ограничение числа переменных в рассматриваемых формулах, с одной стороны, содержательно естественно, а с другой – приводит во многих случаях к существенному снижению сложности вычислений при реализации уже имеющихся разрешающих алгоритмов. Это видно и на упомянутом примере **S4**.

Однако это, быть может, не самый интересный пример. Скажем, классическая логика высказываний вряд ли в настоящее время может считаться реально разрешимой – проблема принадлежности к ней coNP-полна (или, что то же самое, проблема непринадлежности к ней NP-полна). Заметим, что «главный вклад» в экспоненту дает число переменных, а не просто длина тестируемой формулы: если ограничить количество используемых переменных фиксированным числом m, то получившийся фрагмент уже оказывается полиномиально (не более чем квадратично) по времени разрешимым (детерминированным алгоритмом); ведь при построении таблицы истинности для формулы от m переменных достаточно провести вычисления в 2^m строках, а в каждой из них время работы полиномиально. Хотя число 2^m может быть и «страшно большим», но оно фиксировано! Другим примером является интуиционистская логика **Int** и ее фрагмент из формул от одной лишь переменной: проблема доказуемости в **Int** является PSPACE-полной [9], но для формул от одной переменной имеется простой (не более чем квадратичный по временным затратам) алгоритм, основанный на «лестнице» И.Нишимуры [8]. Последний факт плюс упомянутое наблюдение про классическую логику привели одного из авторов в свое время (лет пятнадцать-двадцать назад) к гипотезе, что всякий фрагмент **Int** с фиксированным конечным числом переменных полиномиально разрешим детерминированным алгоритмом, причем степень полинома может зависеть от числа переменных. Аналогичной была гипотеза и про **S4**, да и многие другие модальные логики. Как же далеко все это от истины!

Не так давно мы обнаружили статью [6][2], в которой доказывается для модальных логик **K**, **T**, **S4**, что их фрагменты из формул от одной (!) переменной обладают PSPACE-полной проблемой разрешения. Хотя в реализации идей для **S4** в [6] имеется неточность, сами идеи верны и многообещающи. Именно эти идеи мы развиваем здесь для нескольких пар ⟨логика, число переменных⟩, не рассмотренных в [6], и исправляем упомянутую неточность.

Прежде всего, рассмотрим нормальные модальные логики, содержащиеся в **K4**, наиболее важными из которых являются наибольшая и наименьшая – **K4** и **K**. В [7] для нескольких логик, среди которых **K**, **S4**, описаны разрешающие алгоритмы, работающие с полиномиальными затратами памяти. Небольшая модификация алгоритма для **S4** дает соответствующий алгоритм для **K4** (логика **K4** в [7] не упоминается). Поэтому для наших целей будет достаточно обосновать только PSPACE-трудность проблем разрешения интересующих нас фрагментов. В [7] PSPACE-трудность обосновывается с помощью формул, во множестве которых используется бесконечно много переменных (автор и не ставил цели ограничивать это количество). Мы обратимся к возможности использования константных формул для обоснования PSPACE-трудности проблем разрешения.

Сначала докажем PSPACE-трудность проблемы выполнимости формул для логики **K4**. Напомним (см. [5], [10]), что проблема называется PSPACE-полной, если она

---

[2] «О, сколько нам открытий чудных...» может дать необозримое море литературы, столь недоступное в нашей стране. В данном случае нам помогла интернетовская домашняя страница автора.

- принадлежит классу PSPACE, т.е. может быть решена с затратами памяти, зависящими полиномиально от длины входа;
- является PSPASE-трудной, т.е. любая проблема класса PSPACE сводится к ней с помощью алгоритма, время работы которого зависит полиномиально от длины аргумента.

Будем считать, что модальные формулы строятся в языке, содержащем пропозициональные переменные $p_1, p_2, p_3, \ldots$, константу $\perp$, булевы связки $\wedge$, $\vee$, $\to$ и оператор необходимости $\Box$. При записи модальных формул будем также использовать связку $\neg$ и модальный оператор возможности $\Diamond$, понимая их как обычные сокращения.

Для дальнейших рассуждений будет использоваться семантика Крипке. Основные определения, связанные с этой семантикой, стандартны, см., например, [3], [4].

Известно, что множество всех модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке, образует логику **K**; логика **K4** может быть определена как множество модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке с транзитивными отношениями достижимости.

Итак, обратимся к проблеме доказуемости в модальной логике **K4**, т.е. проблеме выяснения по произвольной модальной формуле φ, верно ли, что $\varphi \in$ **K4**. Ясно, что $\varphi \notin$ **K4** тогда и только тогда, когда формула $\neg\varphi$ истинна в некоторой **K4**-модели Крипке, т.е. $\neg\varphi$ является **K4**-выполнимой, поэтому проблема доказуемости в **K4** может быть заменена проблемой **K4**-выполнимости. Более точно, если мы докажем, что проблема **K4**-выполнимости PSPACE-трудна, то это даст и PSPACE-трудность проблемы доказуемости в **K4**. Здесь важно то, что класс PSPACE замкнут относительно дополнения, см. [5]; скажем, в случае класса NP не доказано и не опровергнуто, что он замкнут относительно дополнения (это равносильно утверждению NP = coNP), и потому, скажем, связь сложностных аспектов доказуемости в классической логике высказываний и выполнимости формул этой логики (т.е. булевых формул) не столь ясна.

Для обоснования PSPACE-трудности проблемы **K4**-выполнимости нам достаточно свести к этой проблеме какую-нибудь PSPACE-полную проблему. В качестве последней мы возьмем проблему выполнимости булевых формул с кванторами (БФК-выполнимость), при этом можно ограничиться формулами вида $\varphi = Q_1p_1 \ldots Q_np_n\, \varphi'$, где $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, а φ' – бескванторная булева формула от переменных $p_1, \ldots, p_n$, см. [5], [10].

Представим требуемое эффективное преобразование формул БФК в модальные формулы, являющееся незначительной модификацией преобразования Р. Ладнера [7].

Нам понадобятся вспомогательные пропозициональные переменные $p_{n+1}, \dots, p_{2n+2}$, которые для удобства их восприятия будем обозначать как $q_0, \dots, q_{n+1}$. С их помощью мы будем последовательно «объяснять», что значит Q_1p_1, Q_2p_2, Q_2p_3 и т.д. в зависимости от того, каков очередной кванторный символ Q_i – $\forall$ или $\exists$. Если $Q_i = \forall$, то мы должны средствами модальных формул сказать, что переменной p_i следует придавать оба варианта значения истинности и при каждом проводить дальнейшие вычисления значения формулы, а если $Q_i = \exists$, то придать одно значение из двух возможных вариантов. Каждое такое «объяснение» будем называть «раскрытием» квантора.

Следующая формула будет означать, что если мы «раскрыли» i кванторов, то «раскрыли» и $(i-1)$ кванторов:

$$A = \bigwedge_{i=1}^{n+1} (q_i \to q_{i-1}).$$

Если при «раскрытии» i-го квантора мы придали некоторое истинностное значение переменной p_i, то оно должно сохраниться при раскрытии последующих кванторов. Это условие описывает формула

$$B = \bigwedge_{i=1}^{n} [q_i \to (p_i \to \Box(q_i \to p_i)) \wedge (\neg p_i \to \Box(q_i \wedge \neg q_{n+1} \to \neg p_i))].$$

При выписывании формулы B можно было бы обойтись и без переменной q_{n+1}, но, тем не менее, ее использование не случайно, и сыграет свою роль в дальнейшем.

В соответствии с определением истинности формул, начинающихся с квантора всеобщности, опишем, как нужно «раскрывать» каждый i-ый квантор всеобщности. Нужно рассмотреть два случая – когда переменная p_i принимает значение «истина» и когда p_i принимает значение «ложь», что описывается конъюнкцией формул

$$C = \bigwedge_{\{i\,:\,Q_{i+1}=\forall\}} [q_i \wedge \neg q_{i+1} \to \Diamond(q_{i+1} \wedge \neg q_{i+2} \wedge p_{i+1})];$$

$$D = \bigwedge_{\{i\,:\,Q_{i+1}=\forall\}} [q_i \wedge \neg q_{i+1} \to \Diamond(q_{i+1} \wedge \neg q_{i+2} \wedge \neg p_{i+1})].$$

Квантор существования «раскрывается» проще: переменная p_i должна принять какое-нибудь значение, а поскольку формула $p_i \vee \neg p_i$ является тождественно истинной, то формула, описывающая «раскрытие» кванторов существования, входящих в φ, выглядит следующим образом:

$$E \;=\; \bigwedge_{\{i\,:\,Q_{i-1}=\exists\}} [q_i \wedge \neg q_{i+1} \to \Diamond(q_{i+1} \wedge \neg q_{i+2})].$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы записать модальную формулу φ^*, которая описывает тот факт, что булева формула с кванторами φ истинна. Положим

$$\varphi^* \;=\; q_0 \wedge \neg q_1 \wedge \Box A \wedge \Box B \wedge \Box C \wedge \Box D \wedge \Box E \wedge \Box(q_n \wedge \neg q_{n+1} \to \varphi').$$

Заметим, что формула φ^* выписывается по φ за время, ограниченное полиномом от длины φ. В самом деле, не считая фиксированных частей φ^* (типа начала $q_0 \wedge \neg q_1$), на выписывание формул A, B, C, D, E ввиду их вполне регулярного вида уйдет времени $c \cdot n$ для некоторой константы c, а кроме того, нужно переписать φ', затратив для этого уж не более $c' \cdot |\varphi'|^2$ тактов времени (посимвольное переписывание), где c' – константа, а $|\varphi'|$ – длина формулы φ'. Кроме того, несложно показать, что

$$\varphi \textit{ истинна } \Leftrightarrow \varphi^* \textit{ является } \mathbf{K4}\textit{-выполнимой.} \qquad (*)$$

Для обоснования ($\Rightarrow$) заметим, что истинность φ показывает нам, как построить нужную **K4**-модель. А именно в качестве **K4**-шкалы берем транзитивное рефлексивное (для определенности) дерево высоты $n + 1$, ветвление которого определяется так: из мира уровня $i - 1$ (уровень считаем от корня, при этом сам корень находится на уровне 0) достижимы ровно два мира уровня i, если $Q_i = \forall$, и достижим ровно один мир уровня i, если $Q_i = \exists$. Оценка переменных такова: q_i истинна в точности в тех мирах, уровень которых больше или равен i; если a и b – два мира уровня i, имеющие ровно одного общего предка уровня $i - 1$, то для одного из них полагаем, что в нем и во всех достижимых из него мирах истинна переменная p_i, а в другом и во всех достижимых из него мирах переменная p_i ложна; если a и b – два мира уровня $i - 1$ и i соответственно, такие, что b – единственный мир уровня i, достижимый из a, то полагаем, что переменная p_i оценивается в a в точности так, как произошел выбор оценки p_i при обосновании истинности φ в ходе «разбора» кванторной приставки на i-ом шаге, т.е. если для набора истинностных значений в мире a переменных $p_1, \dots, p_{i-1}$ была выбрана «истина», то мы полагаем, что p_i истинна в b и во всех мирах, достижимых из b, а если значением p_i была выбрана «ложь», то полагаем, что p_i ложна в b и во всех мирах, достижимых из b; во всех остальных случаях каждой переменной в каждом мире приписывается оценка «ложь». Ясно, что при таким образом определяемой оценке в мирах уровня n и выше сформировались в точности те наборы истинностных значений переменных $p_1, \ldots, p_n$, которые были образованы при обосновании истинности φ, а потому во всех мирах уровня n (т.е. в «самых верхних» мирах) окажется истинной формула φ'. Поскольку во всех других мирах модели ложна переменная q_n, мы установили истинность формулы $\Box(q_n \wedge \neg q_{n+1} \to \varphi')$ в корне. Проверка истинности в корне всех остальных конъюнктивных членов φ^* не составляет труда: по сути, данное выше словесное описание определения оценки есть прочтение этих конъюнктивных членов. Таким образом, φ^* истинна в построенной **K4**-модели.

В обосновании ($\Leftarrow$) будем кратки, учитывая опыт обоснования ($\Rightarrow$). Если φ^* истинна в некотором мире a некоторой **K4**-модели, то конъюнктивные члены φ^* позволяют «шаг за шагом» выделить подмодель, являющуюся деревом, сходным с тем, которое строилось в обосновании ($\Rightarrow$), разве что некоторые миры могут оказаться иррефлексивными, в мирах уровня n которого истинна формула φ', а наборы значений переменных $p_1, \ldots, p_n$ в мирах уровня n составляют достаточно представительную выборку для обоснования истинности φ.

Тем самым доказана

Лемма 1. *Проблема БФК-выполнимости полиномиально сводится к проблеме* **K4***-выполнимости и к проблеме доказуемости в* **K4**.

С учетом наличия алгоритма, разрешающего **K4** с полиномиальными затратами памяти, получаем

Следствие 2. (i) *Проблема доказуемости формул в* **K4** *является* PSPACE-*полной.* (ii) *Проблема* **K4***-выполнимости формул является* PSPACE-*полной.*

Отметим, что только что приведенные факты и их обоснование не новы. Цель состояла в их предоставлении для дальнейшей модификации в наших целях. При этом нам будет важно, что дерево, в котором выполнима формула φ^* (при условии, что булева формула с кванторами φ истинна, разумеется), состоит именно из рефлексивных миров: этот факт окажется полезным при обосновании леммы 3, а также леммы 9.

Положим для всякого $m \in \{1, \ldots, 2n + 2\}$

$$\alpha_m \quad = \quad \Box(\Diamond^m\Box\bot \wedge \neg\Diamond^{m+1}\Box\bot \to \Box(\Diamond\top \to \Diamond\Box\bot)).$$

Заметим, что формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+2}$ выписываются по φ^* с полиномиальными затратами времени, поскольку для некоторой константы c

$$|\,\alpha_m\,| \leqslant c \cdot m \leqslant c \cdot (2n+2) \leqslant c \cdot |\,\varphi^*\,|.$$

Обозначим через $\varphi_\alpha{}^*$ формулу, получающуюся из формулы φ^* подстановкой формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+2}$ вместо переменных $p_1, \ldots, p_{2n+2}$

соответственно. Формула $\varphi_\alpha{}^*$ выписывается с полиномиальными затратами времени от длины φ^*, так как

$$|\varphi_\alpha{}^*| \leqslant max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_{2n+2}|\} \cdot |\varphi^*| \leqslant c \cdot |\varphi^*|^2.$$

Итак, получившаяся формула $\varphi_\alpha{}^*$ является константной и выписывается по формуле φ^* с полиномиальными затратами времени от длины φ^*.

Лемма 3. *Формула* $\varphi_\alpha{}^*$ **K4**-*выполнима тогда и только тогда, когда формула* φ^* **K4**-*выполнима.*

Доказательство. Пусть формула φ^* не является **K4**-выполнимой. Тогда $\neg\varphi^* \in$ **K4**. Но формула $\neg\varphi_\alpha{}^*$ является подстановочным примером формулы $\neg\varphi^*$, поэтому $\neg\varphi_\alpha{}^* \in$ **K4**, а следовательно, формула $\varphi_\alpha{}^*$ не является **K4**-выполнимой.

Пусть теперь φ^* является **K4**-выполнимой. По доказанному ранее (см. обоснование утверждения (*)) это означает, что булева формула с кванторами φ, по которой и была построена φ^*, является тождественно истинной. В этом случае, как было показано выше, формула φ^* выполнима в корне w_0 некоторого рефлексивно-транзитивного дерева $M = \langle W, R, v\rangle$ высоты $n + 1$. Заметим, что оценка v в этом дереве наследственна: для всякой переменной p и для всяких миров w' и w'' таких, что $w_1 R w''$ и $(M, w') \vDash p$, имеет место отношение $(M, w'') \vDash p$.

Мы расширим модель $M = \langle W, R, v\rangle$ до некоторой модели $M' = \langle W', R', v'\rangle$ таким образом, чтобы выполнялось отношение $(M', w_0) \vDash \varphi_\alpha{}^*$.

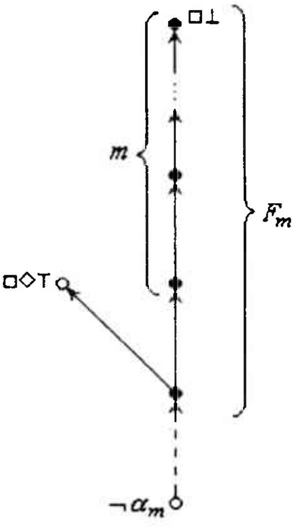


Рис. 1

Прежде обратим внимание на тот факт, что для того, чтобы формула α_m опровергалась в некотором мире (рефлексивно-транзитивной) модели, достаточно, чтобы из этого мира была достижима шкала, изображенная на рис. 1 справа (черными кружка́ми изображены иррефлексивные миры, светлыми – рефлексивные миры; отношению достижимости соответствуют стрелки, при этом те стрелки, которые восстанавливаются по транзитив-зитивности, не изображены). Обозначим эту шкалу через F_m (нижний мир на рисунке не принадлежит шкале F_m).

Несложно понять, что если формула α_m истинна в некотором мире некоторой транзитивной модели, то она истинна и во всех мирах, достижимых из данного (для этого достаточно заметить, что главной связкой формулы α_m является модальность □). С другой стороны, если $k \neq m$, то в шкале F_m формула α_k не опровергается. Используя эти наблюдения, легко построить требуемую модель M'. Построение этой модели будет состоять из $(2n + 3)$ шагов.

На шаге 0 положим $W_0 = W$, $R_0 = R$.

На шаге m, где $1 \leqslant m \leqslant 2n + 2$, рассмотрим множество X_m миров модели M, в которых ложна переменная p_m. Для каждого мира $w \in X_m$ расширим множество W_{m-1} и отношение R_{m-1} таким образом, чтобы из w оказалась достижима копия шкалы F_m. Получившееся множество миров обозначим через W_m, а транзитивное замыкание получившегося отношения достижимости – через R_m.

Положим $W' = W_{2n+2}$, $R' = R_{2n+2}$, а оценку v – произвольной. Для всякой формулы ψ, все переменные которой находятся среди $p_1, \dots, p_{2n+2}$, обозначим через ψ_α формулу, получающуюся из ψ подстановкой формул $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+2}$ вместо $p_1, \dots, p_{2n+2}$ соответственно. Тогда для всякой подформулы ψ булевой формулы (без кванторов) φ' и всякого мира $w \in W$ уровня n справедлива следующая эквивалентность:

$$(M', w) \models \psi_\alpha \iff (M, w) \models \psi.$$

Это утверждение обосновывается индукцией по построению формулы ψ.

Самый трудный случай состоит в обосновании базиса индукции. Пусть $\psi = p_m$. Тогда $\psi_\alpha = \alpha_m$, и нужно показать, что для всякого мира $w \in W$ уровня n

$$(M', w) \models \alpha_m \iff (M, w) \models p_m.$$

Пусть w – мир уровня n такой, что $(M, w) \not\models p_m$. Тогда на шаге m построения модели M' мы расширили модель M, положив достижимой из w копию шкалы F_m. Но в этом случае $(M', w) \not\models \alpha_m$.

Пусть теперь $(M', w) \not\models \alpha_m$, где w – мир уровня n модели M. Несложно понять, что в этом случае из мира w достижима копия шкалы F_m. По определению модели M' это возможно только в том случае, когда $(M, w) \not\models p_m$.

Обоснование индукционного шага (когда ψ является конъюнкцией, дизъюнкцией или импликаций формул) не должно вызывать затруднений, и мы оставляем его читателю.

В результате получаем, что если w – мир уровня n модели M, то $(M', w) \models \varphi_\alpha'$. Теперь заметим, что формула $\alpha_{2n+1} \wedge \neg\alpha_{2n+2}$ истинна в точности в таких мирах модели M', которые были мирами уровня n в модели M. Действительно, $p_{2n+1} = q_n$, $p_{2n+2} = q_{n+1}$, а мирами модели M, в которых истинна формула $q_n \wedge \neg q_{n+1}$, являются ровно миры уровня n. Следовательно, это в точности те миры модели M', из которых достижима копия шкалы F_{2n+2}, но не достижима копия шкалы F_{2n+1}, поэтому во всех других мирах модели M' формула $\alpha_{2n+1} \wedge \neg\alpha_{2n+2}$ истинной не является. Тем самым мы обосновали, что $(M', w_0) \models \Box(\alpha_{2n+1} \wedge \neg\alpha_{2n+2} \to \varphi_\alpha')$.

Осталось заметить, что

$$(M', w_0) \models \alpha_{n+1} \wedge \neg\alpha_{n+2} \wedge \Box A_\alpha \wedge \Box B_\alpha \wedge \Box C_\alpha \wedge \Box D_\alpha \wedge \Box E_\alpha$$

(проверку этого факта мы оставляем читателю), и заключить, что $(M', w_0) \models \varphi_\alpha{}^*$.

Из леммы 3 и PSPACE-полноты проблемы выполнимости формул для логики **K4** вытекает

Теорема 4. (*i*) *Проблема выполнимости константных формул в* **K4** *является* PSPACE-*полной.* (*ii*) *Проблема доказуемости константных формул в* **K4** *является* PSPACE-*полной.*

Теперь покажем, как изменить формулу φ^* и формулы $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+2}$, чтобы можно было доказать аналог теоремы 4 для некоторых других логик.

Пусть модальная логика L такова, что $\mathbf{K} \subseteq L \subseteq \mathbf{K4}$. В этом случае отношения достижимости в моделях логики L, вообще говоря, не являются транзитивными, поэтому формула φ^* будет иметь не тот смысл, который она имела в случае логики **K4**; в частности, аналог утверждения (∗) для логики L верным не будет. Мы заменим в формуле φ^* модальность $\Box$ на такую, которой соответствует транзитивное замыкание отношения достижимости, соответствующего модальности $\Box$; этот прием был использован Ладнером в [7].

Выше мы, по сути, показали, что если формула φ^* выполнима в некоторой транзитивной модели, то она выполнима и в модели высоты не более чем $n + 1$ (см. обоснование утверждения (∗)). Пусть для всякой формулы ψ

$$\Box^1\psi = \Box\psi; \qquad \Box^{\leqslant 1}\psi = \Box\psi;$$

$$\Box^{k+1}\psi = \Box^k\psi \wedge \Box\psi; \qquad \Box^{\leqslant k+1}\psi = \Box^{\leqslant k}\psi \wedge \Box^{k+1}\psi.$$

Если высота шкалы $F = \langle W, R\rangle$ не превосходит $k + 1$, то отношение достижимости, соответствующее модальности $\Box^{\leqslant k}$, является транзитивным замыканием отношения R. Таким образом, достаточно заменить в формуле φ^* каждое вхождение модальности $\Box$ на вхождение модальности $\Box^{\leqslant n}$, и получившаяся формула будет L-выполнимой в том случае, когда формула φ^* **K4**-выполнима.

Для всякой формулы ψ через $tr_k(\psi)$ обозначим формулу, получающуюся из ψ заменой в ней каждого вхождения подформулы вида $\Box\delta$ на подформулу $\Box^{\leqslant k}\delta$. Тогда ясно, что

$$\varphi \text{ *выполнима* } \Leftrightarrow \varphi^* \ \mathbf{K4}\text{-*выполнима*} \Leftrightarrow tr_n(\varphi^*) \ L\text{-*выполнима.*}$$

В частности, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Проблема истинности булевых формул с кванторами полиномиально сводится к проблеме L-выполнимости и к проблеме доказуемости в L.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для некоторой константы c имеет место отношение $|tr_n(\varphi^*)| \leqslant c \cdot |\varphi^*|^2$, т.е. длина формулы $tr_n(\varphi^*)$ зависит полиномиально (квадратично) от длины формулы φ^*.

Из леммы 5 следует

Теорема 6. (*i*) *Проблема выполнимости формул в L является* PSPACE*-трудной.* (*ii*) *Проблема доказуемости формул в L является* PSPACE*-трудной.*

Теперь обратимся к константным формулам. Как и в случае **K4**, положим для всякого $m \in \{1, \ldots, 2n+2\}$

$$\alpha_m \quad = \quad \Box(\Diamond^m\Box\bot \wedge \neg\Diamond^{m+1}\Box\bot \to \Box(\Diamond\top \to \Diamond\Box\bot)).$$

Обозначим через $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ формулу, получающуюся из формулы $tr_n(\varphi^*)$ подстановкой вместо каждой переменной p_i формулы α_i. Заметим, что формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+2}$ вычислимы по $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ за время, ограниченное полиномом от длины $tr_n(\varphi^*)_\alpha$. Кроме того, длина формулы $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ ограничена сверху полиномом от длины формулы φ^*: действительно, выше мы показали, что для некоторой константы c

$$|\alpha_m| \leqslant c \cdot |\varphi^*|,$$

с другой стороны, для некоторого d

$$|tr_n(\varphi^*)| \leqslant d \cdot |\varphi^*|^2,$$

откуда получаем, что

$$|tr_n(\varphi^*)_\alpha| \leqslant max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_{2n+2}|\} \cdot |tr_n(\varphi^*)| \leqslant c \cdot d \cdot |\varphi^*|^3.$$

Лемма 7. *Формула φ^** **K4***-выполнима тогда и только тогда, когда формула $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ L-выполнима.*

Доказательство. Как было отмечено выше,

$$\varphi^* \ \mathbf{K4}\text{-выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad tr_n(\varphi^*) \ L\text{-выполнима}.$$

Пусть φ^* не является **K4**-выполнимой. Тогда $tr_n(\varphi^*)$ не является L-выполнимой. В этом случае $\neg tr_n(\varphi^*) \in L$, а следовательно, $\neg tr_n(\varphi^*)_\alpha \in L$. Но тогда $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ не является L-выполнимой.

Пусть теперь φ^* **K4**-выполнима. Тогда, как было показано выше, $\varphi_\alpha{}^*$ тоже **K4**-выполнима. Ясно, что в этом случае формула $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ будет **K4**-выполнимой. Осталось заметить, что, поскольку $L \subseteq \mathbf{K4}$, то всякая **K4**-выполнимая формула является L-выполнимой, следовательно, $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ L-выполнима.

Из леммы 7 и PSPACE-трудности проблемы выполнимости формул для логики L вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. *Пусть логика* L *такова, что* $\mathbf{K} \subseteq L \subseteq \mathbf{K4}$. *Тогда*

(i) *проблема выполнимости константных формул для логики* L *является* PSPACE-*трудной;*

(ii) *проблема доказуемости константных формул для логики* L *является* PSPACE-*трудной,*

и следовательно, проблемы выполнимости и доказуемости константных формул в **K4** *являются* PSPACE-*полными.*

Обратимся к логике **S4**, которая семантически определяется классом всех рефлексивно-транзитивных шкал Крипке. Заметим, что при обосновании эквивалентности (∗) мы на самом деле заодно обосновали следующую эквивалентность:

$$\varphi \textit{ истинна} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^* \textit{ является } \mathbf{S4}\textit{-выполнимой},$$

и значит, справедлива

Лемма 9. *Проблема истинности булевых формул с кванторами полиномиально сводится к проблеме* **S4**-*выполнимости и к проблеме доказуемости в* **S4**.

Аналогично следствию 2 получаем

Следствие 10 [7]. (i) *Проблема доказуемости формул в* **S4** *является* PSPACE-*полной.* (ii) *Проблема* **S4**-*выполнимости формул является* PSPACE-*полной.*

Как было замечено в начале данной статьи, проблема **S4**-выполнимости константных формул решается сравнительно просто – с полиномиальными затратами времени от длины исходной формулы, – а поэтому вряд ли является PSPACE-трудной. Ниже мы приведем доказательство PSPACE-трудности проблемы выполнимости для однопеременного фрагмента **S4** (т.е. фрагмента, состоящего из формул от одной пропозициональной переменной, доказуемых в **S4**).

Пусть для всякого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} \delta_1 & = & \Diamond\Box p; \\ \delta_{m+1} & = & \Diamond(p \wedge \Diamond(\neg p \wedge \delta_m)). \end{array}$$

Положим для всякого $m \in \{1, \ldots, 2n+2\}$

$$\alpha_m \quad = \quad \Box(p \to \Box(\neg p \wedge \delta_m \wedge \neg\delta_{m+1} \to \Box\Diamond p)).$$

Как и раньше, через $\varphi_\alpha{}^*$ обозначим формулу, получающуюся из формулы φ^* подстановкой вместо каждой переменной p_i формулы α_i. Нетрудно видеть, что для некоторой константы c

$$|\,\alpha_m\,| \leqslant c \cdot |\,\varphi^*\,|,$$

откуда следует, что

$$|\varphi_\alpha^*| \leqslant max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_{2m+2}|\} \cdot |\varphi^*| \leqslant c \cdot |\varphi^*|^2,$$

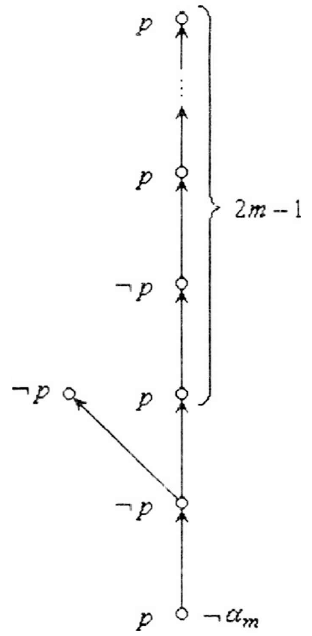


Рис. 2

т.е. длина формулы φ_α^* ограничена сверху полиномом от длины формулы φ^*.

Таким образом, формула φ_α^* вычислима по φ^* с полиномиальными затратами времени.

Чтобы формула α_m опровергалась в некотором мире **S4**-модели, достаточно, чтобы из этого мира была достижима модель, изображенная на рис. 2 справа. Светлыми кружками изображены рефлексивные миры; отношению достижимости соответствуют стрелки, при этом те стрелки, которые восстанавливаются по транзитивности, не изображены; в обведенных скобкой $(2m - 1)$ мирах оценка определена следующим образом: в нижнем мире p истинна, а при переходе к каждому следующему миру меняет свое значение с истины на ложь, и наоборот (в результате в верхнем мире переменная p принимает значение «истина»).

Ясно, что если формула α_m опровергается в некотором мире некоторой рефлексивно-транзитивной модели, то она опровергается и во всех мирах, из которых достижим данный. Кроме того, если $k \neq m$, то в изображенной на рисунке модели формула α_k не опровергается. Используя эти наблюдения и идею доказательства леммы 3, несложно доказать, что справедлива

Лемма 11. *Имеет место следующая эквивалентность:*

φ^* **S4**-*выполнима* $\Leftrightarrow$ φ_α^* **S4**-*выполнима.*

Из леммы 11 вытекает

Теорема 12 [6]. (*i*) *Проблема выполнимости однопеременных формул в* **S4** *является* PSPACE-*трудной.* (*ii*) *Проблема доказуемости однопеременных формул в* **S4** *является* PSPACE-*трудной.*

Заметим, что предъявленное доказательство PSPACE-трудности для однопеременного фрагмента логики **S4** абсолютно без каких-либо изменений проходит и для логики Гжегорчика **Grz** = **S4** $\oplus \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$, которая семантически характеризуется конечными шкалами, в которых отношение достижимости является частичным порядком. Кроме того, алгоритм [7] для разрешения **S4** на полиномиальной зоне легко модифицируется в соответствующий алгоритм для **Grz** – достаточно исключить детали, относящиеся к рассмотрению нетривиальных сгустков (т.е. «заставить» алгоритм перебирать не все квазиупорядоченные конечные шкалы, а только частично упорядоченные). Тем самым справедливо следующее утверждение.

Теорема 13. (*i*) *Проблема выполнимости для однопеременного фрагмента* **Grz** *является* PSPACE-*полной.* (*ii*) *Проблема доказуемости для однопеременного фрагмента* **Grz** *является* PSPACE-*полной.*

Обратимся к логике, во многом близкой к **Grz** – логике Гёделя–Лёба $\mathbf{GL} = \mathbf{K4} \oplus \Box(\Box p \to p) \to \Box p$, характеризуемой конечными шкалами с отношением достижимости, являющимся строгим частичным порядком. Сходство семантик **Grz** и **GL** подсказывает замеченный многими в конце 70-х естественный перевод, погружающий **Grz** в **GL**: достаточно в формуле каждую подформулу вида $\Box\beta$ заменить на $\Box^+\beta = \beta \wedge \Box\beta$. Однако этот перевод не может нас удовлетворить в связи с рассматриваемыми задачами, поскольку при его применении длина формулы растет экспоненциально; скажем, если длины формул $\Box^m p$ растут линейно по m, то длины формул $(\Box^+)^m p$ – уже экспоненциально; см. для наглядности, например, перевод формулы $\Box^3 p = \Box\Box\Box p$:

$$\begin{aligned}(\Box^+)^3 p &= \Box^+\Box^+\Box^+ p = \Box^+\Box^+ p \wedge \Box\Box^+\Box^+ p = \\ &= \Box^+ p \wedge \Box\Box^+ p \wedge \Box(\Box^+ p \wedge \Box\Box^+ p) = \\ &= p \wedge \Box p \wedge \Box(p \wedge \Box p) \wedge \Box(p \wedge \Box p \wedge \Box(p \wedge \Box p)).\end{aligned}$$

Поэтому при рассмотрении сложностных вопросов для **GL**, в наибольшей степени – нижних границ сложности, которые все же аналогичны по решению вопросам о **Grz**, приходится «погружать» не сами конструкции для **Grz** во всех деталях, а идеи этих конструкций[3]. Несложно заметить, что формулы от одной переменной, использованные нами для кодирования переменных при доказательстве части предыдущих двух теорем, относящейся к PSPACE-трудности рассматриваемой проблемы, легко модифицируются так, чтобы они работали для тех же целей и в рамках **GL**: нужно лишь в нескольких местах этих формул, не «опасных» с точки

[3] Справедливости ради стоит сказать, что указанный перевод, хотя и удлиняет существенно формулы, может быть использован и практически напрямую, поскольку удвоение длины формулы при расшифровке $\Box^+$ происходит весьма регулярно: по сути, формула, находящаяся под $\Box^+$, переписывается еще раз, а это при детализации алгоритма легко учесть так, чтобы реального переписывания не происходило. Именно это имеется в виду, например, в конце доказательства леммы 18.26 [4] о принадлежности классу PSPACE проблем доказуемости в **GL**, **Grz**, **Int**, в котором утверждение обосновано лишь для **GL**, а для двух других дается ссылка на погружающие переводы.

зрения увеличения длины формулы, заменить $\Box$ на $\Box^+$. Именно, достаточно положить для всякого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \Diamond\Box^+ p; \\ \delta_{m+1} &= \Diamond(p \wedge \Diamond(\neg p \wedge \delta_m)) \end{aligned}$$

и для всякого $m \in \{1, \dots, 2n+2\}$

$$\alpha_m = \Box(p \to \Box(\neg p \wedge \delta_m \wedge \neg\delta_{m+1} \to \Box\Diamond^+ p)),$$

где $\Diamond^+\beta = \beta \vee \Diamond\beta$. Заметим, что при таком использовании модальности $\Box^+$ не происходит экспоненциального роста длины формулы φ_α*, так как нет неограниченного числа итераций модальности $\Box^+$; более того, в данном случае вообще нет итераций $\Box^+$, и длина формулы φ_α* возрастает по сравнению с длиной φ* не более чем линейно.

Далее, алгоритм, разрешающий **GL**, а тем самым и ее однопеременный фрагмент на полиномиальной зоне имеется, см. [4]. В результате доказано следующее утверждение.

Теорема 14. (*i*) *Проблема выполнимости для однопеременного фрагмента* **GL** *является* PSPACE-*полной.* (*ii*) *Проблема доказуемости для однопеременного фрагмента* **GL** *является* PSPACE-*полной.*

На этом этапе нельзя считать рассматриваемую задачу полностью решенной для **GL**, поскольку эта логика имеет существенно более богатый фрагмент из константных формул, нежели логики **S4** и **Grz**: существует бесконечно много попарно не эквивалентных в **GL** константных формул, например, таковы все формулы последовательности $\Box^m\bot$. Однако этот фрагмент остается достаточно простым; опишем алгоритм его разрешения. Основан он на двух простых давно известных наблюдениях: во-первых, константный фрагмент **GL** полон относительно линейных конечных **GL**-шкал, т.е. шкал вида $\langle\{0, \dots, n\}, R\rangle$, где kRm означает $k > m$, во-вторых, если формула φ опровергается на некоторой шкале логики **GL**, то она опровергается и на ее подшкале высоты не более длины φ.

Итак, что же мы будем делать для выяснения принадлежности логике **GL** константной формулы φ? Для удобства восприятия оформим наш алгоритм в виде заполнения таблицы следующего вида:

	φ_1	φ_2	φ_3	…	φ_{n-1}	φ_n
0	f	t		…		
1	f	f		…		
2	f	f		…		
…	…	…		…		

$k-2$	f	f		…		
$k-1$	f	f		…		

Здесь $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – все подформулы формулы φ, выписанные так, что для всякой подформулы ее подформулы имеют меньшие номера (тем самым $\varphi_n = \varphi$, а $\varphi_1 = \bot$), k – длина φ, т.е., по сути, число вхождений в φ ее подформул (тем самым $n \leqslant k$), а $\{0, \ldots, k-1\}$ – множество миров шкалы указанного выше вида. Заполняется таблица по столбцам сверху вниз: на строке i и столбце φ_j ставим t, если формула φ_j истинна в мире i, и ставим f, если ложна. Мы позволили себе заполнить второй столбец в предположении, что $\varphi_2 = \Box\bot$. Нетрудно подсчитать, сколько времени займет процедура составления и заполнения таблицы. Оставим эти подсчеты читателю, отметив, что это время полиномиально (полином не более четвертой степени) зависит от длины φ.

Когда таблица заполнена, нам достаточно просмотреть последний столбец: если в нем окажется хотя бы в одном месте f, имеем $\varphi \notin$ **GL**, в противном случае – $\varphi \in$ **GL**. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 15. *Константный фрагмента* **GL** *разрешим с помощью алгоритма, время работы которого полиномиально зависит от длины проверяемой формулы.*

На этом материал статьи, который мы собирались представить читателю в соответствии с ее названием, исчерпан. Однако трудно удержаться и не сделать несколько замечаний и о некоторых дальнейших результатах, непосредственно с константными формулами не связанных (впрочем, как заметил читатель, теоремы 12, 13 и 14 уже с константными формулами не связаны).

Алгоритм, представленный нами для доказательства теоремы 15, настолько прост, что напрашивается на модификации для иных ситуаций, т.е. желательно его видоизменить так, чтобы он (точнее, идеи, в нем заложенные) действовал и для других логик, с иными ограничениями на число переменных. Однако возможностей для этого не очень много. Скажем, первым шагом могло бы быть рассмотрение ближайшего к рассмотрению теоремы 15 примера, каковым является **GLLin** – логика всех конечных линейных **GL**-шкал: в нормальных расширениях **GL** логика **GLLin** является наибольшей среди имеющих тот же фрагмент из константных формул, что и **GL**, и тем самым самой простой по устройству из этих логик. Однако попытка распространить наш алгоритм даже на однопеременный фрагмент **GLLin** вряд ли может увенчаться успехом.

Теорема 16. *Проблема непринадлежности однопеременному фрагменту* **GLLin** *является* NP-*полной.*

В самом деле, проблема непринадлежности логике **GLLin** даже без ограничения на число используемых переменных принадлежит классу NP (см., например, [4], [11]), поэтому нам достаточно свести к проблеме непринадлежности однопеременному фрагменту логики **GLLin** какую-нибудь NP-полную проблему. Здесь подходящей оказывается классическая проблема выполнимости булевых формул (т.е. истинности булевых формул с кванторами вида $\exists p_1 \ldots \exists p_n\ \varphi$, где φ – бескванторная формула).

Опишем соответствующую сводящую процедуру. Пусть φ – некоторая булева формула от n переменных. Без ограничений общности можем считать, что φ является формулой от переменных $p_1, \ldots, p_n$. Заменяем в φ каждую переменную на модальную формулу от одной переменной: переменная p_i заменяется на $\Diamond\Box^{i+1}(\bot \wedge \Diamond^i\top \wedge p)$, а затем перед получившейся формулой ставим отрицание, так получаем формулу φ'. Легко убедиться, что время построения (эффективного, разумеется) φ' по φ полиномиально (не более чем квадратично) от длины исходной формулы, причем справедлива эквивалентность:

$$\varphi \textit{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi' \notin \mathbf{GLLin}.$$

Тем не менее, алгоритм из доказательства теоремы 15 удается модифицировать для некоторых аналогов **GLLin** в расширениях **S4** – логик **S4.3** и **Grz.3**, первая из них семантически определяется конечными квазицепями (т.е. цепями сгустков), вторая – конечными линейными частично упорядоченными множествами, т.е. шкалами вида $\langle\{0, \ldots, n\}, R\rangle$, где kRm означает $k \geqslant m$.

Теорема 17. *Однопеременные фрагменты логик* **S4.3** *и* **Grz.3** *разрешимы с помощью алгоритмов, время работы которых полиномиально зависит от длины проверяемой формулы.*

Аналогом теоремы 16 в случае логик **S4.3** и **Grz.3** является

Теорема 18. *Проблемы непринадлежности логикам* **S4.3** *и* **Grz.3** *для формул от двух переменных являются* NP-*полными.*

Наконец, обратимся к случаю интуиционистской логики. Аналогично теоремам 13 и 14 доказывается

Теорема 19. *Проблема доказуемости в* **Int** *для формул от двух переменных является* PSPACE-*полной.*

Завершим наше обсуждение предположением.

В последние два десятка лет постоянно растет интерес к так называемой базисной логике (*basic logic*), которую на пропозициональном уровне можно считать суперинтуиционистским фрагментом **K4**. Ввиду последнего верхние границы сложности разрешающих алгоритмов переносятся со случая **K4** на случай базисной логики (в частности, константный фрагмент базисной логики разрешим полиномиально по времени), хотя нижние могут в принципе оказаться не столь высокими. То, что базисная логика имеет много общего и с **K4**, и с **Int**, может навести на мысль, что правдоподобной является следующая

Гипотеза. (*i*) *Проблема непринадлежности однопеременному фрагменту базисной логики является* NP-*полной.* (*ii*) *Проблема доказуемости в базисной логике для формул от двух переменных является* PSPACE-*полной.*

Более того, вполне возможно, что для подтверждения гипотезы (*ii*) удастся подходящим образом модифицировать доказательство теоремы 19, в котором участвуют чисто импликативные формулы, построенные в [2] для одновременного доказательства PSPACE-трудности проблем принадлежности **Int** и базисной логике. Было бы, кстати, интересно рассмотреть и вопрос о сложности чисто импликативного фрагмента базисной логики с ограничением на число переменных: такие фрагменты **Int**, как хорошо известно, табличны (каждый такой фрагмент имеет лишь конечное число попарно неэквивалентных формул; хотя это число экспоненциально зависит от числа переменных, оно фиксировано), а потому полиномиально по времени разрешимы, в то время как импликативные формулы от одной переменной (и даже константно-импликативные формулы, не содержащие переменных вовсе) для базисной логики не столь тривиальны: формулы последовательности $\bot$, $(\bot \to \bot) \to \bot$, $(\bot \to \bot) \to ((\bot \to \bot) \to \bot)$, $\ldots$ попарно неэквивалентны в базисной логике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чагров А.В.* Логика, не являющаяся ни конечно-значной, ни бесконечно-значной // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XIV. М., 2000. С. 59–67.
2. *Чагров А.В.* О сложности пропозициональных логик // Сложностные проблемы математической логики. Калинин: КГУ, 1985. С. 80–90.
3. Семантика модальных и интенсиональных логик. Сб. статей. Пер. с англ., сост., общ. ред. и вступит. статья В.А.Смирнова. М.:Прогресс, 1981.
4. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997. 605 p.
5. *Garey M.R. and Johnson D.S.* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness. San Francisco. 1979. (Русский перевод:

Гэри М. и Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., Мир. 1982.)

6. *Halpern J.Y.* The Effect of Bounding the Number of Primitive Propositions and the Depth of Nesting on the Complexity of Modal Logic // Artificial Intelligence. 1995. Vol. 75. No. 2. P. 361–372.
7. *Ladner R.E.* The computational complexity of provability in systems of modal logic // SIAM Journal on Computing. 1977. Vol. 6. P. 467–480.
8. *Nishimura I.* On formulas of the one variable in intuitionistic propositional calculus // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 25 (1960). No. 1. P. 327–331.
9. *Statman R.* Intuitionistic propositional logic is polynomial-space complete // Theoret. Comput. Sci. Vol. 9 (1979). No. 1. P. 67–72.
10. *Stockmeyer L.* Classifying the Computational complexity of Problems // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 52 (1987), No. 1. P. 1–43. (Русский перевод: *Л. Стокмейер.* Классификация вычислительной сложности проблем // Кибернетический сборник. Вып. 26. М.: Мир, 1989. С. 20–83.)
11. *Zakharyaschev M., Wolter F., and Chagrov A.* Advanced Modal Logic // D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.). Handbook of Philosophical Logic. 2nd ed. Vol. 3. Kluver Academic Publishers, 2001. P. 83–266.

Е.А.Сидоренко

РЕЛЯЦИОННАЯ СЕМАНТИКА И МОДЕЛИ ЗНАНИЯ*

Abstract. *An attempt is done to represent possible worlds as individual models of knowledge inherited to some abstract knowledge subjects. The logic of those is not fixed and is chosen by knowledge subjects themselves. This becomes possible because of constructing two-leveled related semantics in frameworks of which any formula of object language is not valid in all words. In order to accept some thesis as the law of logic we need to postulate it.*

> Человеческое познание неизмеримо во все стороны, и из того, что достойно знания, никто в одиночку не может знать даже и тысячной доли.
>
> *Артур Шопенгауэр*

В статье излагаются концептуальная и техническая идеи использования двухуровневой реляционной семантики возможных миров [6–11] для моделирования знания отдельных субъектов познания, именуемых в работе, дабы избежать ненужных философских ассоциаций, *познавателями*.

1. Предварительные замечания

Естественно считать, что применение логики при решении прикладных задач может быть тем более успешным, чем богаче ее логический аппарат, чем сильнее и выразительнее применяемая логическая теория [5]. При этом обычно не обращают внимания на два важных обстоятельства.

Во-первых, на то, что логика, избранная исследователем, ее применяющим, изначально берется как общепринятая, интерсубъективная. Во-вторых, что эта логика, хотим мы того или нет, необходимо становится органической частью прикладной теории, предлагаемой для решения задачи.

Вместе с тем в логическом обиходе используется множество разных базисных логических теорий фактически для одного и того же объектного языка. Конечно, в таком положении обычно нет ничего страшного и противоестественного. Если избранная логика адекватна поставленной задаче, фиксирована и аккуратно задана,

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18037.

то она выглядит лишь как некоторое аппаратное, служебное средство для описания соответствующей предметной области. Высказывания, которые носят чисто логический характер, да и вся логическая теория вообще как бы выносятся за скобки.

Указанные обстоятельства, однако, могут стать серьезной помехой тогда, когда в качестве прикладной области логики выбираются эпистемологические, когнитивные проблемы. Меня здесь будет интересовать, в частности, проблема модельного описания знаний, присущих различным субъектам познания. Вряд ли можно было бы серьезно полагать, что всем познающим мир свойственна одна и та же логика. И если присущую субъекту познания логику рассматривать как органическую часть его знания, которая также должна быть отражена в модели, то навязывать ему априори ту или иную логику заведомо неправомерно.

Это понятно хотя бы уже потому, что попытка описать знание, присущее некоторому человеку, отображая то, что ему представляется истинным, неизбежно будет зависеть от ряда факторов. В частности от того, замкнута ли совокупность утверждений, принимаемых им в качестве истинных, относительно вытекающих из нее логических следствий. И если замкнута, то надо иметь в виду именно его собственную логику и то, в какой степени способен он разрешать вопрос, что может с точки зрения этой логики считаться следствием из уже принятых им утверждений.

Таким образом, выявляется первая проблема. Можно ли в принципе так исхитриться, чтобы применять к моделированию знания логический аппарат, не имея никакой априорной логики и не нагружая какой-либо логикой вообще объект исследования, знание которого моделируется.

Предполагается, что существует некоторый *онтологический мир* (с его уникальной историей и с не реализовавшимся пока его будущим), в котором осуществляет свою познавательную деятельность *познаватель*. Онтологический мир трактуется очень широко, как все то, о чем можно построить некоторое высказывание, о котором не бессмысленно утверждать, что оно является истинным или ложным. Так что лучше, может быть, говорить не о мире, а о предметной области, относительно которой делаются некоторые высказывания.

В качестве *познавателя* может выступать кто и что угодно. Это может быть отдельный индивид, коллектив исследователей, научное сообщество, человечество и даже некоторое техническое устройство. Единственное требование, которое мы предъявляем к познавателю, состоит в том, что он умеет строить (или от его имени могут строиться) высказывания об онтологическом мире и он может оценивать эти высказывания хотя бы в некоторых случаях как *истинные* или *ложные*.

Будем считать, что познаватель считает *истинными* те утверждения, которые он по каким-то причинам относит к числу правильно описывающих свойства и отношения, присущие рассматриваемой им предметной области, и соответственно считает *ложными* те утверждения, отрицания которых он считает истинными. Основания, по которым познаватель считает одни утверждения верными, а другие – нет, значения не имеют. Не исключено, что какие-то из утверждений познаватель не может оценить ни как истинные, ни как ложные, а какие-то и вовсе не понимает или не воспринимает как осмысленные утверждения.

В стороне от рассмотрения остается вопрос, каким образом и в какой степени может быть доступна информация о знании, которым обладает тот или иной познаватель.

Мы не навязываем познавателям никаких теорий истинности, как и никаких иных философских теорий познания[1]. Его ответы на метафизические вопросы, если он таковые дает, также составляют часть его знания. Возможно, что они вообще не представляют для него никакого интереса и не становятся предметом его оценок. Я не считаю здесь принципиальным тот факт, что познаватель может и сам творить предметную область, и в этом смысле соучаствовать в творении онтологического мира, создавая новые и материальные, и духовные (мысленные) объекты, могущие войти в универсум его знаний и рассуждений.

Как писал когда-то Ф. Сологуб:

> И что мне помешает
> Воздвигнуть все миры,
> Которых пожелает
> Закон моей игры?

Именуя субъекта познания *познавателем*, мы не заботимся о том, считает ли себя познавателем сам этот субъект познания. Достаточно, чтобы он высказывал какие-то утверждения о мире, в котором живет, принимал или отвергал их. И если он это делает, то является для нас *познавателем*. Предполагается, что мы говорим с познавателем на одном языке в том, по крайней мере, смысле, что имеем возможность передавать его утверждения о мире адекватным образом.

---

[1] В мою задачу не входит какая-либо характеристика такого рода проблем. Более того, я здесь намеренным образом этого избегаю. Читатель может познакомиться как с самими этими проблемами, так и различными подходами к их решению в монографии: *Лекторского В.А* (см. [4]).

Познавателей может быть сколь угодно много. Но все они живут объективно в одном и том же, хотя и изменяющемся, онтологическом мире и познают, невзирая на такие изменения, один и тот же онтологический мир. Возможно, в разное время и в разных местах, с разной возможностью его восприятия. Единство онтологического мира позволяет одним познавателям оценивать утверждения других познавателей, хотя бы и живших в разные исторические эпохи, относя при этом сами эти оцениваемые утверждения к реалиям онтологического мира.

К характеристике познавателей мы еще вернемся. Пока же заметим, что моделироваться будет не то, каким образом *познаватели* осуществляют познание онтологического мира, но только то, что они, в конечном счете, об этом мире знают.

Под моделированием знания некоторого познавателя в определенный фиксированный момент времени понимается некоторый способ описания утверждений, которые познаватель считает истинными. Естественно, что моделирующий отображает ту информацию о знании, которую считает представляющей интерес с какой-то точки зрения.

Естественно, что самое большее, что в этом направлении можно сделать – это указать идею и способ такого описания. Я в данном случае буду использовать для указанных целей специальным образом модернизированную реляционную семантику возможных миров. Я полагаю при этом, что читатель знаком с семантикой возможных миров крипкевского типа[2].

2. Реляционная семантика логических языков, не детерминирующая логики

Для того, кто привык, что семантика строится для определенной логической системы или для описания класса логически общезначимых формул, сам заголовок данного параграфа может показаться странным. Однако прецедент такого рода семантики давно имеется.

Примером может служить реляционная семантика пропозиционального языка КДО, связками которого являются классические конъюнкция, дизъюнкция и отрицание. На возможные миры в этой семантике не распространяются требования полноты и непротиворечивости[3]. Иными словами, возможные миры, образующие множество W, представляют собой любые списки литералов (про-

---

[2] Достаточное представление о такой семантике дано в [6].

[3] Е.К.Войшвилло называет такого рода семантики семантиками обобщенных описаний состояний.

позициональных переменных и (или) их отрицаний). Некоторая переменная может не входить в такие списки ни с отрицанием, ни без него, делая мир неполным. А может входить одновременно и с отрицанием и без него, делая мир противоречивым.

Условия верификации и фальсификации пропозициональных формул со связками КДО в обсуждаемой семантике (в дальнейшем обозначаемой как $\mathbf{Sem}^1$) задаются стандартным образом. Возможно также использование материальной импликации при том, что условия верификации и фальсификации $A \supset B$ те же, что и у формулы $\neg A \vee B$.

Семантика $\mathbf{Sem}^1$ не детерминирует никакой *логики* в том смысле, что ни одна пропозициональная формула с классическими пропозициональными связками не является общезначимой (не верифицируется во всех возможных мирах). Естественно, что нет также формул, которые фальсифицируются во всех возможных мирах.

Хотя семантика $\mathbf{Sem}^1$ оперирует явным образом лишь двумя истинностными значениями, она фактически является четырехзначной. Так, любая формула может быть в некотором возможном мире $w_i \in W$: (1) только истинной; (2) только ложной; (3) одновременно и истинной, и ложной; (4) неопределенной, т.е. ни истинной, ни ложной.

В семантике $\mathbf{Sem}^1$ можно различным образом задать условия истинности утверждений о семантическом следовании вида $A \models B$. Этого можно добиться, варьируя множества миров, в рамках которых осуществляется верификация A и B, а также за счет использования различных сочетаний из четырех указанных значений, которые могут быть приписаны A и B. На этом пути могут быть получены классы истинных утверждений $A \models B$, соответствующие теоремам таких первопорядковых систем следования, как релевантная система E_{fde} Андерсона и Белнапа, система Хао Вана и система, двойственная ей, а также система теорем соответствующего вида со строгой импликацией К. Льюиса. И, таким образом, может быть задана адекватная семантика названных систем. Исключив из рассмотрения противоречивые и неполные миры, можно задать также класс утверждений вида $\models B$, совпадающий с классом теорем классической пропозициональной логики.

Возникает вопрос, а можно ли построить свободную от общезначимых формул семантику для расширенного объектного языка, который наряду с классическими пропозициональными связками будет содержать релевантную неэкстенсиональную связку следования «$\to$» и при этом не будет запретов на ее итерацию? Поясним, в чем трудность проблемы.

Семантика **Sem**[1] позволяла считать семантически истинной формулу вида $A \to B$ с классическими формулами A и B при верности $A \vDash B$, но формула $A \to B$ не являлась формулой объектного языка семантики и поэтому сама не считалась истинной во всех мирах. Мы могли считать верной $A \vDash A$, и на этом основании семантически истинной $A \to A$, что не ставило перед нами проблемы истинностной оценки выражения вида $B \vDash A \to A$, так как оно предметом такой оценки и быть не могло. Введя стрелку в объектный язык и допустив возможность ее итерации, мы оказываемся перед необходимостью оценивать истинность $B \vDash A \to A$. И если мы не желаем считать его верным для любого произвольно взятого B, то должны найти возможность считать, с одной стороны, $A \to A$ семантически истинным, а с другой – найти вариант, который позволял бы иметь миры, в которых $A \to A$ и вообще любой закон логики можно было бы фальсифицировать. Иначе говоря, мы должны построить семантику расширенного объектного языка, в которой, как и в **Sem**[1], не было бы формул истинных во всех мирах.

В техническом плане задача стоит так. Надо, чтобы принятие $A \to B$ в качестве закона логики позволяло в семантике $\boldsymbol{S}^{ea}$ верифицировать соответствующее утверждение $A \vDash B$ о семантическом следовании, но не вынуждало считать формулу $A \to B$ истинной во всяком возможном мире. Именно такого рода задача решается в семантике, обозначаемой нами как $\boldsymbol{S}^{ea}$. Причины принятого обозначения станут ясны из последующего изложения.

3. Двухуровневая реляционная семантика $\boldsymbol{S}^{ea}$

Язык, для которого мы будем строить семантику, содержит бесконечное число пропозициональных переменных и следующие логические связки: "$\wedge$" – конъюнкцию (которая при написании будет обычно опускаться), "$\vee$" – дизъюнкцию, "$\neg$" – отрицание и "$\to$" – (релевантную) импликацию.

Модельная структура представляет собой пару $<W,R>$, где W есть бесконечное множество универсумов рассуждений (миров) $w_1, w_2, \ldots, w_n \ldots$, из которых каждый w_i ($i \geq 1$) в свою очередь представляет собой упорядоченную пару $<w_i^a, w_i^e>$. Первый член этой пары (*первый уровень*) мира w_i или его атомарная часть, *фактуальный мир*) есть некоторый список *литералов* (пропозициональных переменных или их отрицаний). Требование *полноты*, согласно которому для каждой пропозициональной переменной в атомарный мир входит или сама переменная, или ее отрицание, к атомарным мирам не предъявляется.

Второй член пары, w_i^e – *второй уровень* мира w_i, называемый также *миром следствий*, есть некоторое множество формул принятого объектного языка. К данному множеству предъявляется только следующее требование конъюнктивной замкнутости:

Если A и B – элементы множества w_i^e, *то конъюнкция AB также является его элементом.* Формально:

$(Cl_{con})\ \forall w_i((A \in w_i^e)\&(B \in w_i^e) \supset (AB \in w_i^e))$.

Формулировка условий верификации и фальсификации формул со знаком следования «$\rightarrow$», требует введения на множестве миров некоторого бинарного отношения достижимости R. Мы не приписываем этому отношению изначально никаких свойств. Будет ли оно рефлексивным, симметричным и транзитивным, определяется той логикой, которая присуща познавателю, знание которого моделируется.

Миры из W в $\boldsymbol{S^{ea}}$ строятся как двухуровневые. Первые уровни составляют те же описания состояний, что и в **Sem**[1]. Вторые уровни миров представляют собой произвольные множества формул объектного языка. Первый уровень мира w_i обозначается как w_i^a, а второй – как w_i^e .

Мы используем выражения $T(A)/w_i$ и $F(A)/w_i$ для утверждений о *верифицируемости* и, соответственно, о *фальсифицируемости* формулы A в мире w_i[4].

Будут справедливыми также следующие соотношения:

$$T(A)/w_i = F(\neg A)/w_i \text{ и } T(\neg A)/w_i = F(A)/w_i$$

и, следовательно,

$$T(\neg\neg A)/w_i = T(A)/w_i \text{ и } F(\neg\neg A)/w_i = F(A)/w_i.$$

Определение D1: *В мире* w_i *формулы верифицируются исключительно в соответствии со следующими условиями*:

(1) Если A – пропозициональная переменная или ее отрицание, и A входит в список w_i^a, то $T(A)/w_i$[5].

---

[4] В неформальных рассуждениях мы, как уже делали это ранее, наряду с утверждениями о верифицируемости и фальсифицируемости формул в некотором мире будем говорить об их истинности (верности), ложности именно в том строгом смысле, какой придается понятиям верифицируемости и фальсифицируемости. Напомним, что под мирами в содержательном смысле у нас имеются в виду универсумы рассуждения. Согласитесь, что заявление о том, что в некотором мире истинно противоречие $\neg AA$, выглядит достаточно странно в отличие от утверждения, что в этом универсуме рассуждения верифицируется противоречие $\neg AA$, так как в противоречивости универсумов рассуждения нет ничего странного. Скажем, доказательство от противного состоит как раз в том, чтобы показать, что отрицание тезиса влечет противоречие (универсума рассуждения).

(2) $T(AB)/w_i$, если и только если $T(A)/w_i$ *и* $T(B)/w_i$.

(3) $T(A \lor B)/w_i$, если и только если $T(A)/w_i$ *или* $T(B)/w_i$.

(4) $T(\neg(A \lor B))/w_i$, если и только если $T(\neg A)/w_i$ *и* $T(\neg B)/w_i$.

(5) $T(\neg(AB))/w_i$, если и только если $T(\neg A)/w_i$ *или* $T(\neg B)/w_i$.

(6) $T(\neg(A \to B))/w_i$, если и только если $\exists w_j Rw_iw_j \& T(A)/w_j \& F(B)/w_j$[6].

(7) $T(A \to B)/w_i$, если и только если выполняются требования:

(a) $\forall w_j (Rw_iw_j \supset (T(A)/w_j \supset T(B)/w_j \& (B \in w_j^e))$

(b) $\forall C \forall w_j (Rw_iw_j \supset .T(\neg(C \to A)/w_j \supset \neg(C \to B) \in w_j^e)$

(c) $\forall D \forall w_j (Rw_iw_j \supset .T(\neg(A \to D))/w_j \supset \neg(B \to D) \in w_j^e)$.

В пункте (7) мы впервые используем вторые уровни наших миров. Условие (a) требует, чтобы консеквент высказывания $A \to B$ был не только верен в тех достижимых из w_i мирах, в которых верен его антецедент, но и находился на их вторых уровнях. Пункты (b) и (c) носят характер чисто технический, не позволяя за счет бесконечности числа формул C и D свести условия истинности $A \to B$ к каким бы то ни было реализуемым условиям экстенсиональным.

Во всех мирах истинные формулы вида $A \to B$ замыкаются в соответствии со следующими правилами транзитивности и контрапозиции соответственно:

(Cl_{tr}) $T(A \to B)/w_i \supset T(C \to A \to .C \to B)/w_i \& T(B \to C \to .A \to B)/w_i$.

(Cl_{cp}) $T(A \to B)/w_i \supset T(\neg B \to \neg A)/w_i$.

Конечную конъюнкцию Q формул вида $(A_k \to B_k)$ $(k \geq 1)$ будем относить к классу языковых детерминант[7] $(Q \in LT_d)$, если и только если для всех k в любом мире w_i предположение об истинности в этом мире A_k влечет верность в этом мире B_k.

Имеет место замыкание, аналогичное замыканию по правилу modus ponens:

---

[5] Возможность верифицируемости некоторого литерала A в w_i не исчерпывается его вхождением в список w_i^a, некоторый литерал вполне может оказаться верифицируемым по иным основаниям данного определения. Ниже на эти возможности будет специально указано.

[6] Здесь и далее логические знаки (такие, как $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\in$, $\&$), связывающие метавыражения и отсутствующие в нашем объектном языке, должны пониматься как соответствующие метасимволы.

[7] Языковая детерминированность, идею которой я заимствую у А.А.Зиновьева [см.: 2, 3], выражений вида $A \to B$ определяется исключительно задаваемыми в семантике условиями истинности формул объектного языка. Это, так сказать, истины языка. В качестве истин логики в рамках предлагаемой семантики они могут быть на этом основании постулированы.

(Cl_{mp}) Если $Q \to C$ верифицируется в мире w_i, и $Q \in LT_d$, то в w_i верифицируется формула C.

Семантика S^{ea} не детерминирует никакой логики. Она вообще не порождает никаких общезначимых утверждений объектного языка. Скажем, верность $AB \models B$ или, иначе, $AB \to B \in LT_d$ не влечет верности формулы ни в каком отдельном мире, так как дополнительно требует, чтобы в этом мире при истинности ее антецедента AB на втором уровне наличествовал ее консеквент B.

Вместе с тем семантика S^{ea} задает некоторый класс импликаций $A \to B$, относящихся к классу LT_d. Этот класс истин языка отвечает условиям релевантности в том смысле, что в число таких истин входят только те, которым соответствуют теоремы релевантной системы E. Класс истин языка связан с принятыми условиями верификации формул с соответствующими логическими связками, но зависит также от того, какими свойствами обладает отношение достижимости.

В случае, если это отношение будет рефлексивно и транзитивно, то класс истин языка будет описываться релевантной системой T. Этот класс LT_d совпадет с классом теорем системы E, если замкнуть его относительно принципа, согласно которому следование детерминирует материальную импликацию:

($Cl_{\supset}$) Если $Q \to C$ верифицируется в мире w_i, то верифицируется формула $\neg Q \vee C$ в w_i[8].

В объектный язык могут быть включены другие логические связки и операторы. Например, различные модальные операторы, кванторы, иные виды импликаций. Для их адекватного описания наряду с имеющимся отношением достижимости R могут потребоваться другие отношения достижимости, отличающиеся по своим свойствам.

Мы можем, скажем, наряду с импликацией $A \to B$, которая отображает необходимую условную связь (E-импликацию) между A и B, ввести еще одну релевантную импликацию (R-импликацию) вида $A \Rightarrow B$, которая утверждением своей истинности характеризует сложившиеся обстоятельства и может быть ложной, когда таковые отсутствуют. Тогда для указания условий истинности для R-импликации потребуется ввести некоторое новое отношение достижимости, подобно тому, как это сделано в [6], где семантика строится с двумя отношениями достижимости R^N и R^C.

Используя две указанные импликации, можно будет, например, различать универсальные высказывания типа «Все бамбуки суть

---

[8] Доказательство приводится в [6].

злаковые растения» от случайно истинных обобщений: «Все студенты группы успешно сдали логику». В первом случае высказыванию будет соответствовать утверждение:

$$\forall x(\text{Бамбук}(x) \rightarrow \text{Злак}(x)).$$

Во втором:

$$\forall x(\text{Студент}(x) \Rightarrow \text{Сдал логику}(x)).$$

Обогащая объектный язык, чтобы усилить его выразительные возможности, надо, определяя условия верификации высказываний, исключать появления в семантике априорно истинных утверждений. Тогда мы получаем возможность использовать семантику для моделирования знаний, присущих различным субъектам познания без навязывания им какой бы то ни было единой для всех логики, как это обычно бывает при применении логического аппарата к решению любого типа проблем. Принимаемые познавателем логические законы или системы законов должны постулироваться. И если они включаются в состав знания познавателя, то семантика $\boldsymbol{S}^{ea}$ к ним легко адаптируется [6].

4. Что знает познаватель

Возможные миры могут быть поставлены в соответствие знанию каждого *познавателя*. Это можно делать для моделирования знания познавателя независимо от того, слышал ли он о семантике возможных миров и возможных мирах вообще.

Пусть **Sent** есть множество атомарных предложений или их отрицаний, которые некоторый познаватель ***a*** считает осмысленными. Если хотя бы некоторые из них ***a*** считает на данный момент истинными, то его знаниям на этот момент соответствует мир w_{act} (назовем его *действительным*, *или актуальным*, для познавателя ***a***). Первый уровень мира w_{act} образуют высказывания, принимаемые познавателем ***a*** в качестве *истинных*.

Если познаватель ***a*** считает какие-то из входящих в **Sent** истинных высказываний не просто истинными, но *необходимо истинными*, то такому его знанию соответствует множество возможных миров, которые отличаются от действительного мира тем, что в них предложения, которые не относятся к числу необходимых, могут отрицаться. Такие миры рассматриваются как миры, достижимые из действительного, возможные относительно действительного, который сам может быть одним из возможных. Миры, в которые входят отрицания предложений, которые признаются необходимыми, должны считаться недопустимыми, невозможными, недостижимыми. (Это, однако, не исключает того, что познаватель пожелает из каких-либо предположений (теоретических, например) посчитать и такой мир "возможным", с вытекающими из такого признания последствиями.)

Если, далее, познаватель считает, что некоторые предложения A и B (события, о которых они говорят) из **Sent** реально связаны таким образом, что в случае истинности (наличии) первого всегда истинно (имеет место) также и второе, то его знанию соответствует множество возможных миров, такое, что в число достижимых из действительного попадают только те миры, в которых при верности утверждения A на втором (теоретическом) уровне имеется утверждение B.

В результате всякое принимаемое познавателем высказывание об указанной связи между A и B отображается в возможных мирах как свидетельство о том, что познаватель принимает некоторую теорию, включающую (детерминирующую) высказывание $A \rightarrow B$, так как ни одно высказывание такого рода не может быть обосновано экстенсионально, и предполагает для своей верификации выход за пределы чисто эмпирического знания.

Заметьте, что, ставя в соответствие знанию познавателя мир w_{act}, мы, в действительности, приписываем ему в качестве модели множество альтернативных миров с соответствующей структурой и отношением достижимости на них.

Каждый познаватель использует свои теории и свою логику. Они не навязываются семантикой и становятся частью его знания только тогда, когда познаватель их как-то фиксирует сам. Мы, например, можем думать, что познавателю, знающему, что A влечет B, понятно также, что не-B влечет не-A. Но познаватель совсем знать этого не обязан. Или же может понимать отрицание в интуиционистской манере.

Важно заметить, что утверждения, которые мы отнесли к классу истин языка, вообще говоря, совсем не обязательно входят в состав знания познавателя. И дело даже не в том, что класс этот бесконечен, а какие-то из принадлежащих к нему утверждений могут быть весьма сложными. И не в том также, что проблема принадлежности утверждения к этому классу может не быть в общем случае разрешимой.

В принципе, наш абстрактный познаватель вообще не обязан знать этих истин. Он может знать какие-то из них. Но может знать и великое множество других истин такого рода, до которых стандартные семантики пока не добрались. Для познавателя такой истиной может быть, например, утверждение:

Если N приходится M шурином, то N женат на сестре M.

Несовпадение класса языковых истин, описываемых семантикой, и класса такого рода истин, известных познавателю, не исключает того, что присущее познавателю знание в предлагаемой семантике принципиально и притом адекватно может быть выражено на некотором интерсубъективном языке, переводимом на язык познавателя и обратно. При этом выявляется некоторый весьма важный с точки зрения моделирования знания момент.

Пусть в возможном мире w_{act} верифицируется предложение A, а утверждение $A \rightarrow B$ является истиной языка. Согласно предлагаемой семантике в w_{act} должно быть признано истинным предложение B. Но очевидно, что познаватель, знание которого моделируется с использованием w_{act}, совсем не обязательно, признавая верным A, будет считать таковым и предложение B. Или же может считать B истинным совсем по другим основаниям.

Ставя в соответствие знанию познавателя некоторый возможный мир w_{act}, надо учитывать поэтому, на каком основании верифицируется в нем то или иное высказывание.

Одно дело, если оно верифицируется в w_{act} потому, что в его истинности познаватель уверен непосредственно. Другое, если оно верифицируется в w_{act} опосредствованно как определяемое семантическими условиями верификации следствие из уже признанного истинным предложения A.

Эти вещи легко различаются, так как $A \rightarrow B$, будучи истиной языка, автоматически к числу истинных в мире w_i утверждений не относится. Оно окажется таковым, если только будет специально признано в качестве истинного (с соответствующим изменением структуры миров), или если будет следствием (что не обязательно может быть известно и тому, кто строит модель) других признанных в w_i истин языка.

Можно утверждать поэтому, что семантические следствия утверждения A, признаваемого познавателем $\boldsymbol{a}$ и поэтому верифицируемого в соответствующем мире, не обязательно известны этому познавателю. Чтобы знать, что в мире, где истинным предложение A, является в силу языковых соглашений истинно предложение B, познавателю надо знать также об истинности в этом мире $A \rightarrow B$ и о том, что совместная истинность A и $A \rightarrow B$ влечет истинность B.

Итак, пусть познаватель $\boldsymbol{a}$ знает, что A истинно. Поставим в соответствие этому знанию возможный мир w_i, в котором верифицируется A. Пусть далее семантика вынуждает признать, что имеет место $A \models B$. То есть в любом возможном мире, в котором верно A, всегда верно также и некоторое другое высказывание B. Это не является основанием считать, что $\boldsymbol{a}$ знает, что B истинно. Утверждение $A \models B$ есть метаутверждение о семантических свойствах объектного языка. Познаватель $\boldsymbol{a}$ знать его не обязан. Семантика

S^{ea} включать B в список атомарных высказываний первых уровней возможных миров на основании верности $A \models B$ не требует. И разрешает отнести B в состав моделируемого знания только при том условии, что во всех достижимых мирах, где верно A, на вторых уровнях есть B.

Пусть познаватель ***a*** узнал из паспорта Ивана, что тот муж Марии. И сделал на этом основании вывод, что Мария жена Петра. Тогда, моделируя это знание, мы поставим ему в соответствие с учетом других данных возможные миры, в котором на первом уровне имеется утверждение: «Иван муж Марии», а на вторых уронях утверждение: «Мария жена Петра».

Если же свое знание о том, что Мария жена Петра, познаватель ***a*** узнал не на основе умозаключения, а из паспорта Марии, то его знанию будут соответствовать миры, на первых уровнях которых имеются оба приведенных утверждения. Но в мирах не будет никакого указания, что познаватель ***a*** как-то связывает два этих знаемых им факта.

Наверное, стоит заметить, что представленная семантика S^{ea} исключает то, что называют «парадоксом всеведения», согласно которому знающий, что верно утверждение A, должен знать также о верности всякого утверждения B, являющегося логическим следствием из A. Любой логик знает, что это не так. При желании он может оправдать это теоретически, построив модель своего знания по указанной здесь методе.

Мы видим, таким образом, что знанию, присущему каждому познавателю ***a***, соответствует свое собственное, различным образом структурированное множество возможных миров. К этому неизбежно приводят и различно понимаемая познавателями эмпирическая основа знания, и отличия в присущем им теоретическом осмыслении эмпирических данных. Такие различия трактуются в широко понимаемом смысле, как выход за пределы познания, предоставляемого наблюдением. Сюда могут относиться как те оценки и выводы, которые предлагаются наукой, так и трактовки, связанные с верованиями, традициями, политическими и иными пристрастиями и тому подобными вещами.

Познаватели, живущие объективно в одном и том же онтологическом мире, субъективно живут в различных мирах. Каждый познаватель живет в том мире, который он себе представляет, если даже он ясно понимает, что мир как таковой, мир в себе, мир объективный и мир им представляемый, воспринимаемый и фиксируемый в высказываниях, в теориях – это не одно и то же. Даже в тех пунктах, где мнения различных познавателей относительно истинности или ложности каких-то положений совпадают, у каждого познавателя могут быть свои основания считать одни и те же положения верными[9].

Возможные миры как модели познания позволяют осуществлять сравнение субъективных, соответствующих знанию того или иного познавателя, миров. Познаватели, которые на самом деле постоянно изменяют соответствующие их знаниям миры, могут лучше осознать, что и в каком отношении подверглось изменению. Теоретически мы можем моделировать не только актуальные знания познавателя, но и знания, присущие ему в какие-то периоды времени. При этом можно, квантифицируя познавателя по временным параметрам, рассматривать его всякий раз как особого познавателя. Но, наверное, интересно было бы поискать возможности некоторого интегрального моделирования, отображающего изменение знаний одного и того же познавателя.

4. Модели знания и проблема объективности истины

Принимая обсуждаемые модели познания, мы вынуждены будем подобрать соответствующее им понимание истины, ибо трактовка ее как соответствия онтологическому миру утрачивает объективный характер. На такое соответствие претендует любой познаватель. Верификация высказываний становится возможной только в возможных мирах, отображающих то, что считает истинным сам познаватель.

Здесь, кстати, открываются некоторые новые возможности корреляции знания и истинности. Всегда трудно согласиться с тем, что из того, что «познаватель ***a*** знает, что *A*», следует, что *A* является истинным. Но также кажется странным считать, что *A* может быть ложным, когда некто знает, что *A* имеет место. Какое же это знание, если оно ложно? В нашей модели утверждение о знании некоторым познавателем того, что имеет место *A*, будет означать, что в актуальном мире, соответствующем знанию данного познавателя, высказывание *A* верифицируется. И тут все ясно: не будет же познаватель считать, что его знание не верно.

Не стоит вместе с тем концепцию истинности, которую приходится связывать с предлагаемым семантическим моделированием, считать однозначно релятивистской и субъективистской. Хотя, если вы ставите задачу моделирования знаний различных познавателей, то она и должна, и не может не быть такой. Надо, однако,

[9] Помню как профессор психологии П.Я.Гальперин, замечательный ученый, на лекции которого в самую большую аудиторию всегда, чтобы удовлетворить стекающихся со всей Москвы желающих его послушать, приносили стулья из соседних аудиторий, говаривал нам, что все мы атеисты по невежеству.

учитывать, что к числу познавателей могут относиться и научные сообщества, и человечество в целом. Их знания (коли не их, то чьи?) могут – если хотите, и история науки не убеждает вас в обратном – считаться объективными. С этих позиций можно оценивать, что обычно и делается, знания других познавателей. Осуществлять их сравнительный анализ в некоторых концептуальных отношениях. Для этих целей эти знания должны быть некоторым единообразным образом описаны. Предлагаемый способ моделирования знаний делает какой-то шаг в этом направлении.

Каждый познаватель, особенно если он профессиональный ученый, конечно же, стремится к истинному знанию. Не будет лишним, однако, напомнить импонирующие мне слова древнего (V в. до н.э.) философа Ксенофана Колофонского:

> И если б кто нам истину открыл, –
> То истина иль нет, он знать не мог бы:
> Догадка всё, что скажет человек.

Предложенный нами вариант моделирования знания с помощью двухуровневой семантики не дает и не навязывает тех или иных решений философских вопросов. Он и не предназначен для этого. Но он может вместе с тем, как я старался это показать, саму постановку такого рода вопросов сделать строгой и однозначной. Соответственно, и ответы на них в силу этого сделать достаточно точно сформулированными.

Собственно, сама идея моделирования знания с использованием семантики возможных миров, естественно, не ориентирована на то, чтобы ее реально осуществить в отношении какого-нибудь конкретного познавателя, построив реальную модель его знания. Важно, что эта идея открывает новые возможности экспликации некоторых эпистемических и логических проблем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.
2. *Зиновьев А.А.* Логика высказываний и теория вывода. М., 1962.
3. *Зиновьев А.А.* Очерки комплексной логики. М.: УРСС, 2000.
4. *Лекторский В.А.* Эпистемология классическая и неклассическая. М.: УРСС, 2001.
5. *Смирнов В.А.* Логические методы научного знания. М., 1987.
6. *Сидоренко Е.А.* Релевантная логика, М.: ИФ РАН, 2000.
7. *Сидоренко Е.А.* Логика. Парадоксы. Возможные миры. М.: УРСС, 2002.

8. *Сидоренко Е.А.* Семантика возможных миров: от лейбницевской к юмовской. // Логические исследования. Вып. 3. М.: Наука, 1995. С. 24-37.
9. *Сидоренко Е.А.* Реляционная семантика релевантных исчислений // Логические исследования. Вып. 3. М.: Наука, 1995. С. 53-71.
10. *Сидоренко Е.А.* Relevant semantics with binary relation of accessibility // Bulletin of Section of Logic. Vol. 26, N4. 1997.University of Lódź, Lódź (Poland). P.168-178.
11. *Сидоренко Е.А.* Бинарная реляционная семантика релевантной логики // Логические исследования. Вып. 6. М.: Наука, 1999 . С. 81-108.

Е.Д.Смирнова

К ВОПРОСУ УТОЧНЕНИЯ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧНОСТИ*

Abstract. *In the paper principles of specifying the notion of analytical truth of judgment are considered. Non-standard approach to explication of that notion is proposed which is based on singling out two types of interpretation along with introduction of admissible possible realizations (semi-models) of language.*

В статье предлагается нестандартный подход к уточнению понятия аналитической истинности (аналитической истинности в широком смысле). В обосновании теоретического знания особую роль играет трактовка природы аподиктического знания, проблема соотношения аподиктического знания и аналитической истинности. Одним из центральных философских вопросов является вопрос о том, что вносят в наше познание, с одной стороны, опыт, с другой – мышление. Именно в таком ключе рассматривает эту проблему Д.Гильберт в своем подводящем итоги знаменитом докладе «Естествознание и логика» [2]. Этот старый философский вопрос не только не утратил, с его точки зрения, своего значения, но получил «второе дыхание», новое освещение и новые основания для рассмотрения и решения. Одним из таких оснований является быстрый темп развития науки, «достигшее невиданной до сих пор высоты искусство построения теоретической физики», другим – существенный прогресс логической науки, достигнутые в этой области результаты.

Каково соотношение априорного и аподиктического знания? Как это связано с понятием аналитической истинности? Аналитические истины, естественно, априорны, не извлекаются из опыта. Но можно ли сказать обратное – что все априорные истины носят аналитический характер? Меняется и требует обоснования само понятие априорности. Требует уточнения понятие аналитичности. Проблемой является соотношение аналитических и синтетических суждений. Одно дело – понимать синтетические истины как эмпирические, фактофиксирующие, другое – трактовать их как суждения, расширяющие наше знание. В последнем случае возникает вопрос о возможности и обосновании синтетических суждений априори. Снимается «тезис аналитичности», согласно которому

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 00-03-00320.

все априорные истины являются аналитическими [4]. Так, в гильбертовской трактовке действительных предложений математики, с нашей точки зрения, реализуется кантовская идея обоснования аподиктического характера математического знания – познание в математике не есть познание разумом «посредством понятий», но есть познание «посредством конструирования понятий», что позволяет разуму благополучно расширяться за «узкие границы данного в опыте». Ибо конструировать понятие, согласно Канту, значит показать априори соответствующее ему созерцание. В этом случае наше мышление не есть мышление о предметах или образах предметов, оно является представлением о *схеме* (схематизм чистого созерцания), т.е. о *правиле, общем методе*, посредством которого конструируется соответствующий понятию объект. С этим связано объяснение креативного характера аподиктического математического знания. Априоризм в этом случае выступает как признание независимых от опыта условий конструирования и тем самым понимается совершенно в ином смысле. Снимается упомянутый выше «тезис аналитичности».

Мы приходим к пересмотру и необходимости уточнения самого понятия аналитической истинности. Чем определяется аподиктический характер аналитических истин? Являются ли такого рода суждения просто результатом конвенций об употреблении дескриптивных терминов языка или же они сводятся в конечном счете к логически истинным высказываниям? В любом случае их аподиктический характер требует объяснения. В конечном счете обоснование аподиктического характера аналитических истин связано с выяснением роли языка, лингвистического компонента в обосновании теоретического знания и аподиктических суждений [см. 7, гл. VI, § 2].

Можно ли подразделять высказывания определенного языка на высказывания, истинность которых может быть обоснована исключительно средствами принятого языка, правилами семантики и средствами принятой категориальной системы, и высказывания, в обосновании которых необходимо обратиться к другим средствам. Этот вопрос составляет собственно логический аспект проблемы аналитической истинности.

Если сопоставить многочисленные определения аналитичности, даваемые разными авторами, можно, на наш взгляд, выявить следующее. Аналитические суждения определяются или как суждения, истинность которых не зависит от значений входящих в них дескриптивных знаков (в таком случае класс аналитических суждений совпадает с классом *L*-истинных суждений), или как суждения, не являющиеся *L*-истинными, но преобразующиеся в *L*-истинные. Такого рода суждения называют аналитически истинными в узком смысле.

Определение аналитических суждений как суждений, истинность которых можно установить с помощью одних только семантических правил системы, охватывает аналитические суждения и в узком и в широком смысле. В целом класс аналитических суждений не совпадает с классом логических истин. С введением аналитических суждений второго рода аналитические суждения выступают как расширение класса логических истин на основе введения постулатов значения, устанавливающих определенные отношения между *дескриптивными терминами* системы. Аналитические суждения второго рода, таким образом, обоснованы конвенциональными соглашениями относительно внелогических терминов. Положение «Если Джек холост, то он не женат» будет аналитически истинным только в системе с постулатами значения (см., например, [3], [7, гл. VI, § 2]).

Однако в системе с постулатами значения, в зависимости от трактовки постулатов, аналитическими в принципе будут не только предложения этого типа, но и другие. Так, если за постулаты значений принять аксиомы геометрии, то в этой системе аналитически истинной окажется любая теорема геометрии. Таким образом, аналитическими высказываниями в широком смысле оказываются не только те высказывания, которые преобразуются в логические истины на основе использования постулатов значения, но и те, которые логически следуют из некоторого принятого множества исходных положений, постулатов.

С нашей точки зрения подразделение высказываний на аналитические и синтетические имеет место только относительно *фиксированных семантических систем*. О высказывании, взятом вне той или иной семантической системы, бессмысленно ставить вопрос, является ли оно аналитическим или синтетическим. Соответственно уточнение понятия аналитической истинности следует начинать с уточнения понятия семантической системы, принципов ее построения. В этом смысле подразделение суждений на аналитические и синтетические носит относительный характер.

Далее, ни одно аналитическое суждение не является истинным в силу только соглашений об употреблении знаков языка. Но и ни одно аналитическое суждение не является аналитическим без таких определенных конвенций, принятых в данной семантической системе. Суждение является аналитическим или синтетическим лишь относительно определенной системы с *данной семантикой*. Деление же суждений на фактофиксирующие и аподиктические не является делением относительно фиксированной семантической системы.

С нашей точки зрения, уточнение понятия семантической системы – и соответственно понятия аналитической истинности – следует проводить на базе понятий возможных реализаций, *полумоделей*, языка. Существенную роль при этом играет трактовка правил интерпретации формального языка (подробнее см. [7, гл. VI, § 3]). С указанными моментами связано своеобразие предлагаемого подхода к уточнению понятия аналитичности.

На наш взгляд, рационально подразделять семантические правила *на два типа в зависимости от той роли, которую они выполняют в интерпретации*. Семантические правила первого типа фиксируют общие аспекты интерпретации, указывают множество областей, которые могут выступать в качестве исходных при построении системы семантических категорий. Правила этого типа выявляют систему семантического анализа, т.е. указывают, какого рода системы объектов могут приписываться выражениям каждой синтаксической категории.

Правила *второго типа* из всех возможных исходных индивидных областей выбирают какую-то одну определенную область и из всех возможных приписываний объектов дескриптивным выражениям объектного языка фиксируют одно определенное.

Отметим, что при нашем подходе значения *логическим константам* приписываются на уровне правил первого рода. Логические константы не интерпретируются по аналогии с дескриптивными, значения им не приписываются, как примитивным дескриптивным константам. Вводятся правила выполнимости и формулируются они *независимо от семантических правил второго типа*, т.е. независимо от фиксации конкретной индивидной области и конкретного приписывания дескриптивным константам.

Анализ различных групп семантических правил интерпретации формальных языков (*рассматриваемых без правил преобразования*) позволяет ввести одно из центральных понятий логической семантики – понятие *возможной реализации* (полумодели) языка.

Реляционную систему M назовем *возможной реализацией* (полумоделью) языка L, если существует такая интерпретация $\mathbf{I}$ на область $\mathbf{U}$, что $M = \langle \mathbf{U}, \mathrm{I}(\sigma) \rangle$, где σ есть словарь языка L. Иными словами, *возможная реализация* есть реляционная система, соотнесенная с языком. Функция интерпретации $\mathbf{I}$ приписывает любой дескриптивной константе L значение из некоторого множества, именно из множества объектов, приписываемых правилами первого типа категории, к которой принадлежит данная константа.

Семантические правила первого типа описывают возможные индивидные области и возможные способы приписывания дескриптивным константам, т.е. они *детерминируют класс возможных полумоделей рассматриваемого языка. Семантические правила второго типа* фиксируют *конкретную полумодель*. Таким образом, подразделение семантических правил на два типа намечает подразделение логической семантики на теорию смысла (понятия которой базируются на понятии возможных полумоделей) и теорию референции, имеющую дело с фиксированной полумоделью, описывающей «действительный мир». Если объектный язык иной, с выражениями, принадлежащими к иным категориям, то и возможные полумодели будут иными.

Полумодель M есть *модель формулы* A, е.т.е. формула A значима в M. Полумодель M есть *модель множества формул* Σ, если и только если M есть модель каждой формулы, принадлежащей Σ.

Говоря об объектном языке, отметим, что мы имеем в виду язык, заданный только правилами образования, без правил преобразования, поскольку основная установка состоит в том, чтобы уточнить понятия L-истинности, A-истинности и другие L-понятия, не опираясь на синтаксические понятия доказуемости или выводимости в объектном языке. Задание языка с помощью правил образования и семантических правил определяет возможные полумодели этого языка.

Поскольку мы имеем в виду язык, заданный только правилами образования, без правил преобразования, то имеет смысл говорить о моделях формул или моделях класса формул, но не имеет смысла говорить о моделях объектного языка.

О моделях объектного языка можно говорить лишь тогда, когда имеется в виду семантическая система, заданная не только правилами образования, но и правилами преобразования – совокупностью аксиом и правил вывода, разумеется, вместе с семантическими правилами. Говоря о моделях заданного таким путем объектного языка, в конечном счете говорят о моделях класса доказуемых формул.

Отметим, например, что Дж. Кемени [5] вводит понятие модели объектного языка, имея в виду под объектным языком формальную систему, заданную посредством правил образования и преобразования. Такое понимание модели в концепции Кемени обусловлено тем, что правила семантической части метаязыка не приписывают у него конкретных, фиксированных значений логическим константам.

Понятие возможной реализации есть уточнение понятия «возможных миров», об объектах которых может идти речь в этом языке. Но такого рода «возможные миры» являются возможными лишь постольку, поскольку исходные термины языка рассматриваются как независимые. Класс возможных реализаций языка максимален именно при условии, что исходные термины языка взаимно независимы. Если выявить и фиксировать некоторые зависимости примитивных предикатов (или других исходных терминов), т.е. принять постулаты значений, то класс возможных миров сужается. Именно в качестве «возможных миров» рассматриваются уже не просто возможные реализации, а те возможные реализации, в которых значимы постулаты значений.

Нам представляется более естественным не исходить из постулатов как данного, а *положить в основу понятие допустимого класса возможных реализаций* («миров языка»). Если допустимый класс возможных реализаций не совпадает с множеством всех возможных реализаций, то *термины рассматриваемого языка не будут независимыми*. При этом предполагается, что «возможным миром» этого языка является уже не просто возможная реализация, а допустимая реализация. И отсюда *аналитическая истинность* определяется как *значимость во всех допустимых реализациях* (а логическая – как значимость во всех реализациях).

В качестве допустимых возможных реализаций мы предлагаем рассматривать «главную реализацию», т.е. реализацию M^*, с помощью которой осуществляется перевод с объектного языка на метаязык, и все возможные реализации изоморфные M^*. Иными словами, выполняется требование, чтобы интерпретация $\mathbf{I}^*$, с помощью которой реализуется перевод с объектного языка на метаязык, задавала реализацию M^*, принадлежащую к классу допустимых реализаций. Понятие изоморфизма возможных реализаций играет существенную роль, оно фактически детерминирует преобразования, задающие класс допустимых возможных реализаций.

Понятие изоморфизма возможных реализаций, конечно, отлично от понятия изоморфизма детерминируемых ими реляционных систем. Возможную реализацию можно рассматривать как систему, объектами которой являются примитивные нелогические знаки словаря A, некоторая система внелингвистических объектов (индивиды, свойства, отношения и т.д.) и отношение $\mathbf{I}$ между ними. Пусть $<X_1, A, \mathbf{I}_1>$ и $<X_2, A, \mathbf{I}_2>$ – две реализации языка $\mathbf{L}$. Реализация $<X_1, A, \mathbf{I}_1>$ *изоморфна* реализации $<X_2, A, \mathbf{I}_2>$, если и только если существует взаимно-однозначное отображение φ первой системы на вторую такое, что (1) если $s \in A$, то $\varphi(s) = s$, (2) каждому индивиду $a \in X_1$ ставится в соответствие индивид $\varphi(a) \in X_2$, n-местному отношению на X_1 – n-местное отношение на X_2, k-местной функций на X_1 – k-местная функция на X_2, (3) для всех

$s \in A$ $I_1(s) = m$ тогда и только тогда, когда $I_1(\varphi(s)) = \varphi(m)$ (или в силу пункта (1) $I_2(\varphi(s)) = \varphi(m)$), где m – объект соответствующего типа. На первый взгляд кажется, что каждое предложение, значимое в одной интерпретации, будет значимо в каждой интерпретации, ей изоморфной. Однако это не так.

Из определения непосредственно вытекает, что если два примитивных знака обозначают в некоторой реализации M один и тот же объект, то они будут также обозначать один и тот же объект в *каждой интерпретации* изоморфной M.

Сформулированное выше определение аналитической истинности как значимости в M^* и всех реализациях, изоморфных M^*, позволяет устанавливать не только тождество примитивных знаков, но и их различие[1].

Сказанное относится не только к тождеству и различию индивидных констант, но и к тождеству (и различию) примитивных предикатных знаков. Если два примитивных предикатных знака репрезентируют одну и ту же сущность (функцию) в M^*, то они будут обозначать одну и ту же функцию в каждой другой допустимой реализации. И если два предикатных знака в M^* обозначают разные сущности, то и в других допустимых реализациях они будут репрезентировать разные сущности.

Отметим, что если два исходных термина употребляются в M^* для обозначения одного и того же объекта, то они обозначают один и тот же объект во всех допустимых возможных реализациях (т.е. они «синонимичны» в этом смысле). При таком анализе синонимия примитивных терминов трактуется чисто экстенсионально. Каждый примитивный термин имеет один-единственный денотат, и вопрос о синонимии примитивных терминов сводится к вопросу о тождестве и различии их денотатов в силу интерпретации.

Синонимия сложных знаков заключается не в тождестве денотатов. Сложные знаки вообще могут не иметь денотатов или в M два сложных знака могут иметь один и тот же денотат, но в других допустимых реализациях – различные. Вопрос о синонимии сложных выражений решается на основе эквивалентности их структур и синонимии примитивных знаков.

При нашем подходе мы исходим из ряда допущений:

1) предполагается, что известно подразделение примитивных знаков языка на логические и дескриптивные;

2) рассматриваются языки, в которых семантические правила

---

[1] Отметим, что сказанное нами проливает свет на широко обсуждаемую спорную проблему жестких десигнаторов и вопрос кроссидентификации по мирам. См. напр., [1], [6], [8].

интерпретации приписывают единственное значение логическим знакам (без правил преобразования);

3) предполагается, что известен перевод выражений объектного языка в метаязык.

Наша установка – не исходить из правил преобразования как чего-то данного (в том числе и постулатов значения). Вводимое понятие допустимого класса возможных реализаций языка, базирующееся на интерпретации I^* и понятии изоморфизма возможных реализаций, предназначено для уточнения понятия аналитической истинности в широком смысле. Такое понятие релятивизировано относительно выделяемого класса «возможных миров» языка. Изменение I^* или понятия изоморфизма возможных реализаций ведет соответственно к изменению класса высказываний аналитически истинных в системе.

Рассматриваемая семантика является теоретико-множественной и экстенсиональной. «Синонимия» знаков языка, соответственно, трактуется экстенсионально. Об особенностях и принципах построения интенсиональных семантик см. [7, гл. VI, § 3–5], [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marcus R. Barcan*. Modalities and intensional languages // Boston Studies in the Philosophy of Science. Vol. 1. N.Y., 1963.
2. *Гильберт Д.* Естествознание и логика // Кантовский сборник. Вып. 15. Калининград, 1990. С. 116-127.
3. *Карнап Р.* Постулаты значений // *Карнап Р.* Значение и необходимость. М., ИЛ, 1959. С. 321–330.
4. *Quinton A.* Apriori and the Analytic // Philosophical Logic / Ed. Strawsan / Oxford University Press, 1967. P. 107–129.
5. *Kemeny J.* A new approach to semantics // J. Symb. Logic. Vol. 21. № 1–2. 1956.
6. Крипке С. Тождество и необходимость // Новое в зарубежной лингвистике. Вып. 13. М.: Радуга, 1982. С. 340–377; *Kripke S.* Identity and Necessity // Identity and Individuation / Ed. by M.K.Munitz. N.Y., 1971. P. 135–164.
7. *Смирнова Е.Д.* Логика в философии и философская логика. The Edwin Mellen Press. Lewinson, New York; Queenston, Ontario, 2000.
8. *Смирнова Е.Д.* О загадке контекстов мнения // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001. С. 199–209.

В.Х.Хаханян

СИСТЕМА NFI, РАВНОНЕПРОТИВОРЕЧИВАЯ С СИСТЕМОЙ КУАЙНА NF

Abstract. *We suggest an intuitionistic variant of the famous W. Quine's NF which we call NFI and which is equiconsistent with NF.*

0. Первоначальный вариант аксиоматической системы теории множеств, формализовавший «наивное» содержательное учение Г.Кантора о множествах, мог быть представлен всего двумя постулатами: аксиомой объемности и схемой аксиом свертки (см., например, [1]). Однако обнаруженное Б.Расселом противоречие в отмеченной выше формальной системе из двух постулатов привело в течение 20 последующих лет и затем почти всей первой половины прошлого столетия к созданию сначала системы аксиоматической теории множеств Э.Цермело (1908 г.), а затем и к широко известной в настоящее время системе теории множеств Цермело–Френкеля ZF (1922 г.). В терминах цитированной статьи В.Н.Гришина и А.Г.Драгалина это две аксиоматические системы из группы 1, где аксиома свертывания ограничивается так, чтобы обеспечить «...наиболее естественный способ формализации обычных математических доказательств и в то же время позволяет избежать известных парадоксов».

Наряду с этим (и по времени появления даже более ранние) были предложены аксиоматические системы другого типа (группа 2 по классификации В.Н.Гришина и А.Г.Драгалина), например, простая теория типов Б.Рассела (1910 г.). Опуская различные аксиоматические системы теории множеств из группы 3 (мы вернемся к ним позже), которые в первой половине прошлого столетия не пользовались вниманием в силу особой специфики применяемых средств, отметим, что в группу 4 по той же классификации попали системы аксиоматических теорий множеств NBG (система теории множеств с классами, 1925 г.) и система NF Куайна (1937 г.). Мы остановимся на этой системе NF и дадим ее краткое описание и характеристику.

1. В 1937 г. Куайн предложил аксиоматическую систему теории множеств, получившую название «New Foundations» [8], которая включала, как и первоначальная формализация «наивной» теории множеств Г.Кантора, те же два постулата, однако в схеме свертки соответствующая формула A должна была быть стратифицируемой (формула A языка первого порядка теории множеств

называется стратифицируемой, если она может быть получена из формулы языка простой теории типов стиранием типов). Отметим, что в NF реализуется возможность преодоления расслоения понятий, имеющее место в теории типов. Также, первоначальный вариант NF содержал аксиому бесконечности, вывод которой в указанной в самом начале системе теории множеств из двух постулатов (формализующей теорию множеств Г.Кантора) не переносится на систему NF, однако Э.Шпеккер доказал следующие два факта (см. [9]): аксиома бесконечности выводима в системе NF и в NF выводимо отрицание аксиомы выбора. Система NF обладает рядом свойств, резко отличающих ее как от системы «слоев» теории типов Рассела, так и от системы Цермело и Цермело–Френкеля, универсум множеств которых может быть построен постепенно, шаг за шагом (кумулятивная иерархия). До настоящего времени не удалось построить модель универсума для теории NF ZF-средствами и тем самым выяснить вопрос об относительной непротиворечивости NF и ZF (модель NF может быть получена из модели теории множеств TT + принцип типовой неопределенности). Ниже мы опишем кратко основные результаты, полученные для теории множеств NF.

2. Как уже отмечалось, Э.Шпеккер доказал, что в NF выводятся аксиома бесконечности и отрицание аксиомы выбора (дальнейшая сводка результатов взята в основном из [10]). Разобьем эту сводку на фрагменты: а) уже упоминавшиеся результаты Шпеккера о выводимости аксиомы бесконечности и отрицания аксиомы выбора, б) NF равнонепротиворечива с TT + «принцип типовой неопределенности» (см. [10]), в) NF равнонепротиворечива с расширением теории Цермело с аксиомой выделения, ограниченной Δ-формулами (к теории множеств Цермело добавлена аксиома, утверждающая, что есть непустое множество), г) если NFU есть система NF, в которой аксиома объемности ограничена к непустым множествам, то NFU равнонепротиворечива с NFU + «O есть канторово множество» (O – множество всех пустых множеств; множество M – канторово, если существует 1-1 отображение из M на множество одноэлементных подмножеств M), д) результаты Р.Йенсена о равнонепротиворечивости и независимости NFU и ее расширений аксиомами бесконечности и выбора. Существует еще обширный ряд менее известных результатов, касающихся систем теорий множеств NF и NFU, которые мы здесь упоминать не будем.

3. Начиная с 1973 г. появляется ряд работ, посвященных теории множеств типа ZF или TT, но с интуиционистской логикой

(такие теории можно было бы отнести к группе 3, см. классификацию выше, однако они носят достаточно ярко выраженный конструктивный характер, и обзор результатов по данной тематике уже появляется в разделах «Конструктивная математика»). За последние 30 лет в работах Х.Фридмана, Дж.Майхилла, В.Поуэлла, Р.Грайсона, В.Хаханяна и др. была предложена достаточно мощная, равнонепротиворечивая с ZF аксиоматическая система теории множеств с интуиционистской логикой, обладающая рядом конструктивных свойств: это система ZFI, совместимая с принципами Чёрча и Маркова, а также с принципом униформизации, в которой допустимы правила Чёрча и Маркова; эта теория обладает свойствами полной экзистенциальности и нумерической экзистенциальности; ZFI как расширение для арифметики и анализа является консервативной над последними; были предложены три очень общих класса моделей для такой теории множеств с целью доказательства ряда метаматематических утверждений о непротиворечивости и независимости этой аксиоматической системы с некоторыми конструктивными, интуиционистскими и теоретико-множественными принципами; для отмеченной теории (к сожалению, мы не даем тут точной формулировки, так как это достаточно объемная процедура) получена модель, являющаяся расширением негативной интерпретации Гёделя для арифметики и анализа до уровня теории множеств. Именно этот последний факт и еще одну простую, но интересную идею и использовал автор для формулировки и доказательства заявленной в названии проблемы.

4. Пусть T – множество аксиом в теоретико-множественном языке первого порядка. Пусть T^C – аксиоматическая теория P^C+T, где P^C – классическая логика предикатов и пусть T^I – аксиоматическая теория P^I+T, где P^I – интуиционистская логика предикатов. Пусть A – какая-либо формула языка, отмеченного выше, и пусть

$T^C \vdash A,\ \neg T^I \vdash A,\ \neg T^I \vdash \neg A.$

Тогда теория T^I+A есть подтеория T^C и можно попытаться подобрать A так, чтобы получить перевод формул из теории T^C в формулы теории T^I+A так, чтобы полученное погружение позволило доказать непротиворечивость теории T^C относительно теории T^I+A. Именно такой прием и использовал В.Поуэлл при построении стандартной интерпретации ZFC в ZFCI (теория множеств ZFC, но с интуиционистской логикой, более точная формулировка дается в цитируемой ниже статье), добавив к последней теории принцип «double complement»:

$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \neg\neg z \in x)$, который мы впоследствии обозначили как DCS (см. [7]).

5. Дадим теперь точную формулировку аксиоматической системы теории множеств NFI. Язык этой теории есть теоретико-множественный язык первого порядка (один сорт переменных, один бинарный предикат $x \in y$ и стандартный набор логических связок, кванторов и вспомогательных символов). Берем аксиомы и схемы аксиом интуиционистской логики предикатов и два собственных постулата системы NF: схему аксиом свертки по стратифицируемым формулам и аксиому объемности. К полученной системе добавим еще следующую аксиому, выводимую в NF:

C. $\forall xy[\neg\neg x \in y \leftrightarrow \approx x \in y)]$, где $\approx y = \{z \mid \neg\neg z \in y\}$, т.е. $\approx y$ есть двойное дополнение y. Конечно, в классической логике предикатов C доказуемо, т.е. NF $\vdash$ C. Устроим теперь стандартную геделеву негативную интерпретацию * формул нашего языка в формулы нашего же языка (для справки см., например, [2]), т.е. $\varphi \rightarrow \varphi^*$.

Теорема. 1. NF $\vdash \varphi \Rightarrow$ NFI+C $\vdash \varphi^*$.

2. NFU $\vdash \varphi \Rightarrow$ NFUI+C $\vdash \varphi^*$, где NFU – теория множеств NF с аксиомой объемности по непустым множествам.

Следствие. 1. NF непротиворечива относительно NFI+C.

2. NFU непротиворечива относительно NFUI+C.

(теория NFUI получается из NFU аналогично тому, как NFI получается из NF).

Доказательство **Теоремы**.

1. Схема аксиом свертки имеет вид $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \varphi(z))$, где формула φ не содержит y свободно и является стратифицируемой.*-перевод этой схемы имеет вид $\neg\neg\exists y \forall z(\neg\neg z \in y \leftrightarrow \varphi^*(z))$, где φ^* – *-перевод формулы φ (в книге А.Г.Драгалина негативный перевод для атомарных формул тривиален, для теории же множеств перевод формулы $(x \in y)^*$ есть формула $\neg\neg(x \in y)$). Индукцией по построению формулы нашего языка теории множеств легко доказывается следующая

Лемма: а) если φ – стратифицируемая формула, то φ^* – также стратифицируемая формула; б) в $P^I \vdash \varphi^* \leftrightarrow \neg\neg\varphi^*$. Применяем теперь схему аксиом свертки к формуле φ^* и получаем

$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \varphi^*(z))$ и затем $\exists y \forall z(\neg\neg z \in y \leftrightarrow \neg\neg\varphi^*(z))$

и, пункт б) **леммы**, $\exists y \forall z(\neg\neg z \in y \leftrightarrow \varphi^*(z))$ и, окончательно, двойное отрицание последней формулы.

2. Аксиома объёмности имеет вид

$\forall xyz[\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \wedge x \in z \rightarrow y \in z]$

*-перевод этой аксиомы таков:

$\forall xyz[\forall u(\neg\neg u \in x \leftrightarrow \neg\neg u \in y) \wedge \neg\neg x \in z \rightarrow \neg\neg y \in z]$.

Фиксируем x, y, z и предположим, что в NFI выводимы два конъюнктивных члена посылки. Для множеств ≈x и ≈y найдутся и единственные (в силу аксиомы DCS^{-1}) такие множества x и y, что $\forall u(u\in\approx x\leftrightarrow\neg\neg u\in x)$ и $\forall u(u\in\approx y\leftrightarrow\neg\neg u\in y)$ и, в силу первого конъюнктивного члена посылки перевода аксиомы объемности, $\forall u(u\in x\leftrightarrow u\in y)$ (≈x и ≈y множества в силу схемы аксиом свертки $\exists\approx x\forall z(z\in\approx x\leftrightarrow\neg\neg z\in x)$ и для ≈y – аналогично; в этом главное отличие при распространении геделева перевода на NF, так как для ZF (и аналогичных ей теорий, например, Z или NBG, т.е. теорий из группы 1) основная трудность – доказательство *-перевода для аксиомы объемности. Один из вариантов преодоления этой трудности – это добавление какого-либо классически выводимого утверждения к интуиционистскому варианту ZFI (см. упоминавшуюся выше работу В.Поуэлла). Другой вариант – погружение классической теории с объемностью в такую же теорию без аксиомы объемности (см. [5]). В связи со сказанным становится неясным утверждение D.Dzierzgovski о том, что если интуиционистская часть теории T есть та же теория T, но с заменой P^C на P^I: «Let us define the intuitionistic part of a classical theory T as the intuitionistic theory whose proper axioms are identical to the proper axioms of T», то «It's a well-known fact, proved Heyting and Myhill, that ZF is identical with its intuitionistic oart», все цитируется из «Models of intuitionistic TT and NF», Semin. Math./ Institute Math. Pure et Appl., Univ. Cathol. Louvain, 1994, 1-2, P.1-23; статья должна была появиться в журнале «The Journal of Symbolic Logic», но я ее не нашел; тут же автор заявляет, что для TT и NF этот факт не имеет места).

Завершим доказательство перевода аксиомы объемности. Так как в силу C $x\in\approx y\leftrightarrow\approx x\in\approx y$, то $\neg\neg x\in z\rightarrow\neg\neg y\in z$, что и завершает доказательство перевода аксиомы объёмности. **Теорема** доказана (для NFU и NFUI доказательство проводится аналогично).

6. В заключение сформулируем ряд проблем, может быть и не очень трудных, связанных с тематикой интуиционистской NF. Из «ближайших» задач отметим следующие: будет ли аксиома бесконечности выводима в NFI? Аналогичный вопрос о выводимости отрицания аксиомы выбора. Другими словами, можно ли результаты Э.Шпеккера перенести на NFI?

Для NFUI задачи таковы: можно ли (я думаю, что «да») результаты Р.Йенсена относительно NFU перенести на NFUI? Конечно, мы не приводим точных формулировок задач выше, однако их, возможно, нужно еще уточнять. И, наконец, отметим следующую работу, любезно предоставленную мне В.Н.Гришиным и которая содержит обширную библиографию по NF [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гришин В.Н., Драгалин А.Г.* Аксиоматическая теория множеств // Математическая энциклопедия. Т. 1. 1977. С. 104-109.
2. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979. С. 46
3. *Boffa M.* The consistency problem for NF, The Journal of Symbolic Logic. Vol. 42, No. 2. June 1977, P. 215-220.
4. *Boffa M.* The point on Quine's NF (with a bibliography) // Theoria IV, (2), 3-13 *(1984).*
5. *Friedman H.* The consistency of classical set theory relative to a set theory with intuitionistic logic // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 38, No. 2. 1973, P.315-319.
6. *Posser J.B.* Logic for mathematicians // Chelsea Publishing Co., New York, 1978, XYI + 574 p. Appendix A
7. *Powell W.R.* Extending Godel's negative interpretation to ZF // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 40, No. 2. 1975, P.221-229.
8. *Quine W.* New Foundations for mathematical logic // American Mathem. Monthly. Vol. 44. P. 70-80.
9. *Specker E.* The axiom of choice in Quine's New Foundations for mathematical logic // Proceedings of National Academy of Science of the USA. Vol. 39, 1953, P. 972-975.
10. *Specker E.* Typical ambiguity. Logic, methodology and philosophy of science // Proceedings of the 1960 International Congress, Stanford, 1962, P. 116-124.

А.В.Чагров

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА АКСИОМАТИЗАЦИИ ТАБЛИЧНОЙ НОРМАЛЬНОЙ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКИ*

Abstract. *The main results: solving the old algorithmic problems of tabularity and coincidence of normal modal logics with given tabular logic. The problem of tabularity is undecidable; the problem of coinciting is decidable only when given tabular logic is inconsistent. There are other results; open problems are discussed.*

Введение

Среди всевозможных неклассических пропозициональных логик табличные логики, т.е. логики, обладающие конечными точными моделями, занимают особое место. Во-первых, это самые простые логики по способу семантического задания, а посему разумно, изучая произвольные логики из какой-либо данной совокупности, начинать это изучение с табличных членов совокупности. А во-вторых, многие из возникающих естественным образом логик финитно аппроксимируемы, так что если ограничить длину интересующих нас формул некоторым числом, то для каждой из этих логик можно найти конечную модель, точную для получившегося фрагмента.

С табличными логиками связаны несколько различных алгоритмических проблем, из которых к настоящему времени решены многие, но далеко не все. Частью это обусловлено тем, что большинство решений было получено в ситуациях, когда решения положительны, т.е. соответствующие алгоритмы существуют. Описание общей картины имеющихся данных читатель может найти в главе об алгоритмических проблемах в модальной логике в книге М.В.Захарьящева и автора [9]. Там же можно проконсультироваться о современном состоянии теории модальных логик.

Здесь мы займемся одной конкретной алгоритмической проблемой, которая долгое время оставалась открытой. Формулировка проблемы такова. *Пусть L – фиксированная табличная нормальная модальная логика. Существует ли алгоритм, который по произвольной формуле φ дает ответ на вопрос: является ли* $\mathbf{K} \oplus \varphi$ *аксиоматизацией* L? Следует заметить, что каждая таб-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 00-06-80037.

личная логика может быть аксиоматизирована в виде $\mathbf{K} \oplus \varphi$, т.е. одной аксиомой, дополнительной к **K**, что обеспечивает нетривиальность проблемы для всякой такой логики.

Разумно предположить, что решение проблемы зависит от выбора логики L. Для одного варианта такого выбора, когда L – противоречивая логика, положительное решение (оно же – положительное решение проблемы непротиворечивости нормальной модальной логики) известно давно. Оно непосредственно следует из теоремы Макинсона [11] (см. теорему 8.67 [9]; далее эта теорема формулируется точно, поскольку существенно будет использоваться). Ниже мы получаем отрицательные решения во всех остальных случаях.

Для удобства читателя мы приводим все необходимые определения и другой исходный материал, детали которого см. в [9].

Предварительные сведения

Модальные формулы (короче, формулы) строятся стандартным образом из пропозициональных переменных p_0, p_1, ... и константы $\bot$ (ложь) с помощью обычных пропозициональных связок $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ (конъюнкция, дизъюнкция, импликация) и модальной связки $\Box$ (необходимо, что ...). Другие связки считаются здесь обычными сокращениями:
$\neg\varphi = \varphi \rightarrow \bot$, $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ (отрицание и эквивалентность), $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$ (возможно, что ...).

Нормальной модальной логикой (короче, логикой) является всякое множество формул, включающее в себя все классически тождественно истинные формулы, формулу $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ и замкнутое относительно правил вывода, подстановку, *modus ponens* (из формул φ и $\varphi \rightarrow \psi$ следует ψ), правила Гёделя (из формулы φ следует $\Box\varphi$). Минимальную нормальную модальную логику обозначаем **K**, минимальную логику, содержащую формулу φ – $\mathbf{K} \oplus \varphi$; совокупность (решетку) всех нормальных модальных логик обозначаем $NExt\mathbf{K}$. Нас интересуют здесь только логики такого вида, поскольку: во-первых, все табличные логики конечно аксиоматизируемы; во-вторых, ввиду замкнутости всякой логики относительно правил соединения и разделения конъюнкции всякую конечно аксиоматизируемую логику можно аксиоматизировать одной формулой, дополнительной к **K**; в-третьих, в силу теоремы А.В.Кузнецова, см. [5] или теорему 17.1 [9], алгоритмические проблемы в данной области осмысленны (т.е. в случае своей нетривиальности *a priori* допускают положительное решение) только для конечных аксиоматизаций логик.

Напомним подходящий для наших целей семантический аппарат. Называем пару $\langle W,R\rangle$, где W – непустое множество (его элементы называются (возможными) мирами, или, ввиду графического изображения, точками), а R – бинарное отношение (достижимости) на нем, модальной шкалой Крипке (короче, шкалой).

Вместо $\langle a,b\rangle \in R$ пишем aRb. Записи типа $aRbRc$ являются сокращениями – aRb и bRc. Запись aR^nb означает, что из a в b можно попасть по отношению R за n шагов: aR^0b означает $a = b$, aR^1b – aRb, aR^2b – $\exists c\ (aRcRb)$, и т.д.

Изображаем шкалы графически: точки шкалы – кружочками, закрашенными (черными) – иррефлексивные, незакрашенными (белыми) – рефлексивные; отношение достижимости между различными точками – отрезками (из точки на нижнем конце отрезка достижима точка на верхнем конце) или векторами (стрелками), опуская отрезки или векторы, которые получаются по транзитивности, которая в случае ее выполнения для всей шкалы или какой-либо части шкалы особо оговаривается.

Оценка на шкале $\langle W,R\rangle$ – это функция V, сопоставляющая каждой переменной некоторое множество точек из W. Истинность формулы в точках шкалы $F = \langle W,R\rangle$ при оценке V определяется обычным образом. Считаем, что формула истинна в шкале, если она оказывается истинной в каждой точке шкалы при любой оценке. Шкала с оценкой называется моделью.

Устройство «верхней» части $NExt\mathbf{K}$ описывает теорема Макинсона [11]: всякая непротиворечивая нормальная модальная логика содержится в логике шкалы • (логике $\mathbf{K} \oplus \Box\bot$) или в логике шкалы ○ (логике $\mathbf{K} \oplus \Box p \leftrightarrow p$). Здесь первый случай имеет место тогда, когда логике не принадлежит формула $\Diamond\top$.

Логика является табличной, если она совпадает со множеством формул, истинных в некоторой конечной шкале (другими словами, является логикой этой шкалы); хорошо известно, что это определение эквивалентно иным определениям, связанным, например, с конечными алгебрами, а не шкалами, см. [9]. Имеется удобная для наших целей синтаксическая (формульная) характеризация табличных логик. Для ее формулировки используются последовательности формул α_s и β_s (обозначения носят локальный характер, поскольку далее этого абзаца формулы α_s и β_s не используются, в частности, буквы α и β ниже мы используем и для других целей), определяемых следующим образом:

$$\alpha_n = \neg(\varphi_1 \wedge \Diamond\ (\varphi_2 \wedge \Diamond\ (\varphi_3 \wedge \ldots \wedge \Diamond\varphi_n)\ldots)),$$

$$\beta_n = \wedge_{0\leq m\leq n-1} \neg\ \Diamond^m(\Diamond\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\varphi_n),$$

где $\varphi_i = p_1 \wedge \ldots \wedge p_{i-1} \wedge \neg p_i \wedge p_{i+1} \wedge \ldots \wedge p_n$, при $1 \leq i \leq n$. В частности, в [9] доказывается, что

1. *логика, расширяющая* $\mathbb{K}$ *(*с постулированием или без постулирования правил Гёделя*), таблична тогда и только тогда, когда для некоторого s ей принадлежит формула* $\alpha_s \wedge \beta_s$;
2. *имеется эффективно вычислимая функция* $f(s)$, *такая, что все шкалы с корнем, в которых истинна формула* $\alpha_s \wedge \beta_s$, *имеют не более* $f(s)$ *точек.*

Кроме того, там же отмечается простой факт: в шкале $F = \langle W,R \rangle$ опровергается формула α_s в точке x_1 в точности тогда, когда в F имеется псевдоцепь длины s, начинающаяся с x_1, т.е. $x_1Rx_2 \ldots Rx_s$ для некоторых различных $x_1, x_2, \ldots , x_s$.

Основным инструментом получения результатов о неразрешимости в дальнейшем будет сведение к интересующим нас модальным соотношениям проблем, касающихся машин Минского. Прежде всего напомним минимальный набор определений и фактов об этих машинах. Подробности с некоторыми несущественными изменениями можно найти, например, в [1].

Машина Минского с двумя лентами (в другой терминологии такие машины называют также регистровыми машинами с двумя регистрами или автоматами с двумя магазинами) полностью описывается своей программой, т.е. конечным списком инструкций следующих типов:

$\alpha \to \langle \beta,1,0 \rangle$, $\alpha \to \langle \beta,0,1 \rangle$,

$\alpha \to \langle \beta,\text{-}1,0 \rangle$ $(\langle \gamma,0,0 \rangle)$, $\alpha \to \langle \beta,0,\text{-}1 \rangle$ $(\langle \gamma,0,0 \rangle)$,

Последнюю, например, инструкцию следует понимать так: если машина находится в состоянии с номером α и на второй ленте записано число больше нуля, то, не меняя информации на первой ленте, уменьшить записанное на второй ленте число на единицу и перейти в состояние с номером β; если же на второй ленте записан ноль, т.е. «вычитать нечего», то из состояния с номером α перейти в состояние с номером γ, не меняя записи на лентах. Отождествляем машину Минского с ее программой.

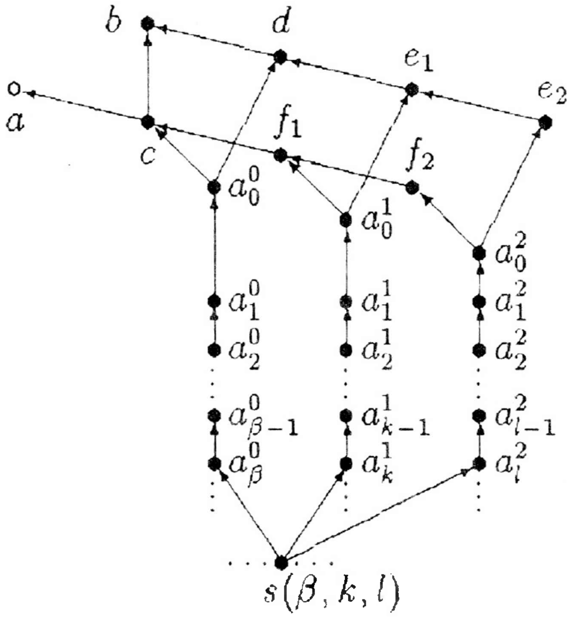
Будем называть тройку $\langle \alpha,k,l \rangle$ конфигурацией машины Минского, подразумевая, что α – номер состояния, k, l – записи (т.е. числа) на первой и второй лентах. Если конфигурация $\langle \alpha,k,l \rangle$ некоторым вычислением по программе P переходит в $\langle \beta,m,n \rangle$, то пишем P: $\langle \alpha,k,l \rangle \to \langle \beta,m,n \rangle$.

Исходной для дальнейшего неразрешимой проблемой будет следующая проблема конфигураций: по программе P и конфигурациям $\langle \alpha,k,l \rangle$ и $\langle \beta,m,n \rangle$ определить, верно ли, что P: $\langle \alpha,k,l \rangle \to \langle \beta,m,n \rangle$. Ее неразрешимость следует из известных более сильных утверждений, см. [1].

Моделирование вычислений выводами в модальных исчислениях

Здесь мы приведем подходящую для наших целей модификацию формульного моделирования вычислений на машинах Минского, первоначально использованного в [3], [4], см. также [5] и [9].

Итак, представим формулы, имитирующие конфигурации машин Минского. Для удобства зафиксируем произвольную программу P и произвольную конфигурацию $\langle\alpha,m,n\rangle$. Для понимания «смысла» вводимых формул полезно иметь в виду транзитивную шкалу $\mathcal{F}_0$ из приводимого ниже рисунка.



На этом рисунке точки a_β^0, a_k^1, a_l^2 изображают компоненты конфигурации $\langle\beta,k,l\rangle$, а $s(\beta,k,l)$ – саму эту конфигурацию. Полагаем, что в этой шкале имеются в точности такие точки $s(\beta,k,l)$, что P: $\langle\alpha,m,n\rangle \to \langle\beta,k,l\rangle$. Приведем формулы, описывающие точки шкалы в том смысле, что в точке истинна формула, обозначаемая той же, но прописной буквой и с теми же индексами, если они есть, которая в остальных точках ложна (поскольку формулы константны, оценка никакого значения не имеет):

$$A = \Diamond\top \wedge \Box\Diamond\top,\ B = \Box\bot,\ C = \Diamond A \wedge \Diamond B \wedge \neg\Diamond\Diamond B,$$
$$D = \neg C \wedge \Diamond B \wedge \neg\Diamond\Diamond B,\ E_1 = \Diamond D \wedge \neg\Diamond\Diamond D,\ E_2 = \Diamond E_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_1,$$
$$F_1 = \Diamond C \wedge \neg\Diamond\Diamond C\ ,\ F_2 = \Diamond F_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_1,$$
$$A_0^0 = \Diamond C \wedge \Diamond D \wedge \neg\Diamond\Diamond C \wedge \neg\Diamond\Diamond D,$$
$$A_0^1 = \Diamond E_1 \wedge \Diamond F_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_1,$$
$$A_0^2 = \Diamond E_2 \wedge \Diamond F_2 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_2 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_2,$$
$$A_{j+1}^i = \Diamond A_j^i \wedge \neg\Diamond\Diamond A_j^i \wedge \wedge_{i\neq k=0}^{2} \neg\Diamond A_0^k,$$

при $i \in \{0,1,2\}$, $j \leq 0$. Формулы, соответствующие в указанном смысле точкам вида $s(\beta,k,l)$, имеют более сложное обозначение $S(\beta,A_k^1, A_l^2)$, которое будет удобно в дальнейшем, где

$$S(\beta,\varphi,\psi) = \wedge_{i=0}^{\beta}\Diamond A_i^0 \wedge \neg\Diamond A_{\beta+1}^0 \wedge \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi \wedge \neg\Diamond\Diamond\varphi \wedge \neg\Diamond\Diamond\psi.$$

Проверить сказанное о только что приведенных формулах не составляет труда. Отсюда следует

Лемма 1. *При любой оценке на шкале $\mathcal{F}_0$ множество точек, в которых истинна формула $S(\beta,A_k^1,A_l^2)$, состоит ровно из одной точки $s(\beta,k,l)$, если P: $\langle\alpha,m,n\rangle \to \langle\beta,k,l\rangle$, и пусто, если условие P: $\langle\alpha,m,n\rangle \to \langle\beta,k,l\rangle$ не выполняется.*

Нам понадобятся еще формулы, позволяющие описывать не только фиксированные конфигурации, как $S(\beta,A_k^1,A_l^2)$, но и произвольные. Для этого используем

$$Q_1 = (\Diamond A_0^1 \vee A_0^1) \wedge \neg\Diamond A_0^0 \wedge \neg\Diamond A_0^2 \wedge p_1 \wedge \neg\Diamond\, p_1,$$
$$Q_2 = \Diamond A_0^1 \wedge \neg\Diamond A_0^0 \wedge \neg\Diamond A_0^2 \wedge \Diamond p_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond p_1,$$
$$R_1 = (\Diamond A_0^2 \vee A_0^2) \wedge \neg\Diamond A_0^0 \wedge \neg\Diamond A_0^1 \wedge p_2 \wedge \neg\Diamond\, p_2,$$
$$R_2 = \Diamond A_0^2 \wedge \neg\Diamond A_0^0 \wedge \neg\Diamond A_0^1 \wedge \Diamond p_2 \wedge \neg\Diamond\Diamond p_2.$$

Потребуем, чтобы переменные p_1 и p_2 не использовались для иных целей, в частности – не содержались ни в одном из вариантов вводимой далее формулы χ.

Лемма 2. *Пусть $\varphi \equiv \psi$ означает принадлежность логике* **K** *формулы $\varphi \leftrightarrow \psi$, а φ^* – результат подстановки в φ формул $\Diamond^k A_0^1$, $\Diamond^l A_0^2$ вместо переменных p_1, p_2. Тогда:*

$$Q_1^* \equiv A_k^1,\ Q_2^* \equiv A_{k+1}^1,\ R_1^* \equiv A_l^2,\ R_2^* \equiv A_{l+1}^2,$$
$$(S(\beta,Q_i,R_j))^* \equiv S(\beta,A_{k+(i-1)}^1,A_{l+(j-1)}^2),$$
$$(S(\beta,Q_1,A_0^2))^* \equiv S(\beta,A_k^1,A_0^2),$$
$$(S(\beta,A_0^1,R_1))^* \equiv S(\beta,A_0^1,A_l^2).$$

Доказательство тривиально.

Столь же просто, но чуть более рутинно, доказывается

Лемма 3. (i) *Пусть при некоторой оценке на шкале $\mathcal{F}_0$ для некоторой точки x выполняется $x \models Q_1$. Тогда для некоторого индекса $i \geq 0$*

$\{x : x \models Q_1\} = \{ a_i^1\}$, $\{ x : x \models Q_2 \} = \{ a_{i+1}^1\}$.

(ii) *Пусть при некоторой оценке на шкале $\mathcal{F}_0$ для некоторой точки x выполняется $x \models Q_2$. Тогда для некоторого индекса $i \geq 1$*

$\{x : x \models Q_2\} = \{ a_i^1\}$, $\{ x : x \models Q_1 \} = \{ a_{i-1}^1\}$.

(iii) *Пусть при некоторой оценке на шкале $\mathcal{F}_0$ для некоторой точки x выполняется $x \models R_1$. Тогда для некоторого индекса $i \geq 0$*

$\{x : x \models R_1\} = \{ a_i^2\}$, $\{ x : x \models R_2 \} = \{ a_{i+1}^2\}$.

(iv) *Пусть при некоторой оценке на шкале $\mathcal{F}_0$ для некоторой точки x выполняется $x \models R_2$. Тогда для некоторого индекса $i \geq 1$*

$\{x : x \models R_2\} = \{ a_i^2\}$, $\{ x : x \models R_1 \} = \{ a_{i-1}^2\}$.

Замечания. 1) В дальнейших рассуждениях используются не столько сами утверждения из леммы 3, сколько получающиеся из них аналоги этих утверждений для формул вида $S(\beta,Q_i,R_j)$, $S(\beta,A_0^1,R_1)$, $S(\beta,Q_1,A_0^2)$. Мы не приводим их очевидные формулировки, поскольку соответствующие доказательства состоят по существу в ссылках на утверждения леммы 3. 2) В последующем рассматриваются изменения шкалы $\mathcal{F}_0$, однако утверждения лемм 1, 3 и некоторых других непосредственно с ними связанных, как нетрудно проследить, сохранятся.

Теперь мы готовы к тому, чтобы подходящим для наших целей образом имитировать формулами машины Минского. Но прежде изменим шкалу $\mathcal{F}_0$, сделав это так, чтобы все предыдущие утверждения остались верными: добавим к ней точку g, достижимую из a, и положив, что из g достижимы все точки шкалы, в частности, g рефлексивна. Результат изменения обозначим $\mathcal{F}_1$.

Теорема 1. *Пусть χ – произвольная формула, опровержимая в любой точке шкалы $\mathcal{F}_1$, кроме b, такая, что* $\mathbf{K} \oplus \chi \nvdash \Diamond\top$. *Тогда проблема определения по произвольной формуле φ, верно ли, что* $\mathbf{K} \oplus \varphi = \mathbf{K} \oplus \chi$, *алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь χ из формулировки теоремы, определим новую формулу A –

$A = \Diamond\top \wedge \Box\Diamond\top \wedge \Diamond\Diamond\Box\bot$.

Для вводимых далее формул используем сокращение (оператор «всеведения»): $\bigcirc = \Diamond\Diamond\Diamond$.

Теперь инструкциям программы P сопоставляем имитирующие формулы так:

- в случае $I = \gamma \to \langle\delta,1,0\rangle$ полагаем

  $AxI = \neg\chi \wedge \bigcirc S(\gamma,Q_1,R_1) \to \neg\chi \wedge \bigcirc S(\delta,Q_2,R_1)$;
- в случае $I = \gamma \to \langle\delta,0,1\rangle$ полагаем

  $AxI = \neg\chi \wedge \bigcirc S(\gamma,Q_1,R_1) \to \neg\chi \wedge \bigcirc S(\delta,Q_1,R_2)$;
- в случае $I = \gamma \to \langle\delta_1,-1,0\rangle(\langle\delta_2,0,0\rangle)$ полагаем

  $AxI = (\neg\chi \wedge \bigcirc S(\gamma,Q_2,R_1) \to \neg\chi \wedge \bigcirc S(\delta_1,Q_1,R_1)) \wedge$
  $\wedge (\neg\chi \wedge \bigcirc S(\gamma,A_0^1,R_1) \to \neg\chi \wedge \bigcirc S(\delta_2, A_0^1,R_1))$;
- в случае $I = \gamma \to \langle\delta_1,0,-1\rangle(\langle\delta_2,0,0\rangle)$ полагаем

  $AxI = (\neg\chi \wedge \bigcirc S(\gamma,Q_1,R_2) \to \neg\chi \wedge \bigcirc S(\delta_1,Q_1,R_1)) \wedge$
  $\wedge (\neg\chi \wedge \bigcirc S(\gamma,Q_1, A_0^2) \to \neg\chi \wedge \bigcirc S(\delta_2, Q_1, A_0^2))$.

Теперь определяем формулу

$AxP = \wedge_{I \in P} AxI$.

Индукцией по длине вычисления по программе P с использованием леммы 2 доказывается

Лемма 4. *Пусть* $P : \langle\alpha,m,n\rangle \to \langle\beta,k,l\rangle$. *Тогда*
$\mathbf{K} \oplus AxP \vdash \neg\chi \wedge \bigcirc S(\alpha,A_m^1, A_n^2) \to \neg\chi \wedge \bigcirc S(\beta,A_k^1, A_l^2)$.

Заметим, что, как и следует ожидать, верно и обращение утверждения этой леммы, т.е. при подходящем выборе программы P исчисление $\mathbf{K} \oplus AxP$ неразрешимо. Вернемся, однако, к нашей задаче; тем более что нас будет интересовать не это исчисление, а некоторое его расширение.

Введем логику

$$L = \mathbf{K} \oplus AxP \oplus$$
$$\oplus (\neg \chi \wedge \bigcirc S(\alpha, A_m^1, A_n^2) \rightarrow \neg \chi \wedge \bigcirc S(\beta, A_k^1, A_l^2)) \rightarrow \chi.$$

Лемма 4. *Пусть* $P : \langle \alpha, m, n \rangle \rightarrow \langle \beta, k, l \rangle$. *Тогда* $L = \mathbf{K} \oplus \chi$.

Доказательство. Включение $L \subseteq \mathbf{K} \oplus \chi$ следует из устройства аксиом L, дополнительных к $\mathbf{K}$: каждая из них содержит положительное вхождение χ, а потому принадлежит $\mathbf{K} \oplus \chi$. Обратное включение получается применением леммы 4 и правила *modus ponens*.

В ходе доказательства следующей леммы используется то, что множество точек $\mathcal{F}_1$, в которых опровержима χ, совпадает с множеством тех точек $\mathcal{F}_1$, из которых «за три шага» (через g) достижима всякая имеющаяся в $\mathcal{F}_1$ точка вида $s(x,y,z)$, а также леммы 1 и 3.

Лемма 5. *Пусть* P: $\langle \alpha, m, n \rangle \rightarrow \langle \beta, k, l \rangle$. *Тогда* $\mathcal{F}_1 \vDash L$ *и, в частности, по выбору* χ *выполняется* $\chi \notin L$, *то есть логика* L *не совпадает с* $\mathbf{K} \oplus \chi$.

Утверждение теоремы 1 следует из лемм 4 и 5.

Теперь извлечем из доказанной довольно общей теоремы более конкретные следствия.

Обратим внимание, что из любой точки $\mathcal{F}_1$, кроме b, исходят сколь угодно длинные псевдоцепи, а значит в каждой из этих точек опровергается аксиоматика любой табличной логики. Кроме того, если логике не принадлежит $\Diamond\top$, то по теореме Макинсона [11] ее аксиомы не могут опровергаться в одноэлементной иррефлексивной шкале, а потому и в точке b шкалы $\mathcal{F}_1$. Эти факты вместе с теоремой 1 дают нам следующее утвердение.

Теорема 2. *Пусть* L' *– такая табличная нормальная модальная логика, что* $\Diamond\top \notin L'$. *Тогда проблема совпадения с* L' *в* $NExt\mathbf{K}$ *неразрешима.*

Кроме того, из леммы 5 получаем, что если P: $\langle \alpha, m, n \rangle \rightarrow \langle \beta, k, l \rangle$, то L не таблична, а потому выполняется и

Теорема 3. *Проблема табличности в* $NExt\mathbf{K}$ *неразрешима.*

Непосредственным следствием теоремы 1 является такой факт: *если* L' *– конечно-аксиоматизируемое непротиворечивое нормальное расширение логики* $\mathbf{GL} = \mathbf{K4} \oplus \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$, *то проблема совпадения нормального расширения* $\mathbf{K}$ *с* L' *неразрешима.* Можно, конечно, привести и другие примеры утверждений такого рода, однако для **K4**, например, теорема 1 не действует, поскольку ее аксиома $\Box p \to \Box\Box p$ не опровержима в точке g шкалы $\mathcal{F}_1$. Но можно вновь изменить немного конструкцию, добавив к шкале $\mathcal{F}_1$ новую точку g', из которой достижима только g. После такого изменения g' станет единственной точкой новой шкалы, в которой опровергается $\Box p \to \Box\Box p$, и единственной ее точкой, из которой за два шага достижимы точки вида $s(x,y,z)$. Теперь, рассуждая как и выше, мы получим, что верна

Теорема 4. *Пусть L' – конечно-аксиоматизируемое непротиворечивое нормальное расширение логики* **K4**. *Тогда проблема совпадения нормальной модальной логики с L' неразрешима.*

Обратимся теперь к двум близким к табличности свойствам – предтабличности и локальной табличности. Первое свойство зависит от выбора семейства рассматриваемых логик, поэтому уточним, что здесь нормальная модальная логика предтаблична, если она не таблична, но всякое ее собственное нормальное расширение таблично.

Теорема 5. *Свойство предтабличности в $NExt$***K** *алгоритмически неразрешимо.*

Доказательство. Выберем в ходе доказательства теоремы 1 в качестве χ аксиоматизацию какого-нибудь предтабличного расширения **GL**, например, **GL** $\oplus\ \Box\Box\bot$. Тогда в случае $P\colon \langle\alpha,m,n\rangle \to \langle\beta,k,l\rangle$ логика L оказывается предтабличной в силу леммы 4. Если же условие $P\colon \langle\alpha,m,n\rangle \to \langle\beta,k,l\rangle$, то логика шкалы $\mathcal{F}_1$ оказывается собственным нормальным расширением L, которое не таблично. В самом деле, нетабличность логики шкалы $\mathcal{F}_1$ уже отмечалась в доказательстве теоремы 2; по лемме 4 эта логика является расширением L. Теперь заметим, что $\mathcal{F}_1 \models \Box(\Box\bot \to p) \vee \Box(\Box\bot \to \neg p)$. Образуем шкалу $\mathcal{F}_2$, добавив к $\mathcal{F}_1$ «двойника» точки b, т.е. иррефлексивную точку b', находящуюся в таких же отношениях с точками $\mathcal{F}_1$, что и b. Как лемма 5, доказывается, что $\mathcal{F}_2 \models L$, в то же время, введя оценку так, что $b \not\models p$, $b' \models p$, мы получим $g \not\models \Box(\Box\bot \to p) \vee \Box(\Box\bot \to \neg p)$, то есть эта формула не принадлежит L.

Следующее утверждение доказано, по существу, в ходе доказательства теоремы 2.

Теорема 6. *Проблема локальной табличности нормальных модальных логик неразрешима.*

Доказательство. В самом деле, пусть χ – как в доказательстве теоремы 2. По лемме 4 в случае $P\colon \langle\alpha,m,n\rangle \to \langle\beta,k,l\rangle$ логика L таблична, а значит, и локально таблична. А в случае, если условие P:

$\langle \alpha,m,n\rangle \to \langle \beta,k,l\rangle$ не выполняется, из леммы 5 следует, что существует бесконечно много попарно не эквивалентных константных формул. Примером могут служить формулы A_i^0, $i \in \omega$, поскольку $\mathcal{F}_1 \nvDash A_i^0 \to A_j^0$ при $i \neq j$. Таким образом, даже фрагмент L из формул без переменных не является табличным.

Основной результат

В предыдущем разделе мы в качестве одного из первых результатов, связанных с моделированием работы машин Минского выводами в модальных исчислениях, доказали теорему 2, которая является частью объявленного во введении нашего основного результата, а именно: здесь будет доказана

Теорема 7. *Противоречивая логика – это единственная табличная нормальная модальная логика, проблема совпадения с которой произвольной нормальной модальной логики разрешима.*

Доказательство. Прежде всего, обратимся к противоречивой логике. В силу теоремы Макинсона [11] логика $\mathbf{K} \oplus \varphi$ противоречива в точности тогда, когда φ опровергается и в шкале •, и в шкале o, что ввиду их конечности эффективно проверяемо.

Что касается проблем совпадения с непротиворечивыми табличными логиками, то ввиду доказанной теоремы 2 нам осталось рассмотреть произвольную непротиворечивую табличную логику L', такую что $L' \vdash \Diamond\top$. Покажем, что и в этом случае проблема совпадения с L' в $NExt\mathbf{K}$ неразрешима.

В доказательстве теоремы 2 мы довольно существенно использовали то, что рассматриваемые логики имели в качестве расширения логику $\mathbf{K} \oplus \Box\bot$. По теореме Макинсона [11] все остальные логики содержат $\mathbf{D} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top$.

Опять воспользуемся изменением шкалы $\mathcal{F}_0$: добавим к ней две точки – g_0 и g_1, положив, что g_0 рефлексивна, g_1 иррефлексивна, но из g_1 достижимы все остальные точки шкалы, кроме a и b, причем сама g_1 достижима только из a и b. Результат изменения обозначим $\mathcal{F}_3$.

Теорема 8. *Пусть χ – произвольная формула, опровержимая в некоторой точке шкалы $\mathcal{F}_3$, но не в g_0, причем $\mathbf{K} \oplus \chi \vdash \Diamond\top$. Тогда проблема определения по произвольной формуле φ, верно ли, что $\mathbf{K} \oplus \varphi = \mathbf{K} \oplus \chi$, алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь χ из формулировки теоремы и оценку для ее переменных, при которой χ в $\mathcal{F}_3$ опровергается.

Опровержимость χ хотя бы в одной точке $\mathcal{F}_3$, но не в g_0, дает нам, что χ содержит по крайней мере одну переменную, скажем, u, такую, что для опровержения χ в $\mathcal{F}_3$ необходимо, чтобы в $\mathcal{F}_3$ были точки, в которых u оценена по-разному, так как в противном случае опровергающая χ модель на $\mathcal{F}_3$ будет иметь в качестве p-морфного образа модель из одной точки, т.е. χ удастся-таки опровергнуть в g_0. Легко видеть, что g_0 при этом оказывается единственной точкой $\mathcal{F}_3$, в которой истинна формула

$$\gamma_0 = \Box\Box\Box u \vee \Box\Box\Box\neg u ,$$

а g_0 – единственная точка $\mathcal{F}_3$, в которой истинна формула

$$\gamma_1 = \Diamond\gamma_0 \wedge (u \vee \Diamond u \vee \Diamond\Diamond u) \wedge (\neg u \vee \Diamond\neg u \vee \Diamond\Diamond\neg u).$$

Отметим, что из любой точки $\mathcal{F}_3$, кроме g_0, «за три шага» достижима любая точка, т.е. мы вновь можем использовать оператор «всеведения» $\bigcirc$ (т.е. $\Diamond\Diamond\Diamond$). Однако теперь мы, конечно же, меняем χ из предыдущего раздела на χ, рассматриваемую здесь, и меняем формулы, характеризующие (при условии выбора оценки, опровергающей χ в какой-нибудь точке, конечно) точки a и b на следующие:

$$A = \Diamond\gamma_1 \wedge \Diamond\Diamond\gamma_1,\ B = \Diamond\gamma_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond\gamma_1.$$

Все остальные определения формул оставляем без изменений.

Сохраняя определения после указанных изменений, заново введем логику

$$L = \mathbf{K} \oplus AxP \oplus$$
$$\oplus\ (\neg\,\chi \wedge \bigcirc\ S(\alpha, A_m{}^1, A_n{}^2) \to \neg\,\chi \wedge \bigcirc\ S(\beta, A_k{}^1, A_l{}^2)) \to \chi.$$

Вновь стандартно доказывается

Лемма 6. *Пусть* $P\colon \langle\alpha,m,n\rangle \to \langle\beta,k,l\rangle$. *Тогда* $L = \mathbf{K} \oplus \chi$.

В ходе доказательства следующей леммы используется то, что множество точек $\mathcal{F}_3$, в которых опровержима χ, совпадает с множеством тех точек $\mathcal{F}_3$, из которых «за три шага» достижима всякая имеющаяся в $\mathcal{F}_3$ точка вида $s(x,y,z)$.

Лемма 7. *Пусть* $P\colon \langle\alpha,m,n\rangle \to \langle\beta,k,l\rangle$. *Тогда* $\mathcal{F}_3 \models L$ *и, в частности, по выбору* χ *выполняется* $\chi \notin L$, *то есть* L *не совпадает с* $\mathbf{K} \oplus \chi$.

Утверждение теоремы 8 следует из лемм 6 и 7. А теорема 8 завершает доказательство теоремы 7.

Теперь аналогично тому, как было получено утверждение теоремы 2, получаем ее аналог в случае, рассматриваемом в теореме 8.

Теорема 9. *Пусть* L' *– непротиворечивая табличная нормальная модальная логика, такая, что* $L' \vdash \Diamond\top$. *Тогда проблема совпадения нормальной модальной логики с* L' *неразрешима.*

Теореме 4 аналогична по доказательству

Теорема 10. *Пусть L' – конечно-аксиоматизируемое непротиворечивое нормальное расширение логики* **K4D** = **K4** $\oplus \Diamond\top$. *Тогда проблема совпадения нормального расширения* **D** *с* L' *неразрешима.*

Замечание. Утверждения теорем данного раздела без изменения доказательств можно усилить, рассматривая нормальные расширения **D** вместо нормальных расширений **K**.

Заключительные замечания

Здесь мы упомянем некоторые близкие к решенной в предыдущих разделах проблеме задачи, как имеющие близкие решения, так и остающиеся открытыми.

Прежде всего, какова ситуация в естественных подрешетках решетки *NExt***K**? (Об одной из них мы упомянули в конце предыдущего раздела.) Напомним, что проблема табличности модальных логик рассматривалась изначально для нормальных расширений **S4**: независимо в [2] и в [10] было получено положительное ее решение с помощью полного описания совокупности предтабличных в *NExt***S4** логик, которых оказалось всего пять, причем достаточно просто устроенных. В то же время интерес представляет несколько более обширный класс логик – *NExt***K4**. Оказалось [6], что в этом случае совокупность предтабличных логик континуальна, т.е. идеи, использованные в [2] и [10], непосредственно не применимы. Однако для проблемы табличности важны лишь локально табличные предтабличные логики, а вот их-то удается описать вполне приемлемым образом, см. [7]. Как известно, локальная табличность расширения **K4** эквивалентна его конечнослойности. Так вот, в каждом конечном слое (т.е. слое с конечным номером) расширений **K4** имеется лишь конечное эффективно описываемое множество достаточно простых предтабличных логик. Учитывая это описание и то, что в случае установления локальной табличности расширения **K4** можно эффективно вычислить номер слоя, которому оно принадлежит, получаем, что *если разрешима проблема локальной табличности (эквивалентно, проблема конечно-слойности) нормальных расширений* **K4**, *то разрешима и проблема табличности нормальных расширений* **K4**. Посылка этого утверждения – до сих пор открытая проблема. Заметим, что аналог проблемы, решенной нашей теоремой 7, в случае *NExt***K4** довольно прост: всякая проблема совпадения нормального расширения **K4** с данной фиксированной табличной логикой разрешима. Это обосновывается с помощью критерия типа Янкова: в *NExt***K4** всякая табличная логика имеет конечное эффективно находимое множество непосредственных предшественников по включению и все они табличны. Аналогичный результат не верен для *Ext***K4**, т.е. для всех, а не обязательно замкнутых по правилу Гёделя, расширений **K4**: здесь оказывается неразрешимой даже проблема непротиворечивости, как, впрочем, и все другие упоминавшиеся проблемы; точно такая картина справедлива для *NExt***K4t** – решетки нормальных расширений временной логики транзитивных шкал, не говоря уж о *NExt***Kt**, см. [8]. Отметим, что при рассмотрении *Ext***S4** мы оказываемся в существенно более благоприятной алгоримической ситуации: для табличных логик действуют критерии типа Янкова (в частности, разрешима проблема непротиворечивости), разрешимы проблемы табличности, локальной табличности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.
2. *Максимова Л.Л.* Предтабличные расширения логики S4 Льюиса // Алгебра и логика. 1975. Т. 14. № 1. С. 28–55.
3. *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства логики доказуемости // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 3. С. 350–367.
4. *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства логики доказуемости. II// Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 613–623.
5. *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 1994. Вып. 5. С. 62–108.
6. *Blok V.J.* Pretabular varieties of modal algebras // Studia Logica. 1980. V.39. No. 2/3. P. 101–124.
7. *Chagrov A.V.* A first-order effect and modal propositional formulas // Andrea Cantini, etc. (Eds.) Logic and Foundation of Mathematics. Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 209–217.
8. *Chagrov A.V., Shehtman V.B.* Algorithmic aspects of tense logics // L.Pacholski, J.Tiuryn. (Eds.) Computer Science Logic, CSL '94. Springer, Lecture Notes in Computer Science. 1995. V. 933. P. 442–455.
9. *Chagrov A.V.. Zakharyaschev M.* Modal Logic // Oxford University Press, 1997. 603 p.
10. *Esakia L.L., Meskhi V.Yu.* Five critical systems // Theoria. Vol. 40. P. 52–60.
11. *Makinson D.C.* Some embedding theorems for modal logic // Notre Dame J. Form. Log. 1977. Vol. 12. P. 252–254.

Я.В.Шрамко

ОБОБЩЕННЫЕ ИСТИННОСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ: РЕШЕТКИ И МУЛЬТИРЕШЕТКИ

Abstract. *I describe a generalized truth-value space of constructive logic based on the concept of a generalized truth value. This space is organized by a specific algebraic structure – a* ***trilattice*** *which is a lattice with three partial orderings, representing respectively an increase in information, truth and constructivity. See also the counterpart paper [47].*

> Зачем же ты, бродяга, на базаре смущал народ, рассказывая про истину, о которой ты не имеешь представления? Что есть истина?
>
> (*М. Булгаков*. Мастер и Маргарита)

1. Готтлоб Фреге: истинностные значения как абстрактные объекты

Понятие *истинностного значения* ввел в логику выдающийся логик и философ конца XIX–начала XX ст. Г.Фреге (см. его статьи «Функция и понятие» и «О смысле и значении» в [10]). При этом он отказался от традиционной трактовки истинности как *свойства* высказываний. Хотя последняя трактовка во многом опирается на повседневную языковую интуицию, которая «подсказывает» нам, что, например, в утверждении «Высказывание '3 больше 2' истинно» речь идет о наличии у высказывания определенного свойства «быть истинным», Фреге отмечает, что в данном случае обыденная языковая интуиция не проясняет существа дела, а скорее вводит нас в заблуждение. В самом деле, в утверждениях, подобных приведенному выше, предикат «истинный», вообще говоря, излишен и, будучи легко элиминируемым из дискурса, не репрезентирует никакого реального свойства (см [10, с. 305]).

Вывод, к которому приходит Фреге, состоит в том, что истинность и ложность вовсе не являются свойствами высказываний, а представляют два *абстрактных предмета* – «**истину**» (das Wahre) и «**ложь**» (das Falsche), призванных служить в качестве *значений* высказываний (а именно их истинностных значений). Таким образом, в философии языка Фреге высказывания трактуются как специальный вид имен, обозначающих истину или ложь:

> «Предложение по существу есть собственное имя, значением которого, если таковое вообще имеется, является истинностное значение: истина или ложь» (перевод мой, ср. [10, с. 305]).

Эта идея лежит в основе Фрегевской концепции логики и его философии языка. Логика получает тем самым онтологическое обоснование и характеризуется как «наука о наиболее общих законах бытия истины» [10, с. 307]. Такой взгляд на предмет логики разделял также Лукасевич, который определял логику как науку об истинностных значениях:

> «Все истинные высказывания обозначают один и тот же объект, а именно истину, и все ложные высказывания обозначают один и тот же объект, а именно ложь. Я рассматриваю истину и ложь как единичные (singular) объекты... Онтологически аналогом истины является бытие, а лжи – небытие. Объекты, обозначаемые высказываниями, называются *логическими значениями*. ... Логика есть наука об особого рода объектах, а именно наука о *логических значениях*» ([38, с. 90]).

В рамках этой конструкции важную роль играет *функция истинностной оценки* (истинностная функция), которая представляет собой функцию из множества высказываний во множество истинностных значений, обеспечивая таким образом взаимосвязь между высказываниями и их значениями. Если в качестве последних принимается множество истинностных значений Фреге $\{T, F\}$, то функция истинностной оценки представляет собой *классическую* функцию истинности. Классическая *функция* истинности является всюду определенной. Таким образом, она приписывает каждому высказыванию какой-нибудь (и только один) элемент из указанного множества, обеспечивая тем самым соблюдение классических метапринципов *бивалентности* и *однозначности*: всякое высказывание является истинным или ложным и при этом исключается ситуация, когда высказывание является истинным и ложным одновременно.

Следует обратить внимание на то, что по Фреге истинностные значения являются особого рода *абстрактными* предметами. Иными словами, они аналогичны таким объектам, как числа, понятия и множества. В настоящей статье будет показано, что в последнем случае речь идет о чем-то большем, чем о простой аналогии. Можно утверждать, что в определенном смысле истинностные значения и *есть* множества. В данной статье предлагается некоторая точная экспликация истинностных значений *как* определенного вида *множеств*, а также рассматриваются структуры, задаваемые на множествах таких множеств.

2. Пресыщенные оценки и истинностно-значные провалы. Функция мультиоценки

Как известно, принципы бивалентности и однозначности восходят еще к Аристотелю. Тем не менее, общезначимость этих принципов неоднократно подвергалась сомнению. По-видимому, сам Аристотель был первым, кто подверг критике принцип бивалентности (в связи с проблемой так называемых «будущих случайных событий»). Лукасевич, рассмотрев эту проблему, пришел к идее трехзначной логики, инициировав тем самым целое направление современной неклассической логики – многозначную логику. Другое влиятельное течение неклассической логики, в рамках которого не принимается принцип бивалентности, так называемая «частичная логика» (*partial logic*).

В отличие от принципа бивалентности принцип однозначности гораздо реже подвергался сомнению. Тем не менее, некоторые авторы (и Лукасевич здесь также выступил одним из пионеров, см. [37]) выдвигали и выдвигают довольно веские аргументы в пользу той точки зрения, что в некоторых случаях от этого принципа необходимо (или «полезно») отказаться. Так возникают дискуссивная логика Яськовского [36], паранепротиворечивая логика Да Косты [21], исчисление антиномий Асеньо [17], логика парадокса Приста [40] и др.

Дж.М.Данн в ряде работ (см., напр. [22]; [24]) обосновал и развил новаторскую стратегию построения логической семантики, в которой высказывания не только могут принимать обычные значения «истина» или «ложь», но также допускаются случаи, когда некоторые высказывания одновременно принимают *оба* эти значения (т. е. являются одновременно истинными *и* ложными), или же не примают никакого из этих значений (*не* являются *ни* истинными, *ни* ложными). Первый из таких нестандартных случаев иногда называют «пресыщенной оценкой», а второй – «истинностно-значным провалом» (см. [9, гл. IV]). Истинностные провалы и пресыщенные оценки возможны (и необходимы) тогда, когда имеющаяся в наличии информация неполна или противоречива. Ситуации неполноты и противоречивости информации довольно часто встречаются в познавательной практике, так что истинностные провалы и пресыщенные оценки получают естественное интуитивное обоснование (ср. [1]; [2]; [48]).

Ясно, что классическая функция истинности не позволяет смоделировать такие нестандартные ситуации. Значит, отказ от принципов бивалентности и однозначности предполагает также отказ от классической функции истинности и использование вместо нее какой-нибудь иной семантической процедуры приписывания высказываниям истинностных значений (а возможно, и пересмотр самого понятия истинностного значения).

В [24] Данн предлагает *два* разных способа построения такой процедуры. Первый способ заключается в том, что вместо функции истинности можно использовать просто двуместное *отношение* между множеством высказываний и множеством истинностных значений {T, F}. В этом случае истинностная оценка понимается как некоторое отношение, которое *не обязательно является функциональным*. Такая оценка соотносит с каждым предложением либо *какое-то одно* из имеющихся двух истинностных значений (тогда она ведет себя в точности как классическая функция истинности), либо не соотносит с ним *никакого* значения (не всюду определенная функция), либо ставит ему в соответствие сразу *оба* истинностных значения (нефункциональное отношение). Для определенной таким образом истинностной оценки принципы бивалентности и однозначности очевидным образом не выполняются.

Нужно, однако, отметить, что в одном принципиальном аспекте указанный способ не вполне отвечает онтологической концепции Фреге, где в качестве фундаментальных онтологических категорий принимаются категории *предмета* и *функции* (см. «Функция и понятие» и «О понятии и предмете» в [10]). Поэтому, с философской точки зрения, предпочтительнее выглядит другой способ обобщения классической функции истинности, рассматриваемый Данном, который состоит в том, что истинностная оценка продолжает трактоваться как функция, но в качестве множества значений этой функции выступают теперь не *элементы* множества {T, F}, а *подмножества* данного множества (включая и пустое множество). В [47] понимаемую таким образом обобщенную функцию истинности предлагается называть *функцией мультиоценки* (или мультиоценочной функцией; см также [13]). В результате применения к какому-нибудь высказыванию функции мультиоценки наряду с «обычными» (классическими) приписываниями {T}, {F} получаем два новых возможных приписывания: {} (истинностно-значный провал) и {T,F} (пресыщенная оценка). Использование обобщенной функции истинности позволяет отказаться от принципов бивалентности и однозначности и довольно естественным образом смоделировать неполные и противоречивые познавательные ситуации, о которых упоминалось выше.

3. Обобщенные истинностные значения. Четырехзначная логика и двойные решетки

По существу введение функции мультиоценки означает не только интересное обобщение классической функции истинности, но и влечет за собой важное обобщение самого понятия *истинностного значения*. Первым на это обратил внимание Н. Белнап, который в своих статьях [18]; [19] предложил рассмотреть «полезную четырехзначную логику». При этом он исходил из «компьютеризированной» интерпретации тех абстрактных эпистемических ситуаций, о которых идет речь в [24]. В самом деле, компьютеру часто приходится иметь дело с *неполной* и/или *противоречивой* информацией. Тем не менее, было бы желательно, чтобы компьютер, даже столкнувшись с такого рода базами данных, все же продолжал работать с определенной степенью надежности.

Пусть под истинностным значением некоторого высказывания понимается та информация (о данном высказывании), которая была *сообщена* компьютеру. Тогда, наряду с «нормальными» ситуациям, когда компьютеру сообщается, что высказывание является истиннным либо ложным, мы должны принимать во внимание и ситуации (к сожалению, довольно часто встречающиеся в практике), когда компьютеру не было предоставлено никакой определенной информации, либо была предоставлена («введена») противоречивая информация. Последняя ситуация вполне может иметь место, если компьютер получает данные из различных источников, данные вводятся в разное время, или же, когда противоречие содержится в данных лишь *неявным* образом.

Таким образом, мы получаем следующие *четыре* истинностные значения, соответствующие четырем возможным эпистемическим ситуациям (заметим, что эти четыре значения в точности совпадают с отмеченными выше возможными приписываниями мультиоценочной функции):

T = {T} – компьютеру была сообщена *только* истина;

F = {F} – компьютеру была сообщена *только* ложь;

B = {T, F} – компьютеру были сообщены *одновременно* истина *и* ложь;

N = { }– компьютеру не были сообщены *ни* истина, *ни* ложь.

Эти новые значения истинности могут быть названы *обобщенными истинностными значениями*[1]. Иными словами, можно утверждать, что применение мультиоценочной функции к некото-

---

[1] Ясно, что ссылка на компьютер не является обязательной, она играет здесь определенную *прикладную* (или эвристическую) роль, от которой при желании (или необходимости) легко можно абстрагироваться.

рому исходному множеству «обычных» истинностных значений дает нам множество обобщенных истинностных значений, каждое из которых представляет собой некоторое подмножество исходного множества (включая, конечно, и пустое множество). Переход к понятию обобщенного истинностного значения вполне соответствует Фрегевской трактовке истинностных значений как абстрактных объектов. Как уже отмечалось выше, типичным примером такого рода (математических и логических) объектов являются множества, поэтому резонно рассмотреть истинностные значения именно как некоторые множества, что и происходит в понятии обобщенного истинностного значения.

Белнап отметил, что четыре обобщенных истинностных значения образуют *решетку*, которую он называет «логическая решетка **L4**». Напомним, что частично упорядоченное множество называется решеткой, если для любых двух элементов из этого множества существуют наименьшая верхняя и наибольшая нижняя грани. Графически решетка **L4** может быть представлена посредством диаграммы Хассе, как на рис. 1 слева (см. Приложение). Решеточный порядок направлен здесь снизу вверх и располагает элементы в порядке возрастания их истинности. Эта решетка является «логической», поскольку задаваемые на ней операции объединения ($\vee$) и пересечения ($\wedge$) представляют логические операции дизъюнкции и конъюнкции соответственно. Например, $\mathbf{T} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F}$, $\mathbf{N} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{F}$, $\mathbf{N} \vee \mathbf{B} = \mathbf{T}$, и т.д. Операция же, которая обращает решеточный порядок, представляет операцию логического отрицания: $\sim\mathbf{T} = \mathbf{F}$, $\sim\mathbf{F} = \mathbf{T}$, $\sim\mathbf{N} = \mathbf{N}$, $\sim\mathbf{B} = \mathbf{B}$.

Белнап замечает, что те же самые четыре истинностные значения образуют и другую решетку, так называемую *аппроксимационную решетку*[2], которую он называет **A4**. Решеточный порядок на **A4** может быть интерпретирован как своего рода «информационный порядок»: чем «выше» находится элемент данной решетки, тем больше информации он несет (см. рис. 1, справа). **N** является нижней точкой («нулем») решетки **A4**, поскольку не заключает в себе вообще никакой информации, а **B** является вершиной («единицей») этой решетки, так как сообщает максимальное количество (вообще-то, противоречивой) информации.

Следующая интересная идея состоит в том, чтобы попробовать осуществить комбинацию этих двух решеток и рассмотреть их в качестве единой структуры. Первым эту идею высказал и реализовал Гинсберг, введя в [33] и [34] понятие *двойной решетки* (или бирешетки – *bilattice*). *Бирешетка* представляет собой непустое

---

[2] Понятие аппроксимационной решетки было предложено Д.Скоттом [43].

множество с *двумя* частичными порядками – $\leq_i$ и $\leq_t$, каждый из которых образует на этом множестве полную решетку. Содержательно $\leq_i$ представляет возрастание информации, а $\leq_t$ – возрастание истинности элементов, образующих двойную решетку. Комбинация **L4** и **A4** дает нам наиболее простую нетривиальную бирешетку, которую мы будем называть $FOUR_2$. Графически эта бирешетка представлена на рис. 2 посредством двойной диаграммы Хассе, помещенной в координатную плоскость, где ось абсцисс репрезентирует логический порядок, а ось ординат – информационный.

Бирешетки довольно хорошо изучены в литературе (см. [16]; [28]; [41]). Фиттинг (см. [29, с. 225]) охарактеризовал такие решетки как *обобщенные истинностно-значные пространства* и подчеркнул важность изучения этих пространств с точки зрения теории истины. Существенным, однако, представляется то обстоятельство, что «истина» и «ложь», которые служат в качестве «базиса» для бирешеток (в первую очередь для $FOUR_2$) представляют собой *классические* истинностные значения. Можно предположить, что обобщение понятия истинностного значения для различных *неклассических* логик даст нам обобщенные истинностно-значные пространства, отличающиеся от классического. Например, интересно посмотреть, какого рода структура получится, если применить мультиоценочный подход к истинностным значениям *конструктивной логики*.

4. Истина и ложь в конструктивной логике

Что значит для логики быть конструктивной? Иными словами, каков критерий, позволяющий охарактеризовать ту или иную логическую систему как конструктивную? Существует довольно много логических систем, причисляемых к числу конструктивных: интуиционистская логика Гейтинга, минимальная логика Иогансона, конструктивная логика Маркова, логика конструктивной ложности Нельсона, семейство суперинтуиционистских логик и т.д. С семантической точки зрения отличительным признаком конструктивных логических систем является используемое в них особое понятие истины, которое существенным образом отличается от классического понятия истины. В любой конструктивной логике принимается то, что может быть названо *конструктивной концепцией истины*. Согласно этой концепции, высказывание считается истинным тогда и только тогда, когда оно является *конструктивно доказанным*, т.е. когда имеется эффективная процедура, позволяющая построить (получить) доказательство данного высказывания. Во избежание круга само понятие конструктивного доказательства вводится посредством стандартного индуктивного определения, фиксируя сначала, что представляет собой конструктивное доказательство атомарных высказываний, а затем распространяя это понятие на высказывания, содержащие логические константы.

Важным свойством конструктивной истины является *свойство сохранности* (иногда называемое также свойством монотонности): высказывание, будучи однажды доказанным, остается таким и в дальнейшем[3]. Конструктивно истинное высказывание никогда не перестает быть таковым – множество доказанных утверждений может только расширяться. Данное свойство представляет собой, конечно, довольно сильную идеализацию. Но именно эта идеализация выражает суть конструктивной концепции истины в отличие от классической (корреспондентской) концепции. Для установления конструктивной истинности того или иного высказывания первостепенное значение имеет построение идеальной (теоретической) конструкции, доказывающей это высказывание, а не его эмпирическая проверка (соотнесение высказывания с действительностью). Что касается действительности, то конструктивный подход возможен лишь по отношению к действительности особого рода, например, «действительности» абстрактных математических объектов. С точки зрения конструктивной логики, действительность остается неизменной, изменяются лишь наши знания, причем только кумулятивным образом.

Однако если относительно понятия истины все конструктивные логики более или менее едины, то относительно понятия *ложности* такого единства не наблюдается. Так, если мы обратимся к интуиционистской логике, то обнаружим, что примечательной особенностью интуиционистской концепции ложности является то, что здесь это понятие не является *непосредственным* представителем объектной связки отрицания (или, наоборот, интуиционистское отрицание не является непосредственным представителем интуиционистской ложности). Интуиционистской «лжи» скорее соответствует то, что А.Гейтинг называл «фактическим отрицанием» (см. [35, стр. 19]), которое представляет собой связку метаязыка и, по существу, имеет классический характер. Утверждение «высказывание *A* является ложным» означает в интуиционизме, как и в классике, «*A* не является истинным». То есть

[3] Ср. [4, с. 18]: «Мы принимаем *принцип сохранности*, состоящий в том, что если истинность некоторого суждения обнаружена, то оно остается истинным и в будущем». В англоязычной литературе этот принцип часто называют «условием наследственности» – *hereditary condition*.

интуиционисткая ложь есть не что иное, как интуиционистская «не-истинность», а значит, истинностные значения в интуиционизме, так же как и классические истинностные значения, подчиняются принципам бивалентности и однозначности. С учетом же конструктивной концепции истинности это означает, что интуиционистская ложность высказывания A интерпретируется как «A *не* является конструктивно доказанным». Таким образом, интуиционистская ложь, в отличие от интуиционистской истины, *не* является конструктивным понятием. В самом деле, в данный момент мы можем не располагать доказательством того или иного высказывания, однако это вовсе не исключает возможности того, что доказательство будет найдено позже. То есть интуиционистски ложное высказывание вполне может перестать быть таковым, а значит, интуиционистская ложность (в отличие от интуиционистской истинности) *не* подчиняется принципу сохранности. Зато она обладает свойством *обратной сохранности*: если высказывание является ложным сейчас, это означает, что оно *было* таковым всегда (в прошлом). Иными словами, в то время как множество истинных высказываний может с течением времени только расти (принцип конструктивной истины), множество ложных высказываний может только убывать (принцип неконструктивной ложности).

Интуиционистское понятие ложности используется, однако, далеко не во всех конструктивных логиках, иными словами, интуиционистская концепция ложности не является единственной, принятой в рамках конструктивной традиции в широком смысле. Так, в 1949 г. Д.Нельсон построил особый вариант конструктивной логики, в которой устраняется присущая интуиционизму *асимметрия* между истиной и ложью (ср. также [5]). Основная идея заключается здесь в том, что ложность также рассматривается как *конструктивное понятие*, которое вводится «способом, аналогичным тому, как это происходит в случае с интуиционистской истиной» ([15, с. 231]). Если задействовать терминологию, заимствованную из теории доказательств, то наряду с понятием «доказательства» можно ввести параллельное (независимое) понятие «опровержения». Теперь, аналогично тому как выражение «A является (конструктивно) истинным» интерпретируется в смысле «A доказано», выражение «A является (конструктивно) ложным» может быть истолковано в смысле «A опровергнуто». При таком истолковании ложность некоторого высказывания также представляет «конструктивное знание», которое подчиняется принципу сохранности: то, что является опровергнутым на определенной стадии развития знания, продолжает оставаться таковым и в дальнейшем – множество ложных высказываний, точно также как и множество истинных высказываний, может лишь увеличиваться.

Подведем итоги. Хотя все конструктивные логики разделяют схожую – конструктивную – концепцию истины, однако некоторые из них существенным образом разнятся относительно принимаемой концепции ложности. В целом в конструктивной логике можно выделить *два* различных понимания ложности. В соответствии с одним из них, характерным для интуиционистской логики, ложность высказывания означает просто его недоказанность. В другом же случае (логика Нельсона) ложность предстает в качестве конструктивного напарника понятия истины: «A ложно» означает «A опровергнуто».

Истолковывая же понятия истинности и ложности в духе подхода Фреге, приходим к выводу, что в конструктивных логиках вводятся три новых абстрактных объекта, которые могут приписываться высказываниям в качестве истинностных значений: T – «конструктивная истина», F – «конструктивная ложь» и f – «неконструктивная ложь».

5. Функция мультиоценки для конструктивных значений истинности. Понятие неконструктивной истины

Каким образом мультифункциональный подход может быть распространен на область конструктивной логики? Прежде всего важно отметить, что в конструктивной логике истинностные значения в гораздо большей степени, чем в классической логике, являются *относительными* понятиями. Собственно говоря, и в классике истинность (и ложность) представляет не просто значение высказывания, а, скорее, значение высказывания *в мире*, т.е. некоторое отношение между высказыванием и миром. Многие исследователи, однако, отмечают, что классическая логика может быть истолкована как логика только нашего (т. е. одного) мира. Таким образом, при фиксации этого мира ссылка на него может быть просто опущена. Если же речь идет о доказательствах (как в конструктивной концепции истинности), то особое значение приобретает вопрос, *в рамках какой теории* (теоретической конструкции) произведено то или иное доказательство (или на какой стадии развития теории доказательство было получено). Вообще, говорить, что высказывание является доказанным или не доказанным, не уточняя при этом, в какой теории это имеет место, простонапросто беспредметно. Поэтому утверждение «высказывание A является конструктивно истинным» следует каждый раз понимать как «высказывание A является доказанным в рамках (определенной) теоретической конструкции *a*». Значит, конструктивная функция истинности не просто отображает высказывания во множество истинностных значений, она должна учитывать в качестве особого *параметра* некоторую возможную теоретическую конструкцию, *относительно которой* осуществляются доказательства высказываний. Пусть L есть множество высказываний, а U представляет собой множество теоретических конструкций (или множество состояний теории). Тогда конструктивная функция истинности представляет собой функцию из множества $L \times U$ во множество истинностных значений той или иной конструктивной логики. Таким образом, построение модели для конструктивной логики существенным образом зависит от того, какого рода множество выбрано в качестве «множества возможных миров» (U).

В конструктивной логике имеется традиция построения семантики с использованием так называемого «отношения вынуждения» как отношения, непосредственно связывающего высказывание с тем или иным «возможным миром». В этом случае происходит смещение акцента с отношения между высказыванием и истинностным значением на отношение между высказыванием и миром. Пусть p является некоторым атомарным высказыванием. Тогда вместо конструкции «высказывание p является истинным (ложным) в мире a» используется конструкция «мир a вынуждает (не вынуждает) высказывание p». Технически оба способа построения семантики являются эквивалентными и взаимопереводимыми (подробнее см. [13, с. 13-16]).

Вернемся теперь к вопросу о том, как может выглядеть функция мультиоценки применительно к конструктивной логике. Вначале рассмотрим истинностные значения логики Нельсона. В [27] Данн исследовал семейство *обобщенных логик Нельсона*, которые возникают, в частности, при допущении истинностно-значных провалов и/или пресыщенных оценок в отношениях между конструктивной истиной и конструктивной ложью. Воспроизведем общую идею построения «мультиоценочной семантики» на основе истинностных значений логики Нельсона (см. также [47, с. 771]). *Обобщенной Нельсоновской моделью* назовем четверку

$$<W, \leq, \Vdash_T, \Vdash_F>,$$

где W есть некоторое непустое множество, $\leq$ – частичный порядок на W, а $\Vdash_T$ и $\Vdash_F$ представляют собой два различных отношения вынуждения между элементами из W и предложениями языка, которые для каждого атомарного высказывания p_i определяются с соблюдением следующих условий (для любых a и b из W):

Условие 1 (*прямая сохранность*).

$a \Vdash_T p_i$ и $a \leq b \Rightarrow b \Vdash_T p_i$;
$a \Vdash_F p_i$ и $a \leq b \Rightarrow b \Vdash_F p_i$.

Для сложных высказываний отношения вынуждения определяются следующим образом:

Определение 1.

$a \Vdash_T \sim A \Leftrightarrow a \Vdash_F A$;
$a \Vdash_F \sim A \Leftrightarrow a \Vdash_T A$;

$a \Vdash_T A \wedge B \Leftrightarrow a \Vdash_T A$ и $a \Vdash_T B$;
$a \Vdash_F A \wedge B \Leftrightarrow a \Vdash_F A$ или $a \Vdash_F B$;

$a \Vdash_T A \vee B \Leftrightarrow a \Vdash_T A$ или $a \Vdash_T B$;
$a \Vdash_F A \vee B \Leftrightarrow a \Vdash_F A$ и $a \Vdash_F B$;

$a \Vdash_T A \supset B \Leftrightarrow \forall b \geq a$ ($b \Vdash_F A$ или $b \Vdash_T B$);
$a \Vdash_F A \supset B \Leftrightarrow a \Vdash_T A$ и $a \Vdash_F B$.

Ключевое семантическое отношение, которое может быть здесь определено, есть отношение *релевантного логического следования* для конструктивной логики Нельсона. Из высказывания A *релевантно следует* высказывание B, если и только если для любой Нельсоновской модели, в любом мире a этой модели: $a \Vdash_T A \Rightarrow a \Vdash_T B$.

Содержательно, элементы множества W могут быть истолкованы как теоретические конструкции или состояния некоторой конструктивной теории на различных стадиях ее развития. Отношение $\leq$ представляет тогда возможное отношение во времени между теоретическими конструкциями: $a \leq b$ означает, что состояние теории b есть возможный результат развития состояния a. При построении этой семантики вместо одного (обычного) отношения вынуждения (представляющего понятие истины) вводятся *два* новых равноправных отношения вынуждения – отдельно для истины и для лжи. Выражение $a \Vdash_T A$ может быть истолковано как «состояние теории *a вынуждает (конструктивную) истинность* высказывания A», а выражение $a \Vdash_F A$ – как «состояние теории *a вынуждает (конструктивную) ложность* высказывания A». Другое возможное истолкование выражения $a \Vdash_T A$ – «высказывание A доказано в рамках теоретической конструкции a», и $a \Vdash_F A$ – «высказывание A опровергнуто в рамках теоретической конструкции a». Условие 1 выражает конструктивный характер обоих отношений.

Заметим, что для $\Vdash_T$ и $\Vdash_F$ вовсе не обязательно выполняются принципы бивалентности и однозначности: вполне возможны как случаи, когда высказывание не является ни доказанным ни опровергнутым, так и случаи (если подразумеваемая теория противоречива), когда высказывание одновременно оказывается доказанным и опровергнутым (в рамках такой противоречивой теории). Иными словами, функция мультиоценки, определяемая посредством отношений $\|\!-_T$ и $\|\!-_F$, приписывает каждому высказыванию одно из четырех обобщенных истинностных значений логики Нельсона: $\{T,F\}$, $\{T\}$, $\{F\}$ или $\{\}$. Если одновременно имеем $a \|\!-_T A$ и $a \|\!-_F A$, то это означает, что значением высказывания A в мире a есть $\{T,F\}$, если имеем только $a \|\!-_T A$, то значением A в мире a есть $\{T\}$, если только $a \|\!-_F A$, то значением высказывания A в мире a есть $\{F\}$, а если же не имеем ни того, ни другого, то значением высказывания A будет $\{\}$.

Обратимся теперь к истинностным значениям интуиционистской логики и рассмотрим возможности применения к этим значениям мультиоценочной функции. В [11]; [12]; [13]; [46] была построена семантика релевантного следования для интуиционистской логики с использованием пресыщенных оценок и истинностно-значных провалов. *Обобщенной интуиционистской моделью* назовем четверку

$$<W, \leq, \|\!-_T, \|\!-_f>,$$

где W, $\leq$, и $\|\!-_T$, определяются точно так же, как и для обобщенных моделей Нельсона, а $\|\!-_f$ есть новое отношение вынуждения для неконструктивной (интуиционистской) ложности, которое определяется для каждого атомарного высказывания с соблюдением следующего условия:

Условие 2 (*обратная сохранность*)
$b \|\!-_f p_i$ и $a \leq b \Rightarrow a \|\!-_f p_i$.

Определения условий истинности и ложности для сложных высказываний являются стандартными для интуиционистских связок с учетом того, что условия ложности должны теперь задаваться независимо от условий истинности:

Определение 2.

$a \|\!-_T {\sim}A \Leftrightarrow \forall b \geq a\ (b \|\!-_f A)$;
$a \|\!-_f {\sim}A \Leftrightarrow \exists b \geq a\ (b \|\!-_T A)$;

$a \|\!-_T A \wedge B \Leftrightarrow a \|\!-_T A$ и $a \|\!-_T B$;
$a \|\!-_f A \wedge B \Leftrightarrow a \|\!-_f A$ или $a \|\!-_f B$;

$a \|\!-_T A \vee B \Leftrightarrow a \|\!-_T A$ или $a \|\!-_T B$;
$a \|\!-_f A \vee B \Leftrightarrow a \|\!-_f A$ и $a \|\!-_f B$;

$a \|\!-_T A \supset B \Leftrightarrow \forall b \geq a\ (b \|\!-_f A$ или $b \|\!-_T B)$;
$a \|\!-_f A \supset B \Leftrightarrow \exists b \geq a\ (b \|\!-_T A$ и $b \|\!-_f B)$.

Отношение релевантного логического следования формально определяется так же, как и в обобщенных моделях Нельсона, представляя теперь отношение релевантного логического следования для формул интуиционистской логики. Обобщенными истинностными значениями интуиционистской логики будут множества $\{T,f\}$, $\{T\}$, $\{f\}$ и $\{\}$.

Обратим внимание на то, что в мультиоценочной семантике не принимается обычное условие $a \Vdash_f A \Leftrightarrow$ не $(a \Vdash_T A)$, при принятии которого получается стандартная семантика для интуиционистской логики. Вообще отношение $\Vdash_f$ значительно слабее отношения $\Vdash_F$. Содержательно это отношение может быть истолковано как «отношение отвержимости». Выражение $a \Vdash_f A$ означает «высказывание A *может быть отвергнуто* в рамках теоретической конструкции a». Оно говорит нам, что *пока что* мы не имеем достаточных оснований для включения высказывания A в нашу теорию (или мы имеем достаточно оснований для *не включения A* в нашу теорию), например, поскольку данное высказывание не доказано. Поэтому мы отмечаем, что высказывание A может быть отвергнуто (оно находится *под подозрением*), хотя этим вовсе не исключается, что позднее (например, когда высказывание будет доказано) оно все же будет включено в нашу теорию. Таким образом, отношение $\Vdash_f$ ведет себя так, как и должна вести себя интуиционистская (неконструктивная) ложь: для него выполняется условие обратной сохранности, но условие «сохранности в будущее» не выполняется.

Итак, комбинируя «попарно» истинностные значения, которые мы находим в различных конструктивных логиках, мы получили две различные «четырехзначные семантики»: одну для «релевантной логики Нельсона», а другую для «релевантной интуиционистской логики». Данн высказал идею объединения этих двух семантик в рамках некоторой единой конструкции. Эта идея была реализована в [47].

Мы начинаем с того, что «механически» объединяем истинностные значения, которые встречаются в различных конструктивных логиках, в единое множество $\{T,F,f\}$. Ясно, что функция мультиоценки, будучи примененной к этому множеству, даст нам *более четырех* обобщенных истинностных значений[4]. Однако пре-

[4] В общем виде идея рассмотреть в качестве базиса для обобщенных истинностных значений множества, содержащие более двух элементов, была сформулирована А.Карпенко, который в связи с семантикой Данна и Белнапа высказал следующую мысль: «Интересно посмотреть, что представляет собой обобщение подобной семантики, т.е. когда в качестве истинностных значений берутся подмножества более богатого множества, чем {T, F}» ([6, с. 46)].

жде рассмотрим множество $\{T,F,f\}$ более внимательно. Оно производит довольно «кривобокое» впечатление. Причем «кривобокость» эта является двоякой: во-первых, данное множество содержит два элемента для ложности (F, f) и только один элемент для истины (T), а во-вторых, оно содержит два конструктивных элемента (T, F) и только один неконструктивный элемент (f). Несложно видеть, почему возникла такая асимметричная ситуация: конструктивная истина, в отличие от конструктивной ложности, не имеет неконструктивного «двойника»! Чтобы восстановить справедливость, мы должны ввести еще одно базисное значение истинности – *неконструктивную истину*. Обозначим это новое истинностное значение посредством t. Ему соответствует особое отношение вынуждения $\|\!-_t$. Выражение $a \|\!-_t A$ можно понимать как «высказывание A является *приемлемым* в рамках теоретической конструкции a». Это есть понятие (временного) принятия того или иного высказывания, когда мы по тем или иным причинам рассматриваем высказывание как приемлемое (мы его *толерируем*), хотя, возможно, мы пока и не имеем доказательства данного высказывания. При этом вовсе не исключается возможность, что высказывание, в конце концов, окажется опровергнутым и мы в дальнейшем будем вынуждены от него отказаться. Соответствующим условием, выражающим неконструктивный характер этого понятия, будет

Условие 3 (*обратная сохранность*)
$b \|\!-_t p_i$ и $a \leq b \Rightarrow a \|\!-_t p_i$.

Как и в случае с неконструктивной ложностью, в общем случае мы не принимаем («обычное») условие $a \|\!-_t A \Leftrightarrow$ не ($a \|\!-_F A$). В соответствии с мультиоценочным подходом *все четыре* исходные истинностные значения являются независимыми друг от друга и не связаны никакими отношениями. Таким образом, возможно появление «ненормальных» ситуаций, когда, несмотря на то, что высказывание является опровергнутым, оно все же считается приемлемым, или высказывание отвергается, несмотря на то, что оно является доказанным. Такого рода ситуации вполне могут иметь место, например, в условиях противоречивой информации, или же когда люди ведут себя иррациональным образом. Это, конечно, не исключает возможности введения дополнительных условий, запрещающих те или иные комбинации исходных истинностных значений. Некоторые из этих условий будут рассмотрены ниже.

6. Обобщенное истинностно-значное пространство конструктивной логики. Тройная решетка

Итак, в качестве базиса для обобщенного конструктивного истинностно-значного пространства мы рассматриваем множество значений $<T, F, t, f>$. Напомним еще раз их содержательный смысл:

T (конструктивная истина) – высказывание является конструктивно *доказанным*;

F (конструктивная ложь) – высказывание является конструктивно *опровергнутым*;

t (неконструктивная истина) – высказывание является *приемлемым*;

f (неконструктивная ложь) – высказывание является *отвергаемым*.

Применяя к этим исходным значениям функцию мультиоценки, мы должны рассмотреть все их возможные комбинации, т.е. множество всех подмножеств данного множества. Это дает нам следующие 16 обобщенных истинностных значений:

$$\{\}, \{T\}, \{F\}, \{t\}, \{f\}, \{T,F\}, \{T,t\}, \{T,f\}, \{F,t\}, \{F,f\}, \{t,f\}, \{T,F,t\}, \{T,F,f\}, \{T,t,f\}, \{F,t,f\}, \{T,F,t,f\}.$$

В дальнейшем «пустое» значение $\{\}$ будем обозначать посредством $\boldsymbol{N}$, а «максимальное» значение $\{T,F,t,f\}$ – посредством $\boldsymbol{A}$. Кроме того, при обозначении остальных обобщенных истинностных значений будем использовать жирный шрифт, опуская фигурные скобки и запятые.

Вернемся теперь к понятию бирешетки. Интуитивно двойная решетка представляет собой структуру, каждый элемент которой в той или иной *степени* воплощает *два* базисных свойства, являющихся в некотором смысле *существенными* для этих элементов: свойство «информативности» и свойство «истинности»[5]. Соответственно, два частичных порядка бирешетки - $\leq_i$ и $\leq_t$, – располагают элементы в зависимости от степени обладания данными свойствами.

Если мы имеем дело с истинностными значениями конструктивной логики, то должны принимать во внимание еще одно важное свойство, существенным образом характеризующее каждое из этих значений, а именно свойство *конструктивности*. В самом деле, каждое из образованных выше 16 обобщенных истинност-

[5] Итак, истинность вновь конституирует себя как *свойство*, однако теперь уже *не* как свойство высказываний, а как свойство особого рода абстрактных объектов (истинностных значений) – *быть самими собой*.

ных значений конструктивной логики, сочетая в себе как конструктивные, так и неконструктивные элементы, заключает в себе не только определенную степень информативности и истинности, но также и определенную степень конструктивности. Таким образом, мы получаем третий частичный порядок – $\leq_c$ –, упорядочивающий 16 истинностных значений *по их конструктивности*. Относительно этого нового частичного порядка мы также имеем полную решетку, что дает нам возможность ввести понятие *тройной решетки* (или трирешетки - *trilattice*):

Определение 3. *Трирешетка* есть структура $(S, \leq_i, \leq_t, \leq_c)$, где S – есть непустое множество, и $(S, \leq_i)$, $(S, \leq_t)$, $(S, \leq_c)$ суть полные решетки.

Для определенных выше 16 обобщенных истинностных значений ***A*** и ***N*** являются соответственно единицей и нулем решетки относительно $\leq_i$, ***Tt*** и ***Ff*** – относительно $\leq_t$, а ***TF*** и ***tf*** – относительно $\leq_c$. В самом деле, ***A*** и ***N*** являются наиболее и наименее *информативными* элементами, ***Tt*** и ***Ff*** – наиболее и наименее *истинными* элементами, а ***TF*** и ***tf*** – наиболее и наименее *конструктивными* элементами.

Пусть x есть произвольное обобщенное истинностное значение конструктивной логики. Обозначим посредством x^{Tt} множество, содержащее в точности те значения T или t, которые входят в x. (Например, если x есть ***TFf***, то x^{Tt} есть $\{T\}$.) Множества x^{Ff}, x^{TF}, x^{tf} определяются аналогичным образом. Тогда три частичных порядка, о которых шла речь выше, можно определить так:

Определение 4. Для любых обобщенных истинностных значений конструктивной логики x и y:

1. $x \leq_i y \Leftrightarrow x \subseteq y$;
2. $x \leq_t y \Leftrightarrow x^{Tt} \subseteq y^{Tt}$ и $y^{Ff} \subseteq x^{Ff}$;
3. $x \leq_c y \Leftrightarrow x^{TF} \subseteq y^{TF}$ и $y^{tf} \subseteq x^{tf}$.

Таким образом, мы получаем наиболее общую тройную решетку, генерируемую шестнадцатью обобщенными значениями истинности конструктивной логики – $SIXTEEN_3$, которая представлена на рис. 3 посредством диаграммы Хассе, помещенной в трехмерную систему координат. По сравнению с диаграммами для бирешетки, здесь появляется новая ось, представляющая третье, а именно конструктивное «измерение».

Ясно, что для каждого из этих частичных порядков существуют соответствующие операции пересечения и объединения. Будем использовать символы $\wedge$ и $\vee$ для пересечения и объединения относительно $\leq_t$, $\cap$ и $\cup$ – для этих операций относительно $\leq_i$, а также Δ и ∇ – для решеточных операций относительно $\leq_c$.

Операции $\wedge$ и $\vee$ представляют по существу логические операции конъюнкции и дизъюнкции. Интересно проследить, как ведут себя эти операции применительно к конкретным обобщенным истинностным значениям. Если, к примеру, результаты $\boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{T} \vee \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{t} \vee \boldsymbol{f}$ являются вполне ожидаемыми, то поведение $\boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{t}$ может показаться довольно странным. Как можно видеть, в последнем случае результатом является $\boldsymbol{N}$. Иными словами, конъюнкция двух «истин» дает «ничего». Более близкое рассмотрение убеждает, однако, в том, что результат здесь вполне закономерен. В самом деле, конъюнкция является истинной, если оба ее конъюнкта истинны. Это верно как для $\boldsymbol{T}$, так и для $\boldsymbol{t}$. Ясно, что $\boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{t}$ не может в результате иметь значение $\boldsymbol{T}$ (и даже содержать его в качестве составной части), поскольку неверно, что *оба* конъюнкта имеют это значение, и то же самое имеет место для $\boldsymbol{t}$. Однако было бы также неверно приписать конъюнкции двух истин (без какой-либо «примеси» лжи) какое-либо из значений $\boldsymbol{F}$ или $\boldsymbol{f}$! Итак, остается только $\boldsymbol{N}$, как это и получается в соответствии с логическим порядком тримешетки $SIXTEEN_3$. Аналогичные рассуждения применимы и в случае с $\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{f}$, как и в других аналогичных случаях.

Решеточные операции, соответствующие информационному порядку, могут быть истолкованы как операции пересечения и объединения «кусков информации». В [30] $\cap$ интерпретируется как оператор «консенсуса», а $\cup$ – как оператор «доверчивости».

Что касается операций Δ и ∇, то их можно довольно естественным образом истолковать как операции с «конструктивными частями» обобщенных истинностных значений. Каждое из этих значений имеет как конструктивную, так и неконструктивную часть. Δ осуществляет пересечение конструктивных частей двух истинностных значений и объединяет их неконструктивные части, а ∇ работает двойственным образом.

Обычно на двойных решетках вводится оператор *отрицания*, который определяется как операция, которая обращает логический порядок, оставляя информационный порядок без изменений. Фиттинг в [30] аналогичным образом вводит оператор *конфляции* (*conflation*), который обращает информационный порядок, не затрагивая при этом логический порядок.

Рассмотрим три частичных порядка, которые задаются на тройной решетке, и введем под общим названием *инверсии* такой тип операции, который обращает по крайней мере некоторые из этих порядков. В общем виде это может быть сделано посредством следующего определения:

Определение 5. Во всякой трирешетке унарная операция типа *инверсии* есть одна из операций, обладающая следующими свойствами:

1. *T-инверсия* ($\sim_t$):
   (a) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_t b \leq_t \sim_t a$;
   (b) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_t a \leq_i \sim_t b$;
   (c) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_t a \leq_c \sim_t b$;
   (d) $\sim_t \sim_t a = a$.
2. *I-инверсия* ($\sim_i$):
   (a) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_i b \leq_i \sim_i a$;
   (b) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_i a \leq_t \sim_i b$;
   (c) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_i a \leq_c \sim_i b$;
   (d) $\sim_i \sim_i a = a$.
3. *C-инверсия* ($\sim_c$):
   (a) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_c b \leq_c \sim_c a$;
   (b) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_c a \leq_i \sim_c b$;
   (c) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_c a \leq_t \sim_c b$;
   (d) $\sim_c \sim_c a = a$.
4. *Tc-инверсия* ($\sim_{tc}$):
   (a) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_{tc} b \leq_t \sim_{tc} a$;
   (b) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_{tc} b \leq_c \sim_{tc} a$;
   (c) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_{tc} a \leq_i \sim_{tc} b$;
   (d) $\sim_{tc} \sim_{tc} a = a$.
5. *It-инверсия* ($\sim_{it}$):
   (a) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_{it} b \leq_i \sim_{it} a$;
   (b) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_{it} b \leq_t \sim_{it} a$;
   (c) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_{it} a \leq_c \sim_{it} b$;
   (d) $\sim_{it} \sim_{it} a = a$.
6. *Ci-инверсия* ($\sim_{ci}$):
   (a) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_{ci} b \leq_c \sim_{ci} a$;
   (b) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_{ci} b \leq_i \sim_{ci} a$;
   (c) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_{ci} a \leq_t \sim_{ci} b$;
   (d) $\sim_{ci} \sim_{ci} a = a$.
7. *Tic-инверсия* ($\sim_{tic}$):
   (a) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_{tic} b \leq_t \sim_{tic} a$;
   (b) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_{tic} b \leq_i \sim_{tic} a$;
   (c) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_{tic} b \leq_c \sim_{tic} a$;
   (d) $\sim_{tic} \sim_{tic} a = a$.

Как видно из этого определения, операция инверсии может обращать один частичный порядок, оставляя два других неизменными, либо она обращает одновременно два частичных порядка, не затрагивая третий, либо инверсия одновременно обращает все три частичных порядка данной тройной решетки. В общем случае вовсе не обязательно, что *все* семь типов инверсий должны быть определены на той или иной тройной решетке. Более того, вполне возможны трирешетки вообще *без* инверсий.

Что же касается *SIXTEEN*$_3$, то здесь каждая из этих операций может быть определена посредством следующей сводной таблицы истинности:

Сводная таблица истинности для инверсий в *SIXTEEN*$_3$

a	$\sim_t a$	$\sim_i a$	$\sim_c a$	$\sim_{tc} a$	$\sim_{it} a$	$\sim_{ci} a$	$\sim_{tic} a$
N	***N***	***A***	***N***	***N***	***A***	***A***	***A***
T	***F***	***TFt***	***t***	***F***	***TFf***	***Ttf***	***Ftf***
F	***T***	***TFf***	***f***	***T***	***TFt***	***Ftf***	***Ttf***

t	*f*	*Ttf*	*T*	*F*	*Ftf*	*TFt*	*TFf*
f	*t*	*Ftf*	*F*	*T*	*Ttf*	*TFf*	*TFt*
TF	*TF*	*TF*	*tf*	*Tf*	*TF*	*tf*	*tf*
Tt	*Ff*	*Tt*	*Tt*	*Ff*	*Ff*	*Tt*	*Ff*
Tf	*Ft*	*Ft*	*Ft*	*Tf*	*Tf*	*Tf*	*Ft*
Ft	*Tf*	*Tf*	*Tf*	*Ft*	*Ft*	*Ft*	*Tf*
Ff	*Tt*	*Ff*	*Ff*	*Tt*	*Tt*	*Ff*	*Tt*
tf	*tf*	*tf*	*TF*	*TF*	*tf*	*TF*	*TF*
TFt	*TFf*	*T*	*Ttf*	*Ftf*	*F*	*t*	*f*
TFf	*TFt*	*F*	*Ftf*	*Ttf*	*T*	*f*	*t*
Ttf	*Ftf*	*t*	*TFt*	*TFf*	*f*	*T*	*F*
Ftf	*Ttf*	*f*	*TFf*	*TFt*	*t*	*F*	*T*
A	*A*	*N*	*A*	*A*	*N*	*N*	*N*

Из этой таблицы видно, что, например, *t*-инверсия ведет себя в точности как сильное отрицание Нельсона, а *tc*-инверсия – как классическое отрицание де Моргана.

7. Некоторые подрешетки и возможные обобщения. Понятие *n*-мерной мультирешетки

Заметим, что определение 3 явным образом трактует трирешетки как особого рода частично упорядоченные множества. Как известно, понятие *решетки как частично упорядоченного множества* в общем случае эквивалентно понятию *решетки как алгебры*. В этом последнем смысле $SIXTEEN_3$ представляет собой структуру (S, $\wedge$, $\vee$, $\cap$, $\cup$, Δ, ∇). В данном параграфе мы рассмотрим некоторые подструктуры этой общей структуры и таким образом рассмотрим некоторые подрешетки $SIXTEEN_3$.

Прежде всего следует заметить, что $SIXTEEN_3$ содержит в качестве подрешеток все возможные бирешетки типа $FOUR_2$. Интересно обратить внимание, что кроме «стандартных» бирешеток, генерируемых на базисах <*T*, *F*>, <*T*, *f*>, <*t*, *F*> и <*t*, *f*>, мы имеем здесь довольно интересную четырехзначную «логику ложности» с базисом <*F*, *f*>, как и «логику (только) истины» с базисом <*T*, *t*>. Все эти логики могут представлять значительный интерес с философской точки зрения и заслуживают отдельного серьезного изучения.

Другой примечательной подструктурой $SIXTEEN_3$ является обобщенное истинностно-значное пространство, основывающееся на «кривобоком» базисе, о котором шла речь в конце § 5, $<T, F, f>$, образованном при объединении истинностных значений логики Нельсона и интуиционистской логики. Оказывается, данное пространство также представляет собой трирешетку – $EIGHT_3$, которая представлена на рис. 4. Мы видим здесь все те же три частичных порядка: $\leq_i$, который идет от $\boldsymbol{N}$ к $\boldsymbol{TFf}$, $\leq_t$, направленный от $\boldsymbol{Ff}$ к $\boldsymbol{T}$ и $\leq_c$, с $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{TF}$ в качестве нуля и единицы.

Заметим, что пока что совсем не рассматривались никакие дополнительные условия, которые могли бы регулировать отношения между истинностными значениями, устанавливая определенные зависимости между ними. В результате принятия таких условий некоторые комбинации исходных истинностных значений могут запрещаться. Рассмотрим, например, максимальное истинностно-значное пространство S, удовлетворяющее следующим условиям:

Условие 4. $\forall a \in S\,(\boldsymbol{T} \in a \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \notin a)$;
$\forall a \in S\,(\boldsymbol{F} \in a \Leftrightarrow \boldsymbol{t} \notin a)$.

Эти условия выражают идею «последовательности» (или рациональности). Их интуитивный смысл можно выразить следующим образом. Наши *теории* вполне могут оказаться (синтаксически) противоречивыми и тогда вполне может быть так, что некоторое высказывание одновременно является доказанным и опровергнутым (случай $\boldsymbol{TF}$) в рамках такой теории. Однако в своем «эпистемическом поведении» мы в любом случае должны оставаться последовательными (т.е. рациональными). Если высказывание является доказанным, мы не должны его отвергать. И двойственным образом в случае, если высказывание опровергнуто, мы не должны его принимать (толерировать). В определенных случаях эти условия могут оказаться довольно полезными и даже необходимыми. Как результат, истинностно-значное пространство сужается до девяти обобщенных истинностных значений: $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{TF}$, $\boldsymbol{Tt}$, $\boldsymbol{Ff}$, $\boldsymbol{tf}$. Это может показаться несколько необычным, но алгебраическая структура, которую мы получаем на основе этих значений, является, по существу, би-*с-половиной*-решеткой! Эта структура – $NINE_{2.5}$ – представлена на рис. 5. Диаграммы слева и справа представляют различные проекции этой решетки. Мы имеем здесь полные решетки относительно $\leq_t$ и $\leq_c$, однако информационный порядок не образует решетки. Относительно $\leq_i$ мы имеем лишь *полу*решетку с нулем $\boldsymbol{N}$, но без единицы.

Можно рассмотреть еще одно возможное условие, согласно которому конструктивные значения, будучи сильнее, «поглощают» свои неконструктивные аналоги. Это условие запрещает обобщенные истинностные значения, которые содержат комбинации ***Tt*** и ***Ff***. Результирующее истинностнозначное пространство будет в этом случае представленно еще одним вариантом решетки $NINE_{2.5}$.

В завершение остановимся на некоторых возможных обобщениях мультиоценочного подхода и его применениях в других неклассических логиках. Очевидно, что рассмотренные выше истинностные значения допускают и иную интерпретацию. Например, здесь можно задействовать идею модализированных истинностных значений (см. [20]; [42], ср. также [7, с. 122-124]). ***T*** можно интерпретировать как «необходимо истинно», ***F*** – как «необходимо ложно», ***t*** – как «возможно истино» и ***f*** – как «возможно ложно». Трирешетка, получаемая на основе этих истинностных значений, вместо $\leq_c$ будет иметь частичный порядок $\leq_n$, представляющий возрастание необходимости ее элементов.

Точно так же возможна овремененная интерпретация этих истинностных значений. В этом случае мы будем иметь возможность рассмотреть «временной порядок», определенный на множестве обобщенных истинностных значений временной логики. Ну а использование «овремененных модализированных истинностных значений» (типа «необходимо будет истинно») довольно естественным образом приводит к идее *тетра*решетки, с *четырьмя* частичными порядками (для информативности, истинности, необходимости и времени).

Обобщая эту идею, приходим к понятию *n*-решетки (*n*-мерной *мульти*решетки) как структуры, на которой определены в точности *n* частичных порядков, каждый из которых выражает ту или иную степень наличия определенного свойства у элементов рассматриваемого множества (в данном случае множества обобщенных истинностных значений).

Примечание

В настоящей статье в значительной степени представлены результаты исследований, которые осуществлялись совместно Дж.М.Данном, Татсутоши Такенакой и мной во время моего пребывания в *Индианском университете* (Блумингтон, США) в 1999-2000 гг. См. также нашу статью [47], где многие из этих результатов изложены более полно. Я благодарен программе академических обменов им. Фулбрайта за поддержку моих исследований. Я признателен также Надежде Козаченко, которая прочла статью в рукописи и высказала ряд полезных замечаний.

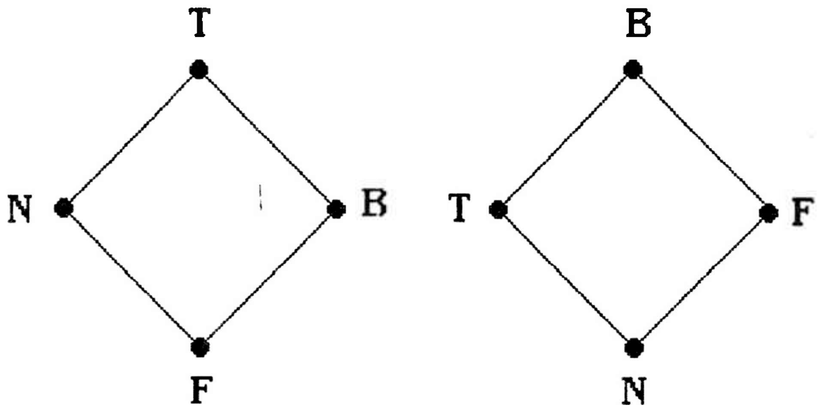
ЛИТЕРАТУРА

1. *Войшвилло Е.К.* Семантическая информация. Понятия экстенсиональной и интенсиональной информации // Кибернетика и современное научное познание. М.: Наука, 1976. С. 165-179.
2. *Войшвилло Е.К.* Семантика релевантной логики и вопрос о природе логических законов // Разум и культура. М.: Изд. МГУ, 1983. С. 69-76.
3. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М.: Изд. МГУ, 1988.
4. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979.
5. *Заславский И.Д.* Симметрическая конструктивная логика. Ереван, 1979.
6. *Карпенко А.С.* Истинностные значения. Что это такое? // Исследования по неклассическим логикам. М.: Наука, 1989. С. 38-53
7. *Карпенко А.С.* Многозначные логики. М.: Наука, 1997.
8. *Орлов И.Е.* Исчисление совместности предложений // Математический сборник. Т. 35. 1928. С. 263-286.
9. *Смирнова Е.Д.* Логическая семантика и философские основания логики. М.: Изд. МГУ, 1986.
10. *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. Сб. трудов. М.: Аспект Пресс, 2000.
11. *Шрамко Я.В.* К проблеме релевантного следования для интуиционистской логики // Логико-философские исследования. Вып. 1. М.: Философское общество СССР, 1989. С. 165-174.
12. *Шрамко Я.В.* Логическое следование и интуиционизм. Киев: ВИПОЛ, 1997.
13. *Шрамко Я.В.* Американский план для интуиционистской логики 2: обобщенные интуиционистские модели // Online Journal Logical Studies. No. 5; 2000. (http://www.logic.ru)
14. *Шрамко Я.В.* Онтологическая модель истинностных значений // Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в науці, економіці та освіті. Кривий Ріг. С. 287-297.
15. *Almukdad A.* and *Nelson D.* Constructive falsity and inexact predicates // Journal of Symbolic Logic. 1984. Vol. 49. P. 231-233.
16. *Arieli O.* and *Avron A.* Reasoning with logical bilattices // Journal of Logic, Language and Information. 1996. Vol. 5. P. 25-63.
17. *Asenjo F.* A calculus of antinomies // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1966. Vol. VII. P. 103-105.
18. *Belnap N.* A useful four-valued logic // J. M. Dunn and G. Epstein (eds.). Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Dordrecht: D. Reidel Publish. Co., 1977. P. 8-37 (рус. пер. *Н. Белнап, Т. Стил.* Логика вопросов и ответов. М.: Прогрес, 1981).
19. *Belnap N.* How a computer should think // G. Ryle (ed.). Contemporary Aspects of Philosophy. Stocksfield: Oriel Press Ltd., 1977. P. 30-55 (рус. пер. *Н. Белнап, Т. Стил.* Логика вопросов и ответов, М.: Прогресс, 1981).

20. *Caton C.E.* A stipulation of a modal propositional calculus in terms of modalized truth-values // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1963. Vol. 4. P. 55-56.
21. *Costa N.C.A. da.* Calculus propositionnels pour les systemes formels inconsistants // Compes Rendus Acad. Sci. 1963. Vol. 257. P. 3790-3792.
22. *Dunn J.M.* The Algebra of Intensional Logics. Doctoral Dissertation. University of Pittsburgh, Ann Arbor, 1966 (University Microfilms).
23. *Dunn J.M.* An intuitive semantics for first degree relevant implications (abstract) // Journal of Symbolic Logic. 1971. P. Vol. 36. 362-363.
24. *Dunn J.M.* Intuitive semantics for first-degree entailment and 'coupled trees' // Philosophical Studies. 1976. Vol. 29. P. 149-168.
25. *Dunn J.M.* Relevance logic and entailment // D. M. Gabbay and F. Guenter (eds). Handbook of Philosophical Logic. Vol III. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986. P. 117-224.
26. *Dunn J M.* A Comparative study of various model-theoretic treatments of negation: a history of formal negation // D. M. Gabbay and H. Wansing (eds.). What is Negation? Applied Logic Series. Vol. 13. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 23–51.
27. *Dunn J.M.* Partiality and its dual // Studia Logica. 2000. Vol. 66. P. 225-256.
28. *Fitting M.* Logic programming on a topological bilattice // Fundamenta Informatica. 1988. Vol. 11. P. 209-218.
29. *Fitting M.* Bilattices and the theory of truth // Journal of Philosophical Logic. 1989. Vol. 18. P. 225-256.
30. *Fitting M.* Kleene's logic, generalized // Journal of Logic and Computation. 1990. Vol. 1. P. 797-810.
31. *Frege G.* Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1986.
32. *Frege G.* Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Felix Meiner, Hamburg, 1990.
33. *Ginsberg M.* Multivalued logics // Proceedings of AAAI-86. Fifth National Conference on Artificial Intellegence. Los Altos: Morgan Kaufman Publishers, 1986. P. 243-247.
34. *Ginsberg M.* Multivalued logics: a uniform approach to reasoning in AI // Computer Intelligence. 1988. Vol. 4. P. 256-316.
35. *Heyting A.* Intuitionism: An Introduction. Amsterdam, 1956 (рус. пер. *А. Гейтинг.* Интуиционизм, М.: Мир, 1965).
36. *Jaskowski S.* Three contributions to the two-valued propositional calculus // Studia Logica. 1975. Vol. 34. P. 121-132.
37. *Lukasiewicz J.* Über den Satz von Widerspruch bei Aristoteles // Bulletin international de Academie des Sciences de Cracovie, Classe de Philosophie (1910). P. 15-38.
38. *Lukasiewicz J.* On three-valued logic // Selected Works. Oxford, 1970. P. 87-88.
39. *Nelson D.* Constructible falsity // Journal of Symbolic Logic. 1949. Vol. 14. P. 16-26.

40. *Priest G.* The logic of paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219-241.
41. *Pynko A.P.* Regular bilattices // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2000. Vol. 10. P. 61-105.
42. *Resher N.* On intuitive interpretation of systems of four-valued logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol. 6. P. 154-156.
43. *Scott D.* Models for various type-free calculi // Logic, Methodology and Philosophy of Science. Vol. IV. Amsterdam: North-Holland, 1973. P. 157-187.
44. *Shramko Y.* Intuitionismus und Relevanz. Berlin: Logos-Verlag, 1999.
45. *Shramko Y.* State-descriptions as a method of semantic analysis for intuitionistic logic // J. Nida-Rümelin (ed.) Rationality, Realism, Revision. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1999 P. 110-118.
46. *Shramko Y.* American plan for intuitionistic logic 1: an intuitive background // The Logica Yearbook 1999. Ed. Timothy Childers. Prague: Filosophia, 2000.
47. *Shramko Y., Dunn J.M., Takenaka T.* The trilattice of constructive truth values // Journal of Logic and Computation. Vol. 11, 2001. P. 761-788.
48. *Voishvillo E.K.* A theory of logical relevance // Logique et Analyse. № 155-156, 1996. P. 207-228.

Приложение



a *b*

Рис. 1.

a – логическая решетка **L4**

b – аппроксимационная решетка **A4**

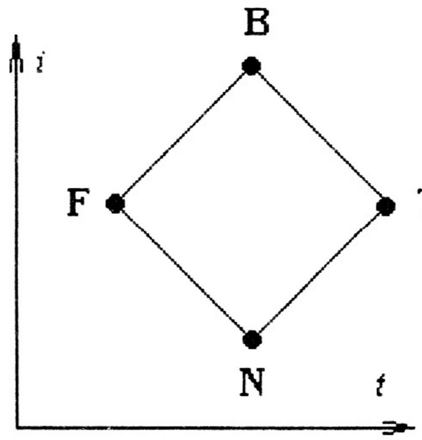


Рис. 2. Бирешетка $FOUR_2$

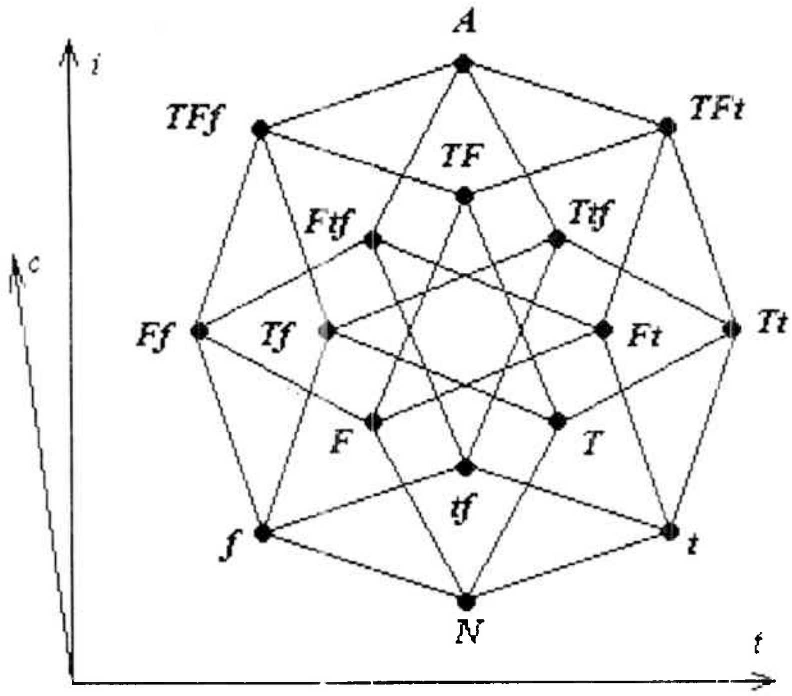


Рис. 3. Трирешетка *SIXTEEN*$_3$

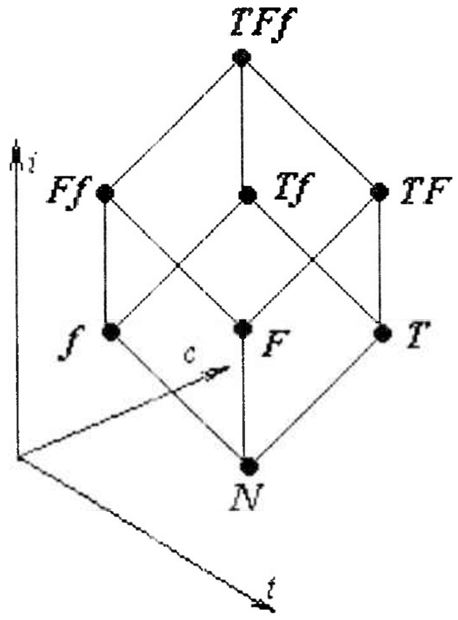
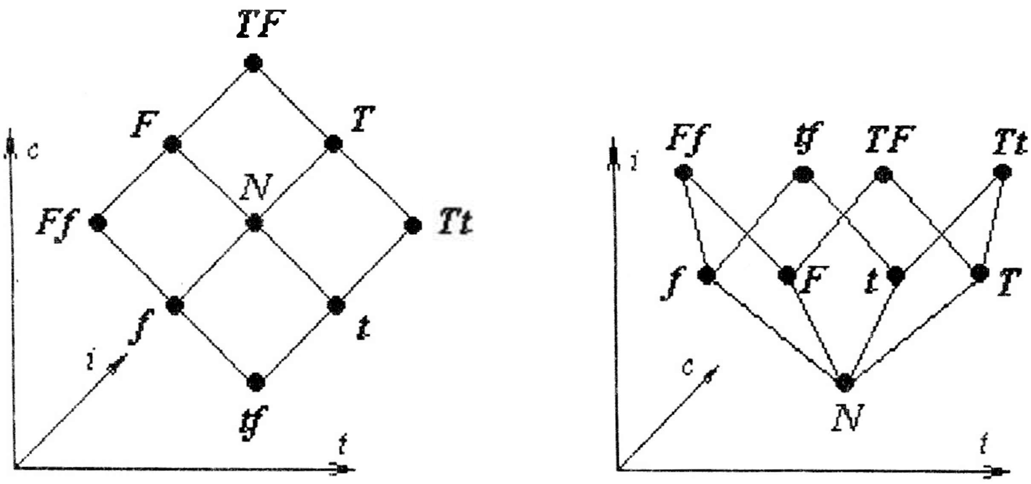


Рис. 4. Трирешетка *EIGHT*$_3$



a *b*

Рис. 5. Би-с-половиной-решетка $NINE_{2.5}$

Л.Эсакиа

МОДАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ II ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ И СИСТЕМА МАККИНСИ

Abstract. *We are going to discuss certain systems (K4.G and K4.Grz) of modal logic that are of special interest in connection with the study of the notions of provability in Peano Arithmetic. K4.G (respectively, K4.Grz) is the result of adjoint a modal version G of the second incompleteness theorem (respectively, the formula Grz) to the modal system K4.*

Вводные замечания

В нашем рассмотрении мы ограничимся системами модальной логики, которые прямо или косвенно связаны с Логикой доказуемости. Оговоримся, что это наше ограничение не следует ассоциировать со следующими словами Булоса, сказанными им в связи с известной критикой Куайна: *"Far from undermining Quine's critique of modality, Provability Logic provides an example of the interpretation of the box whose intelligibility is beyond question. Quine has never published an opinion on the matter, but it would be entirely consonant with the views he has expressed for him to hold that Provability Logic is what modal logicians should been doing all along"* ([1, с. XXXIII]).

Как мы знаем, гёделева модальная трансляция *Tr* погружает пропозициональное исчисление Гейтинга *HC* в классическую модальную систему Льюиса *S4*; иными словами, система *S4* является модальным компаньоном исчисления *HC*. По-видимому, первым не-льюисовым расширением системы *S4* была модальная система *S4.1*, сформулированная Маккинси [5] более чем полстолетия тому назад. Отметим, что Маккинси в этой работе предложил интересный метод синтаксического определения модальных операторов. На странице 83 он пишет: *"As the intuitive basis for the syntactical definition of possibility I take the position that to say a sentence is possible means that there exists a true sentence of the same form. Thus, for example, it would be said that the sentence, "Lions are indigenous to Alaska" is possible, because of the fact that the sentence, "Lions are indigenous to Africa" has the same form and is true".*

В дальнейшем было установлено [10], что система *S4.1* – это еще один модальный компаньон исчисления *HC* (при той же гёделевой погружающей процедуре). Это наблюдение уже не воспринималось как неожиданное, так как ранее, в 1967 г., Гжегорчик аксиоматически определил модальную систему *S4.Grz* и показал, что она является модальным компаньоном исчисления *HC*. Итак, мы имеем

Утверждение. (a) *HC* |- p ⇔ *S4* |- Tr(p) ([4])

(b) *HC* |- p ⇔ *S4.1* |- Tr(p) ([10])

(c) *HC* |- p ⇔ *S4.Grz* |- Tr(p) ([3])

Напомним, определения модальных систем *S4.Grz* и *S4.1*:

S4.Grz = *S4* + □(□(p → □p)→ p)→ □p

S4.1 = *S4* + □◊p→ ◊□p

Системы К4.G и К4.Grz

Несомненно, основным представителем доказуемостной логики следует считать модальную систему Гёделя–Лёба *GL*; напомним ее формулировку.

Определение. Модальная система ***GL*** получается из известной системы *К4* постулированием формулы Лёба □(□p → p)→ □p в качестве дополнительной аксиомы.

В 1976 г. Соловай определил доказуемостную интерпретацию формул системы *GL*, при которой модальность □ трактуется как «доказуемость в арифметике Пеано *PA*». Говоря более техническим языком, арифметической реализацией формул системы *GL* называется отображение *, сопоставляющее каждой атомной формуле p предложение p* арифметики Пеано, коммутирующее со всеми не-модальными связками и (□p)*=Bew(⟨p*⟩), где Bew(.) – стандартный предикат доказуемости арифметики *PA*.

Теорема 1. [10]. *Для каждой формулы p* GL |- p ⇔ (PA |- p* *при любой арифметической реализации * предложение p* доказуемо в PA*, т.е. PA |- p*) .

Вспомним [1], что предложение s арифметики Пеано *PA* называется *демонстрируемым* (Dem(⟨s⟩)), если s истинно и доказуемо. *"Since every provable sentence is true, the distinction between provability and demonstrability is one in «intension» only, but Löb's theorem shows that Bew(⟨s⟩)& s, the arithmetization of the assertion that s is demonstrable, is equivalent to the arithmetization Bew(⟨s⟩) of the assertion that s is provable only if s is actually provable"* ([1, p. 9]). Известно, что интерпретация модального оператора □ как Dem(.) адекватна для системы *S4.Grz*. Технически этот факт может быть выражен следующим образом. Обозначим через *Split* (=Splitting map) «расщепляющее» преобразование формул p модальной системы, состоящее в замене (=«расщеплении») каждой подформулы

формулы p вида $\Box q$ на $\Box q \wedge q$. Булосом, Голдблаттом и Кузнецовым было замечено, что

(1) S4.Grz $|$- p $\Leftrightarrow$ GL $|$- Split(p*).

Этот факт вместе с Теоремой 1, влечет вышеуказанную адекватность системы *S4.Grz*. Таким образом, система *S4.Grz* «совпадает» с фрагментом системы *GL*; а именно теоремы системы *S4.Grz* мы можем «отождествить» с теми доказуемыми в системе *GL* формулами, в которые модальный оператор $\Box$ имеет вхождения только вида $\Box p \wedge p$. Очевидно, что модальные выражения вида $\Diamond p$ преобразуются расщепляющим преобразованием в $\Diamond p \vee p$. Следует заметить, что в контексте временно́й логики с оператором F (Future) Прайор [6], говоря о модальных фрагментах временно́й логики, ссылается на Диодорово определение $\Diamond p$ как $p \vee Fp$, т.е. возможное – это то, что истино или будет истинным.

Следует отметить, что композиция гёделевой трансляции *Tr*: HC $\rightarrow$ S4.Grz и расщепляющего отображения Split: S4.Grz $\rightarrow$ GL дает нам в качестве следствия адекватную доказуемостную интерпретацию интуиционистской логики.

Модальную систему *K4* также следует отнести к системам доказуемостной логики: ее аксиомы

$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$,

$\Box p \rightarrow \Box\Box p$

и правило вывода

$p / \Box p$

являются модальными версиями основных требований Гильберта–Бернайса (*the Hilbert–Bernays Derivability conditions*), накладываемых на предикат доказуемости. Подчеркивая это обстоятельство, Сморинский в своей книге [8], посвященной доказуемостной логике, именует систему *K4* базисной модальной системой, обозначая ее *BML*, и замечает: "*...BML axiomatises those properties of Bew(.) that do not depend on the Diagonalisation Lemma*" ([8, p. 66]). Хотя модальная система *K4* корректна при доказуемостной интерпретации (т.е. *K4*$|$-p $\Rightarrow$ PA$|$-p* для любой арифметической реализации *), существуют модальные формулы p, не доказуемые в *K4*, любая арифметическая реализация которых доказуема в *PA*. Важным примером такой формулы является модальная версия

(G) $\neg\Box\bot \rightarrow \neg\Box\neg\Box\bot$

знаменитой второй Теоремы Гёделя о неполноте (из непротиворечивости следует недоказуемость непротиворечивости). Вспомним остроумную реакцию Андре Вейля на это обнаружение Гёделя:

"God exists, since Arithmetic is consistent; the Devil exist, since we cannot prove it"([9, p.110]).

Обозначим через *K4.G* модальную систему, полученную из *K4* постулированием формулы *G* в качестве дополнительной аксиомы: *K4.G = K4 + G*.

Наблюдение 1. *Доказуемость произвольной формулы p в системе S4.1 равносильна доказуемости расщепленной формулы Split(p) в системе K4.G ; символически:*

(2) S4.1 $\vdash p \Leftrightarrow$ *K4.G* $\vdash$ *Split(p).*

Отметим, что модальная система *K4.G* является строго промежуточной между системами *K4* и *GL*, т.е. $K4 \subset K4.G \subset GL$. Включение $K4.G \subseteq GL$ очевидно, так как подстановка в формулу Лёба $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ $\perp$ вместо p и применение правила контрапозиции дает нам формулу (G) $\neg\Box\perp \to \neg\Box\neg\Box\perp$. С другой стороны, в двухточечном *K4*-фрейме (W,R), где W = {x,y} и xRx, xRy, формула G верна, в то время как формула Лёба опровержима, что и дает нам правое собственное включение $K4.G \subset GL$. То же двухточечное множество W, но с отношением Q, таким, что xQy и yQy, является K4-фреймом, в котором формула G ложна; это обеспечивает собственность включения $K4 \subset K4.G$. Таким образом, модальная система *K4.G* позволяет анализировать модальную версию второй Теоремы Гёделя изолированно, не привлекая формулу Лёба.

Второе наше наблюдение касается модальной системы Гжегорчика. Как мы уже отмечали (см. соотношение (1) и комментарий к нему), расщепляющее преобразование *Split* вкладывает систему *S4.Grz* в систему Гёделя–Лёба *GL*. Обозначим через *K4.Grz* систему, полученную из *K4* постулированием формулы

(Grz) $\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to \Box p$

в качестве дополнительной аксиомы; символически: *K4.Grz = K4 + Grz*.

Наблюдение 2. *Для любой модальной формулы p справедливо соотношение:*

(3) *S4.Grz* $\vdash$ p $\Leftrightarrow$ *K4.Grz* $\vdash$ Split(p);

более того, модальная система K4.Grz является наименьшим нормальным расширением системы K4, для которого это соотношение справедливо.

Определим «внутри» модальной системы Гёделя–Лёба *GL* новый модальный оператор ∇, положив:

(A) $\nabla p := \neg\Box\perp \to p \wedge \Box p$.

Ограничившись языком, содержащим (коме булевых операторов) только новый модальный оператор ∇, определим модальную систему ***S*** следующим образом: для любой формулы p будем считать, что S |- p $\Leftrightarrow$ GL |- p.

Наблюдение 3. *В модальной системе S доказуемы все теоремы системы K4.Grz, не доказуема формула Лёба, хотя доказуема модальная версия G второй Теоремы Гёделя.*

Пусть теперь ***S**** – модальная система, полученная из *GL* тем же приёмом, но использующая вместо (A) определение

(A*) $\nabla p := (\Box\bot \to p)\wedge\Box p$.

Наблюдение 4. *В модальной системе S* доказуемы все теоремы системы K4.Grz, но не доказуемы ни формула Лёба, ни формула G.*

Учитывая, что в обоих системах новый модальный оператор ∇ «удовлетворяет требованиям», выраженным в аксиомах и правилах системы *K4* (т.е. требованиям Гильберта–Бернайса), обе системы *S* и *S** – арифметически корректны; при доказуемостной интерпретации модального оператора ∇ система *S* «допускает» вторую Теорему Гёделя, но «блокирует» Диагональную Лемму, в то время как в системе *S** «блокируется» и то и другое.

В Приложении мы представим некоторые соображения алгебраического характера, лежащие в основе этих наблюдений.

Приложение

В нескольких словах отметим топологическую мотивировку расщепляющего преобразования. Как известно, основной топологической операцией является операция предельного перехода, сопоставляющая подмножеству A топологического пространства X множество dA (*derived set*) всех предельных точек множества A. Вспомним, что точка $x\in X$ называется *предельной* точкой (*limit point*) множества A (т.е. $x\in dA$), если любая её окрестность U содержит точку $y\in A$, отличную от x. В терминах операции деривации d процедура топологического замыкания cA множества A определяется как присоединение к множеству A всех его предельных точек, т.е. $cA = A \cup dA$ (сравни с процедурой расщепления модальности $\Diamond$). Операция деривации d удовлетворяет условиям:

3. $d\varnothing=\varnothing$, $d(A\cup B)=dA\cup dB$, $ddA\subseteq A\cup dA$.

Алгебраическое рассмотрение этой топологической операции приводит к понятию алгебры с деривацией; вспомним, что алгебра $(\mathbf{B},\vee,\wedge,\neg,\mathbf{d})$ называется *модальной алгеброй*, если $(\mathbf{B},\vee,\wedge,\neg)$ – булева алгебра с наименьшим 0 и наибольшим 1 элементами, **d** операция, удовлетворяющая условиям нормальности и аддитивности, т.е.

4. $\mathbf{d}0=0$, $\mathbf{d}(a\vee b)=\mathbf{d}a\vee\mathbf{d}b$ для любых $a,b\in\mathbf{B}$.

Модальная алгебра $(\mathbf{B},\mathbf{d})$, удовлетворяющая условию $\mathbf{dd}a\leq a\vee\mathbf{d}a$, называется *алгеброй с деривацией* или *wK4*-алгеброй. Системой *wK4* была названа [12] ослабленная версия системы *K4*, а именно аксиома «транзитивности» $\Box p\to\Box\Box p$ системы *K4* была заменена на более слабую аксиому $p\wedge\Box p\to\Box\Box p$. Алгебраическими моделями этой системы, т.е. *wK4*-алгебрами являются алгебры с деривацией. На каждой модальной алгебре $(\mathbf{B},\mathbf{d})$ определим опреатор $\mathbf{C}$: $\mathbf{C}a= a\vee\mathbf{d}a$ для любого $a\in\mathbf{B}$. В [12] было отмечено, что опреатор удовлетворяет условиям Куратовского

(3) $\mathbf{C}0=0$, $a\leq\mathbf{C}a$, $\mathbf{CC}a=\mathbf{C}a$, $\mathbf{C}(a\vee b)=\mathbf{C}a\vee\mathbf{C}b$,

если и только если опреатор $\mathbf{d}$ является оператором деривации. Таким образом, с каждой *wK4* алгеброй (и тем более с каждой *K4*-алгеброй) ассоциируется алгебра с замыканием $(\mathbf{B},\mathbf{C})$, что и лежит в основе расщепляющих преобразований:

$S4 \vdash p \Leftrightarrow wK4 \vdash \mathrm{Split}(p)$ и $S4 \vdash p \Leftrightarrow K4 \vdash \mathrm{Split}(p)$;

заметим, что система *wK4* является наименьшей из нормальных расширений *K*-системы, для которых справедливы указанные эквивалентности.

Вернемся, однако, к системе Маккинси. Пусть $(\mathbf{B},\mathbf{C})$ – произвольная алгебра с замыканием (т.е. *S4*-алгебра) и определим, как обычно, дуальную операцию $\mathbf{I}$: $\mathbf{I}a=\neg\mathbf{C}\neg a$, $a\in\mathbf{B}$.

Лемма 1. *Семейство* $\mathbf{B}^*=\{a\in\mathbf{B}\colon \mathbf{IC}a\leq\mathbf{CI}a\}$ *образует подалгебру исходной алгебры и, следовательно, алгебра с замыканием* $(\mathbf{B}^*,\mathbf{C})$ *удовлетворяет условию Маккинси* $\mathbf{IC}a\leq\mathbf{CI}a$ *для любого* $a\in\mathbf{B}^*$. *Кроме того, все открытые элементы алгебры* $(\mathbf{B},\mathbf{C})$ *принадлежат* $\boldsymbol{B}^*$[11].

Известно, что алгебра $\mathbf{H}=\{\mathbf{I}a\colon a\in\mathbf{B}\}$ всех открытых элементов произвольной алгебры с замыканием $(\mathbf{B},\mathbf{C})$ образует алгебру Гейтинга. Нетрудно проверить, что любая алгебра Гейтинга изоморфна алгебре всех открытых элементов подходящей алгебры Маккинси. Эти замечания и Лемма 1 лежат в основе погружения $Tr\colon HC\to S4.1$ исчисления Гейтинга в систему Маккинси.

Теперь убедимся в справедливости соотношения:

(4) $S4.1 \vdash p \Leftrightarrow K4.G \vdash \mathrm{Split}(p)$.

($\Rightarrow$) Из вышеприведенных замечаний уже следует, что расщепления аксиом системы *S4* доказуемы в системе *wK4* (и тем более в системах *K4* и *K4.G*). Остается убедиться в выводимости в системе *K4.G* расщепленной версии $\mathrm{Split}(\Box\Diamond p\to\Diamond\Box p)$ аксиомы Маккинси $(\Box\Diamond p\to\Diamond\Box p)$. Пусть $(\mathbf{B},\mathbf{d})$ – *K4*-алгебра, удовлетворяющая алгебраическому эквиваленту $\mathbf{d}1\leq\mathbf{d}\neg\mathbf{d}1$ аксиомы *G* (модальность $\Diamond$

соответсвует оператору **d**). Заметим, что $\neg\mathbf{d}1 = (a\wedge\neg\mathbf{d}1)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}1)$ и, следовательно, $\mathbf{d}1 \le \mathbf{d}\neg\mathbf{d}1 \Leftrightarrow \neg\mathbf{d}1 \vee \mathbf{d}\neg\mathbf{d}1 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{C}(\neg\mathbf{d}1) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{C}((a\wedge\neg\mathbf{d}1)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}1)) = 1$ (1). Используя $\mathbf{C}a = a\vee \mathbf{d}a$ и $\mathbf{I}a=a\wedge \neg\mathbf{d}\neg a$, получаем:

(2) $\mathbf{IC}a \le \mathbf{CI}a \Leftrightarrow \mathbf{C}((a\wedge\neg\mathbf{d}\neg a)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}a)) = 1$; так как $\neg\mathbf{d}1 \le \neg\mathbf{d}a$ и $\neg\mathbf{d}1 \le \neg\mathbf{d}\neg a$ для любого $a \in \mathbf{B}$, получаем

$((a\wedge\neg\mathbf{d}1)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}1)) \le ((a\wedge\neg\mathbf{d}\neg a)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}a))$ и, следовательно,

(3) $\mathbf{C}((a\wedge\neg\mathbf{d}1)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}1)) \le \mathbf{C}((a\wedge\neg\mathbf{d}\neg a)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}a))$.

Из равенства (1), используя (3), получаем

$\mathbf{C}((a\wedge\neg\mathbf{d}\neg a)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}a)) = 1$, т.е. $\mathbf{IC}a \le \mathbf{CI}a$. Таким образом,

S4.1 |- p $\Rightarrow$ *K4.G* |- Split(p).

($\Leftarrow$) Пусть (W,R) – конечный транзитивный фрейм; нетрудно убедиться в равносильности следующих условий:

(а) аксиома (G) $\neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$ верна в Крипке фрейме (W,R);

(б) отношение достижиости R обладает следующим свойством:

$\forall x(\exists y(xRy) \Rightarrow \exists y(xRy \;\&\; \neg\exists z(yRz)))$. Допустим теперь, что формула p не выводима в *S4.1*. Ввиду финитной аппроксимируемости системы *S4.1* (см.[7]) существует конечное квази-упорядоченное множество (W,Q), опровергающее формулу p. Обозначим через MaxW множество всех максимальных точек фрейма (W,Q) (напомним, что точка $x \in W$ является максимальной точкой, если $\forall y(xQy \Rightarrow x = y\,)$). «Слегка» трансформируем отношение Q; точнее, определим новое отношение R следующим способом: (1) если $x \ne y$, то $xRy \Leftrightarrow xQy$; (2) если

$x=y$, то $xRx \Leftrightarrow xQx \;\&\; x\in \mathrm{MaxW}$. Легко убедиться, что Q совпадает с рефлексивным замыканием отношения R и R обладает свойством, отмеченным в пункте (б). Следовательно, формула Split(p) опровержима в (W, R). Контрапозиция дает нам

S4.1 |- p $\Rightarrow$ K4.G |- Split(p) и, следовательно,

S4.1 |- p $\Leftrightarrow$ K4.G |- Split(p). □

До перехода к комментариям, непосредственно относящимся ко второму нашему наблюдению, заметим, что система *K4.Grz* является строго промежуточной между *K4* и *GL*, т.е.

(5) *K4* $\subset$ *K4.Grz* $\subset$ *GL*.

Прежде всего убедимся, что *K4.Grz* $\subseteq$ *GL*, т.е. если *K4.Grz* |- p, то GL |- p. Вспомним, что *K4*-алгебра **(B,d)** является

(а) *GL*-алгеброй, если и только если для любого элемента $a\in\mathbf{B}$ справедливо равенство $\mathbf{d}a = \mathbf{d}(a\wedge\neg\mathbf{d}a)$ (дуальная форма формулы Лёба);

(б) *K4.Grz*-алгеброй, если и только если справедливо условие
$\mathbf{d}a \leq \mathbf{d}(a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a)$ (дуальная форма аксиомы Гжегорчика).

Лемма 2. *Каждая GL-алгебра является K4.Grz-алгеброй, т.е. условие (а) влечет условие (б).*

Доказательство. Ясно, что $\mathbf{d}a\wedge\neg a \leq \mathbf{d}a$; используя монотонность оператора $\mathbf{d}$, получаем $\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a) \leq \mathbf{dd}a$; но $\mathbf{dd}a \leq \mathbf{d}a$, следовательно, $\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a) \leq \mathbf{d}a$ и $\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a) \leq \neg\mathbf{d}a$; умножая обе части на a, получаем $a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a) \leq a\wedge\neg\mathbf{d}a$ и, следовательно,
$\mathbf{d}(a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a)) \leq \mathbf{d}(a\wedge\neg\mathbf{d}a)$. Наконец, используя (а), получаем
$\mathbf{d}a \leq \mathbf{d}(a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a)$. Итак, $K4.Grz \subseteq GL$. □

Легко проверить, что в двухточечном *K4*-фрейме (W, R), рассмотренном в конце предыдущего раздела, формула Лёба опровержима; следовательно $K4.Grz \subset GL$. Тут же заметим, что так как в том же фрейме (W, R) опровержима и формула G, то
$K4.Grz + G \subset GL$. Таким образом, обе рассматриваемые нами системы *K4.G* и *K4.Grz* - арифметически корректны.

Перейдем теперь к обоснованию второго наблюдения.

Лемма 3. *Следующие условия равносильны*:
(в) *алгебра* **(B,d)** *является K4.Grz-алгеброй,*
(г) *ассоциированная алгебра с замыканием* **(B,C)**
(*т.е. алгебра, в которой* $\mathbf{C}a = a \vee \mathbf{d}a$) *является S4.Grz-алгеброй.*

Доказательство. Фактически нам достаточно показать равносильность условий (в) $\mathbf{d}a \leq \mathbf{d}(a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a)$ и

(г) $\mathbf{C}a \leq \mathbf{C}(a\wedge\neg\mathbf{C}(\mathbf{C}a\wedge\neg a)$.

($\Leftarrow$) «Расщепим» условие (г) пошагово:

1. $\mathbf{C}a\wedge\neg a = \neg a\wedge(a \vee \mathbf{d}a) = \neg a\wedge\mathbf{d}a$
2. $a\wedge\neg\mathbf{C}(\mathbf{d}a\wedge\neg a) = a\wedge\neg((\mathbf{d}a\wedge\neg a) \vee \mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a)) =$
$= a\wedge\neg(\mathbf{d}a\wedge\neg a) \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a)) = a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a) \wedge (\neg\mathbf{d}a\vee a) =$
$= a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a)$; итак, условие (г) равносильно условию
(г*) $a \vee \mathbf{d}a \leq (a\wedge\neg\mathbf{d}\,(\mathbf{d}a\wedge\neg a)) \vee \mathbf{d}(a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a))$.

Используя монотонность и аддитивность оператора $\mathbf{d}$, получаем $\mathbf{d}a\vee\mathbf{dd}a \leq \mathbf{d}(a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a)) \vee \mathbf{dd}(a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a))$. Применяя аксиому *K4* $\mathbf{dd}a \leq \mathbf{d}a$, получаем $\mathbf{d}a \leq \mathbf{d}(a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a))$.

($\Rightarrow$) Заметим предварительно, что так как $\mathbf{d}a\wedge\neg a \leq \mathbf{d}a$, то $\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a) \leq \mathbf{dd}a \leq \mathbf{d}a$ и, следовательно, $\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a) \leq \mathbf{d}a$ и $\neg\mathbf{d}a \leq \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a)$. Умножив обе части на a, получаем

(д) $a \wedge\neg\mathbf{d}a \leq a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a)$. Условие (д) вместе с (в) дает
$\mathbf{d}a\vee(a \wedge\neg\mathbf{d}a) \leq (a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a)) \vee \mathbf{d}(a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a))$. Используя равенство $\mathbf{d}a\vee(a \wedge\neg\mathbf{d}a) = a \vee \mathbf{d}a$, получаем $a \vee \mathbf{d}a \leq (a\wedge\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a\wedge\neg a))$

$\vee$ **d**(a$\wedge\neg$**d**(**d**a$\wedge\neg$a)), т.е. условие (г*), которое, как отмечено выше, равносильно (г). □

В заключение дадим краткий комментарий к Наблюдениям 3 и 4.

Пусть задана GL-алебра (**B**,**d**); зафиксируем произвольный элемент e$\in$**B** и определим одноместный оператор

(+) $\mathbf{d}_e$a : = (a$\wedge$e) $\vee$ **d**a для любого a$\in$**B**.

Лемма 4. (1) *Алгебра (**B**, $\mathbf{d}_e$) является K4.Grz-алгеброй, причем операторы замыкания, ассоциированные с **d** и $\mathbf{d}_e$, совпадают, т.е.* a $\vee$ **d**a = a $\vee$ $\mathbf{d}_e$a *для любого a$\in$**B***;

(2) *Любая конечная K4.*Grz-алгебра *(**B**,**d'**) может быть получена из GL-алебры (**B**,**d**) указанным способом, т.е. для любого a$\in$**B** **d'**a = $\mathbf{d}_e$a при подходящем выборе e$\in$**B**;*

(3) Следствия выбора параметра таковы:

(а) *если* e = 0, *то операторы* **d** и $\mathbf{d}_e$ *совпадают;*

(б) *если* e $\neq$ 0 и e $\leq$ **d**1, *то в полученной алгебре* (**B**, $\mathbf{d}_e$) *верна формула G, но опровержима формула Лёба;*

(в) *если* e = 1, *то полученная алгебра* (**B**, $\mathbf{d}_e$) *является S4.Grz-алгеброй;*

(г) *если условие* e $\leq$ **d**1 *ложно, то в агебре* (**B**, $\mathbf{d}_e$) *опровержимы и формула Лёба и формула G.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boolos G.* On systems of modal logic with provability interpretations // Theoria. 1980. Vol. 46. P. 7-18.
2. *Boolos G.* The Logic of Provability. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
3. *Grzegorczyk A.* Some relations systems and the associated topological spaces // Fund.Math. 1967. Vol. 60. P. 223-231.
4. *Gödel K.* Eine Interpretation intuitionishen Aussagenkalkulus // Ergebnisse eines mathematischen Kolloqiums. 1933. Bd. S. 39-40.
5. *McKinsey J.C.* On the syntactical construction of systems of Modal logic // Journal of Symbolic Logic. 1945. Vol. P. 83-94.
6. *Prior A.* Past, Present and Future. Oxford: Clarendon Press, 1967.
7. *Segerberg K.* Decidability of S4.1 // Theoria. 1968. Vol. 34. P. 1-15.
8. *Smorinski C.* Self-Reference and Modal Logic. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
9. *Smullyan R.* Forever Undecided. Oxford: Oxford University Press, 1988.
10. Solovay R.M. Provability interpretations of modal logic // Israel Journal of Mathematics. 1976. Vol. 25. P. 287-304.
11. *Эсакиа Л.* К теории модальных и суперинтуиционистких систем // Логический вывод. М.: Наука, 1979.
12. *Эсакиа Л.* Слабая транзитивность – реституция // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001. С. 244-255.

J.-Y.Béziau

S5 IS A PARACONSISTENT LOGIC AND SO IS FIRST-ORDER CLASSICAL LOGIC*

Abstract. *We present and discuss the fact that the well-known modal logic S5 and classical first-order logic are paraconsistent logics.*

Quoi? quand je dis "Nicole, apportez-moi mes pantoufles,
et me donnez mon bonnet de nuit", c'est de la prose?
Par ma foi! Il y a plus de quarante ans que je dis de la prose sans que j'en
susse rien, et je vous suisle plus obligé du monde de m'avoir appris cela.
Molière, *Le bourgeois gentilhomme*

1. Introduction

A *paraconsistent negation* is a unary operator $\sim$ such that

(N) $a, \sim a \nvdash b$

(P) the operator $\sim$ has enough properties to be called a negation.

A *paraconsistent logic* is a logic with a paraconsistent negation.

The second property above is quite fuzzy, anyway there are in the litterature a bunch of operators that people agree to call paraconsistent negations, and consequently a bunch of logics which are called paraconsistent logics.

In this paper we will show that it is possible to define in *S5* (and in other logics such as classical first-order logic) a negation which can reasonably be considered as paraconsistent.

It seems that this simple fact has not yet been noticed, although there are people making investigations in paraconsistent logic since more than 30 years. For literature about paraconsistent logic the reader may consult [23. [24. [2.. He will see that such fact is not mentioned. The aim of this paper is to show that this fact is highly relevant and can be a new starting point for research in paraconsistent logic as well as in modal logic.

2. Basic properties of the paraconsistent negation of *S5*

Consider the standard language of *S5* with $\neg$, $\Diamond$, $\Box$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$. We define the operator $\sim$ as follows:

$$\sim a =_{Def} \Diamond\neg a$$

* This work was supported by a grant of the Swiss National Science Foundation.

As in *S5* we have (about *S5* the reader may consult classical texts such as [19., [11., [10.):

$$a, \Diamond\neg a \nVdash b$$

therefore ~ obeys the property (N) above.

Regarding the property (P), it is easy to check that the following are theorems of *S5*:

$$a \vee \sim a$$

$$(a \rightarrow \sim a) \rightarrow \sim a$$

$$(\sim a \rightarrow a) \rightarrow a$$

And we have the following theorems but not their converses:

$$(a \rightarrow b) \rightarrow (\sim a \vee b)$$

$$\sim\sim a \rightarrow a$$

$$\sim (a \wedge b) \rightarrow (\sim a \vee \sim b)$$

$$\sim (\sim a \wedge \sim b) \rightarrow (a \vee b)$$

$$\sim (a \wedge \sim b) \rightarrow (\sim a \vee b)$$

$$\sim (\sim a \wedge b) \rightarrow (a \vee \sim b)$$

$$\sim (\sim a \vee b) \rightarrow (a \wedge \sim b)$$

$$\sim (a \vee b) \rightarrow (\sim a \wedge \sim b)$$

$$\sim (a \vee \sim b) \rightarrow (\sim a \wedge b)$$

$$\sim (\sim a \vee \sim b) \rightarrow (a \wedge b)$$

As a matter of comparison, the four last are not theorems of da Costa's well-known paraconsistent logic *C1* (about *C1* see [12. [3.).

Furthermore, we have:

$$\sim (a \wedge \sim a)$$

This may seem strange, because sometimes this formula is considered as a formulation of the principle of non contradiction and sometimes paraconsistent logic is roughly speaking characterized as a logic in which this principle does not hold. However there are various paraconsistent logics studied in the litterature in which this formula holds. This is the case for example of paraconsistent logics defined with three-valued matrices where the third value 1/2 is taken as distinguished, like D'Ottaviano-da Costa's logic *J3* and Priest's logic *LP* (see [16., [22.). In these logics the negation of 1/2 is1/2 and the conjunction of 1/2 and 1/2 is1/2. It is easy to see then that the value of $\sim (a \wedge \sim a)$ is always distinguished. For paraconsistentists like Priest the value 1/2 is interpreted as true-false. Therefore this is an example of an intuitive interpretation under which the above formula is a paraconsistent tautology.

The definition of paraconsistent negation has been improved by Urbas [27. by substituing the property (NN) below for the property (N).

(NN) $a, \sim a \nVdash b$, for any schema b which is not tautological.

Urbas's definition (*strict paraconsistency*) permits to exclude out of the sphere of paraconsistency logics like Johansson's minimal logic where (N) holds but in which we have:

$a, \sim a \nVdash b$

As we can see the paraconsistent negation of *S5* is a strict paraconsistent negation.

Another good feature is that the bi-implication ($\leftrightarrow$) defined in the usual way is a congruence relation in S5, in particular we have:

$$\text{if } |- a \leftrightarrow b \text{ then } |- \sim a \leftrightarrow \sim b$$

This is not the case of the bi-implication of da Costa's logic *C1*, logic in which it is in fact not possible to define a non trivial congruence relation, as proved by Mortensen [20..

Like *C1* the logic *S5* has two negations, a classical one ($\neg$) and a paraconsistent one ($\sim$), and in *S5* it is possible to define, like in *C1*, the classical negation with the help of the paraconsistent one (and other connectives).

3. Classical first-order logic is paraconsistent

According to a theorem of Wajsberg (see [29.), it is possible to translate *S5* into the fragment of monadic classical first-order logic with only one variable and vice versa. Following the idea of this translation, we can define a paraconsistent negation into this logic like this:

$$\sim \phi =_{Def} \exists x \neg \phi$$

Due to Wajsberg's theorem, this negation has exactly the same properties as the one presented in the preceding section.

It was difficult to construct the first paraconsistent logics. Some people, like Popper, argued that it would not be possible to build a paraconsistent negation (see [21., [9., [26.). Various techniques more or less artificial were used. So it is an astonishing fact that a paraconsistent negation, and rather a good one, is already built in the most famous and recognized logic, classical first-order logic.

In view of this fact, one can argue that paraconsistent logic is not a deviant logic, an abnormal and monstrous creature threatening the very basis of rationality, democracy and monotheism. If paraconsistent logic is such a monster then it is rooted in what is considered as the core of rationality which is therefore deeply rotten and has to be clean up. Maybe one has to consider another first-order logic. But if we take for example intuitionistic first-order logic, it is easy to see that the same definition in monadic intuitionistic first-order logic with one variable leads also to a paraconsistent negation.

In the same way that Mr. Jourdain of Moliere's *Bourgeois gentilhomme* was making prose without knowing it, we can say that Mr. Frege and his successors were doing paraconsistent logic without knowing it. And if one argues that the founder of first-order logic is Frege or Peirce, one could argue therefore that Frege or Peirce is the real founder of paraconsistent logic. Or even Aristotle, if one considers that monadic first-order logic with one variable is already contained within syllogistic. This kind of strange considerations are just to show that it is difficult to argue that the creators of paraconsistent logic were people who developed logics containing implicitly a paraconsistent negation. The real creators of paraconsistent logic are people, like Jaskowski and da Costa, who were trying to construct explicit paraconsistent negations. Of course they could have realized that a paraconsistent negation was already at hand inside classical first-order logic, instead of building other negations in more or less artificial ways. (About the history of paraconsistent logic, see for example [15.).

4. Extracting paraconsistent logics from modal logics

Consider the function * from the set of formulas $\boldsymbol{G}$ built with $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ into the set of formulas $\boldsymbol{F}$ built with $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\Diamond$, $\Box$ defined by:

$a^* = a$, if a is atomic

$(a \oplus b)^* = a^* \oplus b^*$, where $\oplus$ is $\vee$, $\wedge$ or $\rightarrow$

$(\sim a)^* = \Diamond\neg(a)^*$

We call *PS5* the logic $<\boldsymbol{G}; \sim; \vee; \wedge; \rightarrow; \vdash_{PS5}>$ such that:

$$T \vdash_{PS5} a \text{ iff } T^* \vdash_{S5} a^*$$

The decidability of *PS5* is a direct consequence of the decidability of *S5*.

It easy to define a semantics for this logic. Given a Kripke structure K with a universal relation of accessibility, we define the standard connectives as usual and the paraconsistent negation with the following condition:

$\sim a$ is false in the world W iff a is true in every world of K

A more difficult problem is how to axiomatize *PS5* (in a non trivial way). We have solve this problem in [5., presenting a sound and complete Hilbert-type system for *PS5*.

We can generalize the above idea and given a modal logic

$$M = <\boldsymbol{F}; \neg; \Diamond; \Box; \vee; \wedge; \rightarrow; \vdash_M>$$

we can define the paraconsistent logic PM associated to it as the logic

$$PM = <G; \sim; \vee; \wedge; \rightarrow; \vdash_{PM}>$$

such that

$$T \mid\!-_{PM}\, a \text{ iff } T^* \mid\!-_{M}\, a^*$$

If M is decidable of course PM will be decidable, but it is not clear that the axiomatizability of M entails the axiomatizability of PM. Another point is that if one can reasonably expect, due to the basic properties of modalities, the negation ~ of PM to be a *paraconsistent* negation in the sense that it obeys the condition (N), it is not clear whether it would fullfil the condition (P), i.e. if it could properly be called a paraconsistent *negation*.

In Kripke semantics for intuitionistic logic, instead of the above semantical condition for negation, we have:

~ a is true in the world W iff a is false in every world V accessible from W

where the accessibility relation is a quasi-ordering. Another difference is that the implication is also defined with the help of the accessibility relation. One may want to consider the dual of this semantics and see if it defines the same logic as the sequent calculus dual of intuitionistic logic *LDJ* [28. or the algebraic dual of it [25.. Anyway it is for sure a paraconsistent logic. (Such semantics may have some connections with the one given by Baaz in [1. for da Costa's logic C_ω which has an intuitionistic implication.)

If we now consider the same condition as the one for intuitionistic negation but with a universal relation of accessibility, we have:

~ a is true in the world W iff a is false in every world of K

This condition is *dual* to the condition for the paraconsistent negation in *PS5* and together with the standard conditions for other connectives generates a paracomplete logic dual to the paraconsistent logic *PS5*. The paracomplete negation defined with this condition corresponds in *S5* to *not possible* ($\neg\Diamond$) like in Godel's translation of intuitionistic logic into *S4* (see [18.).

5. Generating modal logics from paraconsistent logics

Considering the converse procedure of the preceding section, given a paraconsistent logic P we can define a modal logic *MP* associate to it, that is to say a modal logic where $\Diamond\neg$ behaves as ~ in P, $\neg$ being the classical negation. For example one can consider *MC1*, *MJ3*, *MLP*, *MLDJ*, modal logics associated respectively to the paraconsistent logics *C1*, *J3*, *LP*, *LDJ*.

The question will be then to know in which sense the modal operators generated by this means correspond intuitively to possibility and necessity. In the case of *C1*, we will get a modal logic, which is not a classical modal logic (in the sense of [11.). For example we will have:

$$a \leftrightarrow (a \wedge a)$$

but not

$$\Diamond\neg a \leftrightarrow \Diamond\neg(a \wedge a)$$

It would be also interesting to consider what kind of modal logics are associated, according to our definition, to De Morgan's paraconsistent logics, i.e. logics where are valid the laws:

$$\sim\sim a \leftrightarrow a$$

$$\sim (a \wedge b) \leftrightarrow (\sim a \vee \sim b)$$

$$\sim (a \vee b) \leftrightarrow (\sim a \wedge \sim b)$$

etc.

6. Prospects

This interplay between modal and paraconsistent logics seems promising both from the technical and philosophical sides.

Technically speaking, modal logic and paraconsistent logics are closely tied: they are both the study of unary connectives which differ from affirmation (a) or classical negation ($\neg a$). Of course intuitively modalities such as possibility and necessity must have different properties than paraconsistent negations. But the modal logician is led for technical reasons related to the systematization of his work to consider other unary operators than possibility, necessity, impossibility and contingency. When one speaks of irreducibility of modalities, one speaks about unary connectives which are not interdefinable, including such connective as $\Diamond\neg$ which turns out to be a paraconsistent negation.

Modal logicians have developed techniques such as Kripke semantics which have applications going far beyond the study of traditional modalities. For example Kripke semanticscan be used to define intuitionistic *negation*. As it is known intuitionistic negation is not truth-functional in the sense that it cannot be characterized by a finite matrix. There are some paraconsistent negations which are defined by finite matrices. But it will be interesting to see how we can distinguish these truth-functional paraconsistent negations from those who are not. According to Dugundji's theorem, *S5* (and other modal logics like *S4*, etc.) cannot be characterized by a finite matrix (see [17.). This result can be applied to the paraconsistent negations of these logics.

On the other hand paraconsistent negations defined via modalities are algebraizable using the standard methods of algebraization of modal logic. And this is an interesting feature because paraconsistent logic has not yet been treated in a satisfactory way by algebraic methods.

Generating modal logics in which there placement theorem does not hold, from paraconsistent logics like C1, applying semantical methods such as the theory of valuation [13. [14., can also be interesting because it seems that the idea of intentional operator is not compatible with such theorem (see [4.).

From the *philosophical* point of view it seems that the modal approach to paraconsistent negation defining such negation as *possibly not* can be fruitful. It is an intuitive idea, which can be exemplified and justified in many ways. Of course one has to examine if this really makes sense and if there are not technical results which go against this intuitive interpretation of paraconsistent negation. But in general it seems that such definition fits well with the intuition. For example let us examine the interesting case of double negation.

In natural language double negation is often used to emphasize a sentence in such away as if it was stronger than simple affirmation, as in the following example:

It is not true that God does not exist.

In a logic like *S5* in which we have

$$\sim\sim a \to a$$

but not

$$a \to \sim\sim a$$

double (paraconsistent) negation is really stronger than simple affirmation. The reason why in *S5*, is that double (paraconsistent) negation means necessity, as we can see:

In *S5*, we have:

$$\Diamond\Box a \leftrightarrow \Box a$$

and considering that:

$$\Diamond \sim \Diamond \sim a \leftrightarrow \Diamond\Box a$$

we have:

$$\sim\sim a \leftrightarrow \Box a$$

Therefore the above double negated sentence means from the point of view of the paraconsistent negation of *S5*:

God necessarily exists.

References

1. *Baaz M.* Kripke semantics for da Costa's paraconsistent logic C_ω // Notre Dame Journal of Formal Logic, 1986. Vol. 27. P. 523-527.
2. *Batens D., Mortensen C., Priest G.* and *Van Bendegem J.P.* (eds). Frontiers of paraconsistent logic. Research Studies Press: Baldock, 2000.
3. *Béziau J.-Y.* Nouveaux resultats et nouveau regard sur la logique paraconsistante C1 // Logique et Analyse. 1993, Vol. 36. P. 45-58.

4. *Béziau J.-Y.* Du Pont's paradox and the problem of intensional logic // Logica'93 - Proceedings of the 8th International Symposium, P. Kolar and V. Svodoba (eds.). Filosofia. Prague, 1994. P. 62-65.
5. *Béziau J.-Y.* The paraconsistent logic Z (A possible solution to Jaskowski's problem) // Lecture presented at the Jaskowski Memorial Symposium, Torun 1998, submitted for publication.
6. *Béziau J.-Y.* Classical negation can be expressed by one of its halves // Logic Journal of the Interest Group in Pure and Applied Logics. 1999. Vol. 7. P. 145-151.
7. *Béziau J.-Y.* What is paraconsistent logic? // [2]. P. 95-111.
8. *Béziau J.-Y.* The nameless corner of the square of opposition, paraconsistent logic and modal logic // To appear.
9. *Bobenrieth A.* Inconsistencias por que no? Cocultura: Bogota, 1995.
10. *Bull R.*, Segerberg K. Basic modal logic // Handbook of Philosophical Logic. D.M. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Dordrecht, Kluwer: 1984. P. 1-88.
11. *Chellas B.F.* Modal logic. Cambridge University Press: Cambridge, 1980.
12. *Da Costa N.C.A.* Calculs propositionnels pour les systemes formels inconsistants // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris. 1963. Vol. 257. P. 3790-3792.
13. *Da Costa N.C.A., Béziau J.-Y.* La theorie de la valuation en question // Proceedings of the Ninth Latin American Symposium on Mathematical Logic. Universidad del Sur, Baiha Blanca, 1993. P. 95-104.
14. *Da Costa N.C.A., Béziau J.-Y.* Theorie de la valuation // Logique et Analyse. 1994. Vol. 37. P. 95-117.
15. Da Costa N.C.A., Béziau J.-Y., Bueno O. Paraconsistent logic in a historical perspective // Logique et Analyse, 1995, 38. P. 111-125.
16. *D'Ottaviano I.M.L., Da Costa N.C.A.* Sur un probleme de Jaskowski // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris. 1970. Vol. 270. P. 1349-1353.
17. *Dugundji J.* Note on a property of matrices for Lewis and Langford's calculi of propositions // Journal of Symbolic Logic. 1940. Vol. 5. P. 150-151.
18. *Godel K.* Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkuls // Ergebnisse eines matematischen Kolloquiums. 1933. Vol. 4. P. 34-40.
19. *Hugues G.E., Cresswell M.J.* An introduction to modal logic. Methuen, London, 1968.
20. *Mortensen C.* Every quotient algebra for C1 is trivial // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1981. Vol. 21. P. 694-700.
21. *Popper K.R.* Are contradictions embracing? // Mind. 1943. Vol. 52. P. 47-50.
22. *Priest G.* Logic of paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219-241.
23. *Priest G.* Paraconsistent logic // To appear in Handbook of Philosophical Logic. 2nd ed., Kluwer, Dordrecht.
24. *Priest G., Routley R.* and *Norman J.* (eds) Paraconsistent logic: Essays on the inconsistent. Philosophia. Munchen, 1989.

25. *Sette A.M., Alves E.H., Queiroz G.S.* Brouwerian algebras and paraconsistent logic // To appear.
26. *Slater B.H.* Paraconsistent logics? // Journal of Philosophical Logic. 1995. Vol. 24. P. 451-454.
27. *Urbas I.* Paraconsistency // Studies in Soviet Thought. 1990. Vol. 39. P. 343-354.
28. *Urbas I.* Dual-intuitionistic logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1996, Vol. 37. P. 440-451.
29. *Wajsberg M.* Ein erweiteter Klassenkalkul // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1933. Vol. 40. P. 113-126.

A.L.Blinov

NESTED SUPERVALUATIONS FOR FUTURE INDEFINITE CONTINGENT VAGUENESS

Abstract. *It seems that some English sentences naturally invite irreducibly multiple application of the method of supervaluations. In this paper, I use the machinery and ideology of Game-Theoretical Semantics (GTS)*[1] *to investigate this phenomenon and trace some of its implications, both on the logical and linguistic sides.*

1. Supervaluational chance-prenexed games for formal languages

Supervaluational semantic games[2] are chance-prenexed, that is, there is exactly one occurrence of chance move in the game-tree, and this occurrence opens the whole game.

Chance-prenexedness of supervaluational games seems crucial for preservation of classical logical truths by the method of supervaluations. Game-theoretically speaking, classicality is secured by the fact that all the subgames that are immediately governed by the initial chance move are standard classical semantic games; given any classical logical truth τ and any reference-point α, such a game, $\Gamma(\tau,\alpha)$, would necessarily possess at least one winning strategy for the Verifier - that much is guaranteed (i) by the classicality of each immediate subgame of $\Gamma(\tau,\alpha)$ (in particular, by the absence of chance moves from it), and (ii) by the fact that classical games yield the same bivalent results as standard Tarski-type recursive semantics. But if, in the structure of the game, there happen to be some further, non-initial occurrences of chance moves, then those occurrences would be bound to occur within immediate subgames, which could destroy the guarantee of there being any winning strategies for the Verifier.

On the first glance, though, it seems that we have no reasons to worry about such a possibility - it seems to have been ruled out, at least for such formal supervaluational languages as Thomason's[3] L_T, by a remarkable rule that governs construction of semantic games for such languages. Take two arbitrary sentences of L_T, A and B, and form their

---

[1] Detailed accounts of GTS are available, e.g., in Hintikka and Sandu (1997), Hintikka and Sandu (1991, pp.15-37), Hintikka and Kulas (1983, pp.1-31), and Hintikka's contributions to Saarinen (1979).

[2] Cf. Blinov (1994).

[3] For further details on L_T, see Thomason (1970).

disjunction, $A \vee B$. To construct the supervaluational semantic game for $A \vee B$, relative to a reference-point α, on the basis of games for A and B, one should proceed in a very special way: one should, first, remove the initial chance moves from both $\Gamma(A; \alpha)$ and $\Gamma(B; \alpha)$; second, for any history $h \in H_\alpha$, construct the classical $\Gamma \vee$ subgame $\Gamma(A \vee B; \alpha, h)$ on the basis of two classical subgames $\Gamma(A; \alpha, h)$ and $\Gamma(A; \alpha, h)$; third, re-attach the initial chance move to the family of newly constructed classical subgames of the form $\Gamma(A \vee B; \alpha,h)$. One should, so to say, first, uncork the semantic bottles of $\Gamma(A; \alpha)$ and $\Gamma(B; \alpha)$, second, mix their contents in the disjunctional way, and then re-cork the new bigger bottle of the family of $\Gamma(A \vee B; \alpha,h)$ by the chance-move cork again. For the sake of a technical label, I will dub this procedure the *Uncork-Re-Cork Rule* of construction of supervaluational semantic games.

Thus, it is exactly the Uncork-Re-Cork Rule that secures the uniqueness and initiality of the chance move in supervaluational games, that is, their *chance-prenexedness*. In the absence of such special construction rule, we would proceed in a way that is usual for standard, non-supervaluational languages, namely, we would take $\Gamma(A; \alpha)$ and $\Gamma(B; \alpha)$ and merge them into one new semantic game by simply hooking the game-trees of both $\Gamma(A; \alpha)$ and $\Gamma(B; \alpha)$ on to the two respective nodes of the initial disjunction move. Of course, the resulting game, $\Gamma^*(A \vee B; \alpha)$, would *not* be chance-prenexed. There would be *two* occurrences of chance moves in it: one in the subgame $\Gamma(A; \alpha)$, another, in the subgame $\Gamma(B; \alpha)$. Both would be *non-initial*. The initial move would be disjunctional, that is, played by the Verifier.

Suppose now that B is $\neg A$. There is no guarantee whatsoever that the Verifier has a winning strategy in $\Gamma^*(A \vee \neg A; \alpha)$. In fact, it is easy to see that in a case when both A and $\neg A$ are (super)truth-value gaps at α, the Verifier has no winning strategies in $\Gamma^*(A \vee \neg A; \alpha)$. Thus, there is no preservation of classical logical truths by supervaluational games without the Uncork-Re-Cork Construction Rule.

2. Formal language L_T: Game rule for chance moves

A construction of a semantic game for a formal-language sentence is determined by the totality of game rules for that language.

For example, if a sentence S has the form S_1 & S_2, the construction of $\Gamma(S)$ begins with an application of (G.&), the game rule for &:

(G.&) If the game has reached a sentence of the form F_1 & F_2, then the Falsifier chooses F_i ($i = 1$ or 2). Then the game is continued with respect to the chosen conjunct F_i.

One striking dissimilarity of the chance-move game rule, as compared with (G.&) and its like, is that information about the form of the input sentence which has been the crucial part of the application conditions for the latter rule is just irrelevant for the former: the form can be any. But if it is not the form of the input sentence that triggers the application of the chance-move rule, then what does? It seems that at this stage one can come up with two different answers:

Answer 1: Rigid position approach. The two crucial facts about chance moves in semantic games for L_T are that, for any sentence S in L_T, (i) there is exactly one chance move in the semantic game $\Gamma(S)$; (ii) the unique chance move is positionally rigid – it always opens the game. That much is pre-determined by the standard interpretation of supervaluations for L_T, which, in turn, results from our intention to maintain the classicality of the logic of L_T. Thus, the application of the chance-move rule for L_T should be triggered by (i) and (ii). That is, the application conditions of the chance-move game rule should be something like this: 'A semantic game for a sentence S that is to be evaluated on its own right (not as a subformula of some other sentence) always contains exactly one chance move, and that chance move always opens the game'[4].

Answer 2: Reference point approach. The method of supervaluations is inherently connected with evaluation of sentences at *incomplete* models. The main function of supervaluational chance moves consists in resolving the incompleteness of the model which constitutes the input reference point for the sentence under evaluation. Correspondingly, the application of the chance-move rule should be triggered by the nature of the input reference-point: 'Whenever the input reference-point is an incomplete model *m*, the Chance should resolve the whole of the relevant incompleteness by choosing one of the complete (or, more generally, less incomplete) models that participate in *m*.' Since, as far as L_T is concerned, the only incomplete models that can be input reference-points are times, we can be even more specific: 'Whenever the input reference-point is a time α, the Chance should resolve the incompleteness of α, as instantiated by H_α, by choosing a history from H_α.'

Note that even though the Answers 1 and 2 use two different methods of determining the application conditions of the chance-move rule, still when applied to such a language as L_T, the results of the two methods coincide, namely, both determine that in a semantic game for a sentence of L_T there should be exactly one chance move, and it should open the game.

---

[4] Cf. the statement of the game rule (G.*Init*) in Blinov (1994, p.323).

3. Natural languages: Game rules and ordering principles

The process of constructing the semantic game associated with a natural-language sentence S is governed by (i) game rules; (ii) ordering principles. Roughly speaking, the role of game rules in the game construction is to assign game moves to various lexical items occurring in S, while the role of ordering principles is to determine the order of application of game rules.

Summing up, the game rules for natural languages are *lexicalist* in that their application is triggered by a *lexical item* occurring in the sentence at issue, while the order of application of various rules is governed by the ordering principles.

Need the chance-move rule for a natural language be an exception to the general lexicalist approach to game-rules formation? Need, that is, its application conditions for a language like English remain insensitive to the lexical composition of the sentence at issue? I believe they need not. It is, I think, a *prima facie* plausible conjecture that if we assess an English sentence as calling for the method of supervaluations, then, more often than not, we are able to locate the lexical source of the call.

It is, most graphically, the case with vagueness as treated supervaluationally: vague predicates and names are represented, in a sentence, by so many occurrences of the corresponding words. Another lexicalist-friendly example is future contingents. Their natural English marker is the lexical item 'will'[5]. Here is the questionnaire format for a supervaluational chance-move game rule for a fragment of English in which the sources of supervaluations are limited to vagueness and future contingents.

A	Application conditions	1	The form of the input sentence	'X - Y -W' where 'Y' is an occurrence of a supervaluational word or phrase, that is, a vague predicate or name, or else the occurrence of 'will'
		2	The format of the input reference point	time α

[5] Admittedly, the lexical and/or morphological markers of the past and present tense call for supervaluations just as much. The difference, though, is that, assuming that the only branching is toward the future, supervaluating a (purely) past-tensed or present-tensed sentence is bound to be a trivial procedure in that all the constituent bivalent valuations would collapse into one.

B	Prescriptive content of the rule	1	The player who performs the move	the Chance
		2	What the player does to perform the move	He picks up a precisification of time α, as determined by the item Y, or else a history *h* from H_{α}, according to whether the triggering word Y is a vague lexical unit or the word 'will'
C	Output results	1	The form of the output sentence	same as the input sentence
		2	The output reference point	a precisification of time α or else $\langle\alpha, h\rangle$

Figure 1

Comment 1. The most salient feature of the lexicalist chance-move rule, is that the supervaluational incompleteness of the input reference-point is to be resolved step by step rather that at one initial swoop. The number of steps equals to the number of applications of the chance-move rule, which in turn depends on the number of the occurrences of chance-move-triggering lexical items in the sentence at issue.

Comment 2. Obviously, we should provide, in addition to the above game rule, some ordering principles that would endow the applications of the chance-move rule with an intuitively justifiable degree of priority before the applications of the rest of the game rules. Ideally, all the applications of the chance-move rule are to precede the applications of other rules. Such an order would perfectly correspond to the nature of the method of supervaluations as usually conceived by its practitioners. But we have no *a priori* guarantee that such an ideal is compatible with the totality of independent evidence on the semantic structure of English sentences. In fact, I will be arguing for their incompatibility. So, if my argument is correct, it would imply that the above-mentioned ideal stands in need of some qualifications.

4. Testing the three approaches: Future indefinite contingent vagueness

Now, my main point concerning the chance-move rule for natural languages is that neither the Answer 1 nor the Answer 2 (cf. Section 2 above) will do; each of them is bound to clash with some basic semantic intuitions of ours. We should adopt, instead, the lexicalist approach to fixing the chance-move rule, which, thus, need not be an exception to the overall spirit of GTS for natural languages.

Consider sentence (1):

(1) Sometimes in the future, the number of trees in Brisbane will be even.

The adverbial phrase 'sometimes in the future' determines an existential quantification over times. The vagueness of Brisbane's boundaries is contingent, in (1), not only upon the choice of a possible future, but also upon the choice, triggered by the indefinite temporal adverb, of a time in that future:

(1_{st}) (1) is (super)true at α iff $(\forall h \in H_\alpha)(\exists \beta \in h)[\alpha < \beta$ *and* $(\forall p_{B,\beta})$['The number of trees in Brisbane is even' is (bivalently) true at the complete model $\beta(p_{B,\beta})$]

The two universal quantifiers in (1_{st}) mark the two occurences of the Chance move in $\Gamma[(1)]$, and the fact that an occurrence of existential quantifier found its way between the two seems to make the problem of equivalently transforming $\Gamma[(1)]$ into a chance-prenexed game seems insurmountable. Just there seems to be no way of transforming, in (1_{st}), the $\forall\exists\forall$-prefix into a $\forall\forall\exists$-prefix.

Thus, $\Gamma[(1)]$ cannot be reduced straightforwardly, if at all, to a chance-prenexed semantic game. One of the two sources of supervaluations involved in the semantics of (1), under the preferred reading, seems to be inherently *nested* in the depths of the associated semantic game.

This implies, in particular, that the rigid position and the reference-point approaches are hopeless, as regards sentence (1) and its like. The semantics of such sentences forces us to alternate supervaluational moves that partially resolve the incompleteness of the initial model with moves of a different nature that involve the Verifier's choices.

5. Summing up

On the logician's side, the most deplorable implication of the fact that natural languages like English harbour sentences that appeal to nested supervaluations is that the classicality of the issuing logic gets endangered.

Let S be (1), and consider $S \vee \neg S$:

(2) Either it is the case that sometimes in the future, the number of trees in Brisbane will be even or it is not the case that sometimes

in the future, the number of trees in Brisbane will be even.

Given the semantic game $\Gamma[(1)]$, how should we construct $\Gamma[(2)]$? Presumably, we should stick by the Uncork-Re-Cork Construction Rule (cf. Section 2 above) whose very point has been to secure the preservation of classicality.

But the trouble is that in this case we are just not in a position to follow the Uncork-Re-Cork Rule in its entirety. For suppose that we have (i) removed the initial chance moves from both $\Gamma(S; \alpha)$ and $\Gamma(\neg S; \alpha)$; (ii) for any history $h \in H_\alpha$, constructed the subgame $\Gamma(S \vee \neg S; \alpha, h)$ on the basis of $\Gamma(S; \alpha, h)$ and $\Gamma(\neg S; \alpha, h)$; (iii) re-attached the initial chance move to the family of newly constructed subgames of the form $\Gamma(S \vee \neg S; \alpha, h)$. Still, we have *not* removed (and how could we?) the nested supervaluational moves in the process; the subgames $\Gamma(S; \alpha, h)$ and $\Gamma(\neg S; \alpha, h)$ are *not* bivalent; they each contain a chance move, and a non-initial one, at that. And this may become fatal for the (super)truth of $S \vee \neg S$ at α. In fact, it is straightforward to see that in a situation in which neither the Verifier nor the Falsifier has a winning strategy in $\Gamma(S; \alpha, h)$[6], neither of them has a winning strategy in $\Gamma(\neg S; \alpha, h)$. Consequently, $S \vee \neg S$ is not (super)true at α.

On the side of linguistical semantics, though, the news that some natural-language sentences feature nested supervaluations need not be a bad one, if the natural-language semanticist's main task is to faithfully characterise whatever semantic phenomena may be "out there" in the language under scrutiny. If my observations and argumentation are correct, there is a semantic framework that proved to be adequate in treating (or at least in describing) nested supervaluations in English, namely GTS with its lexicalist approach toward constructing the structured semantic representations of English sentences.

REFERENCES

1. *Blinov A.* Semantic Games with Chance Moves // Synthese. 1994. Vol. 99. P. 311-327.
2. *Fraassen B.C. van*, Singular Terms, Truth-Value Gaps and Free Logic // Journal of Philosophy. 1966. Vol. 63. P. 481-495.
3. *Fraassen B.C. van.* Presupposition, Implication and Self-reference // Journal of Philosophy. 1968. Vol. 65. P. 136-152.
4. *Fraassen B.C. van.* Formal Semantics and Logic // London: Macmillan, 1971.
5. *Hintikka J., Kulas J.* The Game of Language Studies // Game-Theoretical Semantics and its Applications. Dordrecht: D. Reidel, 1983.

---

[6] This is the case when at every future time □□ h 'The number of trees in Brisbane is even' is a gap.

6. *Hintikka J., Sandu G.* On the Methodology of Linguistics: A Case Study // Oxford: Blackwell, 1991.
7. *Hintikka J., Sandu G.* Game-Theoretical Semantics // J. van Benthem and A. ter Meulen (eds.), Handbook of Logic and Language. Amsterdam: Elsevier, and Cambridge, MA: MIT Press, 1997.
8. *Hodges W.* Elementary Predicate Logic // D.Gabbay and F.Guenthner (eds.), Handbook of Philosophical Logic. Dordrecht: D. Reidel, 1983. Vol. 1 P.1-131.
9. *Saarinen E.* (ed.). Game-Theoretical Semantics // Dordrecht: D. Reidel, 1979.
10. *Thomason R.H.* Indeterminist Time and Truth-Value Gaps // Theoria. 1970. Vol. 36. P. 264-281.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Научное издание

Логические исследования
Вып. 9

Утверждено к печати
Институтом философии РАН

Зав. редакцией *Г.И. Чертова*
Редактор *Е.А. Жукова*
Художественный редактор *Т.В. Болотина*

Компьютерный набор выполнен
в Институте философии РАН

Компьютерная верстка
С.А. Павлов

ЛР № 020297 от 23.06.1997

Подписано к печати 03.10.02. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$
Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Усл.печ.л. 20,0. Усл.кр.-отт. 20,3. Уч.-изд.л. 20,6
Тираж 420 экз. Тип. зак. 3659

Издательство "Наука"
117997 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
Internet: www.naukaran.ru

Санкт-Петербургская типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12